

# Introduction à la commande des systèmes

Céline Casenave

September 10, 2012

## Contents

<b>1</b>	<b>Représentation d'état</b>	<b>2</b>
1.1	Définitions . . . . .	2
1.2	Cas linéaire . . . . .	3
1.3	Schéma fonctionnel ou schéma bloc . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Controllabilité</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Lois de commande</b>	<b>11</b>
3.1	Commande en boucle ouverte . . . . .	11
3.2	Commande en boucle fermée ou rétroaction . . . . .	11
3.3	Stabilisation par placement de pôles . . . . .	13
3.3.1	Principe . . . . .	14
3.3.2	Résultats d'existence et d'unicité . . . . .	14
3.3.3	En pratique . . . . .	14
3.4	Régulation autour d'un point d'équilibre . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Exemples</b>	<b>17</b>
4.1	Le chemostat . . . . .	17
4.2	Coccinelles et pucerons [1] . . . . .	17
4.3	Modèle de pêche . . . . .	18
4.4	Modélisation physiologique [1] . . . . .	19
4.5	Modèle de population . . . . .	20
4.6	Chaine de réservoirs [2] . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Exercices</b>	<b>22</b>
5.1	Un schéma bloc... . . . .	22
5.2	Des coccinelles et des pucerons . . . . .	23
5.3	Modèle de pêche . . . . .	23
5.4	Régulation d'une espèce . . . . .	24
5.5	Temps de réponse . . . . .	28
5.6	Une chaine de réservoirs . . . . .	29

# 1 Représentation d'état

## 1.1 Définitions

On considère un système d'entrées  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  et de sorties  $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)^T$ .

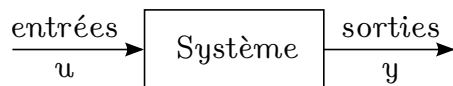


Figure 1: Système d'entrées  $u$  et de sorties  $y$ .

Les systèmes étudiés peuvent être décrits par des modèles de types différents (EDO, EDP, modèles stochastiques, ...) qui sont fonction de la nature même du système, mais également de l'objectif de la modélisation (analyse, simulation, contrôle, etc.). On s'intéresse ici aux systèmes dynamiques pouvant être décrits par un nombre fini d'équations différentielles ordinaires du premier ordre, c'est à dire des systèmes dits "différentiels", de la forme<sup>1</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \vdots = \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m), \end{cases} \quad (1)$$

avec une condition initiale  $x_0 = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0))^T$ , les sorties pouvant être exprimées par une relation de la forme suivante:

$$\begin{cases} y_1 = h_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ y_2 = h_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \vdots = \vdots \\ y_p = h_p(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m). \end{cases} \quad (2)$$

De manière plus concise, on écrira, pour  $x_0$  donné:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}} \quad (3)$$

avec  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)^T$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$  et  $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)^T$ .

### Terminologie

- le modèle (3) est appelé **modèle d'état** ou **représentation d'état**.

---

<sup>1</sup> $\dot{x}_i$  représente la dérivée de la variable  $x_i$  par rapport au temps  $t$ , aussi notée  $\frac{dx_i}{dt}$ .

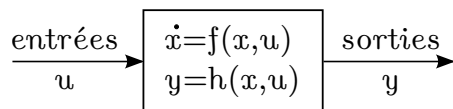


Figure 2: Système différentiel d'entrées  $u$  et de sorties  $y$ .

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des **variables d'état**: à un instant  $t$  donné,  $x(t)$  caractérise entièrement le système. En effet, la connaissance de  $x(t)$  et la donnée des entrées  $u$  sur l'intervalle  $[t, T]$  suffisent à déterminer, via le système (3), l'évolution de  $x$  sur l'intervalle  $[t, T]$ . On peut dire que l'état d'un système à un instant  $t$  représente la mémoire minimale du passé nécessaire à la détermination du futur.
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des **entrées** ou encore **commandes**. Elles représentent l'influence du monde extérieur sur le système considéré. C'est via ces variables que l'on va pouvoir chercher à contrôler le système. On supposera que  $u$  est une fonction continue par morceaux et bornée de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^m$ .
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des **sorties**.

**Remarque 1** •  $x$ ,  $y$  et  $u$  sont des fonctions du temps, à valeurs respectivement dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^m$ . La dépendance en temps sera parfois marquée explicitement, et parfois omise.

- Etant donnée une condition initiale  $x_0 = x(t_0)$ , et pour une entrée  $u$  donnée, la solution  $x(t)$  pour  $t \geq t_0$  de (3) est appelée **trajectoire** du système. On suppose qu'une telle trajectoire existe toujours, est unique et continue.
- Un même système admet une infinité de représentations d'état, chacune associée à un choix de variables d'état.
- Le choix des variables d'état est arbitraire. Cependant, en fonction de l'objectif de la modélisation, certains choix peuvent s'avérer plus judicieux que d'autres (maintien de la signification physique des variables par exemple...).
- Le nombre minimal de variables d'états nécessaires à la caractérisation du système correspond à l'**ordre du système**.
- Lorsque l'entrée  $u$  du système peut être librement choisie, on dit que le système est **commandé**, car on peut contrôler l'allure de la trajectoire  $x$  en jouant sur le choix de  $u$ .

## 1.2 Cas linéaire

Un cas particulier de modèles d'état sont les modèles d'état linéaires, c'est à dire des modèles de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \end{cases} \quad (4)$$

avec  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ .

C'est une classe de modèles importante, car plus simple à étudier que les modèles non linéaires et pour laquelle de nombreux outils (d'analyse, de commande, etc...) ont été développés.

Ces outils peuvent être également utilisés dans le cas non linéaire, après linéarisation autour d'un point d'équilibre<sup>2</sup> du modèle considéré.

En effet, soit  $\bar{x}$  un point d'équilibre de (3) pour un  $\bar{u}$  donné, et  $B$  une boule ouverte de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  centrée en  $(\bar{x}, \bar{u})$ . On suppose  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\bar{B}$ , c'est à dire dérivable par rapport à  $x_i$  et  $u_j$  pour tout  $i = 1 : n$ ,  $j = 1 : m$  et de dérivées partielles continues. La formule de Taylor à l'ordre 1 nous donne alors, pour tout  $(\delta x, \delta u)$  tel que  $(\bar{x} + \delta x, \bar{u} + \delta u) \in B$ :

$$f(\bar{x} + \delta x, \bar{u} + \delta u) = f(\bar{x}, \bar{u}) + J_{f,x}(\bar{x}, \bar{u})\delta x + J_{f,u}(\bar{x}, \bar{u})\delta u + R_1(\delta x, \delta u), \quad (5)$$

où  $J_{f,x}(\bar{x}, \bar{u})$  est la matrice jacobienne de  $x \mapsto f(x, u)$  en  $(\bar{x}, \bar{u})$ , c'est à dire la matrice:

$$J_{f,x}(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f_1(\bar{x}, \bar{u}) & \dots & \partial_{x_n} f_1(\bar{x}, \bar{u}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_n(\bar{x}, \bar{u}) & \dots & \partial_{x_n} f_n(\bar{x}, \bar{u}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (6)$$

$J_{f,u}(\bar{x}, \bar{u})$  est la matrice jacobienne de  $u \mapsto f(x, u)$  en  $(\bar{x}, \bar{u})$ , c'est à dire la matrice:

$$J_{f,u}(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial_{u_1} f_1(\bar{x}, \bar{u}) & \dots & \partial_{u_m} f_1(\bar{x}, \bar{u}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{u_1} f_n(\bar{x}, \bar{u}) & \dots & \partial_{u_m} f_n(\bar{x}, \bar{u}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (7)$$

et  $R_1(\delta x, \delta u)$  est un "reste", qui est négligeable devant  $\|(\delta x, \delta u)\|$ , ce que l'on note également  $R_1(\delta x, \delta u) = o(\|(\delta x, \delta u)\|)$ , c'est à dire:

$$\lim_{\|(\delta x, \delta u)\| \rightarrow 0} \frac{R_1(\delta x, \delta u)}{\|(\delta x, \delta u)\|} = 0. \quad (8)$$

Comme  $f(\bar{x}, u) = 0$ , et si l'on considère des  $\delta x$  et  $\delta u$  suffisamment petits, on obtient alors l'approximation linéaire du système, donnée par:

$$\begin{cases} \dot{\delta x} &= J_{f,x}(\bar{x}, \bar{u})\delta x + J_{f,u}(\bar{x}, \bar{u})\delta u, \\ y &= h(\bar{x} + \delta x, \bar{u} + \delta u). \end{cases} \quad (9)$$

### 1.3 Schéma fonctionnel ou schéma bloc

Les systèmes dynamiques sont souvent représentés graphiquement via des **schémas fonctionnels**, encore appelés **schémas blocs**.

Un schéma fonctionnel est un graphe dont les éléments de base sont des blocs entrée-sortie, reliés entre eux par des arcs orientés (flèches). On peut distinguer plusieurs types d'éléments dans un graphe fonctionnel:

<sup>2</sup>Rappel: pour une entrée  $\bar{u}$  donnée,  $\bar{x}$  est un point d'équilibre du système  $\dot{x} = f(x, u)$  si  $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ .

- les blocs dynamiques, qui impliquent des opérateurs dynamiques, comme par exemple l'intégrateur,
- les blocs statiques, représentation la relation statique (fonctionnelle) entre entrées et sorties,
- les éléments logiques, comme les sommateurs ou comparateur,
- les arcs, qui relient entre eux les différents blocs et qui sont orientés (flèches).

