

Thèse présentée pour obtenir le grade de docteur à  
l'Université de Cergy-Pontoise



Département Sciences et Techniques  
École doctorale EM2P

Discipline : Physique Théorique

---

# Valeurs Faibles, Trajectoires Faibles et Interférométrie

---

PAR M. Quentin DUPREY

MEMBRES DU JURY:

<b>Directeur de thèse</b>	M. Alex MATZKIN, Directeur de Recherche CNRS, LPTM, CERGY, FRANCE
<b>Rapporteurs</b>	Mme. Pérola MILMAN, Directrice de Recherche CNRS, MPQ, PARIS, FRANCE M. Yves CAUDANO, Chargé de Recherche FNRS, LLS, NAMUR, BELGIQUE
<b>Examineurs</b>	M. Thomas DURT, Professeur des Universités INSTITUT FRESNEL, MARSEILLE, FRANCE M. Jean AVAN, Directeur de Recherche CNRS, LPTM, CERGY, FRANCE

**Date de soutenance : 14 octobre 2019**



# Table des matières

<b>Résumé/Abstract</b>	<b>6</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>8</b>
<b>Convention de notation</b>	<b>14</b>
<b>Chapitre I : Introduction aux valeurs faibles</b>	<b>16</b>
1 Introduction	16
2 Mesure forte	19
2.1 Modèle de Von Neumann	19
2.1.1 Principe	19
2.1.2 Application : Fentes d'Young	23
2.2 Mesure de Von Neumann, pré-sélection et post-sélection	25
2.2.1 Principe	25
2.2.2 Application : Mesure d'une polarisation avec pré-sélection et post-sélection	29
2.3 Dynamique du pointeur dans le processus de Von Neumann	31
2.3.1 Moyenne pour un état pré-sélectionné	32
2.3.2 Moyenne pour un état pré-sélectionné et post-sélectionné	33
3 Mesure faible	35
3.1 Principe physique	35
3.2 Principe opérationnel	37
3.3 Application : Mesure faible de la polarisation	42
3.4 Valeur moyenne d'une observable dans le cas d'une mesure faible	45
3.4.1 Moyenne opérationnelle	46

	3.4.2	Moyenne conditionnelle, parties réelles et imaginaires . . . . .	47
	3.4.3	Discussion : Valeurs faibles, valeurs moyennes, et dualité onde-corpuscule . . . . .	48
4		Propriétés des valeurs faibles : rôles des pré et post-sélections	49
	4.1	Description d'un système entre une pré-sélection et une post-sélection avec un couplage intermédiaire fort ou faible . . . . .	50
	4.1.1	Règle ABL . . . . .	50
	4.1.2	Règle ABL et valeur faible : Illustration avec une mesure d'un spin . . . . .	51
	4.1.3	Investigation du rôle des conditions limites	53
	4.2	Rôle causal des pré et post-sélections . . . . .	54
	4.2.1	Rôle causal des pré/post-sélections sur le résultat de mesures fortes successives de deux opérateurs . . . . .	55
	4.2.2	Connexion avec la valeur faible : interactions faibles successives pour des processus logiques . . . . .	57
	4.3	Processus de pré/post-sélection et mesure contextuelle	60
	4.3.1	Mise en évidence de la contextualité pour la mesure forte . . . . .	60
	4.3.2	Contextualité de la mesure forte pour un processus de pré/post-sélection . . . . .	62
	4.4	Rôle causal des conditions limites : un rôle contextuel	63
	4.4.1	Conséquences pour une valeur faible . . . . .	64
	4.4.2	Mise en évidence du rôle contextuel des conditions limites sur une valeur faible : illustration avec le paradoxe des trois boîtes . . . . .	65
5		Conclusion . . . . .	68
<b>Chapitre II : Trajectoires faibles dans le dispositif des fentes d'Young</b>			<b>70</b>
1		Introduction : Mesures faibles et trajectoires d'un système quantique . . . . .	70
	1.1	Valeurs faibles et trajectoires quantiques . . . . .	71
	1.2	Organisation du Chapitre . . . . .	73
2		Approche des fentes d'Young par l'intégrale de chemin . . . . .	73
	2.1	Dispositif . . . . .	73
	2.2	Propagateur . . . . .	75

3	Trajectoires faibles dans un dispositif à une fente . . . . .	78
3.1	Considérations physiques . . . . .	80
3.2	Pré-sélection et post-sélection sur des paquets d'onde restant localisés . . . . .	81
3.3	Pré-sélection sur un paquet d'ondes d'impulsion moyenne prédéfinie à la fente et post-sélection sur un paquet d'onde restant localisé . . . . .	82
3.4	Pré-sélection sur un paquet d'ondes d'impulsion moyenne prédéfinie à la fente et post-sélection très fine en un point . . . . .	84
4	Trajectoires faibles dans un dispositif à deux fentes . . . . .	85
4.1	Post-sélection sur des paquets d'onde localisés . . . . .	85
4.2	Post-sélection localisée en un point . . . . .	88
4.3	Conclusion . . . . .	89
5	Détection de trajectoires faibles d'un photon dans des fentes d'Young : proposition d'un schéma expérimental . . . . .	89
5.1	Protocole . . . . .	91
5.2	Mesure des valeurs faibles . . . . .	93
5.3	Ouverture d'une fente . . . . .	96
5.4	Ouverture des deux fentes . . . . .	98
6	Conclusion . . . . .	99

**Chapitre III : Valeurs faibles nulles : principe et application à l'étude  
de trajectoires discontinues 102**

1	Introduction . . . . .	102
2	Valeur faible nulle et propriété de l'observable mesurée . . .	103
2.1	Décomposition d'une observable sur des chemins de vecteur propre . . . . .	104
2.2	Sens physique de l'annulation d'une valeur faible . . .	107
2.2.1	Discussion préliminaire . . . . .	107
2.2.2	Cas $O_w^i = 0$ : Annulation de la valeur faible d'un projecteur sur un état propre . . . . .	109
2.2.3	Cas $O_w^\lambda = O_w^\rho = 0$ : Annulation de la valeur faible d'une observable . . . . .	109
2.3	Bilan . . . . .	111
3	La valeur faible : un critère pour le passé d'une particule . .	112
3.1	Motivation . . . . .	112
3.2	Trace faible dans des interféromètres imbriqués . . .	113
3.3	Réalisation expérimentale . . . . .	117

3.4	Brève revue des commentaires et critiques . . . . .	118
4	Une proposition alternative . . . . .	122
4.1	Motivation . . . . .	122
4.2	Interféromètre pour une particule de spin 1 . . . . .	122
4.3	Interprétation . . . . .	125
4.4	Validité du critère de détermination du passé d'une particule . . . . .	126
5	Conclusion . . . . .	128
<b>Chapitre IV : Le Chat du Cheshire</b>		<b>131</b>
1	Introduction . . . . .	131
2	Le chat du Cheshire quantique . . . . .	131
3	Tentatives de réalisations expérimentales . . . . .	134
3.1	Interféromètre à neutrons . . . . .	134
3.1.1	Montage . . . . .	134
3.1.2	Mesure de la présence du neutron . . . . .	135
3.1.3	Mesure du spin . . . . .	136
3.2	Réalisation expérimentale avec des photons uniques	138
3.2.1	Mesure de la polarisation . . . . .	139
3.2.2	Mesure de la présence . . . . .	139
3.2.3	Conclusion de l'expérience . . . . .	140
3.3	Critiques de l'expérience . . . . .	140
3.3.1	Présence du neutron . . . . .	141
3.3.2	Présence du spin . . . . .	141
4	Critiques de l'interprétation du phénomène physique . . . . .	141
4.1	Correa et al [1] . . . . .	142
4.2	Atherton et al [2] . . . . .	144
4.3	Michielsen et al [3] . . . . .	145
4.4	Retour sur la mesure de la présence dans l'interféro- mètre à neutrons [4] . . . . .	146
5	Conclusion . . . . .	147
<b>Conclusion générale et perspectives</b>		<b>150</b>
<b>Annexe : Formalisme des deux vecteurs d'états</b>		<b>155</b>



**Résumé :**

La théorie de la mesure, basée sur la mesure projective, constitue un aspect fondamental de la mécanique quantique. La mesure faible diffère de la mesure projective traditionnelle sur laquelle les axiomes élémentaires de la physique quantique sont bâtis. Bien que définies dans le cadre de la théorie quantique standard, les mesures faibles sont encore mal comprises. Le travail de thèse s'inscrit dans une large démarche qui vise à comprendre les implications conceptuelles et pratiques d'une telle mesure et à la comprendre dans le cadre de la théorie quantique.

Le chapitre 1 est une introduction détaillée à la mesure faible et à la valeur faible. Ensuite, nous étudierons les "trajectoires faibles" dans un interféromètre à fentes d'Young. Nous abordons au chapitre 3 les implications de l'annulation d'une valeur faible au regard de l'apparition de trajectoires faibles dans des interféromètres de Mach-Zender imbriqués. Enfin, le chapitre 4 traite des critiques théoriques et expérimentales présentes dans la littérature concernant l'effet du Chat du Cheshire quantique qui est défini dans le cadre de mesures faibles.

**Abstract :**

Measurement theory, based on projective measurements, is a fundamental aspect of quantum mechanics. Weak measurements differ from standard projective measurements on which the elementary axioms of quantum physics are built. Although weak measurement framework is defined within standard quantum mechanics, its implications are still poorly understood. The thesis work is part of a broad reflexion that aims to understand the conceptual and practical implications of such a measurement and to understand it in the context of quantum theory. Chapter 1 is a detailed introduction to weak measurements and weak values. Next, we will study the "weak trajectories" in a two slit interferometer. In Chapter 3, we discuss the implications of a cancellation of a weak value with respect to the observation of weak trajectories in nested Mach-Zender interferometers. Finally, Chapter 4 deals with the theoretical and experimental criticisms in the literature of the effect of the Cheshire Cat that is defined in the framework of weak measurement.



# Introduction générale

En physique classique comme en physique quantique, accéder à une grandeur physique quelconque implique sa mesure. Or cette démarche nécessite l'introduction d'un appareil de mesure ou d'un observateur qui change intrinsèquement la situation physique : le nouveau système physique étudié est alors constitué de l'objet mesuré et de l'appareil de mesure. En conséquence, il apparaît qu'un résultat de mesure est indissociable de la nouvelle situation physique engendrée par la mesure : un résultat particulier est donné par une perturbation particulière introduite par l'observateur. Or, ce dernier n'y a pas accès puisqu'il fait désormais parti du système physique total mis en jeu et l'accès à cette perturbation ne peut être établi qu'une fois le résultat d'une mesure obtenu, c'est à dire de manière indirecte.

La physique quantique se démarque de la physique classique par le fait que le résultat d'une mesure est aléatoire, c'est à dire que pour plusieurs réalisations de la même expérience dans des conditions identiques, le résultat d'une mesure de la même propriété physique sera différent d'une expérience à l'autre, contrairement au cas idéal de la physique classique.

La physique quantique justifie alors sa nature probabiliste de la manière suivante. A l'échelle quantique, la perturbation introduite par l'observateur devient manifeste et elle est aléatoire en raison de l'aléatoire du résultat obtenu.

Or, une grandeur physique n'est accessible que par une mesure et celle-ci change irréversiblement le système physique d'une manière qui nous échappe jusqu'à ce qu'on ait connaissance du résultat. En plus de cela, le résultat obtenu est une grandeur aléatoire et lors de la répétition d'expériences identiques, cela implique que chaque mesure introduit une perturbation aléatoire différente d'une expérience à l'autre. En conséquence, chaque expérience est une situation unique pour laquelle il nous est im-

possible de prévoir le résultat d'une mesure. Il s'agit alors de considérer un résultat particulier comme indissociable de la nouvelle situation particulière engendrée par une mesure qui donne ce résultat particulier : chaque résultat obtenu correspond à une perturbation donnée qui a modifié le système physique de telle manière à ce qu'on obtienne précisément ce résultat. Finalement, la probabilité d'obtenir un résultat donné se comprend comme la probabilité que le système soit changé en le nouvel état associé à ce même résultat lors de la mesure.

Opérationnellement, l'état d'un système quantique est représenté par un vecteur d'état défini dans l'espace de Hilbert et une propriété physique par un opérateur qui admet une représentation matricielle dans le même espace. Lors de la mesure de la propriété physique, le résultat d'une mesure est donnée par une des valeurs propres de l'opérateur. Le nouvel état du système est quant à lui le vecteur propre associé à la valeur propre obtenue. Enfin, la probabilité d'obtenir une valeur propre particulière s'exprime comme la norme au carré du produit scalaire du vecteur propre de l'opérateur et du vecteur d'état du système avant la mesure.

Cependant, il s'agit de définir le vecteur d'état du système avant la mesure : dès l'instant où celui-ci est mesuré, son état change et par conséquent, il n'est plus défini.

Or si le résultat de mesure est imprévisible (ce n'est pas parce qu'on ignorerait son état précis, comme en physique statistique classique), il s'agit ici littéralement de considérer que l'objet quantique se trouve simultanément dans tous les états possibles en lesquels la mesure pourrait le changer. On parle alors de superposition d'états. Il s'agit d'une combinaison linéaire des vecteurs propres de l'opérateur mesuré, où la norme au carré de chacun des coefficients (qui sont complexes) qui pondèrent chaque vecteur propre représente la probabilité que le système soit changé en l'état associé lors d'une mesure. Lors de la mesure, le système physique passe alors instantanément d'une superposition d'états, ie d'une combinaison linéaire de vecteurs propres, en un vecteur propre seul, associé à la valeur propre obtenue : le système est projeté sur le vecteur propre associée à la valeur propre obtenue.

Cette formulation de la mesure est au coeur de la physique quantique qui est finalement bâtie sur les axiomes décrits en partie ci-dessus. Ces axiomes sont présentés comme des postulats puisque ce modèle décrit l'expérience avec succès mais la physique à l'uvre dans un processus reste

encore obscure.

Sur la base de travaux antérieurs, Aharonov, Albert et Vaidman sont parvenus en 1988 à établir un processus de mesure dans lequel la perturbation introduite sur l'objet mesuré est absente (elle est plutôt de nature différente). La conséquence est que l'objet quantique ne voit pas son état changer lors de cette mesure, et c'est pourquoi on parle de "mesure faible" dont le résultat est donné par la "valeur faible".

Ce processus de mesure est accomplie de la manière suivante. Supposons qu'à un temps initial  $t_i$ , une première mesure du système est effectuée, celui-ci est alors projeté sur un état propre de l'observable mesurée appelé état de pré-sélection. Cet état évolue librement jusqu'à un temps  $t_f$  où la deuxième mesure d'une autre observable est accomplie, projetant ainsi le système sur l'état de post-sélection. Dans ce contexte, la valeur faible est le résultat d'un couplage entre un appareil de mesure et le système, qui a lieu à un temps intermédiaire de la transition, et qui est réalisé de telle sorte que la probabilité de transition entre les états de pré-sélection et de post-sélection soit inchangée en comparaison à une situation sans interaction. Il apparaît alors qu'une valeur faible est une grandeur relevant aussi bien de l'opérateur mesuré que des états mesurés aux pré et post-sélections. Il s'agit donc d'une propriété mesurée en respect à une transition entre deux états particuliers : en pratique, le succès de la mesure d'une valeur faible est acté dès lors que les états de pré et post-sélection sont mesurés avec succès. Le système voit alors son évolution restreinte puisqu'il doit être détecté dans les états de pré et post-sélection à  $t_i$  et  $t_f$  : cela se traduit par le fait qu'à un temps intermédiaire, le système se trouve dans une configuration particulière en terme de superposition d'états.

Or, du fait de son caractère non projectif, la valeur faible rend compte d'une partie de l'aspect de la superposition d'états. Elle est alors une signature de la superposition d'états particulière qu'à pris le système au cours de la transition, où cette superposition est une combinaison linéaire des vecteur propres de l'opérateur faiblement mesuré au temps intermédiaire.

Il apparaît que la valeur faible d'un opérateur entre deux états de pré et post-sélection est un nombre complexe qui n'est pas restreint au spectre de l'opérateur faiblement mesuré en question. Cependant, la manière dont la valeur d'une valeur faible rend compte d'une situation physique est encore mal identifié : le lien explicité plus haut entre la description d'un objet

quantique et le résultat d'une mesure n'est pas encore bien compris dans le cas de la mesure faible. Il s'agit donc d'en formuler l'équivalence respectivement à une mesure faible dans le but de comprendre la signification d'une valeur particulière de la valeur faible qui demeure obscure.

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans cette large démarche. Le premier chapitre est une présentation détaillée de la mesure faible, de la valeur faible et de la physique dont cette dernière rend compte.

Il y est notamment présenté que la mesure faible, du fait qu'elle accède à une signature de la superposition d'états entre des pré/post-sélections, peut sonder l'évolution du système à plusieurs temps intermédiaires et à plusieurs endroits en même temps au cours d'une transition. Ainsi, la succession de mesures faibles d'une propriété à des temps intermédiaires différents nous permet d'établir la trajectoire (ou les trajectoires) suivie par la propriété en question au cours de la transition, c'est à dire sa trajectoire faible. C'est exactement le sujet du chapitre 2 qui présente un protocole de mesure de l'évolution de la superposition d'états dans le temps dans le dispositif des fentes d'Young.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude des valeurs faibles que prend une particule dans les différentes branches de deux interféromètres de Mach-Zender imbriqués. Pour des états de pré et post-sélections bien choisis, il apparait que la valeur faible de la présence de la particule s'annule dans certaines branches de l'interféromètre et cela aboutit à l'observation de trajectoires faibles discontinues : du point de vue d'une mesure faible, la particule semble "disparaître" et "réapparaître" en plusieurs points du montage. Le travail de ce chapitre est alors d'identifier la physique à l'œuvre dans l'annulation de la valeur faible et de la généraliser pour des situations où les états de pré-sélection et post-sélection sont choisis arbitrairement.

Enfin, le chapitre 4 est un travail de revue de la littérature scientifique qui traite d'un phénomène précis : le Chat du Cheshire Quantique. Ce phénomène théorique particulier n'a pas encore été mesuré malgré deux tentatives expérimentales. Il se manifeste dans un interféromètre de Mach-Zender, où, pour des états de pré et post-sélection bien choisis, on observe dans une branche de l'interféromètre une valeur faible non nulle de la présence d'un photon ainsi qu'une valeur faible de sa polarisation nulle, alors que, dans l'autre branche, la valeur faible de la polarisation est non nulle alors que celle de la présence est nulle.

Les critiques étant nombreuses dans la littérature, aussi bien sur le plan

théorique qu'expérimental, le contenu du chapitre vise à éclaircir et clarifier les arguments présentés.



## Convention de notation

Dans l'ensemble du document, le produit tensoriel sera présent lors de l'introduction de certains termes ainsi qu'à la première ligne de chaque développement, puis ils seront sous-entendus dans les lignes qui suivront.



# I Introduction aux valeurs faibles

## 1 Introduction

Le processus de mesure d'une propriété physique est au cœur de la formulation de la physique quantique dont les livres de Dirac [5] (1930) et de Von Neumann [6] (1932) couvrent un grand nombre d'aspects. L'évolution d'une particule quantique entre deux états est descriptible, ou non, selon l'interprétation adoptée. Par exemple, l'interprétation de Copenhague (Bohr, Heisenberg, Jordan et Born) considère un phénomène de réduction du paquet d'onde comme émergeant d'une perturbation introduite par l'appareil de mesure sur le système et suggère une description en terme de superposition d'états virtuels du système avant une mesure. L'interprétation de De Broglie-Bohm [7] (1928) considère le mouvement d'une particule finie comme contraint par une onde pilote associée, réelle, évoluant selon l'équation de Schrödinger.

Cependant, la description d'une particule quantique demeure modifiée dès lors que l'on souhaite acquérir une information sur son état, et le scénario à l'œuvre diffère selon l'interprétation. Une manière d'obtenir une information sur l'état du système entre deux mesures a été imaginée par Wheeler [8] qui introduit une perturbation en regardant son effet à un temps antérieur où cette fois, l'information acquise sur le système quantique est de nature contrefactuelle (voir [9] pour l'interprétation bohmienne).

La prise en compte explicite de l'appareil de mesure est introduite par Von Neumann [6] qui imagine le déroulement d'une mesure en deux parties : d'une part une interaction entre un appareil de mesure et le système, et d'autre part par la mesure de l'appareil de mesure par l'expérimentateur. Plus tard en 1970, l'ajout d'un couplage supplémentaire à un environnement macroscopique permet à Zeh d'introduire le phénomène de

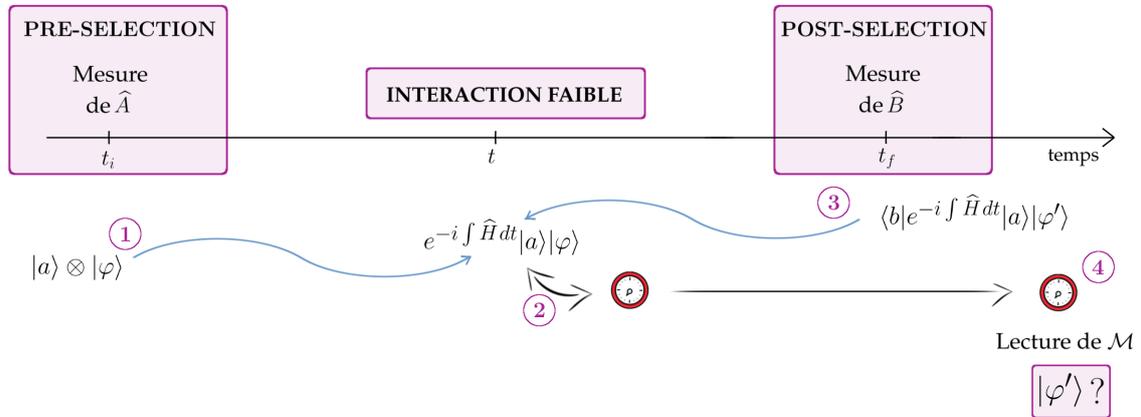


FIGURE 1 – Déroulement d’une mesure faible

décohérence [10]. En ces termes, Zurek justifie en 1981 le comportement différent d’un système quantique de celui d’un système classique face à une mesure [11].

Développée par Aharonov, Albert et Vaidman en 1988 [12], l’interaction faible désigne un cas asymptotique de la mesure de Von Neumann dans lequel la perturbation introduite par l’expérimentateur lors d’une mesure apparaît comme minimale. Ainsi, l’interaction faible décrit un processus non-destructif qui permet d’extraire une information sur une superposition d’états quantique d’un système.

Plus particulièrement, lorsqu’un système évolue entre deux états mesurés à des instants  $t_i$  et  $t_f$  différents, une telle interaction permet de sonder une propriété définie par une observable  $\hat{O}$  du système au cours de son évolution, et sans altérer la probabilité de transition entre les états définis à  $t_i$  et  $t_f$ .

C’est précisément ce que proposent Aharonov et ses collaborateurs en introduisant le protocole de mesure faible. Il se déroule selon les quatre étapes suivantes (voir figure 1).

Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{S}$ , l’appareil de mesure, symbolisé par l’état  $|\varphi\rangle$ , et le système considéré. A un temps initial  $t_i$ , on prépare  $\mathcal{S}$  dans un état propre  $|a\rangle$  de l’observable  $\hat{A}$ . Il s’agit de l’étape 1, celle de pré-sélection. Ensuite, pour la deuxième étape,  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{M}$  évoluent indépendamment jusqu’à un temps intermédiaire de la transition où  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{M}$  interagissent de manière non destructive : l’observable  $\hat{O}$  est faiblement mesurée. La troisième étape constitue celle de post-sélection à  $t_f$  :  $\mathcal{S}$  est projeté sur un état propre  $|b\rangle$

de  $\widehat{B}$  tel que  $[\widehat{A}, \widehat{B}] \neq 0$ . Enfin, la mesure de  $\mathcal{M}$  après la transition constitue la quatrième étape qui correspond à la lecture du résultat de la mesure faible, la valeur faible.

Il s'ensuit que dans un tel processus, le système ne peut être détecté dans l'état  $|a\rangle$  à  $t_i$  puis dans l'état  $|b\rangle$  à  $t_f$  que s'il adopte une certaine configuration en terme de superpositions d'états au cours de son évolution. La valeur faible est une signature de cette superposition particulière, lue sur l'appareil de mesure par l'expérimentateur à la quatrième étape. Elle s'exprime comme

$$O_w = \frac{\langle b | \widehat{O} | a \rangle}{\langle b | a \rangle} \quad (1)$$

et ne dépend que des états de  $\mathcal{S}$  à  $t_i$ , à  $t_f$ , et de l'observable  $\widehat{O}$  mesurée. C'est un résultat complexe, dont la norme n'est pas confinée au spectre de l'observable  $\widehat{O}$  en question.

Aussi, la mesure faible a été vivement critiquée dès son apparition [13], [14] mais sa pertinence quant à la description d'un système quantique devient de plus en plus manifeste [15],[16], [17], particulièrement dans le cadre de situations contrefactuelles [18], [19], [20] même si son interprétation est toujours débattue [21], [22], [23], [24].

Depuis le début des années 2000, les implémentations expérimentales sont en plein essor [25], [26], [27] et une mesure directe de la fonction d'onde est accomplie en 2011 [28]. La physique de la valeur faible peut ainsi être testée, par exemple dans le cas d'une violation des inégalités d'Heisenberg [29], de celles de Leggett-Larg [30], comme elle peut également trouver son application dans des manipulations d'optique quantique [31], [32], [33] et en information quantique [34].

Ce premier chapitre consiste en une introduction détaillée de la mesure faible et de la valeur faible : il se veut un peu plus détaillé que le contenu usuel d'un premier chapitre de manuscrit de thèse car sa visée est de donner au lecteur un premier aperçu du sujet. Cependant, ce chapitre n'est pas une revue du domaine et nous avons choisi de détailler certains aspects plutôt que d'autres en vue du contenu des chapitres qui suivront.

Le chapitre s'organise en trois parties. La première présente le modèle de Von Neumann qui modélise la mesure projective en explicitant un couplage entre un système étudié  $\mathcal{S}$  et un appareil de mesure  $\mathcal{M}$ . Le système  $\mathcal{S}$  est ensuite restreint à une évolution entre deux états particuliers et nous

aborderons les conséquences de cette restriction sur les résultats donnés par  $\mathcal{M}$ .

Ensuite, nous introduisons la mesure faible comme un cas asymptotique de la mesure de Von Neumann lorsque  $\mathcal{S}$  évolue entre deux états particuliers dans la deuxième partie. Nous nous appliquerons à détailler le processus d'une mesure faible et à décrire son résultat, la valeur faible, comme grandeur pertinente à la description d'un système quantique  $\mathcal{S}$ .

Ceci admis, la dernière partie se concentre sur la physique qui entre en jeu pour aboutir à une valeur faible en particulier. Cette troisième partie tente de donner au lecteur un aperçu de ce que nous renseigne la valeur faible au regard de la description d'un système quantique  $\mathcal{S}$ .

## 2 Mesure forte

### 2.1 Modèle de Von Neumann

#### 2.1.1 Principe

Le modèle de Von Neumann [35] est une application directe de l'intrication entre deux systèmes quantiques et donne un modèle explicite de l'axiome de projection. Dans cette approche, l'appareil de mesure  $\mathcal{M}$  est symbolisé par un état quantique qui interagit pendant un temps court avec le système étudié  $\mathcal{S}$  au cours de son évolution.

Rappelons que pour une observable hermitienne  $\hat{O} = \sum_i \omega_i |o_i\rangle\langle o_i|$ , la mesure projective d'un système physique  $\mathcal{S}$  dans un état quelconque  $|\psi\rangle$  donne le résultat  $\omega_i$  avec une probabilité  $|\langle o_i|\psi\rangle|^2$ . Après la mesure,  $\mathcal{S}$  est projeté sur l'état  $|o_i\rangle$ .

Le modèle de Von Neumann considère explicitement l'appareil de mesure  $\mathcal{M}$ . Ce dernier et le système évoluent indépendamment l'un de l'autre à partir d'un instant initial  $t_i$  jusqu'à ce qu'une interaction à  $t'$  entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{S}$  introduise une corrélation parfaite entre le système physique et l'appareil de mesure de telle sorte qu'une mesure de  $\mathcal{M}$  à un temps final  $t_f$  projette  $\mathcal{S}$  sur un état propre de l'observable mesurée (voir fig 2).

En pratique,  $\mathcal{M}$  peut être représenté par un degré de liberté (polarisation, profil spatial ou impulsion d'un état, etc) ou bien par l'état d'une deuxième particule. Lors de l'interaction,  $\mathcal{M}$  est dans une superposition d'états, chacun corrélé à un état propre de l'observable de  $\mathcal{S}$ .

Imaginons un système et un appareil de mesure dans des états initiaux respectifs  $|\psi(t_i)\rangle$  et  $|\varphi(t_i)\rangle$ . Ces deux vecteurs d'états sont définis dans

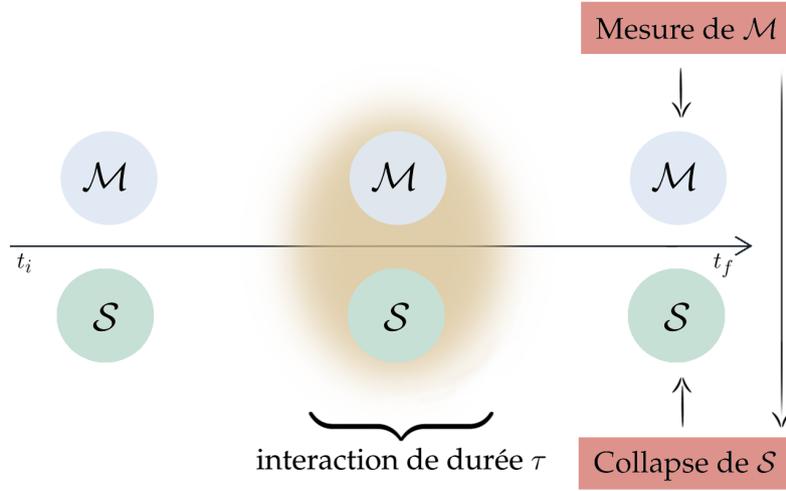


FIGURE 2 – Principe du Modèle de Von Neumann

deux espaces de Hilbert différents  $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$  et  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$  et l'état quantique initial du système  $\{\mathcal{M} + \mathcal{S}\}$  est un état factorisable qui est défini dans  $\mathcal{H}_{\mathcal{M}+\mathcal{S}} = \mathcal{H}_{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$

$$|\Psi(t_i)\rangle = |\psi(t_i)\rangle \otimes |\varphi(t_i)\rangle \quad (2)$$

$\varphi(x, t_i)$  est une fonction d'onde normalisée et localisée de largeur  $\Delta x$  à l'instant initial (l'image d'une gaussienne est plus commode à imaginer).

Soient les opérateurs hermitiens  $\hat{O}$  et  $\hat{P}$  représentant la propriété mesurée sur  $\mathcal{S}$  et l'impulsion de  $\mathcal{M}$  respectivement.  $\hat{O}$  agit dans  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$  et  $\hat{P}$  agit dans  $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ .

L'interaction entre l'appareil de mesure et le système est décrite par l'hamiltonien

$$\hat{H}_{int} = \gamma(t - t') \hat{O} \hat{P} \quad (3)$$

où  $\gamma(t - t')$  est une fonction du temps centrée en  $t'$  (généralement une gaussienne) et de largeur  $\tau$  tel que  $\tau \ll t_f - t_i$ . L'amplitude de  $\gamma(t)$  représente la force du couplage entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{S}$ .

Puisque la durée  $\tau$  de l'interaction est petite devant le temps de la dynamique du système, on peut négliger l'évolution libre de  $\mathcal{S}$  pendant  $\tau$  et la

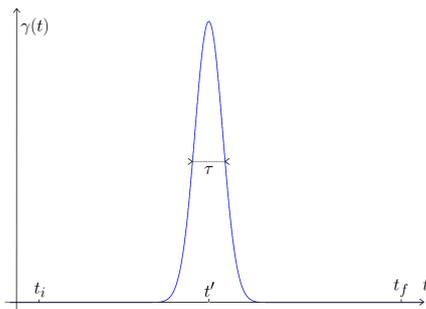


FIGURE 3 –  $\gamma(t - t')$

relation que satisfait l'opérateur d'évolution pendant ce laps de temps

$$i\hbar \frac{d}{dt} \widehat{U}(t' + \frac{\tau}{2}, t' - \frac{\tau}{2}) = \gamma(t - t') \widehat{O} \widehat{P} \widehat{U}(t' + \frac{\tau}{2}, t' - \frac{\tau}{2}) \quad (4)$$

s'intègre facilement pour donner

$$\begin{aligned} \widehat{U}(t' + \frac{\tau}{2}, t' - \frac{\tau}{2}) &= \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \int_{t' - \frac{\tau}{2}}^{t' + \frac{\tau}{2}} \gamma(t - t') \widehat{O} \widehat{P} dt\right) \\ &= \exp\left(-\frac{ig}{\hbar} \widehat{O} \widehat{P}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

où  $g = \int_{t' - \frac{\tau}{2}}^{t' + \frac{\tau}{2}} \gamma(t - t') dt$ .

Ainsi, l'évolution du système entre  $t_i$  et  $t_f$  est donnée par

$$\widehat{U}(t_f, t_i) = \widehat{U}_0(t_f, t' + \frac{\tau}{2}) e^{-ig\widehat{O}\widehat{P}} \widehat{U}_0(t' - \frac{\tau}{2}, t_i) \quad (6)$$

avec  $\widehat{U}_0$ , l'opérateur d'évolution associé à l'hamiltonien du système.