Les éléments les plus utilisés sont donnés en figure 3. Dans le cas d'un système différentiel à  $n$  variables d'état, il y aura nécessairement  $n$  blocs de type intégrateur dont les sorties correspondent aux variables d'état.

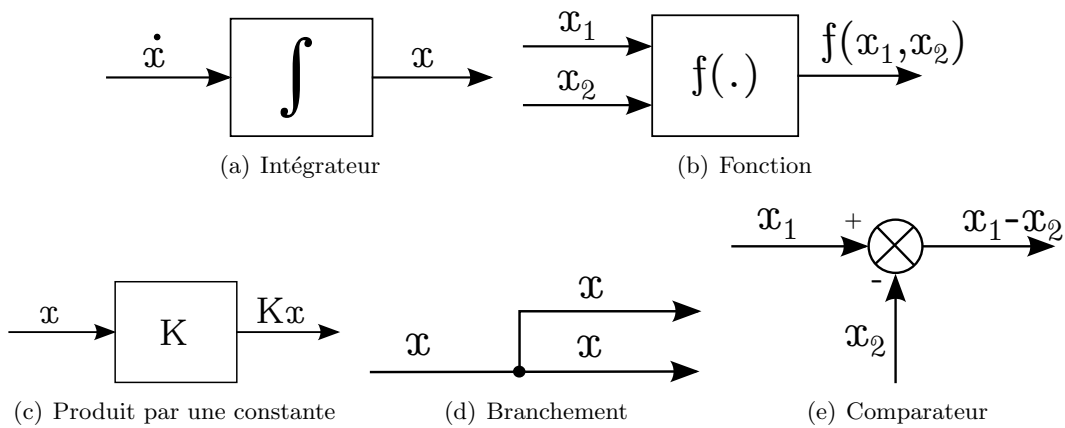


Figure 3: Exemples d'éléments de schémas fonctionnels

**Exemple 2** Les schémas fonctionnels des systèmes (3) et (4) sont donnés en figures 5 et 4 respectivement.

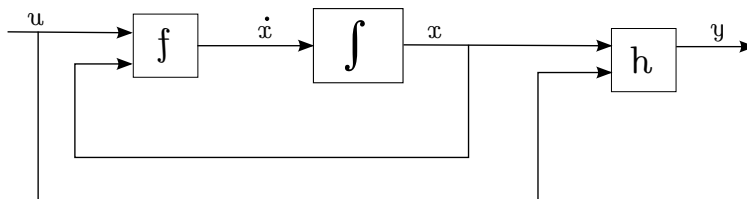


Figure 4: Schéma bloc du système différentiel non linéaire (3)

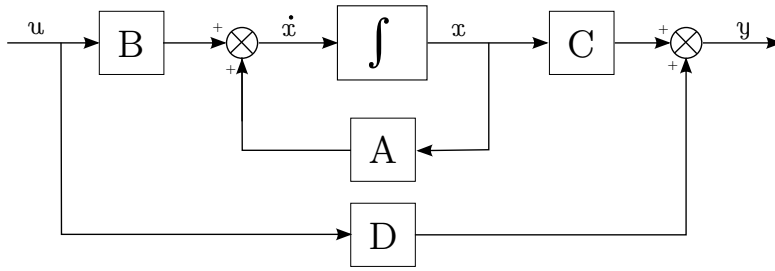


Figure 5: Schéma bloc du système différentiel linéaire (4)

## 2 Contrôlabilité

L'objectif principal de l'automatique est d'imposer un comportement dynamique spécifique à un système en jouant sur la commande  $u$ : on dit alors que l'on commande ou contrôle le système. On peut par exemple chercher à stabiliser un système instable, à amener une quantité à une valeur désirée, à suivre une trajectoire, etc.

Avant de chercher une commande  $u$  permettant de réaliser un objectif, il faut d'abord savoir si elle existe. C'est ce que l'on cherche à savoir lorsqu'on étudie la contrôlabilité d'un système.

**Définition 3** *Le système (3) est dit **contrôlable** (ou **commandable**) dans  $\mathcal{X}$  si, pour tout états  $x_0, x_1$  de  $\mathcal{X}$ , il existe un temps fini  $T > 0$  et une commande  $\tilde{u} : t \in [0, T] \mapsto \tilde{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  continue par morceaux, telle que la solution  $x(t)$  de (3) sur  $[0, T]$  pour  $u = \tilde{u}$  et  $x(0) = x_0$  vérifie  $x(T) = x_1$ .*

Dans le cas linéaire, il existe un critère bien pratique pour s'assurer de la contrôlabilité d'un système:

**Theorem 4 (Critère de contrôlabilité de Kalman)** *Le système linéaire (4) est contrôlable si et seulement si la **matrice de contrôlabilité** (ou de **commandabilité**) de Kalman:*

$$C = [B | AB | \dots | A^{n-1}B] \quad (10)$$

*est de rang  $n$ . On dit alors que la paire  $(A, B)$  est contrôlable.*

**Preuve.** Pour démontrer le résultat, on a besoin du théorème de Cayley-Hamilton qui s'énonce de la manière suivante:

**Theorem 5 (Théorème de Cayley-Hamilton)** *Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$  et:*

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (11)$$

*son polynôme caractéristique. Alors:*

$$\mathcal{P}(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = O_n. \quad (12)$$

**Retour à la preuve:**

La solution  $x$  du système  $\dot{x} = Ax + Bu$ , pour la condition initiale  $x(t_0) = x_0$ , est donnée par:

$$\forall t > t_0, x(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (13)$$

Etant donné  $x_1$ , on cherche  $u$  et  $T$  tels que  $x(T) = x_1$ .

Sans perte de généralités, on suppose que  $x_0 = 0$ .

Soit  $C(t) = e^{A(T-t)}B$  et  $\mathcal{G} = \int_{t_0}^T C(\tau)C^T(\tau)d\tau$  deux matrices. On suppose que  $\mathcal{G}$  est inversible. Alors, si on pose:

$$u = B^T e^{A(T-t)}\mathcal{G}^{-1}x_1, \quad (14)$$

on a:

$$\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}BB^T e^{A(T-\tau)}\mathcal{G}^{-1}x_1d\tau = \mathcal{G}\mathcal{G}^{-1}x_1 = x_1. \quad (15)$$

Il nous reste donc à montrer que  $\mathcal{G}$  inversible si et seulement si la matrice de commandabilité de Kalman  $\mathcal{C}$  est de rang  $n$ .

- Montrons la première implication par l'absurde:  $\mathcal{G}$  inversible  $\Rightarrow \text{rang}(\mathcal{C}) = n$ .  
On suppose que  $\text{rang}(\mathcal{C}) < n$ . Alors les colonnes de  $\mathcal{C}$  ne sont pas indépendantes: chaque colonne peut être exprimée comme combinaison linéaire des autres, ce qui s'écrit encore: il existe un vecteur non nul  $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  tel que  $v^T\mathcal{C} = 0 \iff v^T A^i B = 0, \forall i = 0 : n - 1$ .  
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, toutes les puissances de  $A$  supérieures ou égales à  $n$  peuvent s'exprimer comme combinaison linéaire des  $A^i, i = 1 : n - 1$ . Comme  $v^T A^i B = 0, \forall i = 0 : n - 1$ , on a alors  $v^T A^i B = 0, \forall i \in \mathbb{N}$ .  
On a alors, du fait de la définition d'une exponentielle de matrice<sup>3</sup>:

$$v^T C(t) = v^T e^{A(T-t)}B = v^T \sum_{k \geq 0} \frac{A^k (T-t)^k}{k!} B = 0. \quad (16)$$

Par conséquent,  $v^T \mathcal{G} = \int_{t_0}^T v^T C(t)C^T(t)dt = 0$ , c'est à dire que  $\mathcal{G}$  n'est pas inversible.

- Montrons la seconde implication, toujours par l'absurde:  $\text{rang}(\mathcal{C}) = n \Rightarrow \mathcal{G}$  inversible.  
On suppose donc que  $\mathcal{G}$  n'est pas inversible. Donc il existe un vecteur non nul  $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  tel que  $v^T \mathcal{G} = 0$ . On a alors:

$$v^T \mathcal{G} v = \int_{t_0}^T v^T C(t)C^T(t)v dt = 0, \quad (17)$$

---

<sup>3</sup>Par définition, l'exponentielle d'une matrice carrée  $A$  est définie par:  $e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ .

qui, puisque  $v^T C(t)C^T(t)v > 0$ , entraîne  $v^T C(t) = 0$  pour tout  $t \in [t_0, T]$ . Or, d'après (16):

$$v^T C(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{(T-t)^k}{k!} v^T A^k B = 0 \Rightarrow v^T A^k B = 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (18)$$

d'où  $v^T C = 0$ , c'est à dire  $\text{rang}(C) < n$ .

□

Toujours dans le cas linéaire, on montre également que la controlabilité du système est équivalente à l'existence d'une représentation d'état de forme particulière, appelée "forme canonique de Brunovski".

**Proposition 6** Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$  inversible, dont le polynôme caractéristique<sup>4</sup> s'écrit:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0. \quad (19)$$

Le système linéaire mono-entrée ( $m = 1$ )  $\dot{x} = Ax + Bu$  est contrôlable si et seulement si il existe une transformation d'état  $\phi : x \mapsto Qz$ , avec  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , telle que le système se récrive sous la forme suivante:

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u \quad (20)$$

avec:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Cette représentation est appelée **forme canonique de Brunovski**.

La matrice  $Q$  est définie à partir de  $A$  et de  $B$  comme suit. En notant  $q_j$  la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $Q$ , on a la récurrence suivante:

$$q_n = B, \quad q_{n-j} = Aq_{n-j+1} + a_{n-j}q_n, \quad \forall j = 1 : n-1. \quad (22)$$

**Preuve.** Soit  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  inversible et  $z$  tel que  $x = Qz$ . On a:

$$\dot{x} = Ax + bu \iff Q\dot{z} = AQz + Bu \iff \dot{z} = Q^{-1}AQz + Q^{-1}Bu. \quad (23)$$

---

<sup>4</sup>Rappel: le polynôme caractéristique d'une matrice carrée  $A$  est le polynôme  $\mathcal{P}$  défini par:  $\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  où  $I$  est la matrice identité. Les racines du polynôme caractéristique de  $A$  sont égales aux valeurs propres de  $A$ .



On cherche  $Q$  telle que:

$$Q^{-1}AQ = \tilde{A} \Leftrightarrow AQ = Q\tilde{A} \text{ et } Q^{-1}B = \tilde{B} \Leftrightarrow B = Q\tilde{B}. \quad (24)$$

Notons  $q_j$ ,  $\tilde{a}_j$  et  $\tilde{a}_{ij}$  la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $Q$ , la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $\tilde{A}$ , et le coefficient de  $\tilde{A}$  de la  $j^{\text{ème}}$  colonne et la  $i^{\text{ème}}$  ligne:

$$Q = [q_1 | \dots | q_n], \tilde{A} = [\tilde{a}_1 | \dots | \tilde{a}_n] = [\tilde{a}_{ij}]. \quad (25)$$

On a:

$$B = Q\tilde{B} = [q_1 | \dots | q_n] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = q_n, \quad (26)$$

et

$$AQ = Q\tilde{A} \iff Aq_j = Q\tilde{a}_j, \forall j = 1 : n \quad (27)$$

$$\iff Aq_j = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij}q_i, \forall j = 1 : n, \quad (28)$$

qui, du fait de la forme particulière de  $\tilde{A}$ , donne:

$$Aq_1 = -a_0q_n \quad (29)$$

$$Aq_j = q_{j-1} - a_{j-1}q_n, \forall j = 2 : n. \quad (30)$$

Choisissons comme vecteurs colonnes de  $Q$  les vecteurs définis par (26,30), c'est à dire:

$$\begin{aligned} q_n &= B, \\ q_{n-1} &= Aq_n + a_{n-1}q_n = AB + a_{n-1}B \\ q_{n-2} &= Aq_{n-1} + a_{n-2}q_n = A^2B + a_{n-1}AB + a_{n-2}B \\ &\vdots \\ q_1 &= Aq_2 + a_1q_n = Aq_2 + a_1B. \end{aligned} \quad (31)$$

Ces vecteurs sont tous des combinaisons linéaires des vecteurs  $\{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\}$ , qui, comme la paire  $(A, B)$  est contrôlable (par hypothèse), sont indépendants. Par conséquent, les vecteurs  $q_i$  définis par (31) sont eux aussi indépendants et forment donc une base de  $\mathbb{R}^n$ .

Il ne manque plus qu'à regarder si la relation (29) est bien vérifiée elle aussi, auquel cas la transformation  $x = Qz$ , avec  $Q$  défini par (31), permet bien d'obtenir la forme canonique de Brunovski.

Calculons donc  $Aq_1$ ; on a:

$$Aq_1 = A^2q_2 + a_1AB \quad (32)$$

$$= A^2(Aq_3 + a_2q_n) + a_1AB = A^3q_3 + a_2A^2B + a_1AB \quad (33)$$

$$\dots \quad (34)$$

$$= A^nq_n + a_{n-1}A^{n-1}B + \dots + a_1AB. \quad (35)$$

Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a:

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0I, \quad (36)$$

d'où:

$$Aq_1 = A^n q_n - (-a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A)B = A^n B - (A^n + a_0I)B = -a_0B. \quad (37)$$

□

**Corollaire 7** *Les matrices  $A$  et  $\tilde{A}$  ont le même spectre, c'est à dire les même valeurs propres et donc le même polynôme caractéristique.*

**Preuve.** On démontre ici le résultat dans le cas où  $A$  est diagonalisable. Il existe alors une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telle que  $A = PDP^{-1}$ . On a donc:

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ = Q^{-1}PDP^{-1}Q = \tilde{P}D\tilde{P}^{-1}, \quad (38)$$

avec  $\tilde{P} = Q^{-1}P$  inversible. Donc  $\tilde{A}$  est diagonalisable, avec la même matrice diagonale  $D$ : elle a donc les même valeurs propres que  $A$ . □

**Proposition 8** *Le polynôme caractéristique d'une matrice  $\tilde{A}$  de la forme (21), est donné par:*

$$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0. \quad (39)$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda I_n - \tilde{A}_n) &= (a_{n-1} + \lambda) \times \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ (0) & & & \lambda \end{bmatrix} + \det(\tilde{M}_{n-1}(\lambda)) \\ &= (a_{n-1} + \lambda)\lambda^{n-1} + \det(\tilde{M}_{n-1}(\lambda)), \end{aligned}$$

avec:

$$\tilde{M}_{n-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-2} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

De la même manière, on montre que:

$$\det(\tilde{M}_{n-1}(\lambda)) = a_{n-2}\lambda^{n-2} + \det(\tilde{M}_{n-2}(\lambda)). \quad (41)$$

On obtient ensuite le résultat par récursion, en utilisant le fait que  $\det(\tilde{M}_0(\lambda)) = a_0$ . □

### 3 Lois de commande

Une fois que l'on s'est assuré de l'existence d'une commande  $u$ , on s'intéresse au problème de sa conception, de son design. Plusieurs stratégies de commande sont envisageables: on distingue notamment les lois de commande en boucle ouverte et en boucle fermée.

#### 3.1 Commande en boucle ouverte

**Définition 9** Une *commande en boucle ouverte* (ou *contrôle en boucle ouverte*) est une application  $u : t \mapsto c(t)$ ; bien choisie, elle peut permettre de réaliser un objectif donné, à condition que le système soit bien connu, que le modèle soit fiable (voir parfait), et qu'il n'y ait aucun imprévu.

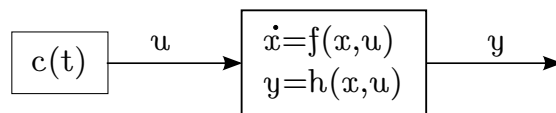


Figure 6: Commande en boucle ouverte d'un système différentiel d'entrées  $u$  et de sorties  $y$ .

**Exemple 10 Remplissage d'un réservoir:** on s'intéresse au problème du remplissage d'un réservoir de volume connu  $V$  (par exemple une chasse d'eau, ou un réservoir d'eau pour l'irrigation). Pour remplir le réservoir, on dispose d'une entrée (robinet) de débit variable  $d$ . A l'instant  $t_0$ , le réservoir est vide, et on souhaite le remplir. Pour atteindre l'objectif, il suffit d'ouvrir le robinet (à fond si l'on souhaite que le réservoir se remplisse le plus vite possible) le temps nécessaire pour que le réservoir soit rempli. Si  $d$  est le débit volumique, c'est à dire le volume d'eau fourni par unité de temps, et si on appelle  $d_{max}$  la valeur maximale du débit, alors il faudra ouvrir le robinet pendant  $T = \frac{V}{d_{max}}$ . La commande  $u = d$  à appliquer est donc donnée par  $u = d_{max} 1_{[t_0, t_0 + \frac{V}{d_{max}}]}$ .

**Remarque 11** La commande boucle ouverte proposée permet de remplir le réservoir au volume souhaité, mais uniquement dans le cas où il n'y a aucun aléa, et où le système est parfaitement connu. Par exemple, si le réservoir a une fuite, ou si il y a une petite erreur sur la valeur du débit maximal, l'application de cette commande en boucle ouverte ne conduira pas exactement au volume souhaité. C'est pourquoi on utilise des commandes en boucle fermée qui peuvent être robustes aux aléas, incertitudes et erreurs de modélisation.

#### 3.2 Commande en boucle fermée ou rétroaction

**Exemple 12 Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation** Considérons maintenant le cas d'un réservoir d'eau pour l'irrigation. Le réservoir doit être maintenu à un volume constant  $V_c$ , pour satisfaire les besoins en eau des agriculteurs qui viennent

se servir dans ce réservoir. Pour remplir le réservoir, on dispose de deux sources: l'eau des nappes fréatiques et l'eau de pluie. La quantité d'eau de pluie qui tombe ne peut être contrôlée et n'est pas prévisible alors que la quantité d'eau pompée dans les nappes fréatiques peut être contrôlée via le débit de pompage  $d$ : ce sera l'entrée, ou commande,  $u$  de notre système. Dans ce cas, on s'aperçoit qu'il est impossible de proposer "à l'avance", une stratégie de pompage dans la nappe fréatique, puisque cela dépendra de la quantité de pluie tombée! Il faut alors passer par une rétroaction, ou commande en boucle fermée, comme illustré dans la suite.

**Définition 13** • Une **commande en boucle fermée** (ou **contrôle en boucle fermée**), aussi appelée **rétroaction** ou **feedback**, est une application  $u : t \mapsto R(x(t), y(t))$  (voir figure 7).