La plupart du temps, la durée  $\tau$  est ramenée à 0 et l'interaction est considérée ponctuelle sans perte de généralité. Aussi, l'évolution libre est souvent omise si elle n'apporte rien au raisonnement. Ainsi, l'évolution entre  $t_i$  et  $t_f$  est ramenée à la seule interaction  $\mathcal{M} - \mathcal{S}$  :

$$\widehat{U}(t_f, t_i) = \widehat{U}_0(t_f, t') e^{-ig\widehat{O}\widehat{P}} \widehat{U}_0(t', t_i) \equiv e^{-ig\widehat{O}\widehat{P}} \quad (7)$$

Cherchons maintenant à connaître la forme de la fonction d'onde associée à cette évolution. Considérons la base propre  $\{|o_i\rangle\}$  de  $\widehat{O}$ . Dans cette base, on a

$$\widehat{O} = \sum_i \omega_i |o_i\rangle \langle o_i| \quad |\psi(t_i)\rangle = \sum_j v_j^0(t_i) |o_j\rangle \quad v_j^0(t_i) = \langle o_j | \psi(t_i) \rangle \quad (8)$$

L'évolution du système  $\{\mathcal{M} + \mathcal{S}\}$  selon  $\widehat{H}_{int}$  donne alors

$$\begin{aligned} |\Psi(t' + \frac{\tau}{2})\rangle &= \widehat{U}_0(t_f, t' + \frac{\tau}{2}) e^{-\frac{ig}{\hbar} \widehat{O} \widehat{P}} |\psi(t' - \frac{\tau}{2})\rangle \otimes |\varphi(t' - \frac{\tau}{2})\rangle \\ &= \sum_i v_i^0 e^{-\frac{ig}{\hbar} \omega_i \widehat{P}} |o_i\rangle |\varphi(t' + \frac{\tau}{2})\rangle = \sum_i v_i^0 |o_i\rangle |\varphi_i\rangle \end{aligned} \quad (9)$$

où on a posé

$$|\varphi_i\rangle = e^{-\frac{ig}{\hbar} \omega_i \widehat{P}} |\varphi(t' + \frac{\tau}{2})\rangle \quad (10)$$

En identifiant l'opérateur translation dans la dernière égalité, on comprend que la représentation spatiale de  $|\varphi_i\rangle$  est une fonction d'onde translaturée de la quantité  $g\omega_i$ .

$$\langle x|\varphi_i\rangle = \varphi(x - g\omega_i, t' + \frac{\tau}{2}) \quad (11)$$

En conséquence, l'état de  $\{\mathcal{M} + \mathcal{S}\}$  après l'interaction est une superposition d'états translaturés de l'appareil de mesure, chacun corrélé à l'état propre  $|o_i\rangle$  correspondant, et individuellement pondéré par l'amplitude de probabilité  $v_i^0 = \langle o_i|\psi(t_i)\rangle$ .

$$\langle x|\Psi(t' + \frac{\tau}{2})\rangle = \sum_i v_i^0 \varphi(x - g\omega_i, t' + \frac{\tau}{2}) |o_i\rangle \quad (12)$$

Lorsque l'étalement  $\Delta x$  de  $\varphi(x, t' + \frac{\tau}{2})$  est bien inférieur à l'écart entre deux valeurs propres successives, c'est à dire si  $\Delta x \ll g|\omega_i - \omega_{i+1}|$ , le recouvrement entre  $\varphi(x - g\omega_i, t' + \frac{\tau}{2})$  et  $\varphi(x - g\omega_{i+1}, t' + \frac{\tau}{2})$  est nul (voir fig 4) et on a naturellement

$$\langle \varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij} \quad (13)$$

Finalement, la mesure de la position de l'appareil de mesure à  $t_f$  sélectionne une seule gaussienne translaturée de  $g\omega_i$  avec une probabilité associée  $|v_i^0|^2 = |\langle o_i|\psi\rangle|^2$ .

$$|\langle x|\Psi(t_f)\rangle|^2 = |v_i^0|^2 \quad (14)$$

La mesure de la position finale de  $\mathcal{M}$  projette directement le système sur un état propre  $|o_i\rangle$  de  $\hat{O}$ . On retrouve ainsi les résultats de la mesure projective :

1. Le résultat de la mesure est une valeur propre de l'observable.
2. Après la mesure, le système est projeté dans l'état propre associé à la valeur propre observée.
3. Le résultat de la mesure est obtenu avec une probabilité égale  $|v_i^0|^2$ .

Si le modèle de Von Neumann reproduit les résultats de la mesure projective, il présente aussi certains inconvénients. Dans un laboratoire, l'appareil de mesure est macroscopique alors que le modèle le traite comme un état quantique : après l'interaction,  $\mathcal{M}$  est une superposition d'états. Il y a donc une ambiguïté entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{S}$  puisque leur rôle pourrait être interchangé.

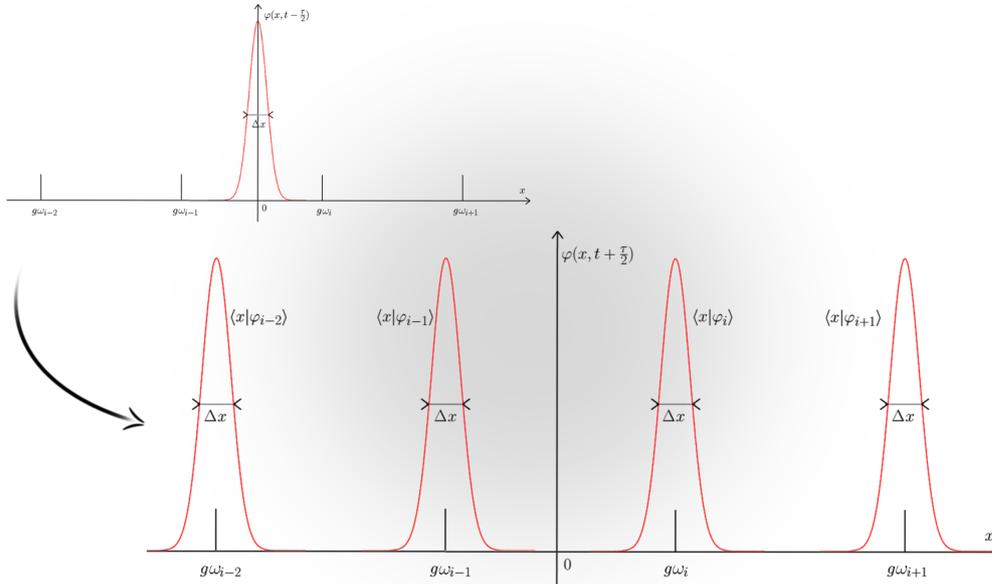


FIGURE 4 – Etat initial et état final de l'appareil de mesure

### 2.1.2 Application : Fentes d'Young

Considérons une des expériences les plus emblématiques de la physique quantique, l'expérience des fentes d'Young. On souhaite réaliser une mesure de Von Neumann pour savoir par quelle fente passe un photon avant d'être détecté à l'écran. Le rôle de l'appareil de mesure est joué par un degrés de liberté du photon, la polarisation. On cherche donc à avoir une correspondance parfaite entre la fente par laquelle passe le photon et la polarisation. Cet objectif peut être réalisé en plaçant sur chaque fente, un polariseur, de direction horizontale sur la fente 1 et de direction verticale à la fente 2. Un dispositif optique est placé après les fentes et fait converger le photon vers un polarimètre qui mesure  $\hat{\sigma}_z = \frac{\hbar}{2}(|H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|)$  (voir fig 5).

Supposons qu'au temps initial  $t_i$ , un photon de polarisation quelconque  $|P\rangle$  passe par les fentes puis interagit avec les polariseurs au temps  $t$  et est détecté par le polarimètre au temps final  $t_f$ . L'hamiltonien d'interaction

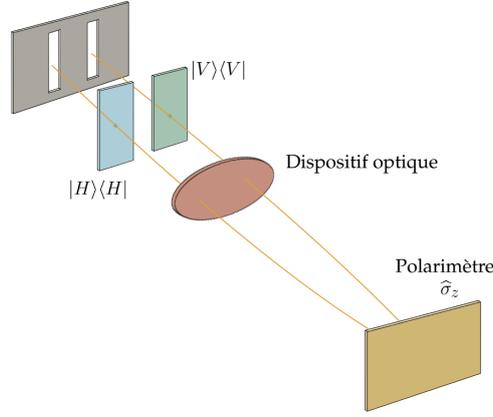


FIGURE 5 – Dispositif

est donné par

$$H_{int} = \frac{\gamma(t)\hbar}{2} \left\{ |\phi_1\rangle\langle\phi_1| \cdot |H\rangle\langle H| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2| \cdot |V\rangle\langle V| \right\} \quad (15)$$

où  $|\phi_1\rangle$  ( $|\phi_2\rangle$ ) est l'état pour la fente 1 (2) et où  $|H\rangle/|V\rangle$  sont des états de polarisation horizontale/verticale. Pour simplifier, on prendra  $\gamma(t)$  non nulle au temps  $t$  uniquement. A  $t_i$ , l'état du système  $\{\mathcal{M} + \mathcal{S}\}$  sera donné par

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle \right) |P\rangle \quad (16)$$

Le nouvel état  $|\Psi'\rangle$  associé à l'évolution gouvernée par  $\hat{H}_{int}$  est

$$\begin{aligned} |\Psi'\rangle = e^{-i \int \hat{H}_{int} dt} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ e^{-\frac{ig}{2} \hat{\Pi}_H \cdot \hat{\Pi}_1} |\phi_1\rangle |P\rangle + e^{\frac{ig}{2} \hat{\Pi}_V \cdot \hat{\Pi}_2} |\phi_2\rangle |P\rangle \right\} \quad (17) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \langle H|P\rangle e^{-\frac{ig}{2}} |\phi_1\rangle |H\rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle V|P\rangle e^{\frac{ig}{2}} |\phi_2\rangle |V\rangle \right\} \quad (18) \end{aligned}$$

où nous avons posé  $g = \int \gamma(t) dt$ ,  $\hat{\Pi}_{H/V} = |H/V\rangle\langle H/V|$  et  $\hat{\Pi}_{1/2} = |\phi_{1/2}\rangle\langle\phi_{1/2}|$ . Nous avons aussi renormalisé la deuxième ligne en considérant que la probabilité que le photon arrive au polarimètre est égale à 1 (autrement dit, le photon de la fente 1 (2) ne peut être polarisé qu'horizontalement (verticalement)). La mesure de  $\hat{\sigma}_z$  peut donner une polarisation

horizontale :

$$\langle H|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{ig}{2}}|\phi_1\rangle \quad (19)$$

et le système  $\mathcal{S}$  collapsera vers  $|\phi_1\rangle$ , ou une polarisation verticale :

$$\langle V|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{ig}{2}}|\phi_2\rangle \quad (20)$$

et le système  $\mathcal{S}$  collapsera vers  $|\phi_2\rangle$ . Les probabilités d'obtenir chaque résultat sont

$$|\langle H|\Psi'\rangle|^2 = \frac{1}{2} \quad |\langle V|\Psi'\rangle|^2 = \frac{1}{2} \quad (21)$$

et correspondent bien à la probabilité de passage du photon dans l'une ou l'autre fente.

## 2.2 Mesure de Von Neumann, pré-sélection et post-sélection

### 2.2.1 Principe

Imaginons qu'au lieu de mesurer la position finale de l'appareil de mesure, nous mesurons la propriété  $\hat{B} = \sum_i \beta_i |b_i\rangle\langle b_i|$  sur  $\mathcal{S}$  au temps final, puis la position finale de l'appareil de mesure (voir fig 6). Quelle sera l'effet d'une telle démarche sur les résultats possibles donnés par  $\mathcal{M}$ ? Pour

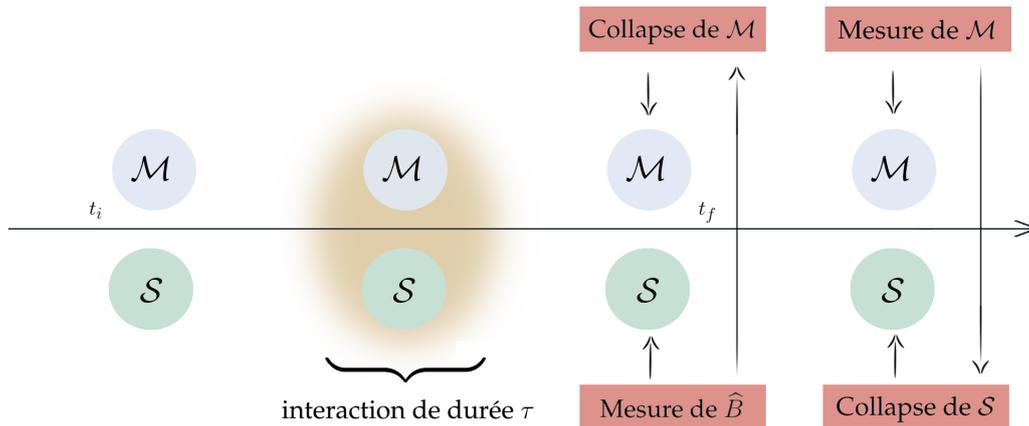


FIGURE 6 – Mesure de Von Neumann implémentée d'une post-sélection le savoir, examinons d'abord l'état final du système  $\{\mathcal{M} + \mathcal{S}\}$  à l'instant

final

$$|\Psi(t_f)\rangle = \sum_i v_i^0 e^{-\frac{ig}{\hbar}\omega_i \hat{P}} |\varphi(t_f)\rangle |o_i\rangle = \sum_i v_i^0 |o_i\rangle |\varphi_i\rangle \quad (22)$$

A  $t_f$ , on effectue la post-sélection, c'est à dire que l'on projette l'état final du système sur un état propre  $|b_i\rangle$  de  $\hat{B}$ . En décomposant  $|b_i\rangle$  dans la base propre de  $\hat{O}$ ,

$$|b_i\rangle = \sum_j v_j^2 |o_j\rangle \quad v_j^2 = \langle o_j | b_i \rangle \quad (23)$$

il vient

$$\langle b_i | \Psi(t_f) \rangle = \sum_{i,j} v_i^0 (v_j^2)^* \langle o_j | o_i \rangle |\varphi_i\rangle = \sum_i v_i^0 (v_i^2)^* |\varphi_i\rangle \quad (24)$$

On s'aperçoit que chaque état translaté est pondéré par l'amplitude de probabilité jointe de trouver  $|\psi\rangle$  dans l'état  $|o_i\rangle$  et  $|o_i\rangle$  dans l'état  $|b_i\rangle$ . En d'autres termes, un état translaté associé au résultat  $\omega_i$  de la mesure de  $\hat{O}$  n'existe que si on peut trouver le système dans l'état  $|o_i\rangle$  entre  $t_i$  et  $t_f$ , puis dans l'état  $|b_i\rangle$  à  $t_f$ . Ainsi, le résultat de la mesure est conditionnel, le résultat de la mesure de  $\mathcal{M}$  est une des valeurs propre de  $\hat{O}$  associée à un état propre dont l'évolution est compatible avec la post-sélection.

Plus bas, la figure 7 montre l'évolution de l'appareil de mesure. A  $t_i$ , la fonction d'onde de  $\mathcal{M}$  est centrée en zéro, puis est translaturée sur chaque valeur propre de  $\hat{O}$  pendant l'interaction. Au temps final, la post-sélection discrimine les états  $|o_i\rangle$  compatibles avec l'état final choisi. Puisque la corrélation entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{S}$  est parfaite, une incompatibilité entre un vecteur  $|o_i\rangle$  et l'état de post-sélection aura pour effet d'interdire la translation correspondante de la fonction d'onde de  $\mathcal{M}$ . Sur la figure 7, on a arbitrairement choisi que l'état propre  $|o_2\rangle$  est incompatible avec une post-sélection sur  $|b_i\rangle$ .

Ainsi,

$$\langle b_i | \hat{U}_0(t_f, t' + \frac{\tau}{2}) | o_2 \rangle = 0 \quad (25)$$

( $\hat{U}_0$  est l'évolution libre) et  $\varphi(x - g\omega_2, t)$  n'existe pas car le système ne peut pas être dans l'état  $|b_i\rangle$  à  $t_f$  et avoir été dans l'état  $|o_2\rangle$  à  $t' < t_f$ .

A la fin du processus, la mesure de la position finale de  $\mathcal{M}$  donne une

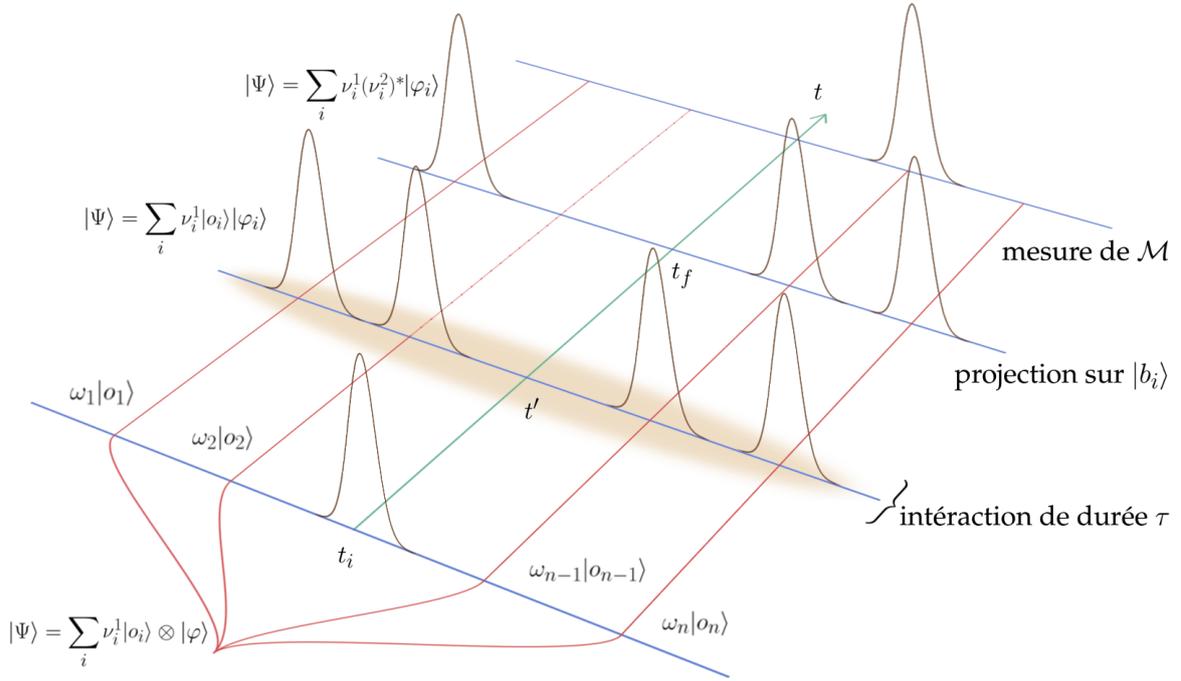


FIGURE 7 – Evolution de  $\mathcal{M}$

seule des gaussiennes translatées avec une probabilité  $|\nu_i^0 (\nu_j^2)^*|^2$ ,

$$|\langle x|\Psi\rangle|^2 = |\nu_i^0 (\nu_j^2)^*|^2 = |\langle o_i|\widehat{U}_0(t' - \frac{\tau}{2}, t_i)|\psi\rangle \langle b_i|\widehat{U}_0(t_f, t' + \frac{\tau}{2})|o_i\rangle|^2 \quad (26)$$

$$= |\langle b_i|\widehat{U}_0(t_f, t' + \frac{\tau}{2})\widehat{\Pi}_{|o_i\rangle}\widehat{U}_0(t' - \frac{\tau}{2}, t_i)|\psi\rangle|^2 \quad (27)$$

$$= P(b_i, t_f|o_i, t')P(o_i, t'|\psi, t_i) \quad (28)$$

qui est la probabilité que l'état quelconque  $|\psi\rangle$  soit dans un état  $|o_i\rangle$  compatible avec la post-sélection. Une autre manière de comprendre cette probabilité serait de dire qu'il s'agit de la probabilité de transition entre  $|\psi\rangle$  à  $t_i$  et  $|b_i\rangle$  à  $t_f$  en passant par l'état  $|o_i\rangle$  à  $t'$ .

Notons que la mesure de l'observable  $\widehat{B}$  à  $t_f$  ne projette qu'avec une certaine probabilité  $P(b_i, t_f|o_i, t')$  le système dans l'état  $|b_i\rangle$ . Dans le cas où la post-sélection n'est pas concluante, il s'agit de recommencer la procédure jusqu'à ce que la mesure  $\widehat{B}$  donne  $|b_i\rangle$ . Ainsi, la sélection d'un état final bien définit supprime le caractère reproductible de la mesure standard de Von Neumann. Le caractère aléatoire de la mesure se manifeste maintenant sous deux aspects : i) dans le succès ou l'échec de la la post-sélection et ii) dans la valeur propre  $\omega_i$  mesurée associée au vecteur propre

$|o_i\rangle$  de  $\hat{O}$ . Cependant, en se plaçant dans le sous-ensemble des évolutions qui conduisent à une post-sélection réussie, le caractère aléatoire est présent dans le résultat de la mesure uniquement.

Le point de vue standard de Von Neumann peut être retrouvé en sommant sur toutes les post-sélections possibles, autrement dit, en sommant sur toutes les évolutions possibles de  $|o_i\rangle$  dans la base propre de  $\hat{B}$

$$P_{VN} = \sum_j P(b_j, t_f | o_i, t') P(o_i, t' | \psi, t_i) = P(o_i, t' | \psi, t_i) \quad (29)$$

avec  $P_{VN}$ , la probabilité associée à la position finale de  $\mathcal{M}$  dans le cas d'une mesure de Von Neumann standard.

Implémentons la procédure d'une pré-sélection. Une pré-sélection consiste à imposer comme état initial du système un état propre d'une troisième observable, disons  $\hat{A} = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle \langle a_i|$  (voir fig 9).

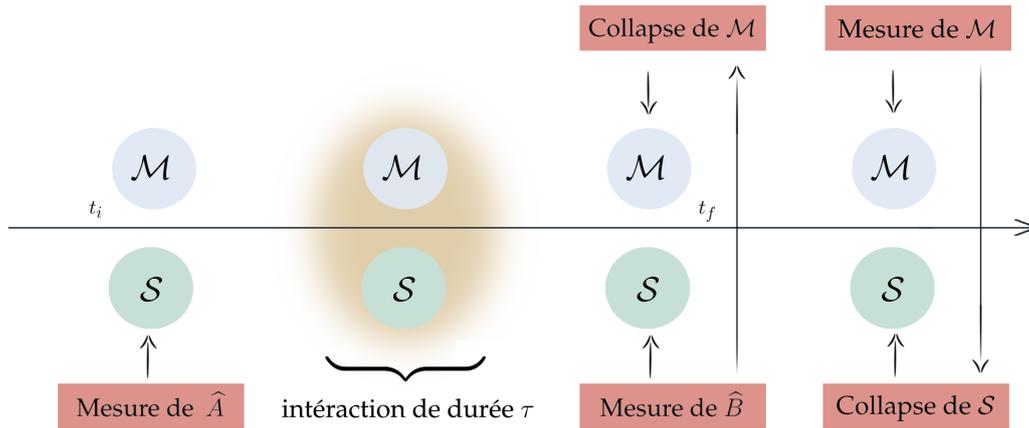


FIGURE 8 – Mesure de Von Neumann implémentée d'une pré-sélection et d'une post-sélection

Cette fois, l'état initial du système est donné par

$$|\Psi(t_i)\rangle = |a_i\rangle \otimes |\varphi\rangle \quad (30)$$

De la même manière qu'auparavant, on peut décomposer  $|a_i\rangle$  dans la base propre de l'observable mesurée  $|a_i\rangle = \sum_i v_i^1 |o_i\rangle$  et l'état après l'interaction l'état du système  $\{\mathcal{M} + \mathcal{S}\}$  est

$$|\Psi(t' + \frac{\tau}{2})\rangle = \sum_i v_i^1 e^{-\frac{i\hat{g}}{\hbar} \hat{O} \cdot \hat{P}} |o_i\rangle \otimes |\varphi\rangle = \sum_i v_i^1 |o_i\rangle |\varphi_i\rangle \quad (31)$$

avec  $|\varphi_i\rangle = e^{-\frac{ig}{\hbar}\omega_i\hat{P}}|\varphi\rangle$ . La post-sélection donne

$$\langle b_i|\Psi(t_f)\rangle = \sum_{i,j} v_i^1(v_j^2)^* \langle o_j|o_i\rangle |\varphi_i\rangle = \sum_i v_i^2(v_i^1)^* |\varphi_i\rangle \quad (32)$$

où on a posé  $|b_i\rangle = \sum_j v_j^2|o_j\rangle$ . En conséquence, le résultat d'une mesure de la position finale de  $\mathcal{M}$  sera obtenu avec une probabilité

$$|\langle x|\Psi(t_f)\rangle|^2 = |v_i^1(v_i^2)^*|^2 = |\langle b_i|\hat{U}_0(t_f, t')|o_i\rangle \langle o_i|\hat{U}_0(t', t_i)|a_i\rangle|^2 \quad (33)$$

$$= P(b_i, t_f|o_i, t')P(o_i, t'|a_i, t_i) \quad (34)$$

Ici, on peut faire les mêmes remarques que dans le cas d'une post-sélection, à la différence près qu'on connaît avec certitude l'état de départ. Le point de vue standard de Von Neumann est retrouvé en considérant qu'avant la mesure de  $\hat{A}$ , le système  $\mathcal{S}$  se trouve dans un état quelconque  $|\psi\rangle = \sum_i v_i^0|a_i\rangle$ . La probabilité de succès de la pré-sélection est alors donnée par  $|v_i^0|^2$ . La probabilité d'observer un état translaté conditionnée par une pré-sélection réussie est

$$|\langle x|\Psi(t_f)\rangle|^2 = |v_i^0 v_i^1(v_i^2)^*|^2 = P(b_i, t_f|o_i, t')P(o_i, t'|d_i, t_i)P(a_i, t_i|\psi, t_i) \quad (35)$$

et la probabilité dans le cas d'une mesure standard de Von Neumann est retrouvée en sommant sur toutes les pré-sélections et post-sélections possibles

$$P_{VN} = \sum_{k,j} P(b_k, t_f|o_i, t')P(o_i, t'|a_j, t_i)P(a_j, t_i|\psi, t_i) \quad (36)$$

Notons que la résolution de l'appareil de mesure  $\mathcal{M}$  n'intervient nulle part dans l'expression de la probabilité d'observation d'un état translaté. C'est la conséquence de l'approximation suivante : l'étalement de la fonction d'onde de  $\mathcal{M}$  est tel qu'on peut faire l'approximation qu'elle est nulle partout, sauf en la valeur propre de  $\hat{O}$  sur laquelle elle est centrée. Ainsi, aucun état translaté n'est privilégié par  $\mathcal{M}$  et l'information acquise lors de la mesure n'est représentative que du système  $\mathcal{S}$  mesuré.

### 2.2.2 Application : Mesure d'une polarisation avec pré-sélection et post-sélection

Considérons l'évolution de la polarisation d'un photon entre deux états de polarisation connue. A l'instant initial  $t_i$ , on prépare un photon de polarisation horizontale  $|H\rangle$  ( $\equiv$  pré-sélection) puis on le détecte à un temps

final  $t_f$  en polarisation rectiligne droite  $|H\rangle + |V\rangle$  ( $\equiv$  post-sélection). Dans le cas où la pré-sélection et la post-sélection sont accomplies avec succès, on souhaite connaître à  $t'$  la valeur de sa polarisation circulaire  $\hat{\sigma}_y = |\circ\rangle\langle\circ| - |\ominus\rangle\langle\ominus|$  (on prendra le formalisme de Jones dans lequel la polarisation s'exprime à la manière d'un spin) qui admet les états propres  $|\circ / \ominus\rangle = |H\rangle \pm i|V\rangle$ .

Le système  $\mathcal{S}$  sera donc la polarisation et nous choisissons comme appareil de mesure  $\mathcal{M}$ , le profil de la fonction d'onde. Un cristal biréfringent a un indice de réfraction qui dépend du nombre d'onde  $\hat{k}_x = \frac{1}{\hbar}\hat{p}_x$  et de la polarisation de l'onde qui le traverse. C'est donc l'objet idéal pour réaliser une interaction à  $t'$  entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{S}$  (voir fig 9).

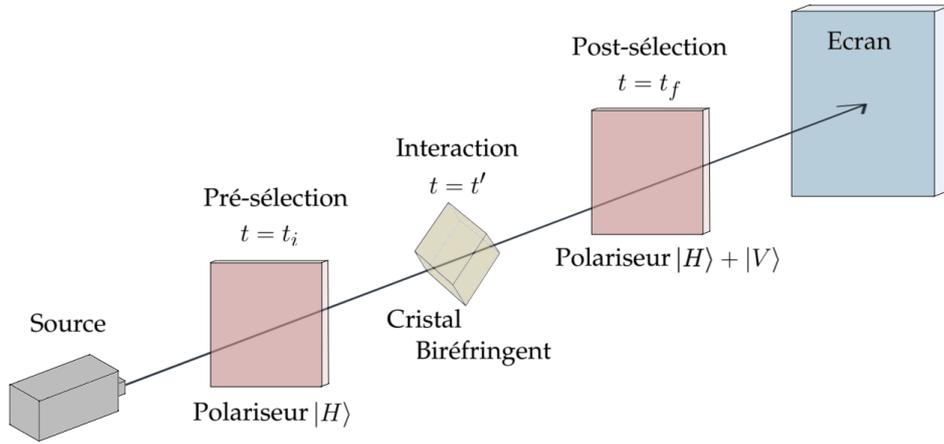


FIGURE 9 – Représentation schématique de l'expérience

En bout de course, on place un écran pour avoir accès au profil de la fonction d'onde. L'observation du profil constitue la mesure de  $\mathcal{M}$ .

L'état initial du système  $\{\mathcal{M} + \mathcal{S}\}$  est donné par

$$|\Psi\rangle = |H\rangle|\varphi\rangle \quad (37)$$

où  $\langle x|\varphi\rangle$  est une fonction d'onde localisée. A  $t'$ , le passage de l'onde dans le cristal peut être décrit par l'hamiltonien d'interaction [31]

$$\hat{H}_{int} = \gamma(t)\hat{\sigma}_y\hat{k}_x \quad (38)$$

et l'opérateur d'évolution de  $\mathcal{S}$  entre  $t_i$  et  $t_f$  est donné par

$$\hat{U}(t_f, t_i) = \hat{U}(t_f, t')e^{-\frac{i\gamma}{\hbar}\hat{\sigma}_y\hat{k}_x}\hat{U}(t', t_i) \quad (39)$$

avec  $g = \int \gamma(t)dt$ . Dans la suite, nous négligerons l'évolution entre  $t_i$  et  $t'$  et entre  $t'$  et  $t_f$ . Ainsi, juste après le passage par le cristal, le nouvel état de  $\{\mathcal{M} + \mathcal{S}\}$  est

$$|\Psi'\rangle = e^{-\frac{ig}{\hbar}\hat{\sigma}_y\hat{k}_x}|H\rangle|\varphi\rangle = \frac{1}{2}(|H\rangle - i|V\rangle)e^{\frac{ig}{2}\hat{k}_x}|\varphi\rangle + \frac{1}{2}(|H\rangle + i|V\rangle)e^{-\frac{ig}{2}\hat{k}_x}|\varphi\rangle \quad (40)$$

et correspond à deux translations de l'appareil de mesure. L'une associée à la valeur propre  $+1$  de  $\hat{\sigma}_y$  et l'autre à la valeur propre  $-1$ . Ensuite, vient la post-sélection

$$(\langle H| + \langle V|)|\Psi'\rangle = \frac{1}{2}(1 - i)e^{\frac{ig}{2}\hat{k}_x}|\varphi\rangle + \frac{1}{2}(1 + i)e^{-\frac{ig}{2}\hat{k}_x}|\varphi\rangle \quad (41)$$

et l'observation de  $\mathcal{M}$  à l'écran donne

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(1 - i)\varphi(x + \frac{g}{2}) + \frac{1}{2}(1 + i)\varphi(x - \frac{g}{2}) \quad (42)$$

où les  $\varphi(x \pm \frac{g}{2})$  ne se recouvrent pas. Notons que cette condition est remplie lorsque le temps de diffusion du paquet d'onde  $\varphi(x)$  est largement supérieur à l'intervalle de temps entre la pré-sélection et la mesure de  $\mathcal{M}$ . Finalement, l'intensité observée à l'écran est

$$|\varphi(x)|^2 = \frac{1}{2}|\varphi(x + \frac{g}{2})|^2 + \frac{1}{2}|\varphi(x - \frac{g}{2})|^2 \quad (43)$$

et correspond à deux pics d'intensité centrés respectivement en  $+\frac{g}{2}$  et en  $-\frac{g}{2}$ , où les  $+1$  et  $-1$  correspondent aux valeurs possibles de  $\hat{\sigma}_y$  sur  $\mathcal{S}$  compatibles avec la pré- et la post-sélection. Les facteurs  $\frac{1}{2}$  dans la dernière relation montrent que l'occurrence des résultats  $+1$  ou  $-1$  est équiprobable. Pour le système  $\mathcal{S}$  les deux valeurs propres sont compatibles avec l'évolution imposée du système avec autant de chance de tomber sur l'une ou l'autre.

### 2.3 Dynamique du pointeur dans le processus de Von Neumann

Nous allons maintenant étudier la dynamique du pointeur lors de mesures fortes. L'intérêt de cette étude deviendra clair lorsqu'on regardera plus loin la dynamique du pointeur lors de mesures faibles.

Le développement qui suit repose sur un papier [36] de Aharonov et Bohm. Seulement une partie de leur travail est présent ici. Revenons sur

l'état de  $\{M + S\}$  après une pré-sélection (mesure de  $\hat{A}$ ) et une interaction ( $\hat{H}_{int} = \gamma \hat{O} \cdot \hat{P}$ )

$$|\Psi(t')\rangle = e^{-\frac{i g}{\hbar} \hat{O} \cdot \hat{P}} |a_i\rangle |\varphi\rangle = \sum_n v_n^1 |o_n\rangle |\varphi_n\rangle$$

où  $v_n^1 = \langle o_n | a_i \rangle$  et  $\langle x | \varphi_n \rangle = \varphi(x - g\omega_n)$  (44)

### 2.3.1 Moyenne pour un état pré-sélectionné

Soit  $P_i(x)$ , la probabilité d'observation de  $\mathcal{M}$  en un point particulier  $x$  juste après l'interaction (sans post-sélection) associée à un état initial  $|a_i\rangle$  qui s'écrit

$$P_i(x) = \sum_n \langle a_i | \hat{\Pi}_{o_n} | a_i \rangle |\varphi(x - g\omega_n)|^2 = \sum_n |v_n^1|^2 |\varphi(x - g\omega_n)|^2 \quad (45)$$

et qui a exactement la même interprétation que la mesure standard : une mesure de  $\mathcal{M}$  nous donne le résultat  $\omega_n$  avec une probabilité  $\langle a_i | \hat{\Pi}_{o_n} | a_i \rangle$ . Dans le cas de  $N \rightarrow \infty$  états pré-sélectionnés identiques et soumis à une interaction, il paraît alors naturel que  $\mathcal{M}$  soit centré en la valeur moyenne  $\langle a_i | \hat{O} | a_i \rangle$  (à un facteur près)

$$\begin{aligned} \langle \Psi(t') | \hat{X} | \Psi(t') \rangle &= \sum_n |\langle o_n | a_i \rangle|^2 \int x |\varphi(x - g\omega_n)|^2 dx = g \sum_n \omega_n |\langle o_n | a_i \rangle|^2 \\ &= g \langle a_i | \hat{O} | a_i \rangle = g \int x P_i(x) dx \quad (46) \end{aligned}$$

Notons que  $\mathcal{M}$  est ici initialement centré en zéro et que si ce n'était pas le cas, le terme  $\langle \varphi | \hat{X} | \varphi \rangle$  viendrait s'ajouter à la dernière expression.

L'examen de cette valeur moyenne est décrite par la mesure standard. Une série de mesures de  $\mathcal{M}$  nous donnera en moyenne une distribution de probabilité centrée sur la valeur moyenne de  $\hat{O}$  dans l'état pré-sélectionné. Chaque mesure individuelle de la position finale de  $\mathcal{M}$  donne un résultat qui dépend à la fois de la distribution de probabilité spatiale de  $\mathcal{M}$  et de la probabilité de trouver l'état de pré-sélection dans un état propre de l'observable  $\hat{O}$ . Cependant, chaque état translaté de  $\mathcal{M}$  a une correspondance biunivoque avec chaque vecteur propre de  $\mathcal{S}$ , chaque état translaté a un profil identique (ie aucune valeur propre n'est privilégiée par  $\mathcal{M}$ ) et l'étalement de chaque état de  $\mathcal{M}$  est si petit que l'on peut considérer la fonction d'onde nulle partout sauf en la valeur propre. Dans cette limite, la perturbation introduite sur  $\mathcal{M}$  par la mesure est en lien direct avec la perturbation introduite sur  $\mathcal{S}$  et la probabilité d'observation d'un état translaté

donné ne dépend que de la probabilité d'observation d'une valeur propre pour un état pré-sélectionné donné.