- Si  $u(t) = R(x(t))$  (respectivement  $u(t) = R(y(t))$ ), on parlera de **retour d'état** (respectivement **retour de sortie**).
- Si  $R$  admet une expression analytique, on parlera de **retour** ou **commande statique**,
- Si  $R$  n'est déterminée que via la résolution d'une équation dynamique, par exemple de la forme différentielle  $\dot{u} = r(x, y, u)$ , on parlera de **retour** ou **commande dynamique**.

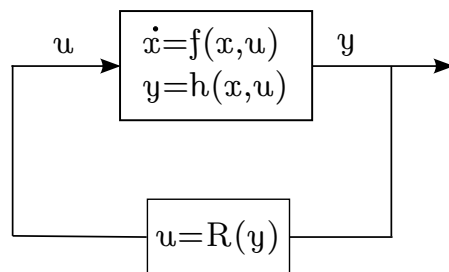


Figure 7: Commande en boucle fermée (retour de sortie) d'un système différentiel d'entrées  $u$  et de sorties  $y$ .

En utilisant une commande en boucle fermée, on décide d'appliquer une commande qui dépend de l'état courant (ou de la sortie) du système. On réajuste en fait la commande en fonction des informations que l'on récupère (via l'état ou la sortie) au cours du temps, ce qui permet de rectifier le comportement dans le cas d'événements imprévus par exemple.

**Exemple 14 Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation (suite)** Dans ce cas, on comprend bien que la quantité d'eau que l'on va pomper dans la nappe fréatique va dépendre du volume d'eau déjà présent dans le réservoir. Si on prend comme variable

d'état du système le volume d'eau dans le réservoir, on va donc faire un retour d'état. On suppose que l'on peut mesurer la hauteur d'eau  $h$  dans le réservoir et que l'on connaît l'air de la base  $b$  du réservoir, de sorte que le volume soit directement déduit de la hauteur d'eau mesurée par la relation  $V = b \times h$ . On suppose également que l'on remplit le réservoir à une période définie durant laquelle personne ne peut prélever d'eau (durant la nuit par exemple). Pendant le remplissage, on va donc avoir une équation d'état de la forme:

$$\dot{V} = d + p, \quad (42)$$

où  $d$  est le débit de pompage dans la nappe fréatique, et  $p$  est le débit d'entrée dû aux précipitations. On suppose que  $p \ll d$ .

Une loi de commande boucle fermée que l'on peut proposer est la suivante:

$$d = \alpha(V_c - b \times h). \quad (43)$$

En supposant que la mesure de la hauteur soit exacte, et en négligeant l'apport dû aux précipitations durant le pompage, on a alors une dynamique du système en boucle fermée donnée par:

$$\dot{V} = \alpha(V_c - V), \quad (44)$$

qui est telle que  $V(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} V_c$ .

**Exemple 15** La rétroaction est un phénomène qui se retrouve abondamment dans la nature, notamment lorsque des être vivants sont impliqués. Par exemple, la température du corps humain est constamment régulée: la transpiration (commande), qui dépend de la température extérieure (variable d'état mesurée), permet notamment cette régulation. Le déplacement d'un animal comprend également des boucles de rétroactions: en fonction des informations visuelles perçues (variables d'état mesurées), le système nerveux central va envoyer des signaux (commande) aux muscles pour aller dans la bonne direction.

### 3.3 Stabilisation par placement de pôles

Un des objectifs des automaticiens est la stabilisation de systèmes autour d'un point d'équilibre.

On considère un système linéaire de la forme (4), tel que, lorsque  $u = 0$ , le point d'équilibre  $\bar{x} = 0$  soit instable.

#### Rappel:

- Si toutes les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre  $\bar{x} = 0$  du système linéaire  $\dot{x} = Ax$  est **stable**.
- Si il existe une valeur propre de  $A$  à partie réelle strictement positive, alors le point d'équilibre  $\bar{x} = 0$  du système linéaire  $\dot{x} = Ax$  est **instable**.

On cherche une loi de commande statique qui va rendre le point d'équilibre  $\bar{x} = 0$  stable: on parle de **loi de commande stabilisante**. Une telle loi peut être obtenue par **placement de pôles**, comme indiqué dans la suite.

### 3.3.1 Principe

Comme on est en linéaire, on va chercher une loi de commande linéaire en l'état, c'est à dire une loi de la forme:

$$u = Kx, \quad (45)$$

où  $K$  est une matrice de taille  $m \times n$ . En boucle fermée, la dynamique du système sera donc:

$$\dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x. \quad (46)$$

Le principe du placement de pôles est de choisir la matrice  $K$  de telle sorte que la matrice  $A + BK$  ait pour valeurs propres un ensemble  $\lambda_i, i = 1 : n$  de valeurs choisies par l'automaticien. En général, on choisira des valeurs de  $\lambda_i$  à parties réelles strictement négatives pour assurer la stabilité du système en boucle fermée. D'autres critères peuvent également guider le choix des valeurs  $\lambda_i$ .

### 3.3.2 Résultats d'existence et d'unicité

On introduit la définition suivante:

**Définition 16** *Le système linéaire  $\dot{x} = Ax + Bu$  est dit stabilisable par retour d'état linéaire (ou feedback linéaire), si il existe une matrice  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telle que le système en boucle fermée avec  $u = Kx$ , c'est à dire le système  $\dot{x} = (A + BK)x$ , soit asymptotiquement stable, i. e.*

$$\forall \lambda \text{ valeur propre de } A + BK, \Re(\lambda) < 0. \quad (47)$$

**Theorem 17 (Existence)** *Si la paire  $(A, B)$  est contrôlable, alors le système  $\dot{x} = Ax + Bu$  est stabilisable par retour d'état linéaire.*

**Proposition 18 (Unicité)** *Dans le cas où  $m = 1$ , c'est à dire lorsque l'on a une commande  $u$  scalaire, et étant données  $n$  valeurs  $\lambda_i, i = 1 : n$  à partie réelle strictement négative, il existe une unique matrice  $K \in \mathbb{R}^{1 \times m}$  telle que l'ensemble des valeurs propres de  $A + BK$  coïncide avec les  $\lambda_i$ .*

### 3.3.3 En pratique

On se place dans le cas mono-entrée, c'est à dire où  $m = 1$ .

Pour calculer les valeurs des coefficients de la matrice  $K$ , le plus simple est de passer par la forme canonique de Brunovski. En effet, le calcul des valeurs propres d'une matrice peut devenir vite très complexe, et ce dès la dimension 3 ou 4. La forme particulière de la matrice canonique de Brunovski va permettre de simplifier grandement les calculs, comme montré dans la suite. Voici la démarche à suivre pour calculer les valeurs des coefficients de  $K$ :

1. *Vérification de la contrôlabilité du système:*  
on utilise le critère de Kalman.

2. *Choix des valeurs propres*

On choisit  $n$  valeurs  $\lambda_i, i = 1 : n$  qui seront les valeurs propres du système en boucle fermée.

3. *Mise sous forme de Brunovski:*

Pour cela, on utilise la proposition 6. On calcule dans un premier temps le polynôme caractéristique de  $A$ , et on identifie les coefficients  $a_i$  pour obtenir la matrice  $\tilde{A}$ .

Pour le calcul de  $Q$ , on utilise la formule de récurrence sur les colonnes donnée en (22).

4. *Identification des coefficients de la matrice  $K$ :*

On a donc écrit le système sous sa forme de Brunovski (20). Si on applique une commande de la forme  $u = Kx = \tilde{K}z$  (avec  $\tilde{K} = KQ$ ), on obtient, en boucle fermée, le système  $\dot{z} = (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})z$ , avec:

$$\begin{aligned} \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\tilde{k}_1 \dots \tilde{k}_n] \quad (48) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 + \tilde{k}_1 & -a_1 + \tilde{k}_2 & \dots & \dots & -a_{n-1} + \tilde{k}_n \end{bmatrix}. \quad (49) \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de  $\tilde{A} + \tilde{B}K$  s'écrit alors (voir proposition 8):

$$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^n + (a_{n-1} - \tilde{k}_n)\lambda^{n-1} + \dots + (a_1 - \tilde{k}_2)\lambda + a_0 - \tilde{k}_1. \quad (50)$$

On souhaite que la matrice  $\tilde{A} + \tilde{B}K$  ait pour valeurs propres les valeurs  $\lambda_i$  choisies, c'est à dire que son polynôme caractéristique soit de la forme:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0. \quad (51)$$

Pour calculer les coefficients  $\tilde{k}_i$ , il suffit donc d'identifier les coefficients des polynômes:

$$\lambda^n + (a_{n-1} - \tilde{k}_n)\lambda^{n-1} + \dots + (a_1 - \tilde{k}_2)\lambda + a_0 - \tilde{k}_1 = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0, \quad (52)$$

ce qui donne:

$$\tilde{k}_i = a_{i-1} - b_{i-1}, \forall i = 1 : n. \quad (53)$$

On récupère ensuite la valeur de  $K$  par la relation:

$$K = \tilde{K}Q^{-1}. \quad (54)$$

### 3.4 Régulation autour d'un point d'équilibre

Un autre problème que se pose l'automaticien est celui de la régulation d'un système autour d'un certain point, que l'on appelle **consigne**.

On se place toujours dans le cas linéaire. On considère un système linéaire de la forme:

$$\dot{x} = A(x - x^*) + Bu, \quad (55)$$

stable lorsque  $u = 0$  (c'est à dire que les valeurs propres de  $A$  sont toutes à partie réelle strictement négative). On a alors:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*. \quad (56)$$

On cherche à changer la valeur du point d'équilibre du système. On veut donc trouver un  $u$  tel que, en boucle fermée, on ait:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_c, \quad (57)$$

où  $x_c \neq x^*$  est la consigne.

On cherche cette fois-ci une commande affine en l'état, c'est à dire de la forme:

$$u = Kx + R. \quad (58)$$

En boucle fermée, la dynamique est alors de la forme:

$$\dot{x} = A(x - x^*) + BKx + BR = (A + BK)x - Ax^* + BR. \quad (59)$$

Or, on souhaite que le système converge vers  $x_c$ , c'est à dire qu'il ait une dynamique boucle fermée de la forme:

$$\dot{x} = A_{BF}(x - x_c). \quad (60)$$

Il suffit donc de choisir  $K$  et  $R$  tels que:

$$A_{BF} = A + BK \text{ et } A_{BF}x_c = Ax^* - BR. \quad (61)$$



## 4 Exemples

### 4.1 Le chemostat

On considère deux espèces de micro-organismes  $x_1$  et  $x_2$ , en compétition sur le même substrat  $S$ . Les équations du chemostat sont alors données par:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= (\mu_1(S) - m_1) x_1, \\ \dot{x}_2 &= (\mu_2(S) - m_2) x_2, \\ \dot{S} &= -\mu_1(S)x_1 - \mu_2(S)x_2 + d(S_{in} - S). \end{cases} \quad (62)$$

### 4.2 Coccinelles et pucerons [1]

Les pucerons sont des insectes ravageurs permanents et redoutables pour la culture de rosiers. La lutte biologique contre ces ravageurs est une alternative aux traitements par pesticides qui sont de moins en moins efficaces devant les résistances développées par les pucerons. Les coccinelles *Harmonia axyridis* sont utilisées dans cette lutte biologique car elles se nourrissent de pucerons avec une grande voracité. Elles sont actives dès le printemps, c'est-à-dire dès l'apparition des colonies de pucerons dans les roseraies. Pour augmenter l'efficacité prédatrice des coccinelles, l'Institut National de Recherche Agronomique (INRA) a développé une variété de coccinelles "sédentaires" qui ne volent pas (et ne risquent donc pas de quitter la culture à traiter). On souhaite établir un modèle décrivant l'évolution du nombre de pucerons  $x_1(t)$  et de coccinelles  $x_2(t)$  sous les hypothèses suivantes :

1. en l'absence de coccinelles, la population de pucerons croît selon une loi logistique;
2. les coccinelles dévorent d'autant plus de pucerons qu'ils sont nombreux;
3. les coccinelles et les pucerons ont un taux spécifique constant (et différent) de mortalité naturelle.

Le modèle d'état suivant exprime le bilan du nombre de pucerons et de coccinelles :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - m_1 x_1 - p_1 x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= p_2 x_1 x_2 - m_2 x_2. \end{cases} \quad (63)$$

où  $r_1$ ;  $K_1$ ;  $m_1$ ;  $p_1$ ;  $m_2$ ;  $p_2$  sont des constantes positives représentant respectivement le taux de croissance intrinsèque de la population de pucerons, la capacité d'accueil du pucerons par le milieu, le taux de mortalité naturelle des pucerons, le taux de mortalité par prédation des pucerons, le taux de mortalité naturelle des coccinelles, et le taux de croissance par prédation des coccinelles.

Ce type de modèle, appelé "modèle proie-prédateur", fut introduit à l'origine par le mathématicien italien V. Volterra qui cherchait à comprendre les fluctuations du rendement de la pêche en mer Adriatique au début du vingtième siècle. Evidemment, il s'agit d'une simplification assez grossière de la réalité. Le modèle ne prend pas en compte de nombreux facteurs qui peuvent influencer l'évolution des populations (conditions

climatiques, autres ressources disponibles, autres prédateurs, migration des populations etc ...). Comme l'illustre notre exemple, une application importante de ce type de modèle est la lutte contre les insectes nuisibles dans l'agriculture. Il arrive souvent que la population nuisible soit contrôlée par l'introduction de prédateurs. Le modèle constitue alors un outil intéressant pour la conception des programmes d'intervention sur le terrain.

### 4.3 Modèle de pêche

Du fait d'une pêche intensive et non contrôlée, les stocks de poissons commencent à diminuer de manière inquiétante. Afin de mieux gérer ces stocks, il est important de proposer des stratégies de pêche intelligentes qui permettent de conserver une population de poissons suffisante pour la survie des espèces, tout en pérennisant l'activité de pêche. Pour cela, on cherche dans un premier temps à modéliser l'impact de la pêche sur l'évolution d'une population donnée de poissons. On considère un poisson ayant 4 stades de vie distincts:

- oeuf, de 0 à 1 mois: à ce stade, le taux de mortalité est très élevé, et l'organisme est immobile, donc ne peut ni se déplacer ni être pêché;
- juvénile, de 1 à 15 mois: à ce stade, le taux de mortalité est plus faible, mais néanmoins important. Le poisson peut se déplacer, mais ne migre pas. Il est trop petit pour être pêché car il passe dans les mailles du filet;
- adulte non mature, de 15 à 62 mois: à ce stade, le taux de mortalité naturelle est peu élevé, mais le poisson est suffisamment gros pour être pêché. Une partie des poissons à ce stade peuvent également migrer, mais ils ne sont pas encore matures pour se reproduire;
- adulte mature, de 62 mois à 159 mois: par rapport au stade précédent, le poisson a la capacité de se reproduire.

On note  $x_0, x_1, x_2$  et  $x_3$  les populations d'oeufs, de poissons juvéniles, d'adultes non matures, et d'adultes matures respectivement. On note également  $n$  le taux de natalité des adultes matures,  $m_i, c_i, e_i, F_i$  les taux de mortalité, de croissance, d'émigration, et le quotas de pêche de la population  $x_i$ .  $I$  correspond à un débit d'immigration, les coefficients  $\alpha_i$  étant des constantes positives. Avec ces notations, on peut écrire le modèle d'état suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 &= nx_3 - m_0x_0 - c_0x_0 \\ \dot{x}_1 &= c_0x_0 - m_1x_1 - c_1x_1 \\ \dot{x}_2 &= c_1x_1 - m_2x_2 - c_2x_2 + \alpha_1I - e_2x_2 - F_2 \\ \dot{x}_3 &= c_2x_2 - m_3x_3 + \alpha_2I - e_3x_3 - F_3, \end{cases} \quad (64)$$

c'est à dire:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (65)$$

avec  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $u = (I, F_2, F_3)^T$  et :

$$A = \begin{bmatrix} -m_0 - c_0 & 0 & 0 & n \\ c_0 & -m_1 - c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -m_2 - c_2 - e_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & -m_3 - e_3 \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\text{et } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & -1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (67)$$

#### 4.4 Modélisation physiologique [1]

Les physiologistes s'intéressent souvent à décrire et à analyser la propagation de substances biologiques ou chimiques dans le corps des mammifères. Il peut s'agir de substances médicamenteuses (on parle alors d'études pharmacocinétiques) ou encore de substances toxiques absorbées volontairement ou accidentellement. Il peut s'agir aussi de substances d'origine naturelle telle que des hormones ou des protéines. Les modèles à compartiments sont fréquemment utilisés pour procéder à de telles études : le corps du mammifère est alors représenté par un ensemble plus ou moins diversifié de réservoirs interconnectés. Considérons l'exemple de la figure 4.5. Une substance toxique (par exemple du plomb) est ingérée par un animal et pénètre dans le sang. Cette substance se propage progressivement dans le corps, passant du sang vers les tissus tout d'abord, vers les os ensuite. Elle est excrétée par la transpiration d'une part et par les voies urinaires d'autre part.

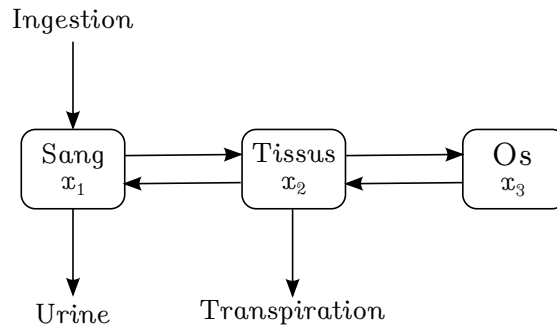


Figure 8: Graphe d'un modèle à compartiments en pharmacocinétique.

Le modèle à compartiments linéaires correspondant au graphe de la figure 8 est le suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(k_{10} + k_{12}) & k_{21} & 0 \\ k_{12} & -(k_{20} + k_{21} + k_{23}) & k_{32} \\ 0 & k_{23} & -k_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{01} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (68)$$

Dans ce modèle, les variables d'état  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  désignent bien sûr les quantités de substance toxique dans les trois compartiments (sang, tissus et os). La variable d'entrée  $u$  désigne le flux d'ingestion par le corps.

#### 4.5 Modèle de population

On considère une population d'organismes ayant 3 stades de vie distincts: oeuf, adolescents et adultes. Parmi les adolescents et les adultes, certains sont féconds et d'autres pas. La fécondité se décide lors du passage de l'oeuf à l'adolescent; de ce fait, un adolescent fécond (respectivement infécond) ne peut devenir qu'un adulte fécond (respectivement infécond).