Donc finalement, la mesure de Von Neumann explicite une distinction entre l'état du système avant et après la perturbation introduite par l'observateur lors de la mesure de  $\mathcal{M}$ . L'état du système  $\{\mathcal{M} + \mathcal{S}\}$  juste après l'interaction et avant la mesure peut ainsi être qualifié d'état de "pré-mesure" où chacun des résultats possibles à une mesure projective existe indépendamment de la perturbation postérieure introduite par l'observateur.

### 2.3.2 Moyenne pour un état pré-sélectionné et post-sélectionné

Considérons que  $P_i(x)$  et  $\langle \Psi(t') | \hat{X} | \Psi(t') \rangle$  constituent la statistique de l'ensemble pré-sélectionné [36]. Remarquons que la même statistique peut être observée pour une série d'expériences où l'état de pré-sélection serait identique à l'état de post-sélection. Ici, si le résultat est le même, chaque mesure individuelle de  $\mathcal{M}$  ne relève pas du même processus physique : la probabilité d'être dans un état propre de  $\hat{O}$  juste après l'interaction à  $t'$  est l'analogie de la probabilité conditionnelle dans le cas d'états pré/post sélectionnés identiques à  $t_f$ . Bien sûr, cela est trivial lorsqu'on écrit l'égalité des deux expressions :  $|\langle o_n | a_i \rangle|^2 = A(|a_i\rangle \rightarrow |o_n\rangle)A(|o_n\rangle \rightarrow |a_i\rangle) = A(|a_i\rangle \rightarrow |o_n\rangle)A^*(|a_i\rangle \rightarrow |o_n\rangle)$ . Cette approche conditionnelle prend cependant plus de sens lorsque l'on post-sélectionne sur un état différent. Projétons donc  $\{\mathcal{M} + \mathcal{S}\}$  sur un état propre  $|b_j\rangle$  de  $\hat{B}$  à l'instant final. On se restreint alors au sous ensemble des évolutions qui conduisent à l'état  $|b_j\rangle$ , et donc à un sous ensemble de la statistique de pré-sélection. L'amplitude de probabilité d'observation de  $\mathcal{M}$  pour ce sous ensemble est

$$|\Psi_j(t_f)\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\langle a_i | b_j \rangle|^2}} \langle b_j | e^{-\frac{ig}{\hbar} \hat{O} \cdot \hat{P}} | a_i \rangle | \varphi \rangle \quad (47)$$

qui est un état normalisé par la probabilité de succès de la post-sélection. La normalisation de l'état final implique que nous considérons que la post-sélection est accomplie avec succès à chaque tentative, cela signifie que nous nous plaçons dans le cadre d'une expérience reproductible et que le caractère aléatoire ne se manifeste que par la perturbation introduite sur  $\mathcal{M}$  à la mesure (elle-même en correspondance avec la perturbation introduite sur  $\mathcal{S}$ ).

La probabilité d'observer une valeur propre pour ce sous ensemble est

$$P_{ij}(x) = \frac{1}{|\langle a_i | b_j \rangle|^2} |\langle b_j | \hat{\Pi}_{o_n} | a_i \rangle|^2 |\varphi(x - g\omega_n)|^2 \quad (48)$$

Sommer sur tous les sous-ensembles (comme déjà fait auparavant), nous mène à la probabilité de l'ensemble de pré-sélection

$$P_i(x) = \sum_j |\langle b_j | a_i \rangle|^2 P_{1j}(x) \quad (49)$$

C'est ainsi que l'on peut réécrire  $\langle \hat{O} \rangle$  de la manière suivante

$$\begin{aligned} \langle a_i | \hat{O} | a_i \rangle &= \int x P_i(x) dx = \sum_j |\langle b_j | a_i \rangle|^2 \int x P_{1j}(x) dx \\ &= \sum_j |\langle b_j | a_i \rangle|^2 \langle \Psi_j(t_f) | \hat{X} | \Psi_j(t_f) \rangle \end{aligned} \quad (50)$$

L'on obtient alors une expression de la valeur moyenne de l'opérateur mesurée en fonction des résultats possibles à une mesure postérieure (la post-sélection).

Littéralement, une moyenne est la somme des résultats mesurés, chacun pondérés par leur probabilité d'occurrence. Ici, dans le cadre d'un processus de pré/post-sélection, c'est une moyenne qui fait office de résultat, pondérée par une probabilité de post-sélection.

Rappelons nous que  $\mathcal{M}$  nous donne une des valeurs propres  $\omega_n$  de  $\hat{O}$  compatible avec l'évolution entre deux états particuliers. De ce fait, l'on peut observer plusieurs valeurs propres pour une configuration unique d'états de pré-sélection et de post-sélection. Ainsi, l'on ne peut pas associer le résultat  $\omega_n$  à une probabilité de transition  $|\langle b_j | a_i \rangle|^2$  et l'on ne peut donc pas donner l'interprétation d'une moyenne littérale à la dernière expression. En revanche, cette probabilité reste associable à un sous-ensemble de valeurs propres. Si l'on explicite  $\langle \Psi_j(t_f) | \hat{X} | \Psi_j(t_f) \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_j(t_f) | \hat{X} | \Psi_j(t_f) \rangle &= \sum_k \frac{|\langle b_j | o_k \rangle|^2 |\langle o_k | a_i \rangle|^2}{|\langle a_i | b_j \rangle|^2} \int x |\varphi(x - g\omega_k)|^2 dx \\ &= g \sum_k \frac{|\langle b_j | o_k \rangle|^2 |\langle o_k | a_i \rangle|^2}{|\langle a_i | b_j \rangle|^2} \omega_k \end{aligned} \quad (51)$$

et que l'on substitue dans l'expression de  $\langle a_i | \hat{O} | a_i \rangle$ ,

$$\langle a_i | \hat{O} | a_i \rangle = \sum_j |\langle b_j | a_i \rangle|^2 \langle \Psi_j(t_f) | \hat{X} | \Psi_j(t_f) \rangle = g \sum_{k,j} \omega_k |\langle b_j | \hat{\Pi}_{o_k} | a_i \rangle|^2 \quad (52)$$

on se rend compte que la valeur moyenne d'une observable s'écrit comme une double somme, l'une concernant le spectre de  $\hat{O}$ , et l'autre concernant les états de post-sélection.

## 3 Mesure faible

### 3.1 Principe physique

Le modèle de Von Neumann décrit une interaction qui introduit une corrélation parfaite entre l'appareil de mesure et le système. Pour la fonction d'onde de l'appareil de mesure, cela se traduit par un étalement  $\Delta x$  très inférieur à l'espacement entre deux valeurs propres consécutives  $g|\omega_i - \omega_{i+1}|$  (à un facteur près). En ce sens, la mesure de Von Neumann est une mesure précise.

La mesure faible décrit une mesure imprécise. L'étalement de la fonction d'onde devient très grand comparé à l'espacement entre les valeurs propres extrêmes de  $\hat{O}$  :  $\Delta x \gg g|\omega_1 - \omega_n|$  (à un facteur près). En conséquence, le recouvrement entre deux fonctions d'onde translatées sur deux valeurs propres différentes n'est plus nul : les états de l'appareil de mesure  $\mathcal{M}$  ne sont plus orthogonaux entre eux. Cela signifie qu'ils peuvent interférer entre eux.

Lorsque l'on ajoute la pré-sélection et la post-sélection, une mesure précise donnera un état translaté en particulier et la probabilité de le mesurer est la probabilité que le système ait été dans l'état propre de  $\hat{O}$  correspondant au cours de la transition. Pour une mesure imprécise, les fonctions d'ondes de  $\mathcal{M}$  interfèrent entre elles avec comme poids associé, l'amplitude de probabilité d'apparition d'un état translaté pour une pré-sélection et une post-sélection donnée. Ces interférences peuvent être constructives/destructives et l'état final de l'appareil de mesure  $\mathcal{M}$  est un état unique dont la translation est donnée par la résultante des interférences. Dans ce nouveau régime, l'état final de  $\mathcal{M}$  est maintenant translaté d'une quantité unique résultant des interférences, et qui est la valeur faible (voir la figure 10) abordée plus bas. La fonction d'onde finale de  $\mathcal{M}$  a une largeur  $\Delta x$  supérieure à la largeur totale du spectre de  $\hat{O}$ , et de ce fait, l'état de  $\{M + \mathcal{S}\}$  est un état factorisable où la mesure de  $\mathcal{M}$  n'affecte  $\mathcal{S}$  à aucun moment. Il n'y a ainsi plus aucune corrélation entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{S}$  et la mesure finale de  $\mathcal{M}$  ne projette pas le système  $\mathcal{S}$  : la mesure faible décrit une interaction non-destructive.

Considérons la mesure de Von Neumann implémentée d'une pré-sélection et d'une post-sélection. L'état final est toujours donné par

$$\langle b_i | \Psi(t_f) \rangle = \sum_i v_i^1 (v_i^2)^* | \varphi_i \rangle \quad (53)$$

avec

$$|\varphi_i\rangle = e^{-\frac{i g \omega_i}{\hbar} \hat{P}} |\varphi\rangle \quad (\nu_k^2)^* = \langle b_i | \hat{U}_0(t_f, t') | o_k \rangle \quad \nu_l^1 = \langle o_i | \hat{U}_0(t', t_i) | a_l \rangle \quad (54)$$

La conséquence directe d'un grand étalement  $\Delta x$  de  $\varphi_i(x, t_f)$  est

$$\langle \varphi_j | \varphi_i \rangle = 1 - \epsilon \quad (55)$$

où  $\epsilon \ll 1$ . Ainsi, l'intensité associée à la mesure de la position finale de  $\mathcal{M}$  n'est plus donnée par  $\sum_i |\varphi_i(x)|^2$  mais par  $\sum_{i,j} \varphi_i(x) \varphi_j^*(x)$  dont le profil admet pour moyenne la valeur faible. La figure 10 montre une représentation schématique de l'évolution de  $\mathcal{M}$ .

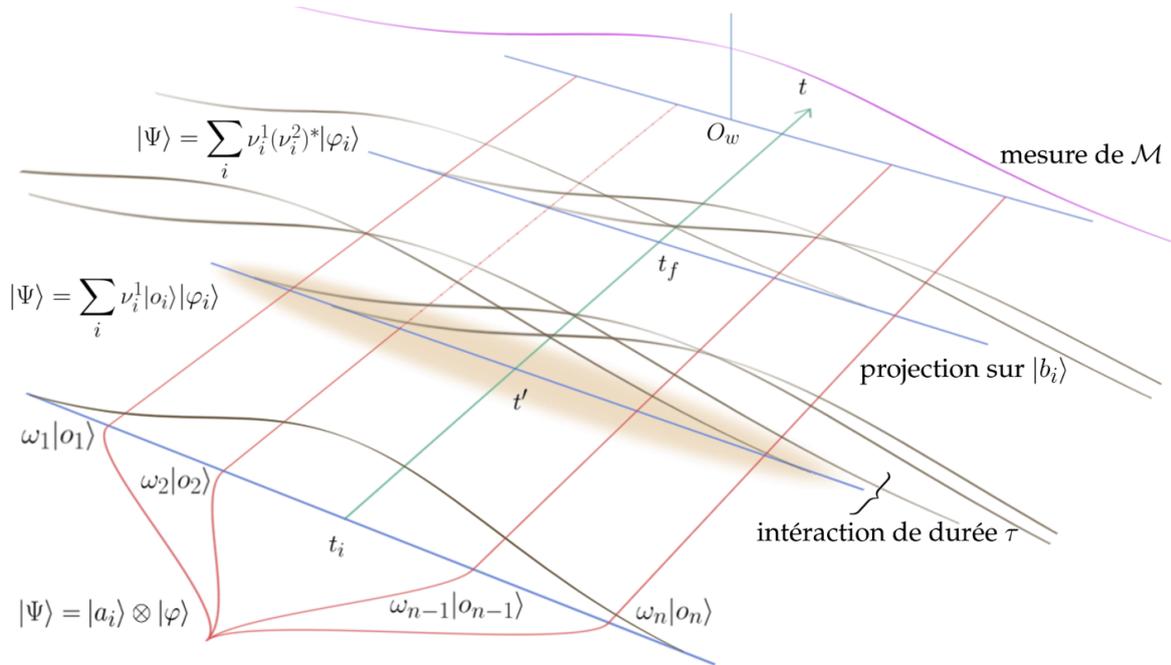


FIGURE 10 – Evolution de  $\mathcal{M}$  pour une interaction faible

Si un état translaté est incompatible avec la post-sélection, sur la figure 10  $\langle b_i | \hat{U}_0(t_f, t') | o_2 \rangle = 0$ , alors cet état ne contribue pas à l'interférence résultante.

Finalement, la fonction d'onde de  $\mathcal{M}$  à  $t_f$  est une fonction centrée en  $O_w$  ( $w$  pour "weak") appelé valeur faible de l'observable  $\hat{O}$ . Nous allons maintenant la définir plus précisément.

### 3.2 Principe opérationnel

Abordons à présent la valeur faible sous un angle plus opérationnel. Imaginons une situation (voir figure 11) où un expérimentateur souhaite déterminer la valeur faible de l'observable  $\hat{O}$  pour des états de pré-sélection et de post-sélection  $|a_i\rangle$  et  $|b_j\rangle$  respectivement.

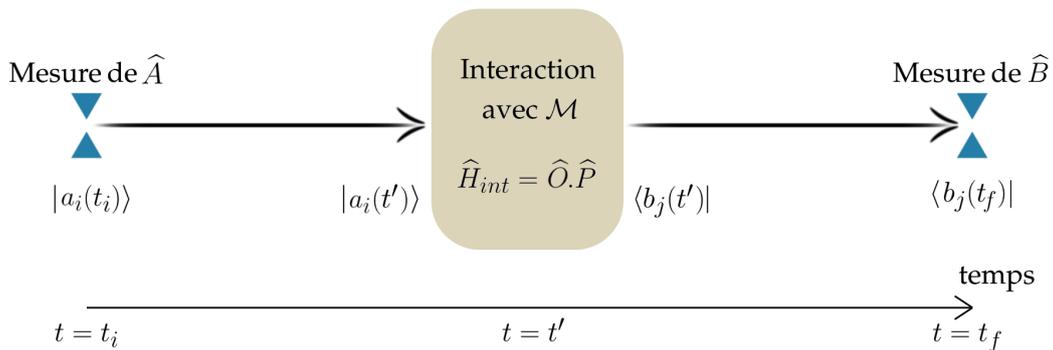


FIGURE 11 – Situation

Il procède en quatre étapes :

1. Préparation du système  $\mathcal{S}$  dans l'état  $|a_i\rangle$ .
2. Couplage faible entre le système  $\mathcal{S}$  et l'appareil de mesure  $\mathcal{M}$ .
3. Mesure de  $\hat{B}$  : l'expérimentateur ne devra alors retenir que les cas où la mesure donne un état  $|b_j\rangle$  uniquement.
4. Mesure de l'appareil de mesure  $\mathcal{M}$  pour lire la valeur faible.

et l'on considère que la particule évolue librement entre chacune de ces étapes.

Dans le régime faible, l'étalement  $\Delta x$  de la fonction d'onde  $\mathcal{M}$  est tel que chaque état translaté sera extrêmement proche de l'état initial de  $\mathcal{M}$  (l'étalement de  $\mathcal{M}$  est bien plus grand que la quantité dont  $\mathcal{M}$  est translaté lors de l'interaction). Alors, l'interférence résultante des fonctions d'onde translattées donnera un état final très proche, lui aussi, de la fonction d'onde initiale. De ce fait l'état final de  $\mathcal{M}$  centré en  $O_w$  est le résultat d'une évolution gouvernée par  $\hat{H}_{int} = \gamma(t' - t) \hat{O} \hat{P}$  qui peut s'écrire sous la forme d'un développement limité au premier ordre autour de la position initiale de  $\mathcal{M}$ . Posons pour la suite,  $\Delta x = \Delta$  et par conséquent  $\Delta p = \frac{1}{\Delta}$ .

Si l'on considère l'évolution effective sur  $\mathcal{M}$  seulement, à savoir le déroulement des étapes 1 à 3, on a

$$\widehat{U}_{\mathcal{M}}(t_f, t_i) = \langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t') e^{-\frac{ig}{\hbar} \widehat{O} \widehat{P}} \widehat{U}_0(t', t_i) | a_i \rangle \quad (56)$$

où  $\widehat{U}_0$  est l'évolution libre agissant sur  $\mathcal{S}$  et  $g \underset{\tau \rightarrow 0}{=} \int_{t'-\tau/2}^{t'+\tau/2} dt \gamma(t-t')$ . L'état final de l'appareil de mesure est alors donné par

$$|\varphi'\rangle = \widehat{U}_{\mathcal{M}}(t_f, t_i) |\varphi(t_i)\rangle \quad (57)$$

Pour une mesure imprécise,

$$\widehat{U}_{\mathcal{M}}(t_f, t_i) = \langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t') \left( 1 - \frac{ig}{\hbar} \widehat{O} \widehat{P} \right) \widehat{U}_0(t', t_i) | a_i \rangle \quad (58)$$

où nous nous sommes limité au premier ordre dans l'expansion de l'interaction. On développe,

$$\begin{aligned} \widehat{U}_{\mathcal{M}}(t_f, t_i) &= \langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t') \widehat{U}_0(t', t_i) | a_i \rangle \\ &\quad - \frac{ig}{\hbar} \langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t') \widehat{O} \widehat{U}_0(t', t_i) | a_i \rangle \widehat{P} \end{aligned} \quad (59)$$

$$= \langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t_i) | a_i \rangle \left\{ 1 - \frac{ig}{\hbar} \frac{\langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t') \widehat{O} \widehat{U}_0(t', t_i) | a_i \rangle}{\langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t_i) | a_i \rangle} \widehat{P} \right\} \quad (60)$$

$$= \langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t_i) | a_i \rangle \left\{ 1 - \frac{ig}{\hbar} O_w \widehat{P} \right\} \quad (61)$$

$$\approx \langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t_i) | a_i \rangle \exp\left(-\frac{ig}{\hbar} O_w \widehat{P}\right) \quad (62)$$

et on obtient une expression de l'opérateur d'évolution de l'appareil de mesure explicitant la valeur faible  $O_w$

$$O_w = \frac{\langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t') \widehat{O} \widehat{U}_0(t', t_i) | a_i \rangle}{\langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t_i) | a_i \rangle} = \frac{\langle b_j(t') | \widehat{O} | a_i(t') \rangle}{\langle b_j(t') | a_i(t') \rangle} \quad (63)$$

qui est un nombre complexe :  $O_w = \Re(O_w) + i\Im(O_w) = \rho_1 + i\rho_2$ . La troncation au premier ordre du développement de l'interaction est valable, si pour  $n \geq 2$  [15],

$$|\langle b_j(t') | \widehat{O}^n | a_i(t') \rangle P^n g^n| \ll |\langle b_j(t') | a_i(t') \rangle| \quad (64)$$

$$|\langle b_j(t') | \widehat{O}^n | d_i(t') \rangle P^n g^n| \ll |\langle b_j(t') | \widehat{O} | a_i(t') \rangle| \quad (65)$$

En plus de cela, le dernier passage de l'expansion à l'exponentielle induit  $O_w g P \ll 1$  où l'étalement de  $P$  est gouverné par  $\frac{1}{\Delta}$ , et finalement

$$\frac{\Delta}{g} \gg |O_w| \quad (66)$$

qui est une bonne nouvelle puisque les conditions d'une interaction faible peuvent être réalisées par un appareil de mesure imprécis ( $\Delta$  grand) ou bien une constante de couplage très petite ( $g$  petit), ce qui est souvent privilégié.

Il s'agit à présent de réaliser l'étape quatre, à savoir la lecture de la partie réelle et de la partie imaginaire de  $O_w$ . Elles sont toutes les deux accessibles par des mesures de la position finale et de l'impulsion finale de la fonction d'onde de  $\mathcal{M}$ . Effectivement, l'amplitude de probabilité de détection de  $\mathcal{M}$  en un point particulier  $x_0$  s'écrit

$$\langle x_0 | \varphi' \rangle = \langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t_i) | a_i \rangle \left( \varphi(x_0) - g\rho_1 \partial_{x_0} \psi(x) + i g\rho_2 \partial_{x_0} \psi(x) \right) \quad (67)$$

et la probabilité associée, tronquée au premier ordre,

$$P'(x_0) = \varphi'(x_0) \varphi'^*(x_0) \quad (68)$$

$$= |\langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t_i) | a_i \rangle|^2 \left( \varphi(x_0) \varphi^*(x_0) - g\rho_1 (\varphi(x_0) \partial_{x_0} \varphi^*(x) + \varphi^*(x_0) \partial_{x_0} \varphi(x)) \right) \quad (69)$$

permet d'accéder à la partie réelle de  $O_w$  en évaluant l'impact de l'interaction sur  $\mathcal{M}$  par rapport à une évolution sans interaction :

$$\frac{P'(x_0)}{P(x_0)} = 1 - g\rho_1 \frac{\varphi(x_0) \partial_{x_0} \varphi^*(x) + \varphi^*(x_0) \partial_{x_0} \varphi(x)}{\varphi(x_0) \varphi^*(x_0)} \quad (70)$$

En revanche, une mesure finale de l'impulsion finale  $p_0$  de  $\mathcal{M}$  a une amplitude de probabilité de succès de

$$\langle p_0 | \varphi' \rangle = \langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t_i) | a_i \rangle \left( \varphi(p_0) - i g\rho_1 p_0 \varphi(x) - g\rho_2 p_0 \varphi(p_0) \right) \quad (71)$$

d'où la probabilité

$$P'(p_0) = |\langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t_i) | a_i \rangle|^2 \left( \varphi(p_0) \varphi^*(p_0) - 2g\rho_2 p_0 \varphi(p_0) \varphi^*(p_0) \right) \quad (72)$$

qui permet d'accéder à la partie imaginaire de  $A_w$  de manière identique à la partie réelle

$$\frac{P'(p_0)}{P(p_0)} = 1 - 2g\rho_2 p_0 \quad (73)$$

Clairement, la valeur faible se calcule en évaluant la réponse de l'interaction  $\mathcal{M}$ - $\mathcal{S}$  sur  $\mathcal{M}$ , qu'il s'agisse de la partie réelle ou imaginaire. Cependant, la réponse n'est pas de même nature : la partie réelle est calculée selon un déplacement de la fonction d'onde relatif à son état initial alors que la partie imaginaire correspond à une diminution de l'intensité. Cela est attendu puisque une multiplication sur  $p$  devient une addition sur  $x$ . Par construction donc, la partie réelle rend bien compte d'interférences alors que la partie imaginaire rend compte de la non-unitarité du processus, mais tout cela du point de vue de la réponse de l'interaction sur  $\mathcal{M}$ . Enfin, on peut remarquer que pour la valeur faible munie d'une partie imaginaire négative, on constate une amplification de l'intensité. Ce phénomène possède un large champ d'application, notamment dans les techniques expérimentales en optique quantique, voir [37] pour un exemple et [33] pour une revue des applications possibles.

Il est plus commode d'inférer les parties réelles et imaginaires par l'examen de la moyenne de  $\mathcal{M}$  [17]. Effectivement, la mesure de  $\mathcal{M}$  reste une mesure d'un état quantique par un observateur extérieur. A cela s'ajoute le régime  $\Delta$  grand dans lequel nous nous trouvons, donc un résultat de mesure quelconque  $\lambda$  est obtenu avec une grande incertitude. En vue d'obtenir un bon niveau de fiabilité, l'on doit donc réaliser l'expérience sur un ensemble de  $N$  particules pour que l'incertitude décroissent d'un facteur  $1/\sqrt{N}$ .

La moyenne de la distribution de probabilité associée à une mesure de la position finale de  $\mathcal{M}$  est

$$\langle \varphi' | \hat{X} | \varphi' \rangle = |\langle b_j | \hat{U}_0(t_f, t_i) | a_i \rangle|^2 \langle \varphi | \left\{ 1 + \frac{ig}{\hbar} O_w^* \hat{P} \right\} \hat{X} \left\{ 1 - \frac{ig}{\hbar} O_w \hat{P} \right\} | \varphi \rangle \quad (74)$$

$$= |\langle b_j | \hat{U}_0(t_f, t_i) | a_i \rangle|^2 \langle \varphi | \left\{ \hat{X} - \frac{ig}{\hbar} \Re(O_w) [\hat{X}, \hat{P}] - \frac{g}{\hbar} \Im(O_w) \{ \hat{X}, \hat{P} \} \right\} | \varphi \rangle \quad (75)$$

$$= |\langle b_j | \hat{U}_0(t_f, t_i) | a_i \rangle|^2 \left\{ \langle \varphi | \hat{X} | \varphi \rangle + g \Re(O_w) \right\} \quad (76)$$

et nous renseigne sur la partie réelle de  $O_w$ . En revanche, alors que si la

partie réelle émerge après une mesure de  $\widehat{X}$ , la mesure de  $\widehat{P}$  nous renseignera sur la partie imaginaire

$$\langle \varphi' | \widehat{P} | \varphi' \rangle = |\langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t_i) | a_i \rangle|^2 \langle \varphi | \left\{ 1 + \frac{ig}{\hbar} O_w^* \widehat{P} \right\} \widehat{P} \left\{ 1 - \frac{ig}{\hbar} O_w \widehat{P} \right\} | \varphi \rangle \quad (77)$$

$$= |\langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t_i) | a_i \rangle|^2 \langle \varphi | \left\{ \widehat{P} - \frac{ig}{\hbar} \Re(O_w) [\widehat{P}, \widehat{P}] - \frac{g}{\hbar} \Im(O_w) \{ \widehat{P}, \widehat{P} \} \right\} | \varphi \rangle \quad (78)$$

$$= |\langle b_j | \widehat{U}_0(t_f, t_i) | a_i \rangle|^2 \left\{ \langle \varphi | \widehat{P} | \varphi \rangle - \frac{2g}{\hbar} \langle \varphi | \widehat{P}^2 | \varphi \rangle \Im(O_w) \right\} \quad (79)$$

où cette fois, le déplacement est proportionnel à  $\Im(O_w)$  et à  $\langle \varphi | \widehat{P}^2 | \varphi \rangle$ .

Notons au passage, que si l'on écarte la nature quantique de l'appareil de mesure, c'est à dire que du fait de sa grande incertitude, l'on soit obligé de réaliser plusieurs mesures afin d'établir le résultat avec une bonne fiabilité, on s'aperçoit que la valeur faible est identique si l'on considère N processus de pré/post-sélection ou un seul. Autrement dit, la valeur faible est identique pour une particule ou pour un ensemble de particules toutes pré/post-sélectionnées par les mêmes états. Nous reviendrons sur ce point plus tard.

Enfin, un travail de Jozsa [17] montre une dépendance explicite des parties réelle et imaginaire d'une valeur faible avec l'écart type de l'appareil de mesure. Ainsi, les moyennes de  $x$  et  $p$  après un processus de pré/post-sélection peuvent être données par ( $g$  étant la constante de couplage et  $m$  la masse de  $\mathcal{M}$ )

$$\langle x(t_f) \rangle = \langle x(t_i) \rangle + g \Re(O_w) + g \Im(O_w) \frac{d}{dt} \{ \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \} \quad (80)$$

$$\langle p(t_f) \rangle = \langle p(t_i) \rangle + 2g \Im(O_w) \{ \langle p^2(t) \rangle - \langle p(t) \rangle^2 \} \quad (81)$$

où la dérivée temporelle est calculée au temps de l'interaction  $\mathcal{M}$ - $\mathcal{S}$ . On observe ainsi que  $\langle x \rangle$  est translatée de la partie réelle de  $O_w$  alors que la partie imaginaire est étroitement liée à la fonction d'onde de  $\mathcal{M}$ . Cela nous amène à penser que seule la partie réelle de  $O_w$  est représentative du système alors que sa partie imaginaire ne serait qu'un artéfact produit par l'appareil de mesure [17]. Nous reviendrons sur ce point plus tard.

### 3.3 Application : Mesure faible de la polarisation

Proposons nous de mesurer faiblement la propriété  $\hat{\sigma}_z = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|$  d'un photon entre deux états de polarisation connus. L'illustration est tirée d'un article présentant un petit panorama des mesures faibles [31]

La figure 12 représente des photons émis un par un par une fibre optique et collimatés par une première lentille. Leur passage par les lames demi-onde et quart-d'onde constitue la pré-sélection qui impose l'état suivant de  $\{\mathcal{M} + \mathcal{S}\}$

$$|\Psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - e^{i\phi}|V\rangle)|\psi\rangle \quad (82)$$

où  $|H\rangle$  ( $|V\rangle$ ) est l'état de polarisation horizontal (vertical) de  $\mathcal{S}$ ,  $\phi$  une phase quelconque représentant l'ellipticité, et où  $|\psi\rangle$  symbolise l'état de  $\mathcal{M}$ . Nous travaillerons en supposant une indépendance entre chaque degré de liberté spatiale et la polarisation du photon et on définit le profil transverse du photon par une gaussienne réelle

$$\psi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \psi(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}p_x^2\sigma^2} \quad (83)$$

Ensuite, le cristal biréfringent couple faiblement la polarisation ( $\mathcal{S}$ ) à l'impulsion transverse de la fonction d'onde ( $\mathcal{M}$ ) : le cristal est incliné d'un petit angle  $\varphi$  par rapport au sens de propagation  $z$  de manière à ce que la déviation de  $\mathcal{M}$  dans la direction transverse  $x$  soit faible. Ainsi, l'interaction est gouvernée par  $\hat{H}_{int} = \sin\varphi\hat{\sigma}_z\cdot\hat{p}_x \approx \varphi\hat{\sigma}_z\cdot\hat{p}_x$ .

La post-sélection est accomplie par un polariseur, orienté d'un angle  $\frac{\theta}{2}$  par rapport à un état rectiligne, et qui ne laisse le choix au détecteur que de réceptionner des photons de polarisation

$$\cos\frac{\theta}{2}|H\rangle - \sin\frac{\theta}{2}|V\rangle \quad (84)$$

Quant aux lentilles 1 et 2, elles font partie du processus de mesure de  $\mathcal{M}$ . La lentille 2 focalise le photon sur le détecteur pour une mesure de la position finale de  $\mathcal{M}$  alors que la lentille 1 agit comme une transformée de Fourier en vue d'une mesure de l'impulsion finale de l'appareil de mesure. Ainsi, l'état final de l'appareil de mesure  $|\psi'\rangle$  est

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H|\cos\frac{\theta}{2} - \langle V|\sin\frac{\theta}{2})e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi\tau\hat{\sigma}_z\cdot\hat{p}_x}(|H\rangle - e^{i\phi}|V\rangle)|\psi\rangle \quad (85)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi})e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi\tau\hat{\sigma}_z^w\cdot\hat{p}_x}|\psi\rangle \quad (86)$$

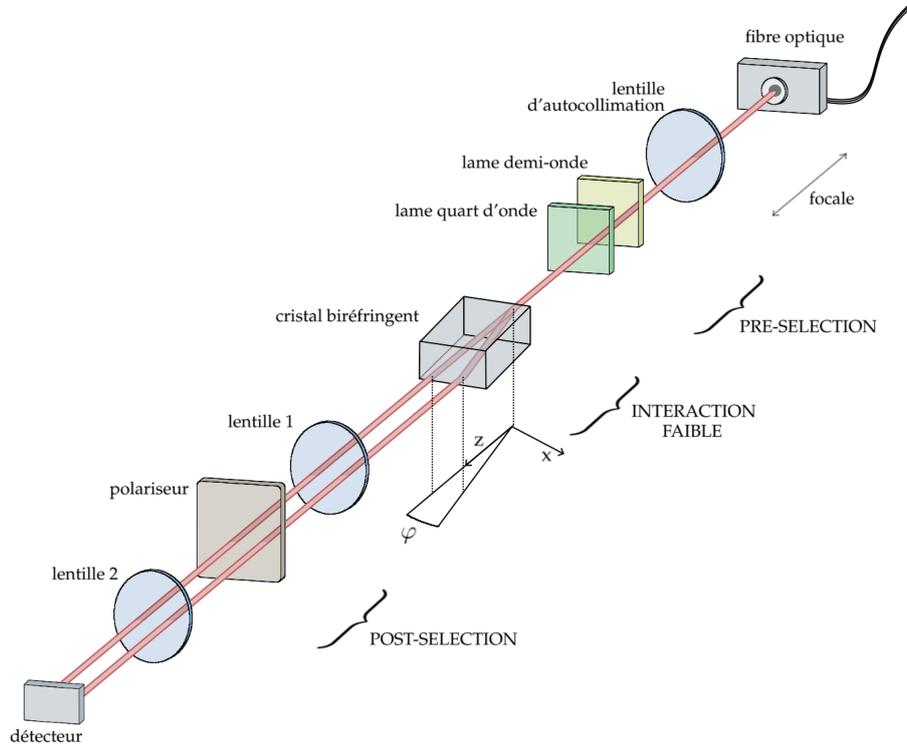


FIGURE 12 – Dispositif expérimental

avec

$$\sigma_z^w = \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}}{\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}} = \frac{1}{2 - \sin(\phi - \theta) - \sin(\phi + \theta)} \left\{ 2 \cos \theta - i(\cos(\phi - \theta) - \cos(\phi + \theta)) \right\} \quad (87)$$

et  $\tau$ , la durée d'interaction proportionnelle à la taille du cristal. Pour la suite, on définit l'amplitude de probabilité de succès de la post-sélection en pré-facteur  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi})$  et  $\sigma_z^w = \rho_1 + i\rho_2$ . La mesure  $\mathcal{M}$  en un point particulier  $x_0$  du détecteur donne (cas de la lentille 2)

$$\langle x_0 | \psi' \rangle = \alpha \left( \psi(x_0) - \varphi \tau \rho_1 \partial_{x_0} \psi(x) + i \varphi \tau \rho_2 \partial_{x_0} \psi(x) \right) \quad (88)$$

d'où la probabilité de présence en  $x_0$  tronquée au premier ordre

$$\psi'(x_0)\psi'^*(x_0) = |\alpha|^2 \left( \psi(x_0)\psi^*(x_0) - 2\varphi\tau\rho_1\psi(x_0)\partial_{x_0}\psi(x) \right) \quad (89)$$

$$= |\alpha|^2 |\psi(x_0)|^2 \left( 1 - 2\varphi\tau\rho_1 \frac{x_0}{\sigma^2} \right) \quad (90)$$

En revanche, la mesure d'une impulsion particulière  $p_0$  (cas de la lentille 1) donne

$$\langle p_0 | \psi' \rangle = \alpha \left( \psi(p_0) - i\varphi\tau\rho_1 p_0 \psi(p_0) - \varphi\tau\rho_2 p_0 \psi(p_0) \right) \quad (91)$$

d'où la probabilité de détection

$$\psi'(p_0)\psi'^*(p_0) = |\alpha|^2 \left( \psi(p_0)\psi^*(p_0) - 2\varphi\tau\rho_2 p_0 \psi(p_0)\psi^*(p_0) \right) \quad (92)$$

$$= |\alpha|^2 |\psi(p_0)|^2 \left( 1 - 2\varphi\tau\rho_2 p_0 \right) \quad (93)$$

qui nous donne la partie imaginaire.

On peut facilement s'assurer que  $\sigma_z^w$  est bien la résultante d'une expansion de l'appareil de mesure. Reprenons l'état final de  $\mathcal{M}$  en explicitant les états translétés avant d'appliquer l'approximation faible,

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle H | \cos \frac{\theta}{2} - \langle V | \sin \frac{\theta}{2} \right) e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi\tau\hat{\sigma}_z \cdot \hat{p}_x} (|H\rangle - e^{i\phi}|V\rangle) |\psi\rangle \quad (94)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi\tau\hat{p}_x} |\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{\hbar}\varphi\tau\hat{p}_x} |\psi\rangle \quad (95)$$

La mesure de la position finale de  $\mathcal{M}$  donne

$$\langle x | \psi' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} \psi(x - \varphi\tau) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \psi(x + \varphi\tau) \quad (96)$$

que l'on tronque au premier ordre :

$$\begin{aligned} \langle x|\psi'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} \psi(x) \left( 1 - \varphi\tau \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \psi(x) \left( 1 + \varphi\tau \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \right) \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right) \psi(x) \\ &\quad \left\{ 1 + \varphi\tau \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \left( \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (98)$$

$$= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right) \psi(x) \left\{ 1 - \varphi\tau \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \sigma_z^w \right\} \quad (99)$$

et l'intensité associée (on rappelle que  $\psi$  est une fonction réelle)

$$|\langle x|\psi'\rangle|^2 = |\psi(x)|^2 \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right|^2 \left| 1 - \varphi\tau \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \sigma_z^w \right|^2 \quad (100)$$

$$= |\psi(x)|^2 |\alpha|^2 \left( 1 - 2\varphi\tau \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \sigma_z^w \right) \quad (101)$$

Finalement, la valeur faible

$$O_w = \frac{\langle b_j | \hat{O} | a_i \rangle}{\langle b_j | a_i \rangle} \quad (102)$$

est de premier abord peu compréhensible si l'on souhaite lui donner un sens physique intuitif. Pour le comprendre, nous allons détailler ses propriétés.

### 3.4 Valeur moyenne d'une observable dans le cas d'une mesure faible

L'expression de la valeur moyenne d'une observable  $\hat{O}$  prend une forme particulièrement simple dans le cas d'une mesure faible et permet d'identifier la valeur faible comme variable relevant d'une transition entre deux états. Elle est établie dans [16].

### 3.4.1 Moyenne opérationnelle

Suivons le même cheminement que la moyenne dans le cas projectif. Juste après l'interaction entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{S}$  à  $t'$ , l'appareil de mesure est dans une superposition d'états qui se recouvrent mutuellement. Reprenons l'amplitude de probabilité d'une transition entre un état  $|a_i\rangle$  à  $t_i$  et un état  $|b_j\rangle$  à  $t_f$  et la probabilité associée à l'observation de  $\mathcal{M}$  en un point  $x$

$$|\Psi_j(t_f)\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\langle a_i|b_j\rangle|^2}} \langle b_j|e^{-\frac{ig}{\hbar}\hat{O}\cdot\hat{P}}|a_i\rangle|\varphi\rangle$$

$$P_{ij}(x) = \frac{1}{|\langle a_i|b_j\rangle|^2} |\langle b_j|\hat{\Pi}_{o_n}|a_i\rangle|^2 |\varphi(x - g\omega_n)|^2 \quad (103)$$

On a établi auparavant (en section 2.3) la relation suivante, qui, notons le, est indépendante de la précision de l'appareil de mesure,

$$\langle a_i|\hat{O}|a_i\rangle = \sum_j |\langle b_j|a_i\rangle|^2 \langle \Psi_j(t_f)|\hat{X}|\Psi_j(t_f)\rangle \quad (104)$$

où  $|\Psi_j(t_f)\rangle$  est l'état de  $\mathcal{M}$  associé à une transition entre deux états  $|b_j\rangle$  et  $|a_i\rangle$ . A la différence d'une mesure forte, chaque mesure finale de  $|\Psi_j(t_f)\rangle$  pour des états de pré-sélection et post-sélection fixes donne le même résultat  $O_w$ . Ainsi, la dernière relation devient

$$\langle a_i|\hat{O}|a_i\rangle = \sum_j |\langle b_j|a_i\rangle|^2 O_w^j \quad (105)$$

où l'exposant  $j$  signifie l'état de post-sélection. Cette relation est directement accessible à l'aide d'une relation de fermeture sur les états propres de l'opérateur de post-sélection

$$\langle a_i|\hat{O}|a_i\rangle = \sum_j \langle a_i|b_j\rangle \langle b_j|\hat{O}|a_i\rangle = \sum_j |\langle b_j|a_i\rangle|^2 \frac{\langle b_j|\hat{O}|a_i\rangle}{\langle b_j|a_i\rangle} = \sum_j |\langle b_j|a_i\rangle|^2 O_w^j \quad (106)$$

de manière similaire à une mesure projective où la relation de fermeture fait intervenir les états propres de l'observable mesurée

$$\langle a_i|\hat{O}|a_i\rangle = \sum_n \langle a_i|o_n\rangle \langle o_n|\hat{O}|a_i\rangle = \sum_n |\langle o_n|a_i\rangle|^2 \omega_n \quad (107)$$

Cette similitude dans la décomposition de la valeur moyenne permet d'identifier la valeur faible comme variable pertinente à la description d'un système quantique  $\mathcal{S}$ . Une correspondance intuitive entre les expressions de

$\langle \widehat{O} \rangle_{|a_i\rangle}$  en terme de valeurs faible et de valeur propre est alors possible. En considérant un système pré-sélectionné/préparé dans l'état  $|a_i\rangle$ , la mesure faible de  $\widehat{O}$  donne  $O_w^j$  avec la probabilité que  $\mathcal{S}$  soit postérieurement mesuré dans l'état  $|b_j\rangle$  après l'interaction  $\mathcal{M}$ - $\mathcal{S}$  alors que la mesure forte donne  $\omega_n$  avec la probabilité que  $\mathcal{S}$  soit dans l'état propre  $|o_n\rangle$  avant l'interaction  $\mathcal{M}$ - $\mathcal{S}$ .

### 3.4.2 Moyenne conditionnelle, parties réelles et imaginaires

Un travail important a été réalisé sur la formalisation d'une mesure conditionnelle dont la valeur faible constitue un cas particulier (même si elle sert de motivation à un tel formalisme au départ). Dressel, Agarwal et Jordan établissent les parties réelles et imaginaires d'une valeur faible dans ce cadre dans [38] et [39]. Un article pédagogique et bien détaillé est aussi disponible [40] écrit par Dressel et Jordan. Nous choisissons de rester concentré sur la valeur faible, c'est pourquoi nous n'aborderons pas le formalisme des POVM (probabilities operators valued measure) qui emploie une généralisation de la notion de projecteurs et qui vise une description générale d'une mesure statistique (dont le cas projectif est un cas particulier). Le lecteur pourra trouver une introduction pédagogique dans [41] et des études approfondies dans le livre de Holevo [42] ou de Bengtsson et Zyczkowski [43] s'il souhaite étudier l'approche originale de [38] et [39] en terme de POVM.

Soit un processus de pré/post-sélection entre deux états  $|\psi\rangle$  à  $t_i$  et  $|\varphi\rangle$  à  $t_f$  pour lequel on mesure faiblement l'observable  $\widehat{O}$ .

Les parties réelles et imaginaires de  $O_w = \frac{\langle \varphi | \widehat{O} | \psi \rangle}{\langle \varphi | \psi \rangle}$  sont alors données par [38], [44]

$$\Re[O_w] = \frac{1}{2} \frac{\langle \psi | \{ \widehat{O}, \widehat{\Pi}_\varphi \} | \psi \rangle}{\langle \psi | \widehat{\Pi}_\varphi | \psi \rangle} = \frac{1}{2} \frac{\langle \varphi | \{ \widehat{O}, \widehat{\Pi}_\psi \} | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \widehat{\Pi}_\psi | \varphi \rangle} \quad (108)$$

$$\Im[O_w] = \frac{1}{2i} \frac{\langle \psi | [ \widehat{O}, \widehat{\Pi}_\varphi ] | \psi \rangle}{\langle \psi | \widehat{\Pi}_\varphi | \psi \rangle} = -\frac{1}{2i} \frac{\langle \varphi | [ \widehat{O}, \widehat{\Pi}_\psi ] | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \widehat{\Pi}_\psi | \varphi \rangle} \quad (109)$$

où  $\widehat{\Pi}_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$  et  $\widehat{\Pi}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ . Ces expressions peuvent être obtenue facilement par le calcul usuel des parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe quelconque où l'on poserait  $\widehat{\Pi}_\psi|\psi\rangle = |\psi\rangle$  ( $\widehat{\Pi}_\varphi|\varphi\rangle = |\varphi\rangle$ ).

Il n'existe pas à ma connaissance d'interprétation solide et rigoureusement

établie des parties réelles et imaginaires d'une valeur faible dans le cas général. On peut noter cependant le travail de Steinberg [45], [46] qui leur donne un sens grâce une analogie entre une mesure de Von Neumann et une interaction avec un champ magnétique ainsi que celui de Dressel et Jordan qui, quant à eux, lui donnent un sens strictement opérationnel [38].

### 3.4.3 Discussion : Valeurs faibles, valeurs moyennes, et dualité onde-corpuscule

Dans ce paragraphe, nous discutons de la valeur faible en tant que résultat d'une mesure et comme grandeur représentative du système. Dans l'hypothèse que ce soit le cas, nous précisons la nature de ce résultat tel qu'il est compris dans la littérature.

Dans le paragraphe sur la valeur moyenne et pour un processus de Von Neumann, nous avons remarqué que sommer sur toutes les post-sélections possibles était équivalent à réaliser une unique mesure projective sur  $\mathcal{S}$ , et en conséquence, un unique processus de pré/post-sélection correspondait à une "mesure projective partielle".

Pour une interaction faible, le processus qui correspond à une mesure projective partielle définit le résultat d'une mesure faible sans ambiguïté : la moyenne est littéralement une somme de résultats pondérés par leur probabilité d'occurrence respective, qui est celle de réussite d'un processus de pré/post-sélection. D'un autre côté, le processus qui correspond à une unique mesure projective standard est celui où les états à  $t_i$  et  $t_f$  sont identiques et se traduit par l'émergence de la valeur moyenne pour la valeur faible, c'est à dire par  $N \rightarrow \infty$  mesures projectives. En plus de cela, si la post-sélection est définie par un état propre de l'observable mesurée, la valeur faible vaut la valeur propre correspondante, mais dans ce processus, le phénomène d'interférence des états de  $\mathcal{M}$  est absent (un seul état de  $\mathcal{M}$  est permis).

Une définition de la partie réelle de la valeur faible en tant que "moyenne partielle" semble adéquate et cohérente avec la logique qui semble se dessiner. C'est l'avis, d'une partie de la communauté qui considère la valeur faible comme une moyenne conditionnelle [47],[31]. La valeur moyenne d'une observable est accomplie en sommant sur toutes les post-sélections, c'est à dire en faisant le bilan sur toutes les conditions de chaque moyenne conditionnelle.

Une autre partie de la communauté considère cependant que la valeur faible est une propriété d'un seul système en s'appuyant sur le fait qu'il ne

s'agit pas d'une grandeur statistique [48], [44].

Aharonov et Tollaksen [49], [50] défendent un point de vue compatible mais plus général et plus fort, et de la manière suivante. Ils considèrent qu'une valeur moyenne peut être obtenue de trois manières différentes : (i) de manière statistique en perturbant le système, ce qui est le cas usuel de la mesure forte, (ii) de manière statistique sans perturbation, c'est le cas d'une mesure faible où l'on laisse libre le résultat de la mesure à  $t_f$ , (iii) de manière non-statistique sans perturbation, c'est le cas d'une mesure faible avec pré/post-sélections identiques où le processus réussit du premier coup. En comparant les situations (ii) et (iii), on voit qu'une moyenne peut être obtenue pour une unique particule ou pour un ensemble de particules dans le cas d'un processus de pré/post-sélection et pour une interaction faible.

## 4 Propriétés des valeurs faibles : rôles des pré et post-sélections

Jusqu'ici, nous avons abordé la valeur faible comme grandeur émergente d'une relation particulière entre un appareil de mesure imprécis et un système. Cet aspect est important parce qu'il permet de comprendre les phénomènes physiques qui aboutissent à la lecture d'une valeur faible. Effectivement, l'expression de cette dernière est obtenue après une expansion de l'état final de l'appareil de mesure et non de l'état du système. Cependant, nous avons vu au dernier paragraphe que la réponse lue sur l'appareil de mesure est en correspondance avec le comportement physique de  $S$  et que par conséquent, une valeur faible est bien représentative du système, même si elle n'est pas bornée.

Nous étudierons dans cette partie un aspect souvent négligé lorsque l'on décrit les propriétés des valeurs faibles. Il s'agit du rôle de la pré-sélection et de la post-sélection. Or comme nous l'avons vu plus haut, les mesures fortes peuvent aussi être implémentées avec des pré et post-sélections et il est important de distinguer ce qui relève de la pré et post-sélection d'une part, et de l'aspect couplage faible/mesure imprécise d'autre part. Nous allons ainsi être amené à aller plus loin que ce qui a été exposé sur les mesures fortes à la Sec. 2.2 et à introduire la règle ABL, qui sera comparée aux valeurs faibles dans différents contextes afin de comprendre le rôle des pré et post-sélections.

## 4.1 Description d'un système entre une pré-sélection et une post-sélection avec un couplage intermédiaire fort ou faible

### 4.1.1 Règle ABL

La règle Aharonov Bergmann Lebowitz [51],[52] (ABL) pour un processus de pré/post-sélection est l'équivalent de la règle de Born pour un  $\mathcal{S}$  défini à  $t_i$  uniquement. Elle donne la probabilité de visiter un état propre  $|o_n\rangle$  de l'observable mesurée  $\hat{O}$  à un instant  $t$ , conditionnée par des pré/post-sélections réussies à  $t_i/t_f$  respectivement.

$$P(o_n, t | b_j, t_f; a_i, t_i) = \frac{|\langle b_j | \hat{U}(t_f, t) | o_n \rangle \langle o_n | \hat{U}(t, t_i) | a_i \rangle|^2}{\sum_n |\langle b_j | \hat{U}(t_f, t) | o_n \rangle \langle o_n | \hat{U}(t, t_i) | a_i \rangle|^2} \equiv P_n \quad (110)$$

avec la contrainte  $\sum_n P_n = 1$ . Ici, le sens de lecture est double. Le sens usuel donne

$$|a_i\rangle \xrightarrow{\hat{U}(t, t_i)} |o_n\rangle \xrightarrow{\hat{U}(t_f, t)} |b_j\rangle \quad (111)$$

alors que considérer le même processus en temps inverse

$$|b_j\rangle \xrightarrow{\hat{U}^\dagger(t_f, t)} |o_n\rangle \xrightarrow{\hat{U}^\dagger(t, t_i)} |a_i\rangle \quad (112)$$

ne change pas la valeur de  $P(o_n, t | b_j, t_f; a_i, t_i)$ . D'ailleurs, en posant simplement  $\hat{U}(t_2, t_1)|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{U}^\dagger(t_1, t_2) = \langle\hat{U}(t_1, t_2)\psi|$ , la probabilité reste identique

$$P(o_n, t | b_j, t_f; a_i, t_i) = \frac{|\langle \hat{U}(t, t_f) b_j | o_n \rangle \langle o_n | \hat{U}(t, t_i) | a_i \rangle|^2}{\sum_n |\langle \hat{U}(t, t_f) b_j | o_n \rangle \langle o_n | \hat{U}(t, t_i) | a_i \rangle|^2} \quad (113)$$

mais n'a pas la même interprétation du point de vue de la flèche du temps. En conséquence, entre la mesure de  $\hat{A}$  et celle de  $\hat{B}$ , le système  $\mathcal{S}$  est à la fois dans l'état  $|a_i\rangle$  entre  $t_i$  et  $t_f$  et dans l'état  $\langle b_j|$  entre  $t_f$  et  $t_i$  (illustré en figure 13). C'est ce qui en fait d'ailleurs la force du processus de pré/post-sélection : la particule quantique peut avoir simultanément deux propriétés données par deux observables différentes qui ne commutent pas (!), ou en d'autres termes, cela équivaut à considérer le passé au même pied d'égalité que le futur.

Lors de la mesure forte d'un opérateur quelconque,  $\mathcal{S}$  est projeté et la probabilité de transition change :  $\mathcal{S}$  est décrit par le nouveau vecteur

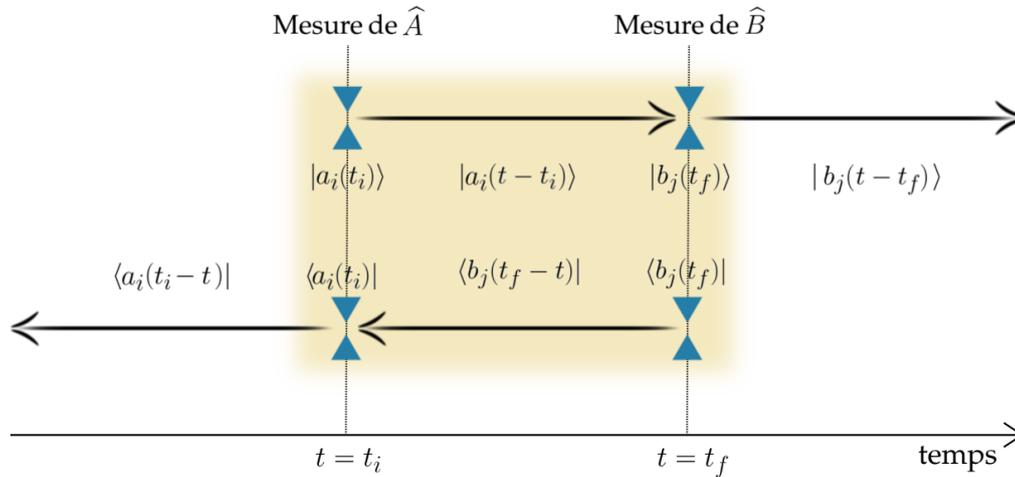


FIGURE 13 – Situation

propre et l'état de post-sélection. De ce fait, la règle ABL décrit la probabilité d'apparition d'un état donné entre les pré/post-sélection dans le cas d'une mesure forte hypothétique. La question de la "réalité" d'une propriété qui en découle est abordée dans [53], [54].

Une manière de s'en rendre compte est de se rappeler que la règle ABL donne aussi la probabilité normalisée d'apparition d'un état translaté de  $\mathcal{M}$  dans le cas d'une interaction de Von Neumann. Entre  $t_i$  et  $t_f$ ,  $\{\mathcal{S} + \mathcal{M}\}$  est dans une superposition d'états et  $\mathcal{S}$  n'est projeté qu'à la mesure de  $\mathcal{M}$  par l'observateur à  $t > t_f$ . Jusque là,  $\mathcal{M}$  aura été dans une superposition d'états qui correspondent aux alternatives des résultats d'une mesure forte, chacun pondéré par la règle ABL. Notons que dans cet esprit, Cohen donne une interprétation de ABL en terme d'histoires consistantes, tout en mettant le lecteur en garde contre certains cas d'applications de la règle ABL [55].

Par principe, une interaction faible ne projette pas  $\mathcal{S}$  et on peut légitimement s'attendre à ce que la description de  $\mathcal{S}$ , suggérée par la règle ABL, soit pertinente pour une valeur faible. Voyons cela avec une illustration.

#### 4.1.2 Règle ABL et valeur faible : Illustration avec une mesure d'un spin

Imaginons qu'un système  $\mathcal{S}$  soit pré-sélectionnée dans l'état  $|\hat{\sigma}_x = +1\rangle$  et post-sélectionné dans l'état  $|\hat{\sigma}_y = +1\rangle$  (illustration tirée de [56] et utilisée par Aharonov dans plusieurs papiers). Entre  $t_i$  et  $t_f$ , une mesure de

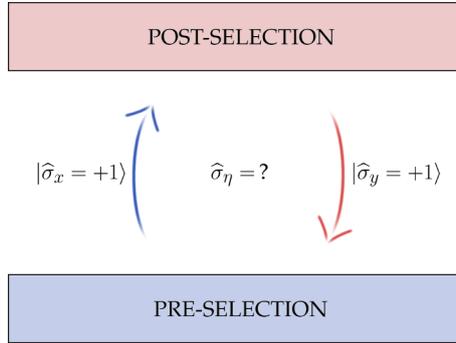


FIGURE 14 – Illustration

$\hat{\sigma}_x$  nous donnera à coup sûr  $|+1_x\rangle$  puisque c'est précisément l'état dans lequel  $S$  a été préparé ultérieurement. De ce fait, la règle ABL donne (en s'affranchissant des évolutions libres)

$$P(+x, t|+y, t_f; +x, t_i) = \frac{|\langle +y|+x\rangle\langle +x|+x\rangle|^2}{\sum_{\pm x} |\langle +y|\pm x\rangle\langle \pm x|+x\rangle|^2} = 1 \quad (114)$$

Simultanément, une mesure de  $\hat{\sigma}_y$  donnera à coup sûr  $|+1_y\rangle$  puisque dans le cas contraire, la post-sélection échouerait

$$P(+y, t|+y, t_f; +x, t_i) = \frac{|\langle +y|+y\rangle\langle +y|+x\rangle|^2}{\sum_{\pm y} |\langle +y|\pm y\rangle\langle \pm y|+x\rangle|^2} = 1 \quad (115)$$

Notons qu'ici, une première mesure de  $\hat{\sigma}_x$  puis une autre de  $\hat{\sigma}_y$  ne changerait pas la probabilité de transition entre les états de départ et d'arrivée. La raison est que le résultat de mesure de  $\hat{\sigma}_x$  (de  $\hat{\sigma}_y$ ) est imposée sans ambiguïté par la pré-sélection (la post-sélection) donc on peut trouver une séquence de mesure qui ne change pas la transition (l'observable mesurée est identique à soit la propriété de départ pour  $\hat{\sigma}_x$ , soit la propriété d'arrivée pour  $\hat{\sigma}_y$ ). Pour cette illustration en particulier donc, la règle ABL ne se limite pas à l'inférence du résultat d'une mesure hypothétique : il n'y a pas de perturbation associée aux mesures successives de  $\hat{\sigma}_x$  et de  $\hat{\sigma}_y$ .

Qu'en serait il pour la mesure de  $\hat{\sigma}_{\eta=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y)$ , qui est une composition des états de départ et d'arrivée ? La mesure standard nous donnerait soit  $|\hat{\sigma}_\eta = +1_\eta\rangle$  ou  $|\hat{\sigma}_\eta = -1_\eta\rangle$ . Elle "effacerait" le passé du système  $S$  et changerait la probabilité d'atteindre la post-sélection avec succès : impossible de tester la simultanéité des propriétés par une mesure forte sans perturber la transition entre  $|+x\rangle$  et  $|+y\rangle$ . La mesure faible permet de lais-

ser la probabilité de transition intacte et nous donnerait à coup sûr

$$\sigma_{\eta}^w = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle +y | \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y | +x \rangle}{\langle +y | +x \rangle} = \sqrt{2} \quad (116)$$

où les propriétés  $\hat{\sigma}_x$  et  $\hat{\sigma}_y$  sont considérées en même temps :  $\sigma_{\eta}^w = \frac{+1_x + 1_y}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ . Ainsi, le résultat  $\sqrt{2}$  peut être intuitivement compris même s'il sort du spectre de l'observable  $\hat{\sigma}_{\eta}$  en question, en explicitant les contributions des états antérieure et postérieure de  $\mathcal{S}$ .

Avec cette illustration, on peut donc comprendre que la pré-sélection et la post-sélection agissent exactement comme des conditions limites à deux instants différents qui s'imposent simultanément au système  $\mathcal{S}$  du point de vue d'une valeur faible .

D'ordinaire, ces conditions limites ne sont pas si clairement définies : les états de pré/post sélection peuvent être eux même des superpositions d'états (en utilisant un interféromètre par exemple) et les conditions limites qu'ils imposent sont telles qu'il est difficile d'identifier leur rôle et de donner un sens à certaines valeurs faibles (dans le papier original [12], la valeur faible d'un spin vaut 100!). En revanche, on peut observer que la valeur faible pourrait plus rendre compte de la physique d'une transition entre deux états particuliers plutôt que de la propriété de l'observable mesurée en elle même.

Ces contributions sont d'autant plus difficiles à comprendre dans le cas général lorsque l'observable faiblement mesurée ne commute pas avec les opérateurs mesurés à  $t_i$  et  $t_f$ . L'interaction faible préserve la cohérence de  $\mathcal{S}$  et le recouvrement entre les états de pré-sélection et de post-sélection à l'instant  $t$  mais l'observable faiblement mesurée introduit des amplitudes de probabilités qui pondèrent chaque état translaté chez l'appareil de mesure  $\mathcal{M}$ . De ce fait, l'observable mesurée joue un rôle de "support" en imposant une base propre sur laquelle on peut observer les interférences produites à  $t$  par les conditions limites imposées à  $t_i$  et à  $t_f$ . En d'autres termes, une valeur faible peut être comprise comme l'observation des corrélations entre les états de départ et d'arrivée, vues "à travers" l'observable mesurée.

### 4.1.3 Investigation du rôle des conditions limites

Dans le cas général, il est donc difficile de démêler la physique à l'œuvre dans l'établissement d'une valeur faible puisque elle est liée à la fois aux

conditions limites imposées et à la fois à l'observable mesurée. Ces deux ingrédients jouent aussi leur rôle dans l'établissement du résultat d'une mesure forte et nous avons adopté jusqu'ici une description et une compréhension de la mesure faible en terme d'état propres : la valeur faible est une signature d'une superposition particulière d'états propres de l'observable mesurée imposée par une pré-sélection et une post-sélection. C'est pourquoi nous abordons dans la suite les processus de pré/post-sélection en faisant des allers retours réguliers entre la mesure forte et la mesure faible : dans le cas d'une mesure forte, démêler l'influence des conditions limites de celle de la perturbation introduite par l'observable mesurée nous permet de conclure quant aux implications au niveau de la valeur faible.

Ce faisant, les deux prochaines parties étudient la mesure de plusieurs observables pour un même processus de pré/post-sélection sous deux aspects. La première partie s'attache à définir un ensemble de pré/post-sélections particulières pour lesquelles seules les conditions limites participent à l'émergence d'un résultat donné (valeur faible/forte). La deuxième concerne la contextualité d'une mesure pour des processus de pré/post-sélection.

Ce n'est qu'ensuite que nous pourrons conclure quant à la nature du rôle des états de pré/post-sélection.

## 4.2 Rôle causal des pré et post-sélections

Intéressons nous à un processus de pré/post-sélection durant lequel on souhaite accéder à deux propriétés. Le raisonnement est détaillé puisque c'est aussi l'occasion de présenter une évolution pour deux appareils de mesure, utile pour les chapitres qui suivent.

Prenons deux opérateurs,  $\hat{O}_1$  et  $\hat{O}_2$  tels que  $[\hat{O}_1, \hat{O}_2] = 0$ . Considérons leur décomposition sur leurs bases propres respectives  $\hat{O}_i = \sum_n \omega_n^i |o_n^i\rangle \langle o_n^i| = \sum_n \omega_n^i \hat{\Pi}_n^i$  et un processus de pré/post-sélection entre des états de départ et d'arrivée  $|\psi_i\rangle$  et  $|\phi_f\rangle$ .

Admettons que la règle ABL attribue une probabilité 1 à l'occurrence des résultats  $\omega_j^1$  et  $\omega_j^2$  ( $P_{\text{abl}}(\hat{\Pi}_j^1) = P_{\text{abl}}(\hat{\Pi}_j^2) = 1$ ). Soit un hamiltonien d'interaction  $\hat{H}_{int} = \hat{O}_1 \cdot \hat{P}_1 + \hat{O}_2 \cdot \hat{P}_2$  où les  $\hat{O}_i$  agissent sur  $\mathcal{S}$  alors que  $\hat{P}_1$  et  $\hat{P}_2$  agissent sur  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . L'état total à  $t_i$  est donné par

$$|\Psi(t_i)\rangle = |\psi_i\rangle \otimes |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \quad (117)$$

et l'état final des appareils de mesure vient (où on utilise  $[\widehat{O}_1, \widehat{O}_2] = 0$ )

$$\langle \phi_f | e^{-ig\widehat{O}_1 \cdot \widehat{P}_1 - ig\widehat{O}_2 \cdot \widehat{P}_2} | \psi_i \rangle \otimes | \varphi_1 \rangle \otimes | \varphi_2 \rangle \quad (118)$$

$$= \sum_{n,n'} \langle \phi_f | \widehat{\Pi}_n^1 \widehat{\Pi}_{n'}^2 | \psi_i \rangle e^{-ig\omega_n^1 \cdot \widehat{P}_1} e^{-ig\omega_{n'}^2 \cdot \widehat{P}_2} | \varphi_1 \rangle | \varphi_2 \rangle \quad (119)$$

$$= \sum_{n,n'} \langle \phi_f | \widehat{\Pi}_n^1 \widehat{\Pi}_{n'}^2 | \psi_i \rangle | \varphi_1^n \rangle | \varphi_2^{n'} \rangle \quad (120)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle x_1 | \varphi_1^n \rangle &= \langle x_1 | e^{-ig\omega_n^1 \cdot \widehat{P}_1} | \varphi_1 \rangle = \varphi_1(x_1 - g\omega_n^1) \\ \langle x_2 | \varphi_2^{n'} \rangle &= \langle x_2 | e^{-ig\omega_{n'}^2 \cdot \widehat{P}_2} | \varphi_2 \rangle = \varphi_2(x_2 - g\omega_{n'}^2) \end{aligned} \quad (121)$$

Normalisons l'état pour faire explicitement apparaitre la probabilité ABL :

$$\frac{1}{\sqrt{|\langle \phi_f | \psi_i \rangle|^2}} \sum_{n,n'} \langle \phi_f | \widehat{\Pi}_n^1 \widehat{\Pi}_{n'}^2 | \psi_i \rangle | \varphi_1^n \rangle | \varphi_2^{n'} \rangle \quad (122)$$

avec l'intensité associée

$$\mathcal{I} = \sum_{n,n'} \left| \frac{\langle \phi_f | \widehat{\Pi}_n^1 \widehat{\Pi}_{n'}^2 | \psi_i \rangle}{\langle \phi_f | \psi_i \rangle} \right|^2 \left| | \varphi_1^n \rangle | \varphi_2^{n'} \rangle \right|^2 \quad (123)$$

#### 4.2.1 Rôle causal des pré/post-sélections sur le résultat de mesures fortes successives de deux opérateurs

Si on mesure  $\mathcal{M}_1$  puis  $\mathcal{M}_2$  pour le même processus, on sait que ce n'est pas équivalent à leurs mesures séparées, mais ici, même si  $[\widehat{O}_1, \widehat{O}_2] = 0$ , l'ordre dans lequel on effectue la mesure compte. Effectivement, le résultat de

$$\text{mesure de } \mathcal{M}_1 \xrightarrow{P(\widehat{\Pi}_j^1)=1} \frac{1}{\sqrt{|\langle \phi_f | \psi_i \rangle|^2}} \sum_{n'} \langle \phi_f | \widehat{\Pi}_j^1 \widehat{\Pi}_{n'}^2 | \psi_i \rangle | \varphi_1^j \rangle | \varphi_2^{n'} \rangle \quad (124)$$

est obtenu avec certitude avec une probabilité égale à 1 par définition

$$P_{\omega_j^1} = \frac{1}{|\langle \phi_f | \psi_i \rangle|^2} \left| \sum_{n'} \langle \phi_f | \widehat{\Pi}_j^1 \widehat{\Pi}_{n'}^2 | \psi_i \rangle \right|^2 = \frac{|\langle \phi_f | \widehat{\Pi}_j^1 | \psi_i \rangle|^2}{|\langle \phi_f | \psi_i \rangle|^2} = 1 \quad (125)$$

mais le résultat de  $\mathcal{M}_2$  est biaisé par la première mesure :

$$\text{mesure de } \mathcal{M}_2 \xrightarrow{P(\widehat{\Pi}_{j'}^2) \neq 1} \frac{1}{\sqrt{|\langle \phi_f | \psi_i \rangle|^2}} \langle \phi_f | \widehat{\Pi}_j^1 \widehat{\Pi}_{j'}^2 | \psi_i \rangle | \varphi_1^j \rangle | \varphi_2^{j'} \rangle \quad (126)$$

où le résultat  $\omega_j^2$  est obtenu avec la probabilité réactualisée par la mesure de  $\mathcal{M}_1$

$$P_{(\omega_j^2|\omega_j^1)} = \frac{|\langle \phi_f | \hat{\Pi}_j^1 \hat{\Pi}_j^2 | \psi_i \rangle|^2}{|\langle \phi_f | \psi_i \rangle|^2} \quad (127)$$

Si on s'amuse à remplacer  $\langle \phi_f |$  par l'état  $\langle \psi_i |$ , on retombe sur le cas d'une mesure standard où l'argument  $[\hat{O}_1, \hat{O}_2] = 0$  signifie bien que l'ordre des mesures ne compte pas : pour un processus de pré/post-sélection cela se traduit par une description de  $\mathcal{S}$  identique dans le futur et dans le passé. La probabilité de mesure jointe devient

$$P_{(\omega_j^2|\omega_j^1)} = |\langle \psi_i | \hat{\Pi}_j^1 \hat{\Pi}_j^2 | \psi_i \rangle|^2 = P_{(\omega_j^1|\omega_j^2)} = P_{(\omega_j^2, \omega_j^1)} \quad (128)$$

et on s'aperçoit d'une différence importante entre la mesure standard et la mesure avec des conditions limites : pour la dernière expression, l'ordre dans lequel les mesures sont effectuées ne compte pas et on a  $P_{(\omega_j^2|\omega_j^1)} = P_{(\omega_j^1|\omega_j^2)}$ . Cela peut se comprendre de la manière suivante : la mesure d'un premier opérateur perturbe  $\mathcal{S}$  de la même manière que le deuxième opérateur qui commute le fait. L'ajout d'une condition limite à  $t_f$  différente de celle de  $t_i$  "dissymétrise" la perturbation introduite sur  $\mathcal{S}$  : une mesure standard d'un opérateur quelconque ne perturbe pas de la même manière le passé et le futur s'ils sont définis par des états différents.

Autrement dit, il y a émergence d'une flèche du temps intrinsèque à un processus de pré/post-sélection et qui n'est pas manifeste lorsqu'on se ramène à la mesure standard.

Cette caractéristique est d'autant plus robuste que l'on ne peut pas trouver de référentiel dans lequel les résultats de mesure s'appuient sur une description passée (ou future) seulement [57]. Ainsi, elle constitue un argument fort qui nous incite à prendre au sérieux une description d'un  $\mathcal{S}$  par deux états définis à deux temps différents [58].

En somme, pour un processus de pré/post-sélection, la propriété  $[\hat{O}_1, \hat{O}_2] = 0$  a un rôle partiel (qui ne définit finalement qu'une perturbation mutuelle entre deux observables) qui se complète avec la connaissance des conditions limites. Il s'agit donc à présent de considérer la propriété de commutation respectivement aux états à  $t_i$  et  $t_f$  :  $\langle \phi_f | [\hat{O}_1, \hat{O}_2] | \psi_i \rangle$ . Cette différence est cruciale puisque la spécification des conditions limites apparaît comme indispensable pour définir la relation de commutation : mesurer  $\hat{O}_1$  puis  $\hat{O}_2$  est différent de l'inverse, respectivement à la flèche du temps dictée par

les conditions limites. Les états à  $t_i$  et  $t_f$  deviennent alors des éléments inhérents à la perturbation totale introduite lors d'une mesure intermédiaire, qui définit elle-même la probabilité d'occurrence d'un résultat donné.