On notera  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  et  $x_5$  les sous-populations d'oeufs, d'adolescents féconds, d'adolescents inféconds, d'adultes féconds, et d'adultes inféconds respectivement. Soit  $m_0$ ,  $m_1$  et  $m_2$  les taux de mortalités respectives des oeufs, adolescents et adultes. Soit  $\alpha$  le taux de croissance d'un stade à l'autre (on suppose que la durée de chaque stade est identique) et  $\beta$  le taux de naissance par adulte fécond. On a alors les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -m_0x_1 - \alpha x_1 + \beta x_4 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\alpha}{2}x_1 - m_1x_2 - \alpha x_2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{\alpha}{2}x_1 - m_1x_3 - \alpha x_3 \\ \dot{x}_4 &= \alpha x_2 - m_2x_4 \\ \dot{x}_5 &= \alpha x_3 - m_2x_5 \end{cases} \quad (69)$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle:

$$\dot{x} = Ax, \quad (70)$$

avec  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  et :

$$A = \begin{bmatrix} -m_0 - \alpha & 0 & 0 & \beta & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & -m_1 - \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & -m_1 - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & -m_2 \end{bmatrix} \quad (71)$$

#### 4.6 Chaîne de réservoirs [2]

On considère la chaîne de réservoirs décrite en figure 9.

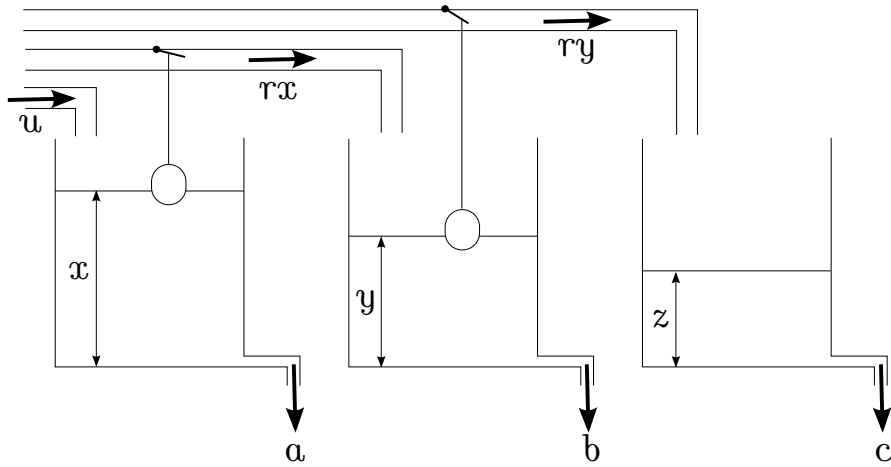


Figure 9: Chaîne de réservoirs.

On note  $x$ ,  $y$  et  $z$  la hauteur d'eau dans chacun des trois réservoirs. Le premier réservoir est alimenté par un débit  $u$ . Les débits d'alimentation des deux derniers réservoirs (égaux à  $rx$  et  $ry$ ) sont contrôlés par la hauteur d'eau dans le réservoir précédent: plus le niveau est haut dans le réservoir précédent, plus le débit est d'alimentation est grand. Chaque réservoir a un débit de sortie constant, noté  $a$ ,  $b$ , et  $c$  respectivement. On suppose que les trois réservoirs sont identiques et cylindriques de base  $B$ .

Une représentation d'état du système est donnée ci-dessous:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{u-a}{B} \\ \dot{y} = \frac{rx-b}{B} \\ \dot{z} = \frac{ry-c}{B}. \end{cases} \quad (72)$$

En notant  $\tilde{u} = \frac{u}{B}$ ,  $\tilde{a} = \frac{a}{B}$ ,  $\tilde{b} = \frac{b}{B}$ ,  $\tilde{c} = \frac{c}{B}$ , et  $\tilde{r} = \frac{r}{B}$ , on peut la réécrire sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tilde{r} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tilde{a} \\ -\tilde{b} \\ -\tilde{c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}. \quad (73)$$

## 5 Exercices

### 5.1 Un schéma bloc...

Ecrire la représentation d'état associée au schéma bloc de la figure 10. D'après vous, quel système est ce que cela peut représenter?

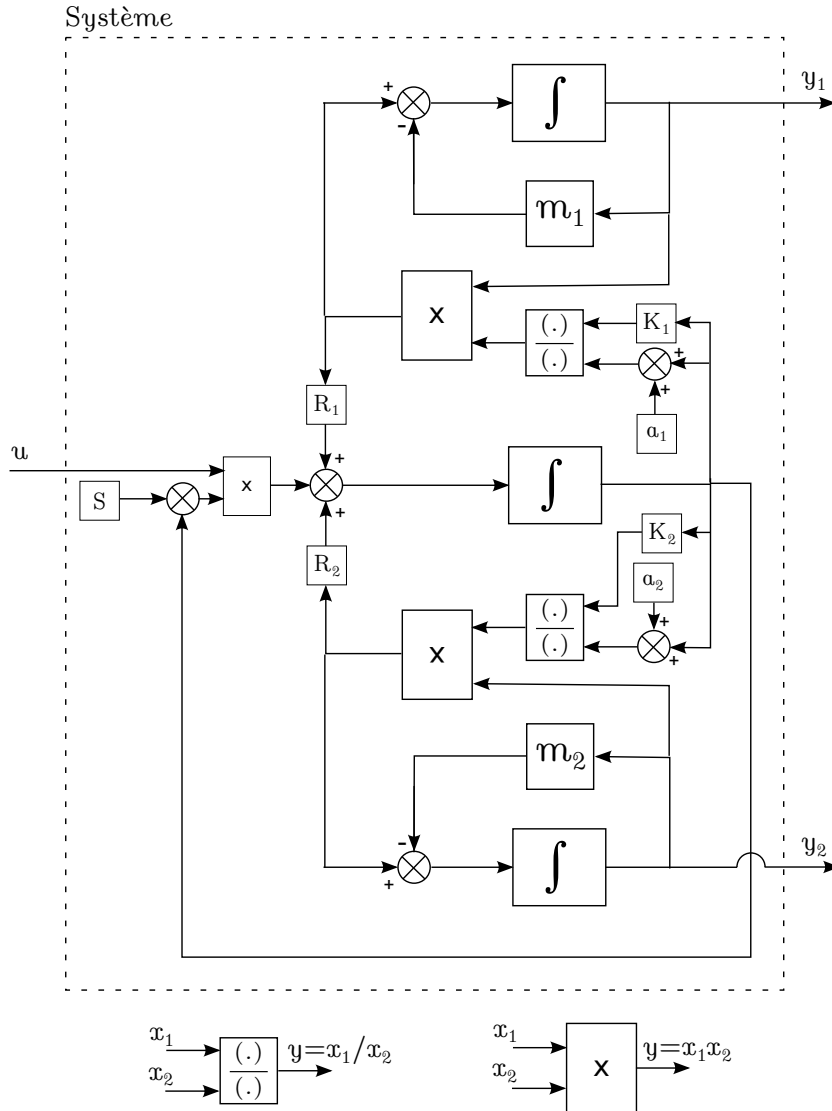


Figure 10: Schéma bloc d'un système d'entrée  $u$  et de sorties  $y_1$  et  $y_2$ .

## 5.2 Des coccinelles et des pucerons

Les pucerons sont des insectes ravageurs permanents et redoutables pour la culture de rosiers. La lutte biologique contre ces ravageurs est une alternative aux traitements par pesticides qui sont de moins en moins efficaces devant les résistances développées par les pucerons. Les coccinelles *Harmonia axyridis* sont utilisées dans cette lutte biologique car elles se nourrissent de pucerons avec une grande voracité. Elles sont actives dès le printemps, c'est-à-dire dès l'apparition des colonies de pucerons dans les roseraies. Pour augmenter l'efficacité prédatrice des coccinelles, l'Institut National de Recherche Agronomique (INRA) a développé une variété de coccinelles "sédentaires" qui ne volent pas (et ne risquent donc pas de quitter la culture à traiter). On souhaite établir un modèle décrivant l'évolution du nombre de pucerons  $x_1(t)$  et du nombre de coccinelles  $x_2(t)$  sous les hypothèses suivantes :

1. en l'absence de coccinelles, la population de pucerons croît selon une loi logistique;
2. les coccinelles dévorent d'autant plus de pucerons qu'ils sont nombreux;
3. les coccinelles et les pucerons ont un taux spécifique constant (et différent) de mortalité naturelle.

Proposer une représentation d'état pour le système considéré. Dessiner le schéma-bloc associé.

## 5.3 Modèle de pêche

Du fait d'une pêche intensive et non contrôlée, les stocks de poissons commencent à diminuer de manière inquiétante. Afin de mieux gérer ces stocks, il est important de proposer des stratégies de pêche intelligentes qui permettent de conserver une population de poissons suffisante pour la survie des espèces, tout en pérennisant l'activité de pêche. Pour cela, on cherche dans un premier temps à modéliser l'impact de la pêche sur l'évolution d'une population donnée de poissons. On considère un poisson ayant 4 stades de vie distincts:

- oeuf: à ce stade, le taux de mortalité est très élevé, et l'organisme est immobile; il ne peut ni se déplacer ni être pêché;
- juvénile: à ce stade, le taux de mortalité est plus faible, mais néanmoins important. Le poisson peut se déplacer, mais ne migre pas. Il est trop petit pour être pêché car il passe dans les mailles du filet;
- adulte non mature: à ce stade, le taux de mortalité naturelle est peu élevé, mais le poisson est suffisamment gros pour être pêché. Une partie des poissons à ce stade peuvent également migrer, mais ils ne sont pas encore matures pour se reproduire;
- adulte mature: par rapport au stade précédent, le poisson a la capacité de se reproduire.