De manière générale donc, et pour la mesure d'un seul opérateur, si la description de  $\mathcal{S}$  à  $t_i$  dans le cas standard définit le résultat de mesure complètement ( $P_{\text{born}} = 1/0$ ) ou partiellement ( $P_{\text{born}} \neq 1/0$ ) en considérant une perturbation relative à un état (description standard de  $\mathcal{S}$ ), les spécifications des conditions limites définissent le résultat complètement ( $P_{\text{abl}} = 1/0$ ) ou partiellement ( $P_{\text{abl}} \neq 1/0$ ) en considérant une perturbation relative à une transition (description de  $\mathcal{S}$  par deux conditions limites) entre deux états à  $t_i$  et  $t_f$ .

En conséquence, pour expliciter l'influence des états à  $t_i$  et  $t_f$ , on souhaite s'affranchir de la perturbation induite par l'observable mesurée et se focaliser sur une influence unique des conditions limites, à savoir lorsque  $P_{\text{abl}} = 1/0$ . Nous nous restreindrons donc à des processus de pré/post-sélection qui vérifient cette propriété pour la mesure d'un opérateur donné que l'on appelle processus logique [59].

### Processus de pré/post-sélection logique :

Un processus de pré/post-sélection logique est un processus pour lequel la règle ABL attribue une probabilité de 0 ou 1 à la mesure d'une propriété

#### 4.2.2 Connexion avec la valeur faible : interactions faibles successives pour des processus logiques

Considérer de tels processus nous offre un lien direct entre une valeur propre et une valeur faible. Dans le cas où pour un  $n'$  donné la règle ABL donne  $P_{n'} = 1$ , il s'ensuit que [60]

$$\sum_{n \neq n'} P_n = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{n \neq n'} \langle b_i | o_n \rangle \langle o_n | d_i \rangle = 0 \quad (129)$$

En posant  $\hat{O} = \sum_n \omega_n |o_n\rangle \langle o_n|$ , et en explicitant sa valeur faible en terme de valeur propres

$$O_w = \sum_n \omega_n \frac{\langle b_j | o_n \rangle \langle o_n | d_i \rangle}{\langle b_j | d_i \rangle} = \omega_{n'} \frac{\langle b_j | o_{n'} \rangle \langle o_{n'} | d_i \rangle}{\langle b_j | d_i \rangle} \stackrel{P_{n'}=1}{=} \omega_{n'} \quad (130)$$

on se rend compte que seul le  $n'$ -ième terme subsiste, et qu'il vaut la valeur propre  $\omega_{n'}$ . Cela nous amène à la propriété suivante [60]

**Propriété n°1 :**

Si le résultat d'une mesure forte est obtenu avec une probabilité égale à un, alors la valeur faible donnera le même résultat.

Dans le cas d'observables dichotomiques (projecteur etc...), le corollaire est aussi vrai.

Un cas particulier est que l'on peut aussi imposer un état propre  $|o_{n'}\rangle$  de l'observable mesurée à la post-sélection. De cette manière, seul l'état translaté de  $\mathcal{M}$  colinéaire à  $|o_{n'}\rangle$  subsistera (tous les autres seront orthogonaux à la post-sélection) et le phénomène d'interférence disparaît. La lecture de  $\mathcal{M}$  après  $t_f$  nous donnera

$$O_w = \frac{\langle o_{n'} | \hat{O} | b_i \rangle}{\langle o_{n'} | b_i \rangle} = \omega_{n'} \quad (131)$$

Ici, la post-sélection n'impose pas  $\sum_{n \neq n'} \langle o_{n'} | o_n \rangle \langle o_n | d_i \rangle = 0$  mais  $\langle o_{n'} | o_n \rangle \langle o_n | d_i \rangle = 0, \forall n \neq n'$ .

Reprenons l'évolution pour deux appareils de mesure et voyons comment elle se manifeste pour une interaction faible et ce qu'il en sort en comparaison à la mesure forte. Conservons les mêmes valeurs de la règle ABL considérées pour le cas fort et revenons à l'état final de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$

$$\frac{1}{\sqrt{|\langle \phi_f | \psi_i \rangle|^2_{n,n'}}} \sum \langle \phi_f | \hat{\Pi}_n^1 \hat{\Pi}_{n'}^2 | \psi_i \rangle | \varphi_1^n \rangle | \varphi_2^{n'} \rangle \quad (132)$$

Insérons deux relations de fermeture sur les états de pré/post-sélection

$$\frac{1}{\sqrt{|\langle \phi_f | \psi_i \rangle|^2_{n,n'}}} \sum \sum_{l,p} \langle \phi_f | \hat{\Pi}_n^1 | \psi_p \rangle \langle \psi_p | \phi_l \rangle \langle \phi_l | \hat{\Pi}_{n'}^2 | \psi_i \rangle | \varphi_1^n \rangle | \varphi_2^{n'} \rangle \quad (133)$$

La sommation sur  $n$  et  $n'$  fait émerger les valeur faibles (par définition)

$$\frac{1}{\sqrt{|\langle \phi_f | \psi_i \rangle|^2_{l,p}}} \sum \langle \phi_f | \psi_p \rangle \langle \psi_p | \phi_l \rangle \langle \phi_l | \psi_i \rangle | \varphi_1^p \rangle | \varphi_2^l \rangle \quad (134)$$

où cette fois,

$$\langle x_1 | \varphi_1^p \rangle = \langle x_1 | e^{-ig(O_l^1)_w \cdot \hat{P}_1} | \varphi_1 \rangle = \varphi_1(x_1 - g(O_l^1)_w) \quad (135)$$

$$\langle x_2 | \varphi_2^p \rangle = \langle x_2 | e^{-ig(O_p^2)_w \cdot \hat{P}_2} | \varphi_2 \rangle = \varphi_2(x_2 - g(O_p^2)_w) \quad (136)$$

avec

$$(O_l^1)_w = \frac{\langle \phi_f | \hat{O}_1 | \psi_p \rangle}{\langle \phi_f | \psi_p \rangle} \quad (O_p^2)_w = \frac{\langle \phi_l | \hat{O}_2 | \psi_i \rangle}{\langle \phi_l | \psi_i \rangle} \quad (137)$$

Simplifions l'expression en explicitant l'expansion de l'opérateur d'évolution

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{|\langle \phi_f | \psi_i \rangle|^2}} \sum_{l,p} \langle \phi_f | \psi_p \rangle \langle \psi_p | \phi_l \rangle \langle \phi_l | \psi_i \rangle e^{-ig(O_l^1)_w \cdot \hat{P}_1} | \varphi_1 \rangle e^{-ig(O_p^2)_w \cdot \hat{P}_2} | \varphi_2 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\langle \phi_f | \psi_i \rangle|^2}} \sum_{l,p} \langle \phi_f | \psi_p \rangle \langle \psi_p | \phi_l \rangle \langle \phi_l | \psi_i \rangle \left( 1 - ig(O_l^1)_w \cdot \hat{P}_1 \right) | \varphi_1 \rangle \\ & \quad \left( 1 - ig(O_p^2)_w \cdot \hat{P}_2 \right) | \varphi_2 \rangle \quad (138) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{|\langle \phi_f | \psi_i \rangle|^2}} \sum_{l,p} \langle \phi_f | \psi_p \rangle \langle \psi_p | \phi_l \rangle \langle \phi_l | \psi_i \rangle \left\{ | \varphi_1 \rangle | \varphi_2 \rangle \right. \\ & \quad \left. - ig \left( (O_l^1)_w \cdot | \varphi_2 \rangle \hat{P}_1 | \varphi_1 \rangle + (O_p^2)_w \cdot | \varphi_1 \rangle \hat{P}_2 | \varphi_2 \rangle \right) \right\} \quad (139) \end{aligned}$$

Avec

$$\sum_{l,p} \langle \phi_f | \psi_p \rangle \langle \psi_p | \phi_l \rangle \langle \phi_l | \psi_i \rangle (O_l^1)_w = \frac{\langle \phi_f | \hat{O}_1 | \psi_i \rangle}{\langle \phi_f | \psi_i \rangle} = O_w^1 \quad (140)$$

$$\sum_{l,p} \langle \phi_f | \psi_p \rangle \langle \psi_p | \phi_l \rangle \langle \phi_l | \psi_i \rangle (O_p^2)_w = \frac{\langle \phi_f | \hat{O}_2 | \psi_i \rangle}{\langle \phi_f | \psi_i \rangle} = O_w^2 \quad (141)$$

on obtient finalement (on passe en représentation  $x$  et on fait agir les  $\hat{P}_i$  sur les  $\mathcal{M}_i$ )

$$\frac{\langle \phi_f | \psi_i \rangle}{\sqrt{|\langle \phi_f | \psi_i \rangle|^2}} \varphi_1(x_1 - g O_w^1) \varphi_2(x_2 - g O_w^2) \quad (142)$$

A l'évidence, peu importe l'ordre dans lequel l'observateur regarde  $\mathcal{M}_1$  ou  $\mathcal{M}_2$ , la probabilité d'observation des deux résultats  $|\langle \phi_f | \psi_i \rangle|^2$  reste inchangée du fait qu'il n'y a pas de projection de  $\mathcal{S}$  à la mesure de  $\mathcal{M}$ . D'après

la propriété n°1,  $O_w^1 = \omega_j^1$ ,  $O_w^2 = \omega_j^2$  donc on peut sans problème observer en même temps les deux résultats (!) et l'intensité finale de l'appareil de mesure est

$$\mathcal{I} = |\varphi_1(x_1 - g\omega_j^1)|^2 |\varphi_2(x_2 - g\omega_j^2)|^2 \quad (143)$$

où la normalisation est accomplie en retenant les processus de pré/post-sélection réussis.

Etablissons au passage et pour finir, une autre propriété plus simple et déjà utilisée dans l'illustration du spin. Considérons deux observables  $\hat{O}_1$  et  $\hat{O}_2$  mesurées entre deux pré/post-sélections et qui donnent  $\hat{O}_1 = \omega_1$ ,  $\hat{O}_2 = \omega_2$ . Soit  $\hat{S} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2$  (peu importe si  $\hat{O}_1$  et  $\hat{O}_2$  commutent ou pas). Dans le régime fort, la mesure de  $\hat{O}_2$  entre  $t_i$  et  $t_f$  perturberait la mesure ultérieure de  $\hat{O}_1$  et on aurait  $\hat{S} \neq \omega_1 + \omega_2$ . Dans le régime d'une mesure faible, la perturbation introduite par l'interaction est négligeable. De ce fait, une mesure de  $\hat{O}_1$  n'influencera pas la mesure de  $\hat{O}_2$ . Cela se traduit par une linéarité de la valeur faible [61].

### Propriété n°2 :

La valeur faible d'une observable  $\hat{S} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2$  est donnée par

$$S_w = O_1^w + O_2^w$$

Cette linéarité permet dans certains cas d'obtenir une image géométrique de l'évolution d'une observable au cours du temps en la décomposant selon un set d'opérateurs. Par exemple, en examinant les composantes d'un "vecteur faible"  $\vec{\sigma}_w = (\sigma_x^w, \sigma_y^w, \sigma_z^w)$  selon une direction quelconque  $\vec{\eta}$ . Dans [60], Aharonov et Vaidman montrent qu'on peut trouver un continuum de directions  $\vec{\eta}$  pour lesquelles la règle ABL donne une probabilité 1 d'observation du spin.

## 4.3 Processus de pré/post-sélection et mesure contextuelle

### 4.3.1 Mise en évidence de la contextualité pour la mesure forte

La mesure d'un opérateur est contextuelle dans le sens où : (i) le résultat d'une mesure ne dépend pas uniquement de l'observable mesurée et du système mesuré, (ii) le résultat de la mesure jointe de deux opérateurs qui commutent n'est pas le produit des résultats obtenus par mesure individuelles des opérateurs [62]. Deux preuves sont établies par Peres [62] et

Mermin [63] et nous choisirons arbitrairement celle de Mermin ici. Dans les deux cas la preuve est simple et plutôt élégante, c'est pourquoi nous n'économiserions pas grand chose à ne pas en expliciter une des deux. Considérons les opérateurs suivants  $\hat{\sigma}_x^1, \hat{\sigma}_y^1$  et  $\hat{\sigma}_z^1$ , mesurés en  $(x_1, t)$ , et  $\hat{\sigma}_x^2, \hat{\sigma}_y^2$  et  $\hat{\sigma}_z^2$  mesurés en  $(x_2, t)$ .

Imaginons que l'on réalise chacune des mesures des neuf opérateurs suivants que l'on redéfinit par  $\hat{A} \dots \hat{I}$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x^1 &= \hat{A} & \hat{\sigma}_x^2 &= \hat{B} & \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2 &= \hat{C} \\ \hat{\sigma}_y^2 &= \hat{D} & \hat{\sigma}_y^1 &= \hat{E} & \hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_y^2 &= \hat{F} \\ \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_y^2 &= \hat{G} & \hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_x^2 &= \hat{H} & \hat{\sigma}_z^1 \hat{\sigma}_z^2 &= \hat{I} \end{aligned}$$

et qu'on obtienne les résultats  $a, \dots, i$  chacun égaux à  $\pm 1$ . Les observables sont organisées ici de telle manière que chaque opérateur commute avec un autre opérateur d'une même ligne et d'une même colonne et les mesures jointes sont présentes dans la dernière colonne et dernière ligne :  $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ ;  $\hat{F} = \hat{D}\hat{E}$ ;  $\hat{G} = \hat{A}\hat{D}$ ;  $\hat{H} = \hat{B}\hat{E}$  et  $\hat{I} = \hat{G}\hat{H} = \hat{C}\hat{F}$  (du fait que  $\hat{\sigma}_x^i \hat{\sigma}_y^i = -i\hat{\sigma}_z^i$ ). En considérant chaque ligne, on s'attend à avoir

$$ab = c \quad de = f \quad gh = i \quad (144)$$

alors que les colonnes donnent

$$ad = g \quad be = h \quad cf = i \quad (145)$$

Examinons le résultat de  $\hat{C}\hat{F}\hat{I} = -\mathbb{1} = cfi$  :

$$cfi = (ab)(de)(gh) = (ad)(be)(gh) = (gh)^2 = 1 \quad (146)$$

ce qui présente une incompatibilité fonctionnelle entre les relations  $\hat{C}\hat{F}\hat{I} = -\mathbb{1}$  et  $cfi = 1$ .

De manière générale, lorsque l'on considère un ensemble d'observables indépendantes (qui commutent entre elles) et qui obéissent à une relation  $f(\hat{A}, \hat{B} \dots) = 0$ , on ne peut pas considérer la même indépendance des résultats de mesure  $f(a, b \dots) = 0$  n'est pas possible et on ne peut pas ainsi associer chaque résultat à chaque observable. En posant  $a = v(\hat{A})$  ( $v$  "pour valeur de"), cette impossibilité peut se traduire par  $v(f(\hat{A}, \hat{B}, \dots)) \neq f(v(\hat{A}), v(\hat{B}), \dots)$ , dont une manifestation possible est la violation de la règle du produit

$$v(\hat{A}\hat{B}) \neq v(\hat{A})v(\hat{B}) \quad (147)$$

et en conséquence, le résultat d'une mesure dépend des autres propriétés mesurées aux même instant : la mesure est contextuelle. De ce fait, la probabilité d'occurrence de mesures indépendantes et séparées n'est pas identique à la situation physique où la mesure est jointe :  $P_{\text{born}}(\widehat{O}_1)P_{\text{born}}(\widehat{O}_2) \neq P_{\text{born}}(\widehat{O}_1\widehat{O}_2)$ . C'est ce que stipule le théorème Bell-Kochen-Spekker qui considère la contextualité au niveau des variables cachées [64], [65].

### 4.3.2 Contextualité de la mesure forte pour un processus de pré/post-sélection

La dépendance explicite du contexte dans lequel une observable est mesurée est donc finalement symbolisée par la violation de la règle du produit  $P_{\text{born}}(\widehat{\Pi}_j^2\widehat{\Pi}_j^1) \neq P_{\text{born}}(\widehat{\Pi}_j^1)P_{\text{born}}(\widehat{\Pi}_j^2)$ .

Vaidman [57] montre le comportement analogue dans le cadre d'un processus de pré/post-sélection : la règle ABL ne respecte pas non plus la règle du produit. On peut s'en rendre facilement compte en reprenant l'état final de  $\{\mathcal{S} + \mathcal{M}\}$  dans le cas de la mesure de deux observables obtenu à la section précédente.

$$\frac{1}{\sqrt{|\langle\phi_f|\psi_i\rangle|^2_{n,n'}}} \sum \langle\phi_f|\widehat{\Pi}_n^1\widehat{\Pi}_{n'}^2|\psi_i\rangle|\varphi_1^n\rangle|\varphi_2^{n'}\rangle \quad (148)$$

avec l'intensité associée

$$\mathcal{I} = \sum_{n,n'} \left| \frac{\langle\phi_f|\widehat{\Pi}_n^1\widehat{\Pi}_{n'}^2|\psi_i\rangle}{\langle\phi_f|\psi_i\rangle} \right|^2 \left| |\varphi_1^n\rangle|\varphi_2^{n'}\rangle \right|^2 \quad (149)$$

Si l'on effectue la mesure  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  en même temps, il est clair que la probabilité d'occurrence de chaque résultat mesuré pour des processus de pré/post-sélection distincts n'est pas égale à la probabilité associée à la mesure jointe : la probabilité ABL associée à un résultat de mesure dans processus de pré/post-sélection vérifie bien le caractère contextuel présent en mesure standard. Cela a pour conséquence, une violation de la règle du produit [57]

**Propriété n°3 :**

$$P_{\text{abl}}(\widehat{\Pi}_j^1)P_{\text{abl}}(\widehat{\Pi}_{j'}^2) \neq P_{\text{abl}}(\widehat{\Pi}_j^1\widehat{\Pi}_{j'}^2)$$

#### 4.4 Rôle causal des conditions limites : un rôle contextuel

Donc si on récapitule, on sait que l'observation de deux propriétés est impossible pour une mesure forte. C'est la conséquence de la propriété n°3. En conséquence, un expérimentateur sera obligé de réaliser des mesures séparées. Par contre, la mesure faible permet d'observer les deux valeurs propres à la fois du fait que les interférences entre les mesures sont négligeables (d'ordre  $g^2$ ) et tant que la propriété n°1 est valide.

Le terrain d'entente où les propriétés n°1 et n°3 sont valables est celui de l'examen d'occurrences contrefactuelles : deux valeurs propres ont chacune une probabilité d'occurrence égale à 1 ( $P_{\text{abl}}(\hat{\Pi}_j^1) = P_{\text{abl}}(\hat{\Pi}_{j'}^2) = 1$ ) mais ne sont pas observables en même temps, la mesure de l'un perturbant l'autre même si  $[\hat{\Pi}_j^1, \hat{\Pi}_{j'}^2] = 0$ .

Sur ce même terrain et pour une mesure faible : ce qui est vrai de manière séparée et répétitive pour une mesure forte est simultanément toujours vrai et réalisable pour une valeur faible. La valeur faible vérifie les prédictions de la règle ABL, pour un processus de pré/post-sélection unique, en considérant les états translatés de  $\mathcal{M}$  comme des alternatives contrefactuelles, toutes vraies au même instant et vérifiables par des mesures fortes séparées [49].

Nous avons maintenant délimité le cadre dans lequel nous pourrions manifester le rôle des conditions limites, en se servant de la contextualité d'une mesure. Effectivement, la propriété n°3 offre un lien direct entre une valeur propre et une valeur faible : si l'on peut montrer que les conditions limites imposent une violation de la règle du produit pour une mesure forte, cela veut dire qu'elles s'imposent comme contexte du résultat obtenu. Ainsi, on peut mettre en évidence ce même rôle respectivement à une valeur faible dans le cas de l'observation de deux résultats contrefactuels pour un processus de pré/post-sélection unique.

De cette manière, on peut exhiber le caractère contextuel d'un résultat de mesure, clairement imposé par les conditions limites et ainsi confirmer leurs rôle structurel d'une valeur faible particulière de manière rigoureuse. C'est là que la propriété n°3 entre en jeu : elle offre un lien indirect avec le théorème de Bell-Kochen-Specker ([64], [65], voir aussi [62] et [66]) qui montre l'impossibilité d'une théorie non contextuelle reproduisant les résultats de la physique quantique. Le lien est indirect puisque la preuve traite des probabilités données par la règle de Born alors que nous nous intéressons à celles données par la règle ABL.

Nous disposons enfin de toutes les informations nécessaires. La stratégie employée pour montrer l'influence contextuelle des conditions limites est la suivante

1. On se restreint à des processus logiques où l'influence des conditions limites est clairement identifiable pour une mesure forte, c'est dire en considérant la propriété n°1 [59]
2. On ramène la violation de la règle ABL (propriété n°3) à celle de la règle de Born (accompli par Leifer et Spekkens [59]) dans le cadre d'un processus logique pour montrer l'influence contextuelle des conditions limites sur une valeur propre obtenue.
3. Par extension, le rôle contextuel des conditions limites est établi sur la valeur faible en vertu des conséquences sur le lien valeur propres  $\leftrightarrow$  valeur faible, donné par la propriété n°1 (accompli par Tollaksen [49])

C'est ce raisonnement qui est détaillé dans le paragraphe suivant et qui permet de voir clairement que les conditions limites imposent l'évolution du système entre  $t_i$  et  $t_f$ .

#### 4.4.1 Conséquences pour une valeur faible

Heureusement, tant que la propriété n°1 est valable, la propriété n°4 constitue un lien explicite avec la valeur faible, c'est à dire, pour des processus logiques. C'est exactement ce que remarque Tollaksen [49] et c'est ce dont nous avons déjà un peu discuté auparavant :

##### **Propriété n°4 :**

Ce qui est vrai de manière séparée et répétitive pour une mesure forte est simultanément toujours vrai et réalisable pour une valeur faible. La valeur faible vérifie les prédictions de la règle ABL, pour un processus de pré/post-sélection unique, en considérant les états translatés de  $\mathcal{M}$  comme des alternatives contrefactuelles, toutes vraies au même instant et vérifiables par des mesures fortes séparées.

En conséquence, dans le cadre de processus logiques, la réunion des propriétés n°3 et n°4 nous donne la dernière propriété formulée dans [49] et qui considère la contextualité d'une variable cachée comme étant plutôt intrinsèque à une nature quantique (mais totalement équivalent dans la

logique de réflexion)

**Propriété n°5 :**

L'existence de processus logiques dans lesquels la règle ABL n'est pas respectée (lorsque les propriétés n°1 et n°2 sont valides) implique une "contextualité quantique" pour la valeur faible (via les propriétés n°4 et n°5)

Cette propriété nous permet de conclure. La mesure jointe de deux opérateurs étant possible pour une interaction faible, l'observation d'éléments contrefactuels est possible. Puisque ces éléments sont la signature de l'influence des conditions limites, lorsque celles-ci sont atteintes, alors, via les propriétés n°4 et n°5, on peut conclure que les conditions limites sont inhérentes à la détermination d'une valeur faible particulière.

On peut enfin comprendre que la valeur faible est définie par une self-logique interne réglée par (i) la pré-sélection, (ii) la post-sélection et (iii) l'observable mesurée [49]. Alors, leur caractère "bizarre" paraît plus "accueillant" lorsqu'on comprend l'importance des conditions limites : pourquoi une valeur faible appartiendrait elle au spectre de l'observable mesurée seule ?

Notons que nous nous sommes limités au cas d'une mesure quantique décrite par des conditions limites à  $t_i$  et  $t_f$ , cependant, Pusey [67] et Pusey et Leifer [68] montrent que l'imposition de pré/post-sélections joue un rôle similaire quant à la statistique des résultats d'une mesure quelconque (en utilisant le formalisme des POVM : positive operator valued measure).

**4.4.2 Mise en évidence du rôle contextuel des conditions limites sur une valeur faible : illustration avec le paradoxe des trois boîtes**

Le paradoxe des trois boîtes est un incontournable si l'on s'intéresse à la mesure faible. Il a été introduit par Aharonov et Vaidman [60] et est le support de nombreux papiers comme [18], [69], [70], [71] ou [72] pour la réalisation expérimentale. Il va souvent de paire avec le paradoxe de Hardy [19] qui en est un analogue [73], [74], [75], [76], [77], [78].

Considérons trois boîtes (voir figure 15) dénotées 1, 2 et 3 pour construire l'état de pré-sélection suivant

$$|\Psi\rangle = |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle \tag{150}$$

(la normalisation n'a pas d'importance ici) et post-sélectionner

$$|\Phi\rangle = |1\rangle + |2\rangle - |3\rangle \quad (151)$$

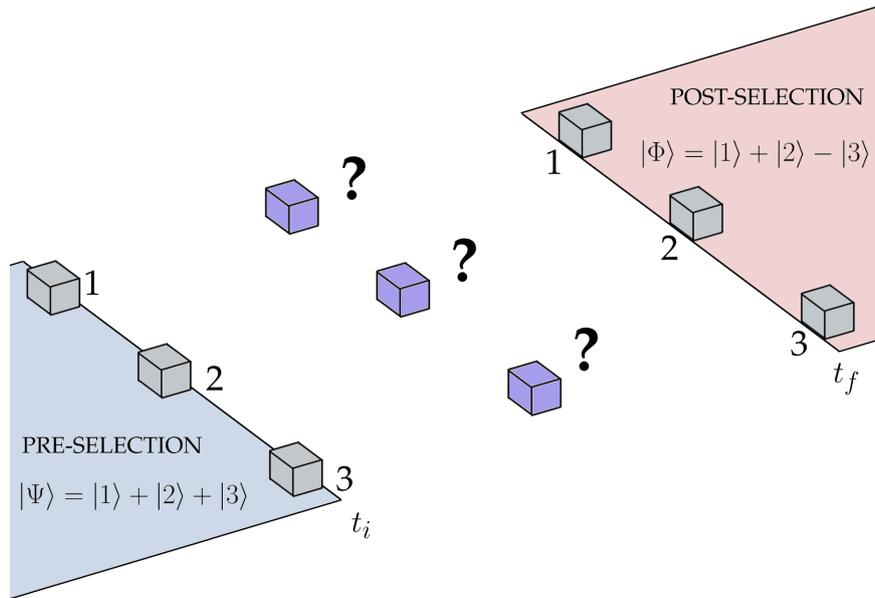


FIGURE 15 – Le paradoxe des trois boîtes

Imaginons une mesure forte hypothétique où l'on ouvrirait la boîte 1 entre  $t_i$  et  $t_f$  pour savoir si la particule s'y trouve. On représente cette mesure par celle de  $\hat{\Pi}_1 = |1\rangle\langle 1|$ , la règle ABL donne

$$P_1 = \left| \frac{(\langle 1| + \langle 2| - \langle 3|)\hat{\Pi}_1(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)}{(\langle 1| + \langle 2| - \langle 3|)(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)} \right|^2 = 1 \quad (152)$$

Donc, on est sûr de trouver la particule dans la boîte 1. D'un autre côté, si on ne la trouvait pas, le système serait projeté sur  $|2\rangle + |3\rangle$  et la post-sélection ne serait jamais réussie.

Là où arrive le paradoxe, c'est lorsqu'on réalise le même exercice sur la boîte 2 avec  $\hat{\Pi}_2$  ( $[\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2] = 0$ ) :  $P_2 = 1$  avec la même conséquence si on ne l'y trouvait pas ! Enfin, si on souhaitait ouvrir les boîtes 1 et 2 dans les même processus de pré/post-sélection, on ne trouverait la particule nulle part :

$$P_{12} = 0 \quad (153)$$

qui est une violation de la règle du produit.

Notons que nous avons considéré une mesure hypothétique. Si une mesure standard est vraiment accomplie entre  $t_i$  et  $t_f$ , alors on pourrait trouver la particule dans n'importe quelle boîte, mais la situation physique aurait complètement changé puisque  $\mathcal{S}$  collapserait. Par exemple, on pourrait trouver la particule dans la boîte 3 mais la post-sélection n'aurait que très peu de chance de se produire.

En revanche, en réalisant des mesures fortes de Von Neuman, on peut conclure que si on ouvrait la boîte 1, on y trouverait toujours la particule pourvu que la post-sélection fonctionne et il faudra recommencer une transition pour obtenir le même résultat avec la boîte 2. Donc, par des mesures fortes séparées, les résultats sont toujours vrais. Ils sont donc vérifiables et simultanément vrais pour la mesure faible qui peut ouvrir les deux boîtes en même temps. Grâce aux propriétés n°2 et n°3, on obtient

$$\Pi_1^w = 1 \quad \Pi_2^w = 1 \quad \Pi_1^w + \Pi_2^w + \Pi_3^w = 1 \quad (154)$$

et en conséquence,

$$\Pi_3^w = -1 \quad (155)$$

qui est loin d'être facile à interpréter. Une interprétation possible est de considérer que les conditions limites imposent  $-1$  particule dans la boîte 3 au cours de la transition et 1 dans les boîtes 1 et 2, au sens littéral [50], et la question de la réalité de ce genre d'interprétation est aussi discutée [79]. Notons qu'une analyse par les chemins de Feynman est possible, point de vue en général privilégié par Sokolovski [80], [69], [77].

Donc, le paradoxe exhibe toutes les caractéristiques dont nous avons parlé au paragraphe précédent. Nous sommes dans le cas d'une pré/post-sélection logique,  $\hat{\Pi}_1$  et  $\hat{\Pi}_2$  commutent, leurs probabilités ABL  $P_1$  et  $P_2$  sont égales à 1 avec une violation de la règle du produit  $P_1 P_2 \neq P_{12} = 0$ . Pour toutes les raisons évoquées au paragraphe précédent, nous savons que cette configuration est celle d'une influence "maximale" imposée par les conditions limites.

Dans les cas des trois boîtes, le produit des observables  $\hat{\Pi}_1 \hat{\Pi}_2 = 0$  est constant, imposé sans ambiguïté par les conditions limites à  $t_i$  et  $t_f$ . Mais, Mermin [81] montre, dans un système à 4D, que l'issue de la contextualité est inchangée même si le produit des observables n'est pas constant (cas du paradoxe de Hardy), tant qu'il y a violation de la règle du produit. En ce sens, le cas des trois boîtes est un cas particulier.

A noter, l'on peut aussi étudier l'influence des conditions limites par la contrainte qu'elles imposent sur la valeur faible. Nous n'avons pas beaucoup parlé de la propriété n°2 (qui entraîne nécessairement  $\sum_i \Pi_i^w = 1$  si  $\sum_i \hat{\Pi}_i = \mathbb{1}$ ), mais lorsqu'elle est réunie avec la propriété n°1, les contraintes algébriques sur les résultats imposées par le succès des pré/post-sélections produisent des valeurs faibles déroutante et négative comme  $\Pi_3^w = -1$  dans le cas des trois boîtes. Spekkens établit dans [82] un lien entre l'émergence de valeurs faibles négatives et la contextualité des variables cachées (la violation de la règle du produit pour des processus logiques permet de voir la contextualité et avec la contrainte de la propriété n°2, la conséquence sera forcément des valeurs faibles négatives). De ce fait, d'autres travaux se concentrent sur l'occurrence de valeurs faibles négatives [83], [84] pour mettre en évidence l'influence des conditions limites en cherchant des pré/post sélections qui contraignent la valeur faible à prendre la valeur la plus bizarre possible.

## 5 Conclusion

Dans cette introduction, nous avons présenté la valeur faible comme grandeur émergente d'une mesure de Von Neumann imprécise lorsqu'un système est pré et post-sélectionné. Nous avons aussi décrit les propriétés d'un processus de pré/post-sélection dans le cas d'une mesure faible comme dans le cas d'une mesure forte. Cela nous a permis d'identifier les contributions respectives des conditions limites et de l'observable mesurée à l'établissement d'une valeur faible particulière. Aussi, nous avons mis en valeur le rôle contextuel des conditions limites, qui, lorsqu'elles sont bien choisies, permettent l'observation de situations contrefactuelles par mesure faible.

Nous avons pu ainsi comprendre dans quel sens la valeur faible est représentative du système  $\mathcal{S}$  considéré sans pour autant associer une situation physique à telle valeur de la valeur faible.

Effectivement, la valeur faible souffre de l'absence d'une formulation algébrique et en conséquence, le mot "mesure" dans "mesure faible" n'est pas encore bien justifié puisque nous ne disposons pas encore d'une interprétation projective, s'il y en a une, dans laquelle la valeur faible pourrait s'inscrire comme résultat d'une mesure à proprement parler en physique quantique.



# II Trajectoires faibles dans le dispositif des fentes d'Young

## 1 Introduction : Mesures faibles et trajectoires d'un système quantique

Il est bien connu que l'on peut décrire l'évolution dynamique d'un système quantique par des trajectoires. Il est en effet possible, à partir de l'équation de Schrödinger, de définir des quantités auxquelles des trajectoires peuvent être associées.

Une première quantité que l'on peut dériver directement de l'équation de Schrödinger pour une fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r}, t)$  est la densité de courant,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{i\hbar}{2m} [\psi(\mathbf{r}, t) \nabla \psi^*(\mathbf{r}, t) - \psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \psi(\mathbf{r}, t)]. \quad (156)$$

A partir de cette densité de courant on peut définir un champ de vitesse suivant la formule habituelle

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r}, t)} \quad (157)$$

où ici  $\rho(\mathbf{r}, t) \equiv |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ . En supposant que ce champ représente la vitesse d'une particule, on obtient une trajectoire unique reliant chaque position initiale, c'est à dire chaque  $\mathbf{r}_i$  où  $\psi(\mathbf{r}, t_i)$  est non nul, à une position finale  $\mathbf{r}_f$  de  $\psi(\mathbf{r}, t_f)$ . C'est précisément de cette manière que sont définies les trajectoires dans l'approche de de Broglie-Bohm [7] dans laquelle on suppose que la fonction d'onde « pilote » une particule suivant la densité de courant.

Une autre manière de définir des trajectoires consiste à écrire le propagateur obéissant à l'équation de Schrödinger avec un hamiltonien  $\hat{H}$  sous la

forme d'une intégrale de chemins de Feynman [85], [86].

$$\langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \hat{H} dt} | x_i \rangle = \int_{x_i(t_i)}^{x_f(t_f)} \mathcal{D}[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(\dot{x}, x, t) dt} = \int_{x_i(t_i)}^{x_f(t_f)} \mathcal{D}[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}(x(t))} \quad (158)$$

où  $\mathcal{L}$  est le lagrangien et  $\mathcal{S}$  l'action.  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{S}$  sont des quantités bien connues en mécanique classique, mais ici la somme se fait sur toutes les trajectoires possibles, aussi biscornues soient-elles, reliant  $x_i$  au temps  $t_i$  à  $x_f$  au temps  $t_f$ ; ceci est symbolisé par la mesure  $\mathcal{D}[x(t)]$ , qui s'obtient formellement en découpant l'évolution temporelle en un nombre  $N$  de tranches infinitésimales que l'on fait ensuite tendre vers l'infini. Toutefois, pour l'évolution libre, ou lorsque l'Hamiltonien a un potentiel linéaire ou au plus quadratique, tous ces chemins biscornus interfèrent destructivement et seuls subsistent les trajectoires classiques. On peut écrire alors

$$\int_{x_i(t_i)}^{x_f(t_f)} \mathcal{D}[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}(x(t))} = \sum_k A_k e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_k} \quad (159)$$

où la somme se fait sur les trajectoires classiques  $k$  reliant  $x_i$  au temps  $t_i$  à  $x_f$  au temps  $t_f$ . L'amplitude  $A_k$  dépend des dérivées secondes de l'action (voir les Ch. 14 et 17 de [85]); son module est relié au champ de Jacobi bien connu en mécanique classique, donnant la densité des trajectoires dans l'espace de configuration. Notons qu'en général les trajectoires définies par la densité de courant et par les intégrales de chemin sont différentes. En particulier, une trajectoire unique relie deux points par la densité de courant, alors que les trajectoires de l'intégrale de Feynman sont en principe non-dénombrables et interfèrent.

## 1.1 Valeurs faibles et trajectoires quantiques

Le lien entre valeurs faibles et trajectoires de de Broglie Bohm s'obtient [87] en calculant la valeur faible de l'opérateur  $\hat{\mathbf{p}}$  en pré-sélectionnant le système dans l'état  $|\psi(t)\rangle$  (évolué au temps  $t$  à partir de l'état préparé initialement) et en effectuant une post-sélection sur une position  $|\mathbf{r}_f\rangle$ . On a alors

$$\mathbf{p}(t)_W = \frac{\langle \mathbf{r}_f | \hat{\mathbf{p}} | \psi(t) \rangle}{\langle \mathbf{r}_f | \psi(t) \rangle} = m\mathbf{v}(\mathbf{r}_f, t) - i\hbar \frac{\nabla \rho(\mathbf{r}_f, t)}{2\rho(\mathbf{r}_f, t)}. \quad (160)$$

La partie réelle de  $\mathbf{p}(t)_W/m$  est donc simplement la vitesse définie par la densité de courant (157). En répétant des mesures de  $\mathbf{p}(t)_W/m$  pour différentes positions  $\mathbf{r}_f$  on peut obtenir le champ de vitesses en chaque point.

Ceci permet ensuite de reconstruire les trajectoires ayant  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_f, t)$  pour vitesse : ce sont les trajectoires dites « bohmiennes ». Une expérience marquante réalisée dans le groupe de Steinberg [88] a précisément consisté à mesurer indirectement de telles trajectoires dans le cas des fentes de Young « traversées » par un photon unique : une mesure faible réalisée à l'aide d'un crystal biréfringent couple le  $\mathbf{p}$  du photon à sa polarisation ; la valeur faible est ensuite déduite en mesurant la polarisation par le biais d'un crystal. En balayant sur différents points  $\mathbf{r}_f$  (aussi bien sur un plan parallèle au plan contenant les fentes qu'en profondeur), on détermine ainsi expérimentalement le champ de vitesses  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_f)$ . Finalement la trajectoire bohmienne est reconstruite à partir du champ de vitesses.

En principe, l'observation directe d'une trajectoire implique l'observation séquentielle de positions  $\{t_k, \mathbf{r}_k\}$ . On peut donc supposer qu'une série de mesures faibles de la position constituerait un outil intéressant pour mettre en évidence des trajectoires d'un système quantique. Dès 2003, Tanaka montre [89] que lorsque la somme (159) ne contient qu'un terme (ce qui est toujours le cas pour des temps courts), la valeur faible de la position donne la position suivant la trajectoire classique. Un dispositif contenant des pointeurs faiblement couplés alignés sur une grille est considéré par Matzkin [90] qui montre que dans le régime semi-classique, on peut en principe observer la superposition des trajectoires de Feynman données par l'Eq (159) (c'est à dire que seuls les pointeurs situés sur ces trajectoires s'allument) ; ceci est le cas pourvu que la fonction d'onde sur chacune de ces trajectoires reste suffisamment bien localisée (c'est le cas par exemple pour une superposition d'états cohérents évoluant sur des trajectoires classiques). Le choix de la post-sélection est néanmoins important, puisque des pointeurs isolés non-situés sur ces trajectoires peuvent s'allumer [90]. On peut par ailleurs choisir [91] une post-sélection bi-locale (en faisant interférer des détecteurs situés en deux points différents de l'espace), ce qui change radicalement les trajectoires faibles observées. Ceci avait été vu dans un cas simple (2 sources ponctuelles) par Mori et Tsutsui [92], [93]. Le rôle des interférences est en effet crucial dans la détermination des valeurs faibles : la pré-sélection et la post-sélection déterminent les trajectoires qui contribuent à la fonction d'onde aux points où ont lieu les couplages avec les pointeurs faibles.

## 1.2 Organisation du Chapitre

Dans ce Chapitre, nous allons examiner ce dernier point, à savoir l'influence des interférences et de la post-sélection sur le type de trajectoires faibles dans un cas particulier, celui des fentes de Young. Nous chercherons à mettre en évidence les chemins de Feynman du problème en supposant que le système (la particule quantique traversant les fentes de Young) interagit faiblement avec des pointeurs avant sa détection finale sur un écran.

Nous commencerons par rappeler le traitement des fentes d'Young par la méthode des intégrales de chemin. Nous regarderons ensuite, en fonction de la position des pointeurs et du choix de l'état de post-sélection, les trajectoires détectés par les pointeurs faibles. Nous considérerons une post-sélection aux alentours d'une position finale donnée par un paquet d'ondes gaussien dont on imposera également l'impulsion.

Enfin, ces considérations faites pour des pointeurs idéaux seront transposées dans un cas qui est à portée expérimentalement : il s'agira de proposer un protocole pour observer les chemins de Feynman dans un montage de fentes Young pour un photon ; dans ce cas, il n'a pas de pointeurs indépendants pouvant être couplés au système, mais comme dans la réalisation expérimentale déjà mentionnée de Steinberg [88], on utilisera la polarisation pour lire les valeurs faibles.

## 2 Approche des fentes d'Young par l'intégrale de chemin

### 2.1 Dispositif

Considérons le dispositif des fentes d'Young représenté en figure 16. Une particule est émise par une source à l'instant  $t_i$  en  $\vec{u}_i$  qui n'est détectée plus tard à l'instant  $t_f$  sur un écran en un point  $\vec{u}_f$  que dans le cas où elle passe par une fente ou l'autre.

Les fentes de largeur  $2c$  et d'épaisseur  $a$  sont centrées en  $\pm x_0$  et sont distantes de  $2b$ . Les points d'émission et de réception sont distants de  $L + D$  où  $L$  est la distance source/fentes et  $D$  la distance fentes/écran.

On peut distinguer plusieurs régimes de diffraction optique définis par la taille des fentes, par la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde incidente et par la distance écran/fentes. Dans le cas d'un dispositif à une fente, le nombre

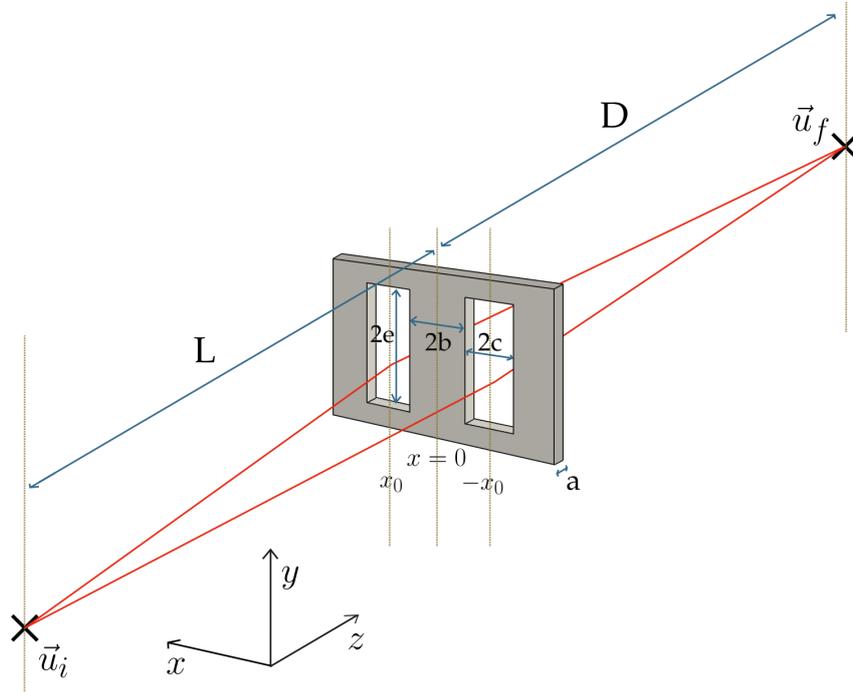


FIGURE 16 – Dispositif

de Fresnel  $N_F = 2c^2/\lambda D$  permet de discriminer le régime de Fraunhofer ( $N_F \ll 1$ ), le régime de Fresnel ( $N_F \gg 1$ ) et le régime intermédiaire ( $N_F \approx 1$ ). Une étude détaillée de la figure d'interférence dans le cas de deux fentes est disponible dans [94] pour chacun de ces régimes.

Dans le but de limiter les effets de diffraction, nous nous placerons dans le cas où la taille des fentes est très inférieure à la distance fentes/écran, c'est à dire dans le régime de Fraunhofer. Dans ce régime, la valeur de l'impulsion de la particule peut être essentiellement ramenée à la valeur de sa composante selon la direction de propagation et ainsi,  $p \approx p_z$ . De cette manière, nous considérerons une propagation selon la direction  $z$  et la forme initiale de la fonction d'onde est donnée par

$$\Psi(x, y, z) = \psi(x, y) e^{i p z} \quad (161)$$

De plus nous considérerons l'approximation de troncation [95]. Soit  $\tau$  l'instant de passage de la particule par les fentes, l'approximation de troncation considère le mouvement de la particule entre  $t_i$  et  $\tau$  comme indépendant du mouvement entre  $\tau$  et  $t_f$ . Puisque la propagation est considérée selon la direction  $z$  uniquement, il vient  $\tau = L/v \approx L/v_z$  où  $v_z$  est la vitesse classique de la particule selon  $z$ .

Enfin et pour finir, puisque nous sommes principalement intéressé par les interférences selon la direction  $x$ , la taille des fentes selon la direction  $y$  sera prise bien plus grande que celle selon  $x$ . De ce fait, on considèrera des fentes infinies selon  $y$  et l'invariance selon  $y$  qui en découle nous donnera une dynamique explicitée dans le plan  $xOz$ .

## 2.2 Propagateur

Rappelons tout d'abord que lorsque l'évolution est libre,  $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$  et l'amplitude de probabilité d'être en  $x_i(t_i)$  puis en  $x_f(t_f)$  devient

$$\langle x_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \hat{H} dt} | x_i \rangle = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(t_f - t_i)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)}} \quad (162)$$

où la phase est donnée par l'action classique d'une particule libre qui suit la trajectoire

$$x_{cl}(t) = x_i + \frac{t}{t_f - t_i}(x_f - x_i) \quad (163)$$

Ainsi, la somme sur toutes les trajectoires possibles donnée par l'Eq (158) donne une interférence destructive pour toutes les trajectoires excepté l'unique trajectoire classique  $x_{cl}(t)$  (il n'y a donc ici pas de somme comme à l'Eq. (159)).

Rappelons que l'amplitude de probabilité d'être détecté au point  $\vec{u}_i$  à  $t_i$  et en  $\vec{u}_f$  à  $t_f$  ( $t_f > t_i$ ) tout en étant passé par n'importe quel point  $\vec{u}_k$  à un temps intermédiaire  $t_k$  vérifie

$$A(\vec{u}_f, t_f | \vec{u}_i, t_i) = \int d\vec{u}_k A(\vec{u}_f, t_f | \vec{u}_k, t_k) A(\vec{u}_k, t_k | \vec{u}_i, t_i) \quad (164)$$

où la sommation est sur l'ensemble des  $\vec{u}_k$  à  $t_k$ . En terme d'intégrale de Feynman, l'amplitude de probabilité  $A(\vec{u}_f, t_f | \vec{u}_i, t_i)$  est donnée par le propagateur  $K(\vec{u}_f, t_f | \vec{u}_i, t_i)$  qui ne fait intervenir que la trajectoire classique dans le cas libre. Aussi, une particule se propageant librement entre deux points  $\vec{u}_i$  et  $\vec{u}_f$  tout en passant par un point intermédiaire  $\vec{u}_k$  suivra une trajectoire de Feynman donnée par les deux trajectoires classiques successives  $(\vec{u}_i, t_i) \rightarrow (\vec{u}_k, t_k)$  et  $(\vec{u}_k, t_k) \rightarrow (\vec{u}_f, t_f)$ , la sommation sur les  $\vec{u}_k$  permettant de retrouver la trajectoire classique  $(\vec{u}_f, t_f) \rightarrow (\vec{u}_i, t_i)$ .

L'introduction des fentes contraint géométriquement les chemins autorisés à passer. On introduit [86],[96] les fonctions  $\varphi_1(\vec{u}_k)$  et  $\varphi_2(\vec{u}_k)$  qui filtrent

les trajectoires passant par les fentes à  $t = \tau$  selon la forme géométrique des fentes 1 et 2, dans l'expression de  $A(\vec{u}_f, t_f | \vec{u}_i, t_i)$ ,

$$\begin{aligned} A(\vec{u}_f, t_f | \vec{u}_i, t_i) &= \int d\vec{u}_k \varphi_1(\vec{u}_k) K(\vec{u}_f, t_f | \vec{u}_k, \tau) K(\vec{u}_k, \tau | \vec{u}_i, t_i) \\ &\quad + \int d\vec{u}_k \varphi_2(\vec{u}_k) K(\vec{u}_f, t_f | \vec{u}_k, \tau) K(\vec{u}_k, \tau | \vec{u}_i, t_i) \quad (165) \\ &= K_1(\vec{u}_f, t_f | \vec{u}_i, t_i) + K_2(\vec{u}_f, t_f | \vec{u}_i, t_i) \quad (166) \end{aligned}$$

où  $K_{1/2}(\vec{u}_f, t_f | \vec{u}_i, t_i)$  est l'amplitude de probabilité de passage par la fente 1/2 dans l'approximation de troncation.

Explicitons à présent  $K_{1/2}(\vec{u}_f, t_f | \vec{u}_i, t_i)$ . L'approximation de troncation permet de discriminer la dynamique selon  $z$  de celle inscrite dans la plan  $xOy$  et de ce fait, le propagateur  $K_{1/2}(\vec{u}_f, t_f | \vec{u}_i, t_i)$  peut s'exprimer selon

$$K_{1/2}(\vec{u}_f, t_f | \vec{u}_i, t_i) = K_{1/2}^z(z_f, t_f | z_i, t_i) K_{1/2}^{xy}(x_f, y_f, t_f | x_i, y_i, t_i) \quad (167)$$

où  $K_{1/2}^z$  et  $K_{1/2}^{xy}$  sont indépendants. La séparation de la dynamique selon  $z$  est une approximation; en particulier elle ne prend pas en compte la contribution des "loop trajectories", trajectoires de nature quantique où la particule peut par exemple passer par la fente 1, puis retourner en arrière en passant par la fente 2 avant de repartir vers l'écran. En revanche, Yakubi montre que la contribution de ces trajectoires est négligeable [97] et Beau [94] montre que l'approximation de troncation est valide pour une réalisation expérimentale dans le régime de Fraunhofer.

En conséquence et puisque le profil de la fonction d'onde est donné par une onde plane selon  $z$ , on peut d'ores et déjà donner le profil de la fonction d'onde au temps  $t$  qui est donné par

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, t) e^{i p z - i p^2 / 2 m t} \quad (168)$$

De plus, avec l'invariance des fentes selon  $y$ , la dynamique s'inscrit dans le plan  $xOz$  et

$$K_{1/2}^x(x_f, t_f | x_i, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} dy K_{1/2}^{xy}(x_f, y_f, t_f | x_i, y_i, t_i) \quad (169)$$

Donc finalement,

$$K_{1/2}(\vec{u}_f, t_f | \vec{u}_i, t_i) = K_{1/2}^z(L + D, t_f | 0, t_i) K_{1/2}^x(x_f, t_f | x_i, t_i) \quad (170)$$

et l'état final du système est donné par

$$\Psi(x, z, t_f) = e^{i p z - i p^2 / 2 m t} \int_{-\infty}^{\infty} K_{1/2}^x(x_f, t_f | x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i \quad (171)$$

La forme de  $K_{1/2}^x(x_f, t_f|x_i, t_i)$  dépend de la forme des fentes. Un modèle réaliste consisterait à définir  $\varphi_{1/2}(x_k)$  par des fonctions portes ce qui aboutit à une expression de  $K_{1/2}^x(x_f, t_f|x_i, t_i)$  en terme d'intégrales de Fresnel [98]. Une autre solution plus avantageuse consiste à considérer des fentes gaussienne [96],[95] qui donne à la fois une expression analytique de  $K_{1/2}^x(x_f, t_f|x_i, t_i)$  et qui est à la fois associable à des fentes en forme de fonction porte [86].

Prenons une source initiale ponctuelle,  $\psi(x_i, t_i) = \delta(x_i)$  et considérons des fentes gaussiennes. Ainsi [96],

$$\varphi_1(x_k) = e^{-\frac{(x_k-x_0)^2}{2c^2}} \quad \varphi_2(x_k) = e^{-\frac{(x_k+x_0)^2}{2c^2}} \quad (172)$$

et

$$\begin{aligned} K_{1/2}^x(x_f, t_f|x_i, t_i) &= \int dx_k e^{-\frac{(x_k \pm x_0)^2}{2c^2}} K(x_f, t_f|x_k, \tau) K(x_k, \tau|x_i, t_i) \\ &= \frac{m}{2i\pi\hbar\sqrt{(t_f - \tau)(\tau - t_i)}} \int dx_k e^{-\frac{(x_k \pm x_0)^2}{2c^2}} e^{\frac{im(x_k-x_i)^2}{2\hbar(\tau-t_i)}} e^{\frac{im(x_f-x_k)^2}{2\hbar(t_f-\tau)}} \end{aligned} \quad (173)$$

Dans le but d'alléger les expressions, posons  $t_i = 0$  et  $x_i = 0$ , le calcul donne [96]

$$\begin{aligned} K_{1/2}^x(x_f, t_f|x_i, t_i) &= \left\{ \frac{m}{2i\pi\hbar(t_f + i\alpha(t_f - \tau))} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2(\Delta x)^2} (1 - i\chi) (x_f \mp x_0 \frac{t_f}{\tau})^2 + i\beta \frac{(x_f \mp x_0)^2}{t_f - \tau} + i\beta \frac{x_0^2}{\tau} \right\} \end{aligned} \quad (174)$$

avec

$$(\Delta x)^2 = \left( c \frac{t_f}{\tau} \right)^2 + \left( \frac{\hbar(t_f - \tau)}{mc} \right)^2 \quad \beta = \frac{m}{2\hbar} \quad (175)$$

$$\alpha = \frac{\hbar}{mc^2} \quad \chi = \frac{ct_f/\tau}{\hbar(t_f - \tau)/mc} \quad (176)$$

L'étalement  $(\Delta x)^2$  est une somme de deux termes. Le premier est l'étalement classique d'une gaussienne qui se propage de  $x_i = 0$  à la fente pendant  $\tau$  et de la fente à l'écran pendant  $t_f - \tau$ . Le deuxième est l'étalement quantique dû à l'incertitude sur la vitesse de la particule selon  $x$  à l'instant

$\tau$  du fait du passage par la fente de largeur caractéristique  $c$  :  $\Delta p = \hbar/c$ . Alors que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes en vue d'alléger l'expression,  $\chi$  est donné par le ratio de l'étalement classique sur l'étalement quantique [96]. La distribution de probabilité  $P(x_f, t_f)$  associée au propagateur  $K_{1/2}^x$  est centrée en  $\langle x_f \rangle = \pm x_0 t_f / \tau$  alors que l'impulsion moyenne est donnée par  $\langle p_x \rangle = \pm m x_0 / \tau$ .

La figure d'interférences est donné par le profil de

$$P(x_f, t_f) = |K_1^x(x_f, t_f | x_i, t_i)|^2 + K_1^x(x_f, t_f | x_i, t_i) (K_2^x(x_f, t_f | x_i, t_i))^* \\ + |K_2^x(x_f, t_f | x_i, t_i)|^2 + K_2^x(x_f, t_f | x_i, t_i) (K_1^x(x_f, t_f | x_i, t_i))^* \quad (177)$$

à savoir,

$$P(x_f, t_f) \propto \text{Exp} \left\{ -\frac{(x_f - x_0 \frac{t_f}{\tau})^2}{(\Delta x)^2} \right\} + \text{Exp} \left\{ -\frac{(x_f + x_0 \frac{t_f}{\tau})^2}{(\Delta x)^2} \right\} \\ + 2 \text{Exp} \left\{ -\frac{x_f^2 + (x_0 \frac{t_f}{\tau})^2}{(\Delta x)^2} \right\} \cos \left\{ \left( \frac{2\chi}{(\Delta x)^2} \frac{t_f}{\tau} + \frac{4\beta}{t_f - \tau} \right) x_f x_0 \right\} \quad (178)$$

Dans les conditions de Fraunhofer, les effets d'interférences dominent puisque la dispersion  $\Delta x$  de la distribution de probabilité de présence associée à une fente donnée doit être grande devant la distance moyenne  $\langle x_f \rangle$  parcourue par une particule venant de la même fente. En conséquence,  $\Delta x_f \gg \langle x_f \rangle$  et il vient

$$\left( c \frac{t_f}{\tau} \right)^2 + \left( \frac{\hbar(t_f - \tau)}{mc} \right)^2 \gg \left( x_0 \frac{t_f}{\tau} \right)^2 \quad (179)$$

et dans cette approximation, l'intensité observée à l'écran est environ donnée par

$$\mathcal{I} = e^{-\frac{x_f^2}{(\Delta x)^2}} \cos^2 \left( \frac{2p x_0 x_f}{\hbar D} \right) \quad (180)$$

où  $p = m v_z = m D / (t_f - \tau)$  comme posé dans [96].

### 3 Trajectoires faibles dans un dispositif à une fente

Étudions la trajectoire faible portée par la fonction d'onde entre la fente et l'écran. Celle-ci est définie aux endroits où les états de pré/post-sélection

se recouvrent mutuellement, recouvrement rendu manifeste par une collection d'interactions faibles placées sur la trajectoire classique entre les états de pré/post-sélection. Ces derniers sont définis par  $|\psi_i\rangle$  pris au temps  $t_i$  de passage de la particule par les fentes et par  $\langle\chi_f|$  pris au temps  $t_f$  de détection sur l'écran. Imaginons le dispositif représenté en figure 17 dans lequel des détecteurs faibles idéaux  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_n$  interagissent avec la particule à des temps différents  $t_1, t_2, \dots, t_n$  entre  $t_i$  et  $t_f$  selon les hamiltoniens d'interaction  $\hat{H}_1, \hat{H}_2, \dots, \hat{H}_n$ . Chaque  $\mathcal{M}_j$  nous renvoie ainsi la partie

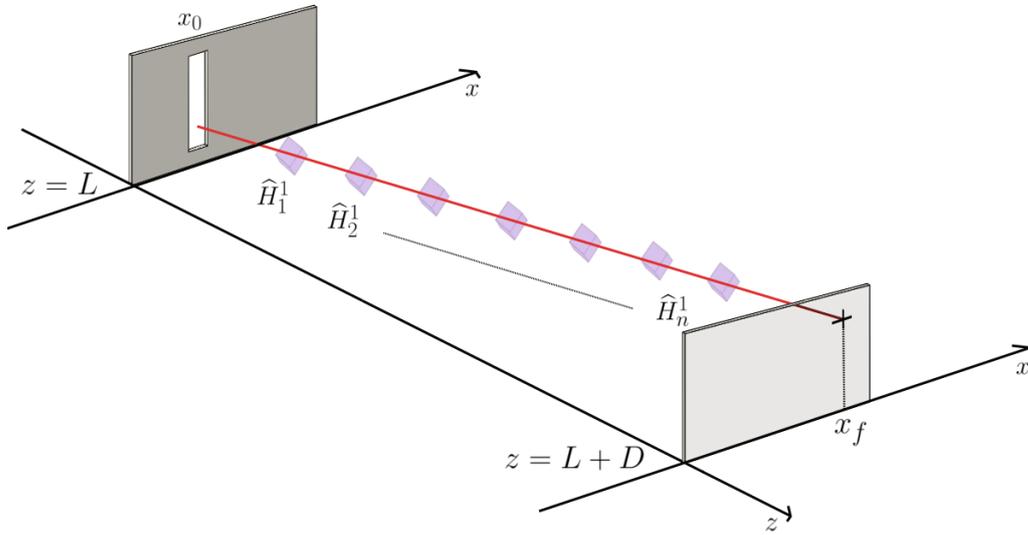


FIGURE 17 – Dispositif

réelle de la valeur faible de la présence de la particule au temps  $t_j$

$$\Pi_{x_j}^w = \frac{\langle\chi_f(t_j)|\Pi_{x_j}|\psi_i(t_j)\rangle}{\langle\chi_f(t_j)|\psi_i(t_j)\rangle} \quad (181)$$

avec

$$\Pi_{x_j} \equiv \int dx |x\rangle \langle x| f(x; x_j) \quad (182)$$

où  $f(x; x_j)$  est une fonction représentant la largeur du détecteur faible, centré en  $x_j$ .

### 3.1 Considérations physiques

Dans le but de simplifier les expressions, posons une forme générale du profil spatial de l'état de pré-sélection  $|\psi_i\rangle$

$$\psi_i(x, t = 0) = \frac{1}{(2\pi d^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4d^2} + \frac{i p_i (x-x_0)}{h}} \quad (183)$$

défini au passage de la particule par la fente centrée en  $x_0$ .  
A un temps  $t$  ultérieur,

$$\psi_i(x, t) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{(-1)^{3/4}}{\sqrt{\frac{\hbar t}{dm} - 2id}} \text{Exp}\left\{-\frac{2d^2 p_i (2m(x_0 - x) + p_i t) + imh(x - x_0)^2}{2h(ht - 2id^2 m)}\right\} \quad (184)$$

d'où la densité de probabilité de présence associée

$$P(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = \frac{m d \sqrt{2}}{\sqrt{4\pi d^4 m^2 + \pi h^2 t^2}} \text{Exp}\left\{-\frac{2d^2}{4d^4 m^2 + h^2 t^2} (m(x_0 - x) + p_i t)^2\right\} \quad (185)$$

Ainsi, la position du centroïde de la fonction d'onde au temps  $t$  suit une trajectoire donnée par

$$x_i + \frac{p_i}{m} (t - t_i) \quad (186)$$

d'impulsion  $p_i$ .

Ici, on considère de manière tout à fait générale que les paramètres de la fonction d'onde pré-sélectionnée définie aux équations (183) et (184), peuvent être choisis librement.

Il est néanmoins utile de relier ces paramètres à ceux du traitement mené ci-dessus à la partie 2.2 ayant abouti à l'expression de la fonction d'onde issue d'une source ponctuelle et passant à travers une fente gaussienne. En effet, en comparant la phase des équations (174) et (184), et en gardant en tête que l'origine des temps n'est pas la même ( $t' \rightarrow t - \tau$ ), il vient

$$\Delta x^2 = 2d^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{2m^2 d^2} \quad (187)$$

et en particulier pour  $t = 0$  (c'est à dire lorsque  $t' = \tau$  à l'expression (174)), on a  $\Delta x^2(t' = \tau) = b^2 = 2d^2$ . De la même manière, on identifie  $p_i = mx_0/\tau$ . Ainsi, dans le cas de la fente étudiée précédemment (section 2.2) et en l'absence de collimateur, l'impulsion  $p_i$  de l'état pré-sélectionné est établi par la position relative de la source par rapport à la fente.

Posons également l'état de post-sélection  $\langle \chi_f |$  défini au temps intermédiaire par une gaussienne centrée en un point  $x_f$  de l'écran et qui se propage en remontant le temps de  $t_f$  à  $t$ ,

$$\chi_f(x, t) = \left( -\frac{2}{\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\frac{h(t_f-t)}{dm} + 2id_f}} \text{Exp} \left\{ -\frac{2d_f^2 p_f (2m(x_f - x) + p_f(t_f - t)) + imh(x - x_f)^2}{2h(h(t_f - t) + 2id_f^2 m)} \right\} \quad (188)$$

qui observe un profil similaire de densité de probabilité que l'équation (185). De manière analogue à l'équation (186), on introduit la position du centroïde de l'état de post-sélection au temps  $t$  et qui se propage selon les temps décroissants sur la trajectoire

$$x_f + \frac{p_f}{m}(t_f - t) \quad (189)$$

d'impulsion  $p_f$ .

Les endroits où il y a un maximum de recouvrement entre les états de pré/post-sélection à chaque instant correspondent aux régions où les trajectoires des deux centroïdes (186) et (189) se confondent. Examinons alors plusieurs cas de propagation des états de pré/post-sélection pour évaluer, selon le cas, si l'observation d'une trajectoire faible explicite est rendue manifeste par les  $\mathcal{M}_j$ .

### 3.2 Pré-sélection et post-sélection sur des paquets d'onde restant localisés

Le cas le plus favorable pour traiter les valeurs faibles est de considérer la propagation de gaussiennes localisées (aussi bien pour  $\psi_i$  que pour  $\chi_f$ ) dont l'étalement à chaque temps  $t_j$  est petit devant la largeur du détecteur faible représentée par la longueur caractéristique de  $f(x; x_j)$ . Ainsi, le recouvrement entre les fonctions d'onde des états de pré/post-sélection

serait non nul aux endroits de chaque interaction faible uniquement ce qui implique que les étalements de  $|\psi_i(x, t)|^2$  et de  $|\chi_f(x, t)|^2$  sont extrêmement fins comparé à la distance fente/écran.

Aussi, ce recouvrement serait maximal dans le cas où les trajectoires des centroïdes de  $\psi_i(x, t)$  et de  $\chi_f(x, t)$  se confondent

$$x_j = x_i + \frac{p_i}{m} (t_j - t_i) = x_f + \frac{p_f}{m} (t_f - t_j) \quad (190)$$

En conséquence, placer les  $\mathcal{M}_j$  selon cette trajectoire commune nous donnerait

$$\Re(\Pi_{x_j}^w) \simeq 1. \quad (191)$$

et ceux placés en dehors de cette trajectoire donnerait  $\Pi_{x_j}^w = 0$ . La trajectoire faible définie par l'ensemble des  $\mathcal{M}_j$  dont la valeur faible est non-nulle serait alors bien déterminée.

Ces conditions optimales seraient accomplies à l'aide d'un collimateur placé à la sortie de la fente qui pré-sélectionnerait un  $p_i$ , directement dirigé vers le pixel de l'écran sur lequel la post-sélection serait effectuée.

Ainsi, en supposant que l'étalement de  $|\psi_i(x_f, t_f)|^2$  est inférieur à la taille du pixel de l'écran, le succès de la post-sélection implique directement que  $x_f \simeq x_i + \frac{p_i}{m} (t_f - t_i)$  et nécessairement  $p_i \simeq -p_f$  (pour satisfaire l'eq. 190). De ce fait, le centroïde de  $|\chi_f(x, t)|^2$ , qui a comme largeur à  $t_f$  celle du pixel, suit la même trajectoire que celui de  $|\psi_i(x, t)|^2$  selon les temps décroissants.

Dans cette situation, placer l'ensemble des  $\mathcal{M}_j$  sur la trajectoire impulsée par  $p_i$  nous permet d'inférer la trajectoire faible définie par les  $(\mathbf{r}_j, t_j)$  avec  $t_j = r_j/v$ ,  $\mathbf{r}_j = (x_j, z_j)$  et  $v = \sqrt{v_z^2 + (p_i/m)^2}$ ,  $mv_z \gg p_i$  (selon les approximations faites en section 2).

### 3.3 Pré-sélection sur un paquet d'ondes d'impulsion moyenne prédéfinie à la fente et post-sélections sur un paquet d'onde restant localisé

Considérons à présent les trajectoires faibles dans le cas où l'évolution de l'étalement de  $|\psi_i(x, t)|^2$  est conséquent. Ainsi,  $\psi_i(x, t)$  se propage à une vitesse  $v \approx v_z$  jusqu'à  $t_f$  où le profil de  $|\psi(x, t_f)|^2$  recouvre alors l'ensemble de l'écran.

Gardons néanmoins une post-sélection identique, donnée par la détection sur le même pixel qu'auparavant, ainsi qu'une même disposition des  $\mathcal{M}_j$ . En conséquence,  $\chi(x_f, t_f)$  est un état localisé qui s'étale tout en restant d'une taille comparable la largeur caractéristique de  $f(x, x_j)$  pour tous les  $\mathcal{M}_j$ .

Lorsque les pré/post-sélections sont accomplies avec succès, la zone de recouvrement entre  $\psi_i(x, t)$  et  $\chi_f(x, t)$  est alors plus grande en comparaison au cas précédent. Le front d'onde progresse à une vitesse différente qui est selon  $z$  uniquement alors que l'espacement en temps entre deux interactions faible reste inchangé dans le référentiel du laboratoire ( $t_j = x_j^k/v_z = x_j/v$  où  $v = v_z + v_x$ ). Cela implique que l'ensemble des  $\mathcal{M}_j$  mesurent chacun des trajectoires d'impulsion différentes passant par  $(x_j^k, t_j)$  telles que

$$x_j^k = x_i + \frac{p_i^k}{m} (t_j - t_i) = x_f + \frac{p_f}{m} (t_f - t_j) \quad (192)$$

La valeur faible associée à chacune d'entre elles prise à  $t_j$  devient

$$\Pi_{x_j}^w = \frac{\chi_f^*(x_j, t_j) \psi_i(x_j, t_j)}{\langle \chi_f(t_j) | \psi_i(t_j) \rangle} \quad (193)$$

lorsque  $f(x, x_j) \rightarrow \delta(x - x_j)$  et s'exprime selon les eqs. (184) et (188).

Cependant, dans le cas où  $\chi_f(x, t)$  reste un état localisé d'une taille comparable à  $f(x, x_j)$  jusqu'à  $t_i$ , son recouvrement avec  $\psi_i(x, t)$  reste globalement localisé aux alentours des  $\mathcal{M}_j$  de telle sorte à ce que  $\Re(\Pi_{x_j}^w) \approx 1$ . Cette fois plusieurs trajectoires sont mesurées mais le faible étalement de  $\chi_f(x, t)$  nous permet de considérer une trajectoire moyenne, autour du centroïde de  $\chi_f(x, t)$ , que  $|\chi_f\rangle$  a suivi de manière rétrograde jusque la fente à partir du moment où la post-sélection est accomplie avec succès.

Cette situation est représentée sur la figure 18. La trajectoire classique entre la fente et l'écran est dessinée en rouge, la fonction d'onde de l'état de pré-sélection progresse en bleu dans la direction  $z$  alors que la post-sélection progresse selon la trajectoire classique d'impulsion  $p_f$ .