Proposer une représentation d'état de ce système, en tenant compte de la natalité, la mortalité, la croissance, l'émigration, l'immigration et de la pêche. Dessiner le schéma-bloc associé.

#### 5.4 Régulation d'une espèce

On considère une population d'organismes ayant 2 stades de vie distincts: larves et adultes. Parmi les adultes, certains sont féconds et d'autres pas.

On note  $x_1$ ,  $x_2$ , et  $x_3$  les sous-populations de larves, d'adultes féconds, et d'adultes inféconds respectivement. Soit  $m_0$ , et  $m_1$  les taux de mortalités respectives des larves et des adultes. Soit  $\alpha$  le taux de croissance du stade larvaire à celui d'adultes et  $\beta$  le taux de naissance par adulte fécond. On a alors les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -m_0x_1 - \alpha x_1 + \beta x_3 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\alpha}{2}x_1 - m_1x_2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{\alpha}{2}x_1 - m_1x_3 \end{cases} \quad (74)$$

qui s'écrivent sous forme matricielle  $\dot{x} = Ax$  avec:

$$A = \begin{bmatrix} -(m_0 + \alpha) & 0 & \beta \\ \frac{\alpha}{2} & -m_1 & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & -m_1 \end{bmatrix}. \quad (75)$$

1. Dessiner le schéma bloc associé à la représentation d'état
2. Le système est-il stable?
3. On suppose que l'on ne peut ajouter ou enlever que des oeufs (que du  $x_1$ ), que des adultes féconds (que du  $x_2$ ) ou que des adultes inféconds (que du  $x_3$ ) pour réguler l'écosystème. Cela revient à rajouter une terme de la forme  $Bu$  dans l'équation  $\dot{x} = Ax$ , avec  $u$  scalaire, et  $B = [1\ 0\ 0]^T$ , ou  $B = [0\ 1\ 0]^T$ , ou  $B = [0\ 0\ 1]^T$ . Pour le(s)quel(s) de ces trois  $B$ , le système est-il contrôlable? Lorsque il y a contrôlabilité, donner la forme de Brunovski du système.
4. Trouver la représentation d'état diagonale du système, c'est à dire la représentation d'état de la forme  $\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u$ , avec  $\tilde{A}$  diagonale, et  $z = Qx$ , avec  $Q$  matrice carrée inversible pour les trois valeurs de  $B$  évoquées dans la question précédente. Expliquer en quoi cette représentation permet de conclure directement à la contrôlabilité du système.

#### Correction

- 1.
2. Stabilité du système:  
On va calculer les valeurs propres de la matrice  $A$ . On a:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = (\lambda + m_1) \left( \lambda^2 + (m_1 + m_0 + \alpha)\lambda + m_1(m_0 + \alpha) - \frac{\alpha\beta}{2} \right). \quad (76)$$



Le calcul du discriminant du polynôme d'ordre 2 en facteur est donné par:

$$\Delta = (m_1 - m_0 - \alpha)^2 + 2\alpha\beta > 0. \quad (77)$$

On a donc trois valeurs propres:

$$\lambda_1 = -m_1, \lambda_2 = \frac{-m_1 - m_0 - \alpha - \sqrt{\Delta}}{2}, \text{ et } \lambda_3 = \frac{-m_1 - m_0 - \alpha + \sqrt{\Delta}}{2}. \quad (78)$$

Les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont strictement négatives. Quant à  $\lambda_3$ , on a:

$$\lambda_3 < 0 \Leftrightarrow \Delta < (m_1 + m_0 + \alpha)^2 \Leftrightarrow 2m_1(m_0 + \alpha) > \alpha\beta. \quad (79)$$

Le système est stable si et seulement si  $2m_1(m_0 + \alpha) > \alpha\beta$ .

3. Calculons la matrice de commandabilité de Kalman, pour chacun des trois  $B$ . On a:

$$A^2 = \begin{bmatrix} (m_0 + \alpha)^2 + \frac{\alpha\beta}{2} & 0 & -(m_0 + \alpha)\beta - m_1\beta \\ -\frac{(m_0 + \alpha)\alpha}{2} - \frac{m_1\alpha}{2} & m_1^2 & \frac{\alpha\beta}{2} \\ -\frac{(m_0 + \alpha)\alpha}{2} - \frac{m_1\alpha}{2} & 0 & m_1^2 + \frac{\alpha\beta}{2} \end{bmatrix}. \quad (80)$$

D'où:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 = [B|AB|A^2B] &= \begin{bmatrix} 1 & -(m_0 + \alpha) & (m_0 + \alpha)^2 + \frac{\alpha\beta}{2} \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & -\frac{(m_0 + \alpha)\alpha}{2} - \frac{m_1\alpha}{2} \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & -\frac{(m_0 + \alpha)\alpha}{2} - \frac{m_1\alpha}{2} \end{bmatrix} \text{ pour } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{C}_2 = [B|AB|A^2B] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -m_1 & m_1^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ pour } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{C}_3 = [B|AB|A^2B] &= \begin{bmatrix} 0 & \beta & -(m_0 + m_1 + \alpha)\beta \\ 0 & 0 & \frac{\alpha\beta}{2} \\ 1 & -m_1 & m_1^2 + \frac{\alpha\beta}{2} \end{bmatrix} \text{ pour } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On a donc:

$$\text{rang}(\mathcal{C}_1) = 2, \text{ rang}(\mathcal{C}_2) = 1, \text{ rang}(\mathcal{C}_3) = 3. \quad (81)$$

La paire  $(A, B)$  n'est contrôlable que pour  $B = [001]^T$ , c'est à dire lorsque l'on peut rajouter ou enlever des adultes non féconds.

Forme de Brunovski dans le cas où  $B = [001]^T$ .

On calcule dans un premier temps le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ ; on obtient:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \quad (82)$$

avec

$$a_2 = 2m_1 + m_0 + \alpha, \quad (83)$$

$$a_1 = m_1(2m_0 + 2\alpha + m_1) - \frac{\alpha\beta}{2}, \quad (84)$$

$$a_0 = m_1 \left[ m_1(m_0 + \alpha) - \frac{\alpha\beta}{2} \right]. \quad (85)$$

On calcule ensuite la matrice  $Q$  de changement de variables. D'après la proposition 6, on a :

$$\begin{aligned} q_3 &= B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ q_2 &= Aq_3 + a_2q_3 = AB + a_2B = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ m_1 + m_0 + \alpha \end{bmatrix}, \\ q_1 &= Aq_2 + a_1q_3 = A^2B + a_2AB + a_1B = \begin{bmatrix} m_1\beta \\ \frac{\alpha\beta}{2} \\ m_1(m_0 + \alpha) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

On a donc :

$$Q = \begin{bmatrix} m_1\beta & \beta & 0 \\ \frac{\alpha\beta}{2} & 0 & 0 \\ m_1(m_0 + \alpha) & m_1 + m_0 + \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

et, puisque après calculs on obtient  $\det(Q) = -\frac{\alpha\beta^2}{2}$ , on a :

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)} [Q^c]^T = -\frac{2}{\alpha\beta^2} \begin{bmatrix} 0 & -\beta & 0 \\ -\frac{\alpha\beta}{2} & m_1\beta & 0 \\ \frac{\alpha\beta}{2}(m_0 + m_1 + \alpha) & -m_1^2\beta & -\frac{\alpha\beta^2}{2} \end{bmatrix}. \quad (87)$$

On peut alors vérifier que :

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_3 \end{bmatrix} \text{ et } Q^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (88)$$

4. Calculons la matrice de passage  $P$  telle que :

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (89)$$

Pour cela, on calcule les vecteurs propres associées aux valeurs propres  $\lambda_i$ ,  $i = 1 : 3$ . On résoud donc le système, avec  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  :

$$Ax = \lambda_i x, \quad i = 1 : 3. \quad (90)$$

• Pour  $i = 1$  :

$$Ax = \lambda_1 x \Leftrightarrow x_1 = x_3 = 0. \quad (91)$$

On pose  $v_1 = (0, 1, 0)^T$ .

- Pour  $i = 2$  et  $i = 3$ :

$$\begin{aligned}
Ax = \lambda_i x &\iff \begin{cases} x_3 = \frac{1}{\beta}(m_0 + \lambda_i + \alpha)x_1 \\ \frac{\alpha}{2}x_1 = (\lambda_i + m_2)x_2 \\ (m_1 + \lambda_i)(x_3 - x_2) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_3 = \frac{1}{\beta}(m_0 + \lambda_i + \alpha)x_1 \\ \frac{\alpha}{2}x_1 = \frac{1}{\beta}(\lambda_i + m_2)(m_0 + \lambda_i + \alpha)x_1 \\ x_3 = x_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_3 = \frac{1}{\beta}(m_0 + \lambda_i + \alpha)x_1 \\ x_1 \left( \lambda_i^2 + (m_1 + m_0 + \alpha)\lambda_i + m_1(m_0 + \alpha) - \frac{\alpha\beta}{2} \right) = 0 \\ x_3 = x_2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Or,  $\lambda_i^2 + (m_1 + m_0 + \alpha)\lambda_i + m_1(m_0 + \alpha) - \frac{\alpha\beta}{2} = 0$  (voir le polynôme caractéristique (76)), d'où:

$$Ax = \lambda_i x \iff \begin{cases} x_3 = \frac{1}{\beta}(m_0 + \lambda_i + \alpha)x_1 \\ x_3 = x_2. \end{cases}$$

On pose  $v_i = (\beta, m_0 + \alpha + \lambda_i, m_0 + \alpha + \lambda_i)^T$ .