Trois interactions faibles sont implémentées le long de la trajectoire classique rouge à  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ . Chacune d'entre elles lie le centroïde de  $\psi_i(x, t)$  à  $x_f$  par des trajectoires classiques d'impulsions différentes  $p_i^1$ ,  $p_i^2$  et  $p_i^3$  dessinées respectivement en noir, marron et orange sur la figure 18. La trajec-

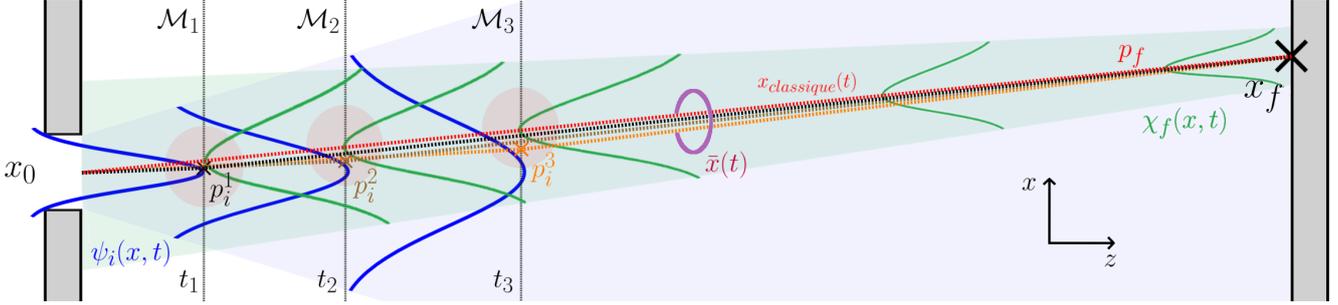


FIGURE 18 – Trajectoires faibles mesurées

toire faible mesurée est ainsi une trajectoire moyenne  $\bar{x}(t)$  donnée par la résultante de chque trajectoire liant les  $\mathcal{M}_j$  au voisinage de  $x_f$ .

### 3.4 Pré-sélection sur un paquet d'ondes d'impulsion moyenne prédéfinie à la fente et post-sélection très fine en un point

A présent, prenons en compte l'évolution des étalements conjoints de  $|\psi_i(x, t)|^2$  et de  $|\chi_f(x, t)|^2$ .

Dans le cas d'une post-sélection très localisée, c'est à dire lorsque la gaussienne (188) est prise avec un  $d_f$  très petit,  $\chi_f(x, t)$  s'étale très fortement pour des valeurs  $t < t_f$ . Ainsi, les fronts d'onde de  $\psi_i(x, t)$  et de  $\chi_f(x, t)$  progressent à une vitesse  $v_z$  selon les temps croissants et décroissants. En conséquence, non seulement les  $\mathcal{M}_j$  disposés sur la trajectoire classique entre la fente et l'écran n'affichent plus  $\Re(\Pi_{x_j}^w) \approx 1$  mais aussi toute interaction faible placée de manière quelconque en  $z_w$  entre la fente et l'écran afficherait  $\Re(\Pi_{x_j}^w) \neq 0$  au temps  $t_w = z_w/v_z$ .

Finalement, les trajectoires faibles qui interviennent lors d'une mesure par un  $\mathcal{M}_j$  donné sont d'une part la trajectoire classique entre une position  $\mathbf{r}_i$  de la fente et la position  $\mathbf{r}_j$  de  $\mathcal{M}_j$ , et d'autre part celle qui joint  $\mathbf{r}_j$  au point de post-sélection  $\mathbf{r}_f$ . La valeur faible  $\Pi_{x_j}^w$  est complexe et arbitraire, dans le sens où elle dépend du rapport de l'intégrale sur  $x$  dans le voisinage de  $x_j$

$$\int dx f(x; x_j) \chi_f^*(x, t_j) \psi_i(x, t_j)$$

sur la valeur de cette intégrale dans tout l'espace,

$$\int dx \chi_f^*(x, t_j) \psi_i(x, t_j)$$

Ainsi, toute interaction faible placée en un point où les amplitudes ne sont pas négligeables donne une valeur faible non nulle du fait que les trajectoires associées au propagateur lie  $x_j$  au point de la fente et au pixel de post-sélection.

## 4 Trajectoires faibles dans un dispositif à deux fentes

Examinons les valeurs faibles lorsqu'on ouvre la deuxième fente. Une interaction faible  $\mathcal{M}_j$  localisée en  $x_j$  donne une valeur faible  $\Pi_{x_j}^w$  donnée par l'éq. (181) qui reste valable alors que  $|\psi_i(t_j)\rangle$  est à présent donné par la superposition

$$\psi_i(x, t_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_i^1(x, t_j) + \psi_i^2(x, t_j) \right) \quad (194)$$

où  $\psi_i^1(x, t_j)$  et  $\psi_i^2(x, t_j)$  sont les fonctions d'ondes associées au fentes centrées en  $x_0$  et  $-x_0$  respectivement.

Dans le but d'examiner simultanément les trajectoires faibles portées par  $\psi_i^1(x, t_j)$  et  $\psi_i^2(x, t_j)$ , on souhaite les voir interférer à la post-sélection au point  $\mathbf{r}_f = (x_f, z_f)$  de l'écran. Les interférences sont présentes dans la situation où  $\Delta x_f \gg \langle x_f \rangle$  et l'on peut d'ores et déjà écarter le cas de deux paquets d'ondes restant localisés (Sec. 3.2) durant leur évolution, même si un  $\mathcal{M}_j$  placé à l'intersection de  $\psi_i^1(x, t_j)$  et de  $\psi_i^2(x, t_j)$  pourrait voir sa valeur faible modifiée par rapport à la situation où une seule fente était ouverte. Ainsi, il s'agit de considérer l'étalement de  $|\psi_i(x, t_j)|^2$ .

### 4.1 Post-sélection sur des paquets d'onde localisés

Considérons une post-sélection arbitraire en un point  $x_f$  de résolution  $d_f$  donnée par l'état  $\chi_f(x, t)$  à l'équation (188), où l'étalement de  $|\chi_f(x, t)|^2$  reste localisé au cours de la propagation vers les temps décroissants.

Du fait de l'étalement de  $|\psi_i(x, t)|^2$ , une interaction faible placée en  $x_j$  entre les fentes et l'écran verrait interférer les états  $\psi_i^1(x_j, t_j)$  et  $\psi_i^2(x_j, t_j)$ . Ainsi, dans le cas où  $|\chi_f(x, t)$  est suffisamment localisée pour être intégralement incluse dans la largeur du détecteur donnée par  $f(x; x_w)$ , on obtient

$$\Pi_{x_j}^w = \frac{\langle \chi_f(t_j) | \Pi_{x_j} | \psi_i(t_j) \rangle}{\langle \chi_f(t_j) | \psi_i(t_j) \rangle} \approx \frac{\langle \chi_f(t_j) | \psi_i(t_j) \rangle}{\langle \chi_f(t_j) | \psi_i(t_j) \rangle} = 1. \quad (195)$$

et une collection de détecteurs pourrait nous donner le même résultat que dans le cas d'une fente.

En revanche, dans le cas limite où l'interaction est ponctuelle,  $f(x; x_w) = \delta(x - x_w)$ , la valeur faible indiquée par l'appareil de mesure sera à priori différente que dans le cas à une fente :

$$\Pi_{x_j}^w = \frac{\int dx f(x; x_j) \chi_f^*(x_j, t_j) [\psi_i^1(x_j, t_j) + \psi_i^2(x_j, t_j)]}{\langle \chi_f(t_j) | [|\psi_i^1(t_j)\rangle + |\psi_i^2(t_j)\rangle] \rangle} \quad (196)$$

Ainsi, en fonction des paramètres de l'interaction faible, la valeur faible est sensible à l'interférence des fonction d'onde venant de chaque fente. Aussi et pour les mêmes raisons que dans le cas d'une fente en section 3.3, plusieurs détecteurs disposés entre les fentes et l'écran mesureraient des valeurs faibles associées à des trajectoires différentes. En présence d'une seconde fente, la prise en compte des interférences se traduit par la contribution supplémentaire de la trajectoire qui lie  $x_i^2$  à  $x_f$  en passant par  $x_j$ , en plus de celle qui lie  $x_i^1$  à  $x_f$  en passant par  $x_j$ . En conséquence, si plusieurs appareils de mesure sont disposés entre la fente et l'écran, les valeurs faibles associées à chacun d'eux font intervenir deux trajectoires qui sont différentes d'une interaction à l'autre. En indexant la trajectoire issue de la première fente et qui passe par  $x_j$  par  $x_j^k$  et celle issue de la deuxième fente passant par le même point par  $x_j^l$ , chaque trajectoire passant par le point  $\mathbf{r}_j = (x_j, z_j = t_j/v_z)$  obéit à

$$x_j = x_i^1 + \frac{p_i^k}{m} (t_j - t_i) = x_i^2 + \frac{p_i^l}{m} (t_j - t_i) = x_f + \frac{p_f}{m} (t_f - t_j). \quad (197)$$

Finalement, seuls des appareils de mesure disposés le long de la trajectoire rétrograde issue de  $x_f$  d'impulsion  $p_f$  verront leur valeur faible non-nulle.

Cette situation est représentée sur la figure 19. Seule la trajectoire classique entre la fente du haut et l'écran est dessinée en rouge alors que les interactions  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont placées le long de celle-ci : il s'agit donc d'une situation où la trajectoire classique issue de la fente 1 uniquement est mesurée lorsque la deuxième fente est ouverte mais cela est suffisant pour illustrer notre propos. Les fonctions d'onde de chacune des fente progressent selon la direction  $z$  en bleu et violet. Le centroïde de l'état de post-sélection suit la trajectoire classique d'impulsion  $p_f$ . Le lecteur peut noter qu'un compromis entre la "vraie" situation physique et la lisibilité de la figure 19 : la mise à l'échelle n'est pas respectée et l'étalement de  $\chi(x, t_f)$  n'est pas aussi

grand au temps final, la situation physique considérée est celle où  $\chi(x, t_f)$  est toujours localisé sur la trajectoire classique émergent de la fente 1.

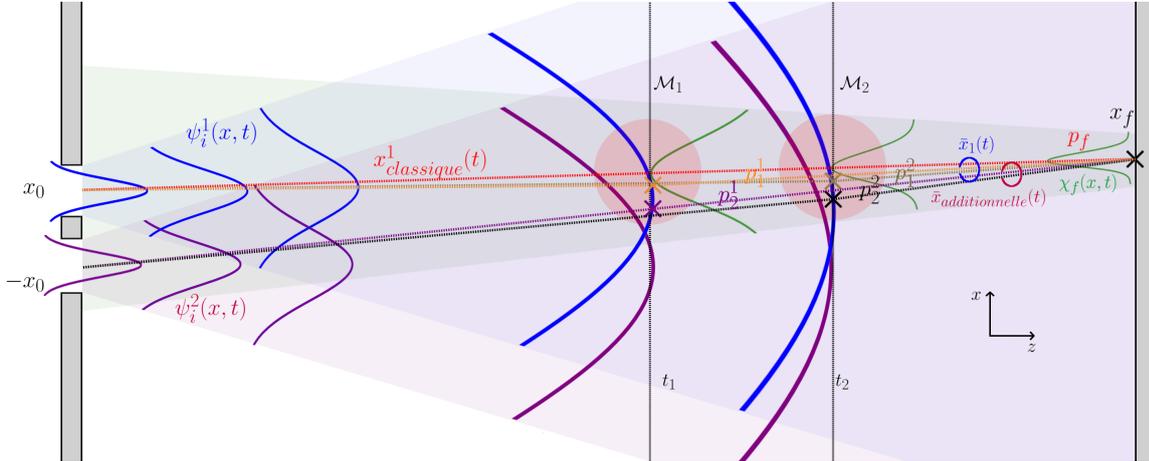


FIGURE 19 – Trajectoires faibles mesurées

La même observation que celle de la section 3.3 en figure 18 est valable mais pour chaque fonction d'onde issues de chaque fente cette fois là. Puisque  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  voient la superposition de  $\psi_i^1(x, t)$  et de  $\psi_i^2(x, t)$ , la valeur faible que retourne chaque interaction placée sur la trajectoire classique  $x_{\text{classique}}^1(t)$  rend compte de deux trajectoires issues de chaque fentes. En conséquence, la collection des  $\mathcal{M}_j$  donnent des valeurs faibles associées à deux trajectoires moyennes : celle au voisinage de la trajectoire classique  $\bar{x}(t)$  associée à la fente 1 et qui rassemble les trajectoires d'impulsion  $p_1^1$  et  $p_1^2$  en orange et marron, et une autre additionnelle  $\bar{x}_{\text{additionnelle}}$  associée à la fente 2 qui rassemble les trajectoires d'impulsion  $p_2^1$  et  $p_2^2$  en violet et noir. Il en résulte qu'une série de  $\mathcal{M}_j$  disposés le long d'une trajectoire classique mesurent des valeurs faibles associées à deux trajectoires faibles moyennes issues des deux fentes représentées en figure 20.

Cela est également à prendre en compte lors de la mesure de la trajectoire issue de la fente 2. Dans un cas de mesure simultanée des trajectoires issues des deux fentes, il faudra alors compter 4 trajectoires faibles moyennes au total. Or ici, selon nos approximations, la mesure simultanée n'est pas possible puisque  $\chi_f(x, t_f)$  est considéré localisé aux alentours d'une fente donnée à  $t_f$ . Une possibilité serait de définir  $\chi_f(x, t_f)$  d'une impulsion donnée par  $(p_f^1 + p_f^2)/2$  mais alors on ne pourrait plus associer

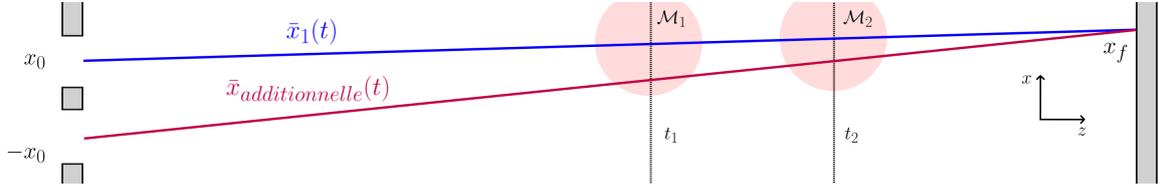


FIGURE 20 – Bilan des trajectoires faibles mesurées

les trajectoires classiques aux trajectoires moyennes mesurées.

C'est pourquoi la mesure simultanée de la totalité des trajectoires issues des fentes 1 et 2 n'est possible que lorsque le profil de  $\chi_f(x, t)$  est donné par la superposition de deux gaussiennes localisées évoluant de manière rétrograde vers chacune des fentes. Cela est en théorie possible, car il s'agit d'envisager une post-sélection "bi-locale", comme cela est proposé par Narducci [91] qui en introduit l'implémentation pratique : la post-sélection s'effectue sur une superposition de deux gaussiennes où chacune peut être prise en deux positions finales différentes  $x_f^1$  et  $x_f^2$  au temps  $t_f$ .

De cette manière, l'état de post-sélection peut être donné à  $t_j$  par

$$\chi_f(x_j, t_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \chi_f^1(x, t_j) + \chi_f^2(x, t_j) \right)$$

où les indices 1 et 2 réfèrent à des positions moyennes  $x_f^1$  et  $x_f^2$  et impulsions moyennes  $p_f^1$  et  $p_f^2$  différentes pour chaque gaussienne. En conséquence, une post-sélection "bi-locale" nous permet d'observer la superposition de deux trajectoires issues d'une post-sélection en deux points différents.

Finalement, la post-sélection "bi-locale" particulière telle que  $x_f^1 = x_f^2$  avec  $p_f^1 \neq p_f^2$  où chaque gaussienne évolue de manière à rester localisée nous permettrait l'observation simultanée des trajectoires issues de chaque fente qui interfèrent au voisinage de  $x_f^1 = x_f^2 = x_f$ .

## 4.2 Post-sélection localisée en un point

Lorsque la post-sélection s'effectue en un point  $x_f$  très localisé, il s'agit de prendre en compte les étalements conjoints de  $|\psi_i(x, t)|^2$  et de  $|\chi_f(x, t)|^2$  et cela donne un résultat similaire au cas d'une seule fente en section 3.4.

Effectivement, en tout point où il y a recouvrement de  $\psi_i(x, t)$  et  $\chi_f(x, t)$ , une interaction faible placée en un endroit quelconque donnerait une va-

leur faible non-nulle. La seule différence se situe dans la contribution supplémentaire des trajectoires issues de la deuxième fente.

### 4.3 Conclusion

Le cas où nous sommes susceptibles d’observer la superposition des trajectoires qui sont en jeu dans l’amplitude de transition entre  $|\psi_i\rangle$  et  $|\chi_f\rangle$  est celui où  $\chi_f(x, t)$  évolue de manière localisée. En revanche, du fait des interférences des fonctions d’onde à chaque interaction faible, un grand nombre de trajectoires différentes contribue à l’établissement de l’ensemble des valeurs faibles obtenues. Ainsi, ce ne sont pas des trajectoires moyennes associées aux trajectoires classiques issue de chaque fente que nous mesurons. Ce cas général a déjà été souligné par Tanaka [89] et Matzkin [90], et exploré dans le contexte de fentes d’Young ponctuelles par Mori et Tsutsui [92].

## 5 Détection de trajectoires faibles d’un photon dans des fentes d’Young : proposition d’un schéma expérimental

Dans cette partie, nous proposons une implémentation expérimentale en vue de la mesure des trajectoires faibles issues des deux fentes. Dans une expérience idéale, il s’agit alors de disposer l’ensemble des interactions faibles  $\mathcal{M}_j^1$  et  $\mathcal{M}_j^2$  le long des trajectoires classiques liant les points  $x_i^1$  et  $x_i^2$  des fentes 1 et 2 à un point  $x_f$  de l’écran. Cette situation est représentée en figure 21 où les  $\mathcal{M}_j^1$  et  $\mathcal{M}_j^2$  interagissent avec le système selon les hamiltoniens respectifs  $\hat{H}_j^1$  et  $\hat{H}_j^2$ .

En contraste avec une interaction faible idéale où on considère un appareil de mesure indépendant du système mesuré, nous considérerons le degré de liberté de polarisation du photon pour l’implémentation pratique. L’état total à l’instant de passage par les fente est alors noté par

$$|\Psi(t_i)\rangle = |\psi_i(t_i)\rangle |P\rangle \quad (198)$$

où  $|P\rangle$  est un état de polarisation quelconque.

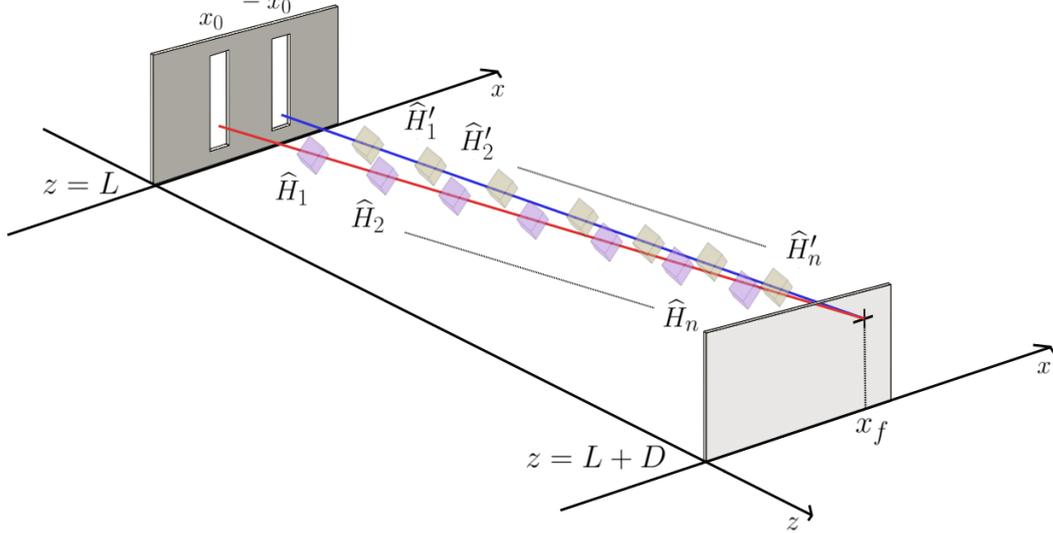


FIGURE 21 – Dispositif

Chaque interaction faible est accomplie par un cristal biréfringent qui déplace le profil de la fonction d'onde du photon selon sa polarisation. L'hamiltonien d'interaction entre la fonction d'onde et la polarisation du photon est du type

$$\hat{H}_j^{1/2} = g_j^{1/2} \hat{k}_x \cdot \hat{\sigma}_\alpha \quad (199)$$

où  $g_j^{1/2}$  est le couplage faible au temps  $t_j$  sur la trajectoire classique émergente de la fente 1/2,  $\hat{k}_x = \hat{p}_x / \hbar = -i\hat{\partial}_x$ . De plus,  $\hat{\sigma}_\alpha$  est une matrice de Pauli, quelconque pour l'instant, qui agit sur l'appareil de mesure (nous utiliserons la formulation de Jones qui décrit la polarisation à la manière d'un spin).

De manière générale, la valeur faible évaluée est celle de  $\hat{k}_x$  au temps  $t_j$  et au voisinage de  $x_j^{1/2}$  (l'exposant 1/2 signifie la fente depuis laquelle émerge la trajectoire où l'interaction a lieu) et se note

$$k_{x_j^{1/2}}^w = \frac{\int dx f(x; x_j^{1/2}) \chi_f^*(x_j^{1/2}, t_j) (-i\hat{\partial}_{x_j^{1/2}}) [\psi_i^1(x_j^{1/2}, t_j) + \psi_i^2(x_j^{1/2}, t_j)]}{\langle \chi_f(t_j) | [|\psi_i^1(t_j)\rangle + |\psi_i^2(t_j)\rangle] \rangle} \quad (200)$$

Une interaction avec un cristal biréfringent a fréquemment été implémenté expérimentalement, comme par exemple [88], [99]. Une mesure faible de  $\hat{\Pi}_x$  serait implémentée par une lame demi-onde (ou quart d'onde) mais

celle-ci introduirait un déphasage de la fonction d'onde dès l'interaction. Inhiber ce déphasage impliquerait d'ajouter des "phase shifter" mais cela ne serait pas commode en vue d'une réalisation expérimentale.

Aussi, il s'agit ici d'une mesure de l'impulsion (à  $\hbar$  près) à un endroit particulier d'une trajectoire contrainte par des pré/post-sélections réussies. Or la trajectoire qui satisfait les conditions limites à  $t_i$  et  $t_f$  est son équivalent classique dans le cas libre. En conséquence, une valeur faible non nulle ne peut indiquer qu'une signature de la trajectoire sur laquelle l'interaction a lieu, et caractéristique de l'emplacement et de l'instant de l'interaction. A chaque interaction, une valeur faible  $k_{x_j}^{w,1/2}$  non-nulle génère ainsi une rotation de la polarisation qu'il s'agira alors de mesurer en vue d'obtenir  $k_{x_j}^{w,1/2}$ .

## 5.1 Protocole

Nous présentons à présent un protocole expérimental de mesure des trajectoires faibles. Elles seront mises en évidence grâce au plus à deux interactions faibles disposées le long de chacune des trajectoires issue des fentes 1 et 2, et que l'on note A, B, C et D sur la figure 22. Chaque couple d'interaction prend effet à  $t_{j=1}$  et  $t_{j=2}$  entre  $t_i$  et  $t_f$  et elles seront supposées ponctuelles dans le temps.

Sur la figure 22, les interactions A, B, C et D sont disposées de telle manière à ce que A et C soient proches des fentes et que B et D en soient éloignées.

Ainsi, A et C n'interagissent qu'avec la fonction d'onde issue de la fente la plus proche (à peu près) alors que B et D interagissent chacun avec les fonctions d'onde des deux fentes. Les recouvrement en jeu en  $x_A$  et  $x_C$  sont ceux de  $\psi_i^1(x_A, t_1)/\chi_f^1(x_A, t_1)$  et de  $\psi_i^2(x_C, t_1)/\chi_f^2(x_C, t_1)$  respectivement. En conséquence, la prise en compte des trajectoires additionnelles évoquées en section 4.1 est requise aux interactions B et D seulement. Nous nous placerons également dans le cas d'une post-sélection bi-locale où la superposition de deux paquets d'onde d'impulsion  $p_1^f$  et  $p_2^f$ , correspondant aux impulsions des trajectoires classiques respective à chaque fente, est retenue. Il s'ensuit que les valeurs faibles obtenues en A, B, C et D sont

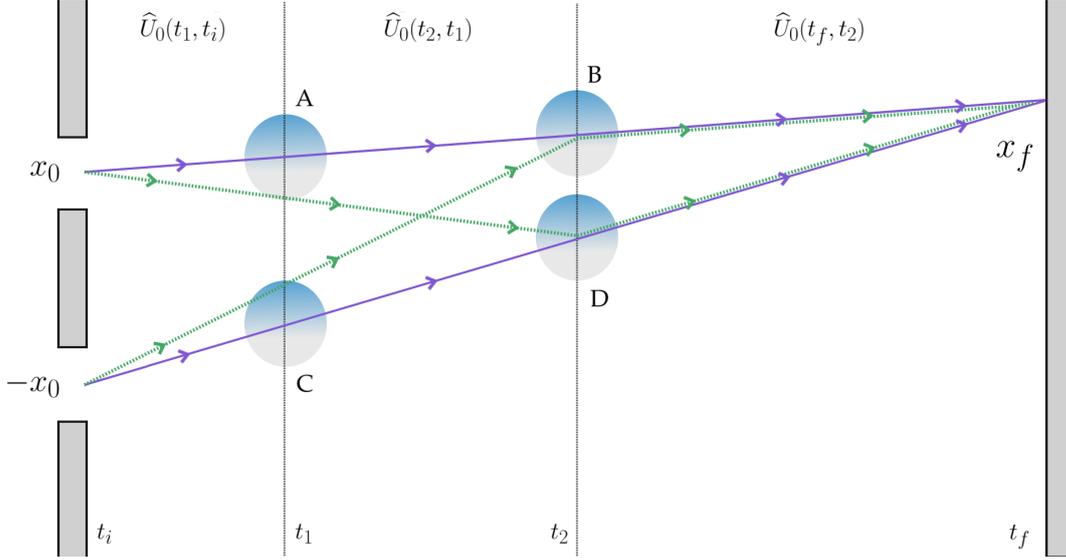


FIGURE 22 – Bilan des trajectoires mesurées

données par

$$k_{x_A}^{12} = \frac{\langle \chi_f^1(t_1) | \hat{\Pi}_{x_A} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_A} | \psi_i^1(t_1) \rangle}{[\langle \chi_f^1(t_1) | + \langle \chi_f^2(t_1) |][|\psi_i^1(t_2)\rangle + |\psi_i^2(t_2)\rangle]} \quad (201)$$

$$k_{x_B}^{12} = \frac{\langle \chi_f^1(t_1) | \hat{\Pi}_{x_B} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_B} [|\psi_i^1(t_2)\rangle + |\psi_i^2(t_2)\rangle]}{[\langle \chi_f^1(t_2) | + \langle \chi_f^2(t_2) |][|\psi_i^1(t_2)\rangle + |\psi_i^2(t_2)\rangle]} \quad (202)$$

$$k_{x_C}^{12} = \frac{\langle \chi_f^2(t_1) | \hat{\Pi}_{x_C} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_C} | \psi_i^2(t_1) \rangle}{[\langle \chi_f^1(t_1) | + \langle \chi_f^2(t_1) |][|\psi_i^1(t_1)\rangle + |\psi_i^2(t_1)\rangle]} \quad (203)$$

$$k_{x_D}^{12} = \frac{\langle \chi_f^2(t_2) | \hat{\Pi}_{x_D} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_D} [|\psi_i^1(t_2)\rangle + |\psi_i^2(t_2)\rangle]}{[\langle \chi_f^1(t_2) | + \langle \chi_f^2(t_2) |][|\psi_i^1(t_2)\rangle + |\psi_i^2(t_2)\rangle]} \quad (204)$$

où  $\chi_f^{1/2}(x, t)$  évolue de manière rétrograde en restant localisé, alors que le maximum des centroïdes suit les trajectoires classiques issues des fentes 1/2.

Or, les interactions placées en  $x_B$  et  $x_D$  voient un recouvrement non nul de  $\psi_i^1(x_{B/D}, t_2) + \psi_i^2(x_{B/D}, t_2)$  et de  $\chi_f^1(x_{B/D}, t_2) + \chi_f^2(x_{B/D}, t_2)$  et nous avons vu qu'en conséquence, la valeur faible engendrée par B et D rend compte de plusieurs trajectoires. Celles-ci sont représentées sur la figure 22 : les traits pleins violets représentent les trajectoires classiques entre chaque

fente et l'écran, alors que celles en vert pointillé sont les trajectoires additionnelles engendrées par la présence d'une interaction.

Or, l'établissement des trajectoires classiques issues de chaque fente de manière simultanée nécessite que nous soyons capable de mesurer en B une signature de la fente 1 uniquement, et en D celle de la fente 2, tout comme en A et C. C'est pourquoi, dans le but d'identifier les contributions de chaque trajectoire, nous considérerons des dispositifs implémentés d'1, 2 ou 4 interactions. Chacun de ces cas de figures seront appliqués à des montages différents : nous considérerons l'ouverture séparée puis simultanée des fentes 1 et 2.

Nous commencerons par détailler les étapes qui conduisent à la lecture de quatre valeurs faibles indépendamment de la situation physique. Ensuite, nous nous emploierons à décrire les résultats obtenus dans les cas d'ouverture de fentes différents, ie dans le cas d'états de pré/post-sélections différents, et pour un nombre d'interactions différent tout en concluant sur les trajectoires faibles observées.

## 5.2 Mesure des valeurs faibles

Lorsque l'on se restreint à un processus de pré/post-sélection unique, nous avons remarqué au chapitre 1 que la situation physique en terme de superposition d'états est identique à chaque processus dès lors que ce dernier est accompli avec succès. Aussi, la mesure des deux trajectoires classiques peut être effectuée en répétant plusieurs fois le même processus de pré/post-sélection soumis à des interactions faibles différentes. Par conséquent, le protocole se décline sur quatre étapes successives pour la mesure de la partie réelle de quatre valeurs faibles (deux par trajectoire).

De manière générale, posons les états de pré/post-sélection comme  $|\psi_i\rangle$  et  $|\chi_f\rangle$  respectivement, et nous les précisons davantage selon le cas plus tard. L'état total de  $\{\mathcal{S} + \mathcal{M}\}$  à  $t_i$  est

$$|\psi_i(t_i)\rangle (|H\rangle + |V\rangle) / \sqrt{2} \quad (205)$$

où l'état initial de l'appareil de mesure est celui d'une polarisation rectiligne droite.

Soient les hamiltoniens d'interaction  $\hat{H}_A, \hat{H}_B, \hat{H}_C$  et  $\hat{H}_D$  qui gouvernent les interactions A, B, C et D. Ils s'expriment comme

$$\hat{H}_A = g_A \hat{\Pi}_{x_A} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_A} \hat{\sigma}_z \delta(t - t_1) \quad \hat{H}_C = g_C \hat{\Pi}_{x_C} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_C} \hat{\sigma}_z \delta(t - t_1) \quad (206)$$

$$\hat{H}_B = g_B \hat{\Pi}_{x_B} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_B} \hat{\sigma}_z \delta(t - t_2) \quad \hat{H}_D = g_D \hat{\Pi}_{x_D} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_D} \hat{\sigma}_z \delta(t - t_2) \quad (207)$$

où  $g_j$  représente le couplage entre l'appareil de mesure et le système,  $\hat{\sigma}_z = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|$  est l'opérateur de l'appareil de mesure, et  $\hat{\Pi}_{x_j}$  assure que la valeur valeur de  $\hat{k}_x$  est prise à l'endroit où l'interaction a lieu.

La lecture des valeurs faibles s'effectue en quatre étapes où le même processus de pré/post-sélection est considéré. La première étape consiste en l'application de  $\hat{H}_A$  seul (une seule interaction est accomplie en  $x_A$ ), et l'étape n°2 en celle de  $\hat{H}_A + \hat{H}_C$  (deux interactions sont accomplies en  $x_A$  et  $x_C$ ). En conséquence, la valeur faible mesurée en A est déduite de l'étape 1 alors que celle de C est déduite de l'étape 2 grâce aux résultats de l'étape 1.

De la même manière les étapes n°3 et n°4 consistent à appliquer d'une part  $\hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{H}_C + \hat{H}_D$ , et d'autre part,  $\hat{H}_A - \hat{H}_B + \hat{H}_C + \hat{H}_D$  (le cristal B est placé dans le sens opposés). Les résultats conjoints des étapes n°3 et n°4 permettent d'établir les valeurs faibles en B et D grâce à celles en A et C obtenues auparavant.

Explicitons l'étape n°3 par exemple. Posons l'état de polarisation de l'appareil de mesure après  $t_f$  associé à l'étape n°3,  $|P_3\rangle$ . Il vient

$$|P_3\rangle = \langle \chi_f(t_f) | \hat{U}(t_f, t_2) e^{-i\gamma_B \hat{\Pi}_{x_B} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_B} \hat{\sigma}_z} e^{-i\gamma_D \hat{\Pi}_{x_D} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_D} \hat{\sigma}_z} \hat{U}(t_2, t_1) e^{-i\gamma_A \hat{\Pi}_{x_A} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_A} \hat{\sigma}_z} e^{-i\gamma_C \hat{\Pi}_{x_C} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_C} \hat{\sigma}_z} \hat{U}(t_1, t_i) | \psi_i(t_i) \rangle (|H\rangle + |V\rangle) / \sqrt{2} \quad (208)$$

où  $\gamma_i = \frac{1}{\hbar} \int g_i \delta(t - t_{1/2}) dt$  (grandeur caractéristique du cristal connue de l'expérimentateur). Ensuite, l'approximation faible donne

$$|P_3\rangle = \left\{ \langle \chi_f(t_f) | \psi_i(t_f) \rangle - i\gamma_B \langle \chi_f(t_2) | \hat{\Pi}_{x_B} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_B} | \psi_i(t_2) \rangle \hat{\sigma}_z - i\gamma_D \langle \chi_f(t_2) | \hat{\Pi}_{x_D} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_D} | \psi_i(t_2) \rangle \hat{\sigma}_z - i\gamma_A \langle \chi_f(t_1) | \hat{\Pi}_{x_A} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_A} | \psi_i(t_1) \rangle \hat{\sigma}_z - i\gamma_C \langle \chi_f(t_1) | \hat{\Pi}_{x_C} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_C} | \psi_i(t_1) \rangle \hat{\sigma}_z \right\} (|H\rangle + |V\rangle) / \sqrt{2} \quad (209)$$

La valeur faible émerge de la factorisation par  $\langle \chi_f(t_f) | \psi_i(t_f) \rangle$  et il vient

$$|P_3\rangle = \langle \chi_f(t_f) | \psi_i(t_f) \rangle (1 - i\gamma_B k_{x_B}^w \hat{\sigma}_z - i\gamma_D k_{x_D}^w \hat{\sigma}_z - i\gamma_A k_{x_A}^w \hat{\sigma}_z - i\gamma_C k_{x_C}^w \hat{\sigma}_z) (|H\rangle + |V\rangle) / \sqrt{2} \quad (210)$$

$$= \frac{\langle \chi_f(t_f) | \psi_i(t_f) \rangle}{\sqrt{2}} (e^{-i\gamma_B k_{x_B}^w} e^{-i\gamma_D k_{x_D}^w} e^{-i\gamma_A k_{x_A}^w} e^{-i\gamma_C k_{x_C}^w} |H\rangle e^{i\gamma_B k_{x_B}^w} e^{i\gamma_D k_{x_D}^w} e^{i\gamma_A k_{x_A}^w} e^{i\gamma_C k_{x_C}^w} |V\rangle) \quad (211)$$

avec

$$k_{x_A}^w = \frac{\langle \chi_f(t_1) | \hat{\Pi}_{x_A} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_A} | \psi_i(t_1) \rangle}{\langle \chi_f(t_1) | \psi_i(t_1) \rangle} \quad (212)$$

$$k_{x_B}^w = \frac{\langle \chi_f(t_2) | \hat{\Pi}_{x_B} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_B} | \psi_i(t_2) \rangle}{\langle \chi_f(t_2) | \psi_i(t_2) \rangle} \quad (213)$$

$$k_{x_C}^w = \frac{\langle \chi_f(t_1) | \hat{\Pi}_{x_C} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_C} | \psi_i(t_1) \rangle}{\langle \chi_f(t_1) | \psi_i(t_1) \rangle} \quad (214)$$

$$k_{x_D}^w = \frac{\langle \chi_f(t_2) | \hat{\Pi}_{x_D} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_D} | \psi_i(t_2) \rangle}{\langle \chi_f(t_2) | \psi_i(t_2) \rangle} \quad (215)$$

De manière similaire, on obtient les états finaux de polarisation des autres étapes :

$$\text{étape n}^\circ 1 \quad |P_1\rangle = A (e^{-i\gamma_A k_{x_A}^w} |H\rangle + e^{i\gamma_A k_{x_A}^w} |V\rangle) \quad (216)$$

$$\text{étape n}^\circ 2 \quad |P_2\rangle = A (e^{-i\gamma_A k_{x_A}^w - i\gamma_C k_{x_C}^w} |H\rangle \quad (217)$$

$$+ e^{i\gamma_A k_{x_A}^w + i\gamma_C k_{x_C}^w} |V\rangle) \quad (218)$$

$$\text{étape n}^\circ 4 \quad |P_4\rangle = A (e^{-i\gamma_A k_{x_A}^w + i\gamma_B k_{x_B}^w - i\gamma_C k_{x_C}^w - i\gamma_D k_{x_D}^w} |H\rangle \quad (219)$$

$$+ e^{i\gamma_A k_{x_A}^w - i\gamma_2 k_{x_B}^w + i\gamma_1' k_{x_C}^w + i\gamma_2' k_{x_D}^w} |V\rangle)$$

où  $A = \langle \chi_f(t_f) | \psi_i(t_f) \rangle / \sqrt{2}$ .