On choisit donc comme matrice  $P$  la matrice:

$$P = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} 0 & \beta & \beta \\ 1 & m_0 + \alpha + \lambda_2 & m_0 + \alpha + \lambda_3 \\ 0 & m_0 + \alpha + \lambda_2 & m_0 + \alpha + \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (92)$$

On pose le changement de variable  $z = P^{-1}x$ , avec (expression obtenue après calculs):

$$P^{-1} = -\frac{1}{\beta\sqrt{\Delta}} \begin{bmatrix} 0 & -\beta\sqrt{\Delta} & \beta\sqrt{\Delta} \\ -m_0 - \alpha - \lambda_3 & 0 & \beta \\ m_0 + \alpha + \lambda_2 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \quad (93)$$

avec  $\Delta$  défini en (77). On a alors:

$$\dot{x} = Ax + Bu \iff \dot{z} = P^{-1}APz + P^{-1}Bu = \tilde{A}z + \tilde{B}u, \quad (94)$$

avec, (expressions obtenues après calculs):

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (95)$$

et

$$\begin{aligned}
 \tilde{B} = P^{-1}B &= -\frac{1}{\beta\sqrt{\Delta}} \begin{bmatrix} 0 \\ -m_0 - \alpha - \lambda_3 \\ m_0 + \alpha + \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ pour } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pour } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \end{bmatrix} \text{ pour } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

## 5.5 Temps de réponse

Soit  $x$  une la solution de l'équation différentielle ordinaire scalaire  $\dot{x} = a(x^* - x)$ , avec  $a \in \mathbb{R}^+$  et  $x(0) = 0$ .

1. Donner l'expression analytique de la solution  $x(t)$ .
2. Vers quelle valeur se stabilise la solution?
3. Combien de temps faut-il pour que la solution atteigne 95% de sa valeur à l'équilibre?

### Correction:

1. La solution de l'équation homogène associée (EHA)  $\dot{x} = -ax$  est:

$$x_{EHA}(t) = Ce^{-at}, \forall t > 0 \text{ avec } C \in \mathbb{R}. \quad (96)$$

Une solution particulière de l'équation  $\dot{x} = a(x^* - x)$  est donnée par:

$$x_{part}(t) = x^*, \forall t > 0. \quad (97)$$

La solution générale de  $\dot{x} = a(x^* - x)$  est donc de la forme:

$$x(t) = x_{EHA}(t) + x_{part}(t) = Ce^{-at} + x^*. \quad (98)$$

Détermination de la constante  $C$  en fonction de la condition initiale. On a:

$$x(0) = 0 \Leftrightarrow C + x^* = 0 \Leftrightarrow C = -x^*. \quad (99)$$

Au final, on a donc:

$$x(t) = x^*(1 - e^{-at}) \quad (100)$$

2. On a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*. \quad (101)$$

3. On a:

$$\begin{aligned} x(t) = 0.95x^* &\Leftrightarrow x^*(1 - e^{-at}) = 0.95x^* \\ &\Leftrightarrow e^{-at} = 0.05 \\ &\Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0.05)}{a} = 2.9957\frac{1}{a} \simeq \frac{3}{a}. \end{aligned}$$

La constante  $\tau = \frac{1}{a}$  est appelée **constante de temps du système**: le temps de réponse à 95% est égal à  $3\tau$ .

## 5.6 Une chaîne de réservoirs

On considère la chaîne de réservoirs décrite en figure 11. On note  $x$ ,  $y$  et  $z$  la hauteur d'eau dans chacun des trois réservoirs. Le premier réservoir est alimenté par un débit  $u$ . Les débits d'alimentation des deux derniers réservoirs (égaux à  $rx$  et  $ry$ ) sont contrôlés par la hauteur d'eau dans le réservoir précédent: plus le niveau est haut dans le réservoir précédent, plus le débit est d'alimentation est grand. Chaque réservoir a un débit de sortie constant, noté  $a$ ,  $b$ , et  $c$  respectivement. On suppose que les trois réservoirs sont identiques et cylindrique de base  $B$ .

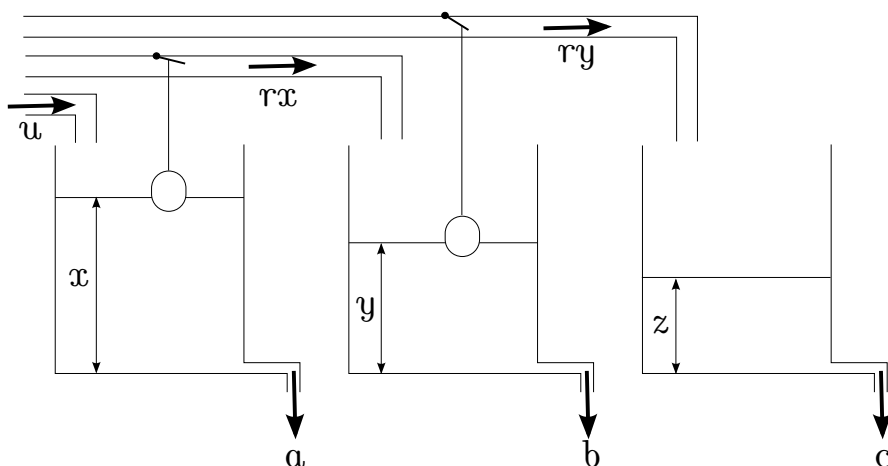


Figure 11: Chaîne de réservoirs.

1. Proposer une représentation d'état pour le système considéré. Dessiner le schéma-bloc associé.
2. On propose d'utiliser une rétroaction  $u$ , telle que, en boucle fermée on ait:  $\dot{x} = k(z - 1)$ . Quelle est l'expression de  $u$  que l'on doit considérer?
3. Cette rétroaction a été proposée dans le but de réguler la hauteur d'eau du troisième réservoir autour de la valeur 1. Est-ce que l'objectif visé peut être atteint au moyen de cette loi de commande?

### Correction:

1. Une représentation d'état du système est donnée ci-dessous:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{u-a}{B} \\ \dot{y} &= \frac{rx-b}{B} \\ \dot{z} &= \frac{ry-c}{B}. \end{cases} \quad (102)$$

En notant  $\tilde{u} = \frac{u}{B}$ ,  $\tilde{a} = \frac{a}{B}$ ,  $\tilde{b} = \frac{b}{B}$ ,  $\tilde{c} = \frac{c}{B}$ , et  $\tilde{r} = \frac{r}{B}$ , on peut la réécrire sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tilde{r} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tilde{a} \\ -\tilde{b} \\ -\tilde{c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}. \quad (103)$$

2. On a:

$$\dot{x} = \frac{u-a}{B} \quad (104)$$

et on veut avoir, en boucle fermée,  $\dot{x} = -k(z-1)$ . Il suffit donc de prendre  $u$  tel que:

$$-k(z-1) = \frac{u-a}{B} \Leftrightarrow u = a - kB(z-1). \quad (105)$$

3. En boucle fermée, on a alors:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k \\ \tilde{r} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ -\tilde{b} \\ -\tilde{c} \end{bmatrix}. \quad (106)$$

Les points d'équilibre du système sont tels que:

$$\begin{cases} -k(z-1) = 0 \\ \tilde{r}x - \tilde{b} = 0 \\ \tilde{r}y - \tilde{c} = 0, \end{cases} \quad (107)$$

ce qui donne:  $x = \frac{\tilde{b}}{\tilde{r}}$ ,  $y = \frac{\tilde{c}}{\tilde{r}}$ , et  $z = 1$ . Ce point d'équilibre est stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -k \\ \tilde{r} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{r} & 0 \end{bmatrix}. \quad (108)$$

sont à partie réelle strictement négative. Or, le polynôme caractéristique de cette matrice s'écrit:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^3 + kr^2. \quad (109)$$

- Si  $k$  est positif, les valeurs propres sont données par:

$$\lambda_k = \sqrt[3]{kr^2} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3})} \quad (110)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \sqrt[3]{kr^2} e^{i\pi}, \lambda_2 = \sqrt[3]{kr^2} e^{i\frac{5\pi}{3}}, \lambda_3 = \sqrt[3]{kr^2} e^{i\frac{7\pi}{3}} \quad (111)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -\sqrt[3]{kr^2}, \lambda_2 = \sqrt[3]{kr^2} \left( \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \lambda_3 = \sqrt[3]{kr^2} \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (112)$$

$\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont donc à partie réelle strictement positive: le système est donc instable, quel que soit  $k > 0$ .

- Si  $k < 0$ , alors il y a une valeur propre triple donnée par  $\lambda = \sqrt[3]{-kr^2} > 0$ . Et là encore, le système est instable, quel que soit  $k < 0$ .

## References

- [1] Cours de “Modélisation et analyse des systèmes dynamiques”, G. Bastin, Université Catholique de Louvain-la-neuve, Belgique
- [2] A propos des boucles de rétroaction et de la stabilité des systèmes, C. Lobry, “Natures-Sciences-Sociétés”, 1(4), 1993.