Introduisons les états de polarisation rectiligne gauche et droite donnés par  $|\nearrow\rangle = (|H\rangle + |V\rangle) / \sqrt{2}$  et  $|\swarrow\rangle = (|H\rangle - |V\rangle) / \sqrt{2}$ . La lecture de la polarisation est accomplie dans la base  $\{|\nearrow\rangle, |\swarrow\rangle\}$  grâce à un polarimètre placé juste avant l'écran à chacune des étapes. Soient les intensités  $I_{\nearrow}^i = |\langle \nearrow | P_i \rangle|^2$  et  $I_{\swarrow}^i = |\langle \swarrow | P_i \rangle|^2$ , la réalisation du cas 1 permet d'inférer la première valeur faible à partir de la mesure du contraste de  $\mathcal{M}$ ,

$$\gamma_A k_{x_A}^w = \frac{1}{2} \arccos \left\{ \frac{I_{\swarrow}^1 - I_{\nearrow}^1}{I_{\swarrow}^1 + I_{\nearrow}^1} \right\} \quad (220)$$

La connaissance de  $k_{x_A}^w$  permet d'inférer  $k_{x_C}^w$  lors du même processus de pré/post-sélection soumis à  $\hat{H}_A + \hat{H}_C$  (étape n<sup>o</sup>2),

$$\gamma_C k_{x_C}^w = \frac{1}{2} \left\{ \frac{I_{\swarrow}^2 - I_{\nearrow}^2}{I_{\swarrow}^2 + I_{\nearrow}^2} \right\} - \gamma_A k_{x_A}^w \quad (221)$$

La réalisation des dispositifs n°3 et n°4 permet de mesurer

$$\gamma_D k_{x_D}^w + \gamma_B k_{x_B}^w = \frac{1}{2} \arccos \left\{ \frac{I_{\swarrow}^3 - I_{\nearrow}^3}{I_{\swarrow}^3 + I_{\nearrow}^3} \right\} - \gamma_A k_{x_A}^w - \gamma_C k_{x_C}^w \quad (222)$$

$$\gamma_D k_{x_D}^w - \gamma_B k_{x_B}^w = \frac{1}{2} \arccos \left\{ \frac{I_{\swarrow}^4 - I_{\nearrow}^4}{I_{\swarrow}^4 + I_{\nearrow}^4} \right\} - \gamma_A k_{x_A}^w - \gamma_C k_{x_C}^w \quad (223)$$

d'où, en introduisant le contraste  $C_i = \frac{I_{\swarrow}^i - I_{\nearrow}^i}{I_{\swarrow}^i + I_{\nearrow}^i}$ ,

$$\gamma_B k_{x_B}^w = \frac{1}{2} (\arccos(C_3) - \arccos(C_4)) \quad (224)$$

$$\gamma_D k_{x_D}^w = \frac{1}{2} (\arccos(C_3) + \arccos(C_4)) - 2\gamma_A k_{x_A}^w - 2\gamma_C k_{x_C}^w \quad (225)$$

Notons pour conclure que dans le cas d'un dispositif à une seule interaction, la réalisation de l'étape n°1 suffit. Lorsque deux interactions sont implémentées il 'agit de réaliser successivement les étapes n°1 et n°2.

### 5.3 Ouverture d'une fente

Considérons la fente 1 ouverte uniquement. Dans ce cas, l'état total à l'instant initial est donné par

$$|\psi_i^1(t_i)\rangle (|H\rangle + |V\rangle) / \sqrt{2} \quad (226)$$

alors que l'état de post-sélection est donnée par

$$\chi_f(x, t) = (\chi_f^1(x, t) + \chi_f^2(x, t)) / \sqrt{2} \quad (227)$$

où les  $\chi_f^{1/2}(x, t)$  sont d'impulsion  $p_1^f$  et  $p_2^f$  associées aux trajectoires classiques issue des fentes 1 et 2. Il s'ensuit que les interactions faibles placées

en A, B, C et D rendent compte de valeurs faibles données par

$$k_{x_A}^1 = \frac{\langle \chi_f^1(t_1) | \hat{\Pi}_{x_A} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_A} | \psi_i^1(t_1) \rangle}{[\langle \chi_f^1(t_1) | + \langle \chi_f^2(t_1) |] | \psi_i^1(t_1) \rangle} \quad (228)$$

$$k_{x_B}^1 = \frac{\langle \chi_f^1(t_2) | \hat{\Pi}_{x_B} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_B} | \psi_i^1(t_2) \rangle}{[\langle \chi_f^1(t_2) | + \langle \chi_f^2(t_2) |] | \psi_i^1(t_2) \rangle} \quad (229)$$

$$k_{x_C}^1 = \frac{\langle \chi_f^2(t_1) | \hat{\Pi}_{x_C} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_C} | \psi_i^1(t_1) \rangle}{[\langle \chi_f^1(t_1) | + \langle \chi_f^2(t_1) |] | \psi_i^1(t_1) \rangle} \quad (230)$$

$$k_{x_D}^1 = \frac{\langle \chi_f^2(t_2) | \hat{\Pi}_{x_D} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_D} | \psi_i^1(t_2) \rangle}{[\langle \chi_f^1(t_2) | + \langle \chi_f^2(t_2) |] | \psi_i^1(t_2) \rangle} \quad (231)$$

où  $\chi_f^{1/2}(x, t)$  évolue de manière rétrograde en restant localisé, et où le recouvrement entre la fonction d'onde définie à  $t_i$  à la fente 1 et l'état de post-sélection  $\chi_f^2(x, t)$  qui se propage selon la trajectoire classique issue de la fente 2 est pris en compte dans chaque valeurs faibles. Ainsi, lorsqu'une seule interaction est accomplie, c'est à dire soit en A ou B ou C ou D, on observe une rotation de la polarisation générée par une valeur faible non nulle lorsque l'interaction faible est placée en  $x_A$ ,  $x_B$  ou  $x_D$  uniquement alors qu'en  $x_C$ ,  $k_{x_C}^1 = 0$  : cela implique un passage de la particule en A, B et D. Dans ce cas-ci, les valeurs faibles sont toutes déduites grâce à l'étape n°1 présentée précédemment.

Lors du même processus implémenté de deux interactions faibles en A et B, on observe également des valeurs faibles non nulles en  $x_A$  à  $t_1$  et en  $x_B$  à  $t_2$  : la particule suit la trajectoire faible associée à celle classique mise en jeu dans le propagateur conditionné par le succès des pré/post-sélection. L'état final de polarisation  $|P'\rangle$  associé à deux interactions successives en  $x_A$  et  $x_B$  est donné par

$$|P'\rangle = \langle \chi_f(t_f) | \hat{U}(t_f, t_2) e^{-i\gamma_B \hat{\Pi}_{x_B} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_B} \hat{\sigma}_z} \hat{U}(t_2, t_1) e^{-i\gamma_A \hat{\Pi}_{x_A} \hat{k}_x \hat{\Pi}_{x_A} \hat{\sigma}_z} \hat{U}(t_1, t_i) | \psi_i(t_i) \rangle (|H\rangle + |V\rangle) / \sqrt{2} \quad (232)$$

et les valeurs faibles sont lues par la réalisation des étapes n°1 et n°2. Des cristaux supplémentaires placées le long de cette trajectoire rendraient plus finement compte de cette trajectoire (même si une telle implémentation est peu commode pour une réalisation expérimentale).

En revanche, l'implémentation de B et D uniquement conduit à l'observation d'une superposition de trajectoires : la particule est détectée en  $x_B$  et

en  $x_D$  au même temps  $t_2$ . Puisque la post-sélection est effectuée de manière à inclure deux trajectoires d'impulsion respectives  $p_1^f$  et  $p_2^f$  et qu'une valeur faible non nulle implique un recouvrement des états de pré/post-sélection à l'instant de l'interaction, alors il apparaît que la valeur faible mesurée en D est non nulle. Cette situation est représentée en figure 23 où l'onde rétrograde est représenté en trait flou et jaune.

En conséquence, si l'on disposait des interactions supplémentaires sur la

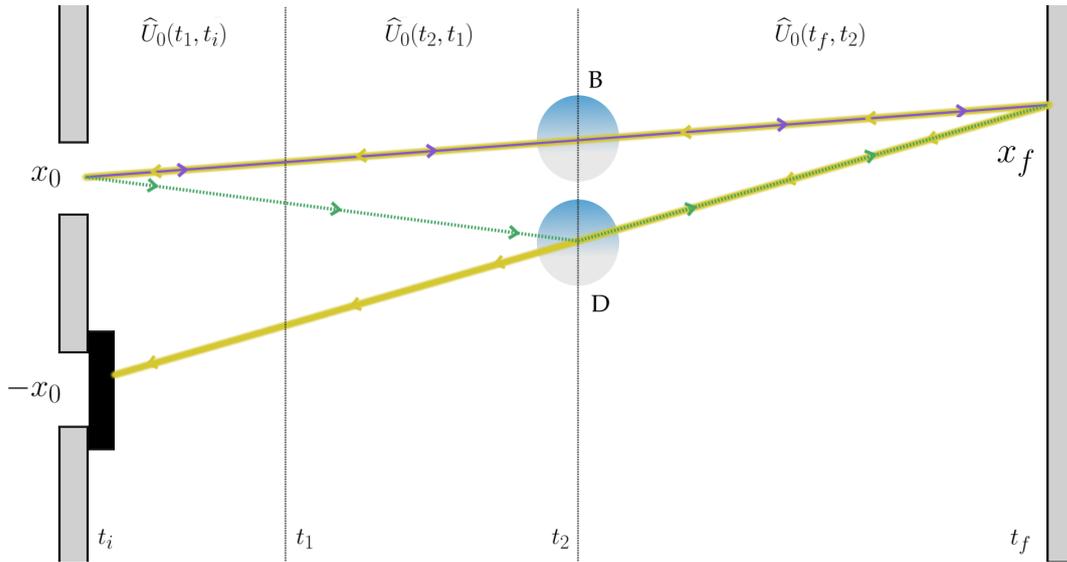


FIGURE 23 – Situation

trajectoire classique entre D et l'écran, alors on observerait également une présence manifeste de la particule le long de cette trajectoire.

Ainsi, l'inventaire des trajectoires classiques inclut celle entre la fente 1 et l'écran et celle entre  $x_D$  et l'écran. Notons qu'en ce qui concerne les résultats associé à l'ouverture de la fente 2 uniquement, les mêmes commentaires s'appliquent à  $k_{x_A}^2, k_{x_B}^2, k_{x_C}^2$  et  $k_{x_D}^2$  (où cette fois le rôle des interactions A et B est transposé à celui de C et D et vice-versa).

## 5.4 Ouverture des deux fentes

Venons en au cas de l'ouverture simultanée des deux fentes. Lorsque les interactions A, B, C et D sont réalisées une à une, les valeurs faibles rendent compte des contributions des trajectoires issues des deux fentes.

L'expression de ces valeurs faibles est donnée par les équations (201)-(204).

Elles sont donc différentes des valeurs faibles  $k_{x_j}^1$  et  $k_{x_j}^2$  puisque (i) la fonction d'onde finale est différente et (ii) l'interaction faible détecte l'interférence des fonctions d'onde issues des deux fentes. On peut cependant discriminer entre ces deux possibilités en comparant les valeurs faibles obtenues selon le cas d'une réalisation à 1 fente ou à 2 fentes. Par exemple, la valeur faible mesurée en  $x_A$

$$\frac{k_{x_A}^1}{k_{x_A}^{12}} = 1 + \frac{[\langle \chi_f^2(t_1) | + \langle \chi_f^1(t_1) | ] | \psi_i^2(t_1) \rangle}{[\langle \chi_f^2(t_1) | + \langle \chi_f^1(t_1) | ] | \psi_i^1(t_1) \rangle} \quad (233)$$

puisque la fonction d'onde en  $x_A$  est la même que l'on soit dans un cas à une fente ou à deux alors que seule la fonction d'onde finale est différente. Notons que le lien entre  $k_{x_C}^1$  et  $k_{x_C}^{12}$  est établi de manière analogue. Cependant, en  $x_B$  (ou en  $x_D$ ), on observe la contribution des fonctions d'onde issues de chacune des fentes

$$k_{x_B}^{12} = \frac{\langle \chi_f^1(t_2) | \widehat{\Pi}_{x_B} \widehat{k}_x \widehat{\Pi}_{x_B} | \psi_i^1(t_2) \rangle}{[\langle \chi_f^2(t_2) | + \langle \chi_f^1(t_2) | ] [ | \psi_i^1(t_2) \rangle + | \psi_i^2(t_2) \rangle ]} + \frac{\langle \chi_f^1(t_2) | \widehat{\Pi}_{x_B} \widehat{k}_x \widehat{\Pi}_{x_B} | \psi_i^2(t_2) \rangle}{[\langle \chi_f^2(t_2) | + \langle \chi_f^1(t_2) | ] [ | \psi_i^1(t_2) \rangle + | \psi_i^2(t_2) \rangle ]} \quad (234)$$

C'est le fait que  $k_{x_B}^{12}$ , expérimentalement déterminé, ne remplisse pas la condition (233) qui est la signature d'une superposition des fonctions d'onde provenant des deux fentes.

De manière similaire au cas de l'ouverture d'une fente, l'implémentation des quatre interactions faibles permet d'extraire successivement les valeurs faibles à partir des intensités mesurées. Cela permet de conclure à la superposition des trajectoires, même si idéalement, une telle mesure serait accomplie par un grand nombre d'interactions faibles.

## 6 Conclusion

Les valeurs faibles permettent de mettre en évidence deux types de trajectoires, les trajectoires bohmiennes ainsi que celles de Feynman.

Les trajectoires bohmiennes peuvent être mesurées indirectement par l'évaluation répétée de la valeur faible de l'impulsion en vu de reconstituer le champ de vitesse de la particule. Ces trajectoires ont déjà été mesurées expérimentalement dans un dispositif à deux fentes d'Young [45].

Les trajectoires de Feynman contenues dans le propagateur sont quant à elles accessibles par mesures faibles successives de l'opérateur position. En comparaison à la mesure de trajectoires bohmiennes, la mesure d'une trajectoire de Feynman implique une succession d'interactions dans un même dispositif ce qui très peu commode en vue d'une réalisation expérimentale.

En conséquence et après avoir présenté les trajectoires de Feynman mises en jeu dans le dispositif des fentes d'Young, nous avons étudié les conditions physiques pour lesquelles leur observation serait la plus simple. Nous avons également proposé un protocole le plus simple possible qui nous permet d'observer à les trajectoires faibles, et en particulier, leur principale propriété qui est celle d'une superposition du fait que le propagateur s'exprime selon une somme sur les chemins.



# III Valeurs faibles nulles : principe et application à l'étude de trajectoires discontinues

## 1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'annulation d'une valeur faible et se réfère à [100] et [101]. L'examen de cette valeur particulière est motivé par le fait qu'elle apparaît lorsque les états pré/post-sélections sont tels que des valeurs faibles paradoxales émergent comme dans le paradoxe des trois boîtes ou le chat du Cheshire (chapitre suivant).

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, la valeur faible peut être comprise comme la corrélation entre les états de pré et post-sélection du point de vue l'observable mesurée. Ainsi, la valeur faible est une donnée relevante d'un élément de transition entre deux états, respective à la propriété représentée par l'observable mesurée. Lorsqu'elle s'annule, on a précisément

$$O_w = 0 \quad \rightarrow \quad \langle \chi_f | \hat{O} | \psi_i \rangle = 0 \quad (235)$$

pour des états de pré/post-sélection  $|\psi_i\rangle$  et  $\langle \chi_f |$  respectivement. Cela se traduit par une réponse nulle de l'appareil de mesure entre le début et la fin de la transition. Soit  $|\xi\rangle$  l'état de  $\mathcal{M}$ . Son état  $|\xi'\rangle$  après la post-sélection est donné par

$$|\xi'\rangle = \langle \chi_f | e^{-ig\hat{O}\hat{P}} | \psi_i \rangle \otimes |\xi\rangle = \langle \chi_f | \psi_i \rangle |\xi\rangle - ig \langle \chi_f | \hat{O} | \psi_i \rangle \hat{P} |\xi\rangle = \langle \chi_f | \psi_i \rangle |\xi\rangle \quad (236)$$

où il est nécessaire que  $\langle \chi_f | \psi_i \rangle \neq 0$ . Cela veut dire qu'une valeur faible nulle n'implique pas l'échec des pré/post-sélections mais plutôt une propriété ondulatoire imposée par la réussite de la transition : c'est la quantité  $g\hat{O}|\psi_i\rangle = g|\chi_f^\perp\rangle$  qui interagit avec  $\mathcal{M}$  qui est incompatible avec la post-

sélection  $|\chi_f\rangle$ . Le propos d'une interaction faible étant précisément l'absence de projection de  $\mathcal{S}$ , la particule faiblement mesurée atteint toujours la post-sélection avec une probabilité  $|\langle\chi_f|\psi_i\rangle|^2$  tout en vérifiant  $\langle\chi_f|\hat{O}|\psi_i\rangle = 0$ .

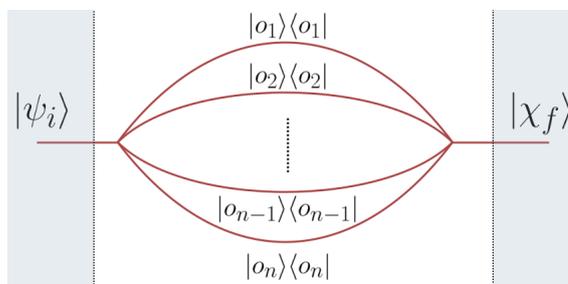
Aussi, nous détaillons dans ce chapitre les implications de l'annulation de la valeur faible pour l'observable mesurée d'une part, puis au regard des propriétés d'un processus de pré/post-sélection d'autre part.

Nous présentons ensuite la proposition de Vaidman [102],[103] qui considère que le passé d'une particule est accessible par mesure faible par l'illustration d'un interféromètre dans lequel une particule apparaîtrait et disparaîtrait à certains endroits (la disparition étant symbolisée par l'occurrence d'une valeur faible nulle). Après une brève revue des commentaires et critiques, nous proposerons une autre illustration ainsi que notre point de vue quant au lien entre une valeur faible et le passé d'une particule.

## 2 Valeur faible nulle et propriété de l'observable mesurée

Dans cette section, nous présenterons les conséquences de l'annulation d'une valeur faible au sein d'un interféromètre dans lequel chaque chemin correspond à un vecteur propre de l'observable. Sans se soucier de l'implémentation pratique, nous présentons l'issue d'un montage théorique dont nous détaillerons les états finaux de l'appareil de mesure tout en posant ensuite arbitrairement l'annulation d'une valeur faible pour en comprendre les conséquences sur la description du système  $\mathcal{S}$ .

Considérons, pour fixer les idées, un interféromètre à  $n$  sorties correspondant aux  $n$  états propres de  $\hat{O} = \sum_n \omega_n \hat{\Pi}_{o_n}$ , représenté en figure 24.



Les  $n$  chemins se rejoignent juste après la pré-sélection et juste avant la post-sélection et nous nous ramèneront continuellement à l'équivalence du point de vue de la mesure forte à titre de comparaison. De plus, dans un souci de légèreté des

FIGURE 24 – Interféromètre à  $n$  chemins

expressions, nous poserons systématiquement  $\int \gamma/\hbar dt = 1$  sans perte de généralité (où  $\gamma$  représente le couplage  $\mathcal{M}$ - $\mathcal{S}$ ).

## 2.1 Décomposition d'une observable sur des chemins de vecteur propre

L'intérêt de cette démarche est qu'elle est directement applicable à l'étude de la proposition de Vaidman [102], [103] que nous abordons plus bas.

Admettons que l'on place un appareil de mesure décrit par l'état  $|\xi_i\rangle$  sur chaque chemin  $i$  ( $i = 1\dots n$ ) ainsi que deux autres,  $|\lambda\rangle$  et  $|\rho\rangle$  en entrée et sortie de l'interféromètre. L'état initial de l'ensemble  $\{\mathcal{S} + \mathcal{M}\}$  est à présent

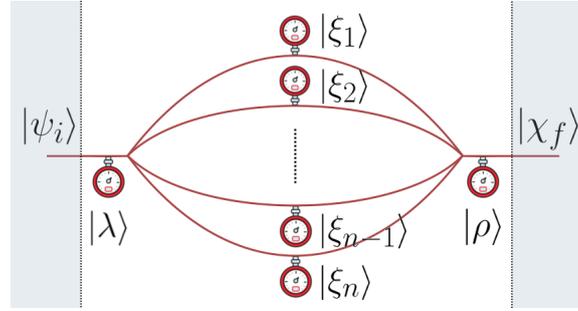


FIGURE 25 – Disposition des appareils de mesure

décrit par

$$|\Psi\rangle = |\psi_i\rangle \otimes |\xi_1\rangle \otimes |\xi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\xi_n\rangle \otimes |\lambda\rangle \otimes |\rho\rangle \quad (237)$$

alors que son évolution est gouvernée par

$$\hat{H}_{int} = \gamma \left( \hat{O} \cdot \hat{P}_1 + \hat{O} \cdot \hat{P}_2 + \dots + \hat{O} \cdot \hat{P}_n \right) + \gamma \left( \hat{O} \cdot \hat{P}_\lambda + \hat{O} \cdot \hat{P}_\rho \right) \quad (238)$$

Puisque dans notre exemple, chaque chemin correspond à un état propre de  $\hat{O}$ , notons que  $\hat{H}_{int}$  peut se réécrire comme (en introduisant la notation  $|o_j\rangle\langle o_j| \equiv \hat{\Pi}_j$ )

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = & \gamma \left( \omega_1 \hat{\Pi}_1 \cdot \hat{P}_1 + \omega_2 \hat{\Pi}_2 \cdot \hat{P}_2 + \dots + \omega_n \hat{\Pi}_n \cdot \hat{P}_n \right) \\ & + \gamma \left( \sum_{k=1}^n \omega_k \hat{\Pi}_k \cdot \hat{P}_\lambda + \sum_{k=1}^n \omega_k \hat{\Pi}_k \cdot \hat{P}_\rho \right) \quad (239) \end{aligned}$$

et de ce fait, la valeur faible qu'indiquera l'appareil de mesure  $|\xi_j\rangle$  sera donnée par

$$O_w^j = \omega_j \frac{\langle \chi_f | \hat{\Pi}_j | \psi_i \rangle}{\langle \chi_f | \psi_i \rangle} \quad (240)$$

alors que  $|\lambda\rangle$  et  $|\rho\rangle$  indiqueront

$$O_w^\lambda = \sum_k^n \omega_k \frac{\langle \chi_f | \hat{\Pi}_k | \psi_i \rangle}{\langle \chi_f | \psi_i \rangle} \quad (241)$$

Bien sûr, il y a un ordre temporel des interactions entre  $t_i$  et  $t_f$ , mais cela n'est pas pertinent étant donné que l'on se limite au premier ordre de l'interaction lors d'une mesure faible, l'on peut approximer l'opérateur d'évolution à

$$e^{-i \sum_j \omega_j \hat{\Pi}_j \cdot \hat{P}_j} = \prod_j e^{-i \omega_j \hat{\Pi}_j \cdot \hat{P}_j} \quad (242)$$

sans se soucier de l'ordre temporel des événements entre  $t_i$  et  $t_f$  (même si on avait  $[\hat{\Pi}_i, \hat{\Pi}_j] \neq 0$ ). Pour cette raison, aucune dépendance temporelle de la valeur faible ne figure ici et cela se manifeste par l'absence de termes  $g^2 \hat{\Pi}_1 \cdot \hat{\Pi}_2$ , par exemple, dans l'expansion de  $\hat{H}_{int}$ .

De plus, chaque appareil de mesure  $|\xi_i\rangle$ ,  $|\rho\rangle$  et  $|\lambda\rangle$  sont indépendants et en introduisant leur représentation spatiale  $\xi_i(x_i)$ ,  $\rho(x_\rho)$ , et  $\lambda(x_\lambda)$ , on peut écrire l'état global  $|\mu\rangle = \prod_i |\xi_i\rangle \otimes |\rho\rangle \otimes |\lambda\rangle$  de l'ensemble des  $\mathcal{M}$

$$\xi_1(x_1) \xi_2(x_2) \dots \xi_n(x_n) \rho(x_\rho) \lambda(x_\lambda) = \mu(x_1, x_2, \dots, x_n, x_\rho, x_\lambda) \quad (243)$$

Lorsque l'interaction faible et la post-sélection sont accomplies, l'appareil de mesure est dans l'état

$$|\mu'\rangle = \langle \chi_f | \psi_i \rangle (1 - i O_w^1 \cdot \hat{P}_1) (1 - i O_w^2 \cdot \hat{P}_2) \dots (1 - i O_w^n \cdot \hat{P}_n) \\ (1 - i O_w^\lambda \cdot \hat{P}_\lambda) (1 - i O_w^\rho \cdot \hat{P}_\rho) |\xi_1\rangle |\xi_2\rangle \dots |\xi_n\rangle |\lambda\rangle |\rho\rangle \quad (244)$$

$$= \langle \chi_f | \psi_i \rangle (1 - i O_w^1 \cdot \hat{P}_1 - i O_w^2 \cdot \hat{P}_2 \dots - i O_w^n \cdot \hat{P}_n \\ - i O_w^\lambda \cdot \hat{P}_\lambda - i O_w^\rho \cdot \hat{P}_\rho) |\xi_1\rangle |\xi_2\rangle \dots |\xi_n\rangle |\lambda\rangle |\rho\rangle \quad (245)$$

et en fin de compte, le profil spatial de  $|\mu'\rangle$  est donné par

$$\begin{aligned} \mu'(x_1, x_2, \dots, x_n, x_\rho, x_\lambda) = & \langle \chi_f | \psi_i \rangle \left\{ \xi_1(x_1 - O_w^1) \xi_2(x_2) \dots \xi_n(x_n) \lambda(x_\lambda) \rho(x_\rho) \right. \\ & + \xi_1(x_1) \xi_2(x_2 - O_w^2) \dots \xi_n(x_n) \lambda(x_\lambda) \rho(x_\rho) + \dots \\ & + \xi_1(x_1) \xi_2(x_2) \dots \xi_n(x_n - O_w^n) \lambda(x_\lambda) \rho(x_\rho) \\ & + \xi_1(x_1 - O_w^1) \xi_2(x_2) \dots \xi_n(x_n) \lambda(x_\lambda - O_w^\lambda) \rho(x_\rho) \\ & \left. + \xi_1(x_1 - O_w^1) \xi_2(x_2) \dots \xi_n(x_n) \lambda(x_\lambda) \rho(x_\rho - O_w^\rho) \right\} \quad (246) \end{aligned}$$

mais l'approximation faible nous permet de nous restreindre au premier ordre de l'expansion de  $\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \xi_j(x_j - O_w^j) = \xi_j(x_j) - O_w^j \frac{\partial \xi_j(x_j)}{\partial x_j} \\ \rho(x_\rho - O_w^\rho) = \rho(x_\rho) - O_w^\rho \frac{\partial \rho(x_\rho)}{\partial x_\rho} \\ \lambda(x_\lambda - O_w^\lambda) = \lambda(x_\lambda) - O_w^\lambda \frac{\partial \lambda(x_\lambda)}{\partial x_\lambda} \quad (247) \end{aligned}$$

et il vient

$$\begin{aligned} \mu'(x_1, x_2, \dots, x_n, x_\rho, x_\lambda) = \langle \chi_f | \psi_i \rangle \xi_1(x_1 - O_w^1) \xi_2(x_2 - O_w^2) \dots \\ \dots \xi_n(x_n - O_w^n) \rho(x_\rho - O_w^\rho) \lambda(x_\lambda - O_w^\lambda) \quad (248) \end{aligned}$$

Pour nous permettre de nous ramener à ce que nous aurions obtenu avec des mesures fortes de Von Neumann, précisons simplement sans plus de détail le profil spatial de  $|\mu\rangle$  au temps final lors d'un tel procédé

$$\begin{aligned} \mu'(x_1, x_2, \dots, x_n, x_\rho, x_\lambda) = \langle \chi_f | \widehat{\Pi}_{o_1} | \psi_i \rangle \\ \left\{ \xi_1(x_1 - \omega_1) \xi_2(x_2) \dots \xi_n(x_n) \rho(x_\rho - \omega_1) \lambda(x_\lambda - \omega_1) \right. \\ + \langle \chi_f | \widehat{\Pi}_{o_2} | \psi_i \rangle \xi_1(x_1) \xi_2(x_2 - \omega_2) \dots \xi_n(x_n) \rho(x_\rho - \omega_2) \lambda(x_\lambda - \omega_2) + \dots \\ \left. + \langle \chi_f | \widehat{\Pi}_{o_n} | \psi_i \rangle \xi_1(x_1) \xi_2(x_2) \dots \xi_n(x_n - \omega_n) \rho(x_\rho - \omega_n) \lambda(x_\lambda - \omega_n) \right\} \quad (249) \end{aligned}$$

mais où cette fois,

$$\begin{aligned} \int \xi_i(x_i - \omega_k) \xi_i(x_i - \omega_{k'}) dx_i = \int \lambda(x_\lambda - \omega_{k'}) \lambda(x_\lambda - \omega_{k'}) dx_\lambda \\ = \int \mu(x_\mu - \omega_k) \mu(x_\mu - \omega_{k'}) dx_\mu = 0 \quad (250) \end{aligned}$$

Les intensités normalisées associées aux évolutions faible et forte ("weak" et "strong"), notées respectivement par  $\mathcal{I}_w$  et  $\mathcal{I}_s$  s'écrivent ainsi

$$\mathcal{I}_w = |\tilde{\xi}_1(x_1 - O_w^1)|^2 |\tilde{\xi}_2(x_2 - O_w^2)|^2 \dots \dots |\tilde{\xi}_n(x_n - O_w^n)|^2 |\lambda(x_\lambda - O_w^\lambda)|^2 |\rho(x_n - O_w^\rho)|^2 \quad (251)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_s = & \frac{|\langle \chi_f | \hat{\Pi}_{o_1} | \psi_i \rangle|^2}{|\langle \chi_f | \psi_i \rangle|^2} |\mu(x_1 - \omega_1, x_2, \dots, x_n, x_\lambda - \omega_1, x_\rho - \omega_1)|^2 \\ & + \frac{|\langle \chi_f | \hat{\Pi}_{o_2} | \psi_i \rangle|^2}{|\langle \chi_f | \psi_i \rangle|^2} |\mu(x_1, x_2 - \omega_2, \dots, x_n, x_\lambda - \omega_2, x_\rho - \omega_2)|^2 + \dots \\ & + \frac{|\langle \chi_f | \hat{\Pi}_{o_n} | \psi_i \rangle|^2}{|\langle \chi_f | \psi_i \rangle|^2} |\mu(x_1, x_2, \dots, x_n - \omega_n, x_\lambda - \omega_n, x_\rho - \omega_n)|^2 \quad (252) \end{aligned}$$

Ces expressions nous permettent de conclure d'une manière habituelle. La mesure forte permet d'observer une seule des valeurs propres avec la probabilité ABL associée alors que chaque valeur faible est observable sur un profil d'intensité unique.

## 2.2 Sens physique de l'annulation d'une valeur faible

### 2.2.1 Discussion préliminaire

Gardons à l'esprit que, en ce qui concerne la mesure forte, l'observateur qui choisit de mesurer le degré de liberté  $x_i$  ne verra pas la même chose s'il choisit d'observer le degré de liberté  $x_\rho$  ou  $x_\lambda$ , et ceux, même s'il pourrait obtenir le même résultat dans les deux cas car l'information acquise lors de la mesure n'est pas la même. La mesure de  $\mu'(x_\rho) = \int \mu'(x_1, x_2, \dots, x_n, x_\rho, x_\lambda) dx_1 dx_2 \dots dx_n dx_\lambda$  (ou bien de manière équivalente,  $\mu'(x_\lambda)$ ) donnera un résultat en terme de valeur propre, alors que en ce qui concerne les autres degrés de liberté de  $\mu'$ , le résultat sera associé à la "présence" d'une propriété sur le chemin en question puisque c'est le projecteur qui y est mesuré. En conséquence, l'annulation du résultat de  $\mu'(x_j)$  où  $j = 1 \dots n$  engendre une impossibilité d'observer  $\omega_j$  à la lecture de  $\mu'(x_\rho)$  (ou de  $\mu'(x_\lambda)$ ).

Du point de vue d'une valeur faible, cela est bien sûr différent. D'abord et par définition, la mesure d'un  $|\xi_i\rangle$ , d'un  $|\rho\rangle$  ou d'un  $|\lambda\rangle$  n'affecte aucun des autres résultats donnés par les autres appareils de mesure. Cela constitue un avantage (lorsqu'on se rappelle aussi que si la transition réussit, on connaît d'ores et déjà le résultat), car de ce fait, cela nous autorise à considérer une description de  $\mathcal{S}$  identique avant et après une mesure de  $\mathcal{M}$  : la

mesure d'un des degrés de liberté de  $|\mu'\rangle$  ne donne qu'un résultat à l'observateur du fait de son choix d'observation mais n'impacte pas  $\mathcal{S}$ . Cette particularité de l'interaction faible permet à l'observateur de reproduire la même expérience plusieurs fois (au sens où le même résultat est obtenu), et tant que les états de pré-sélection et de post-sélection sont atteints, nous sommes sûr et certain d'avoir reproduit la même situation en terme de superposition d'états parce que la valeur faible est définie sans ambiguïté par les conditions limites imposées à  $t_i$  et  $t_f$  uniquement. Bien sûr, nous pourrions observer la même valeur faible pour des processus de pré/post-sélection différents mais cela est une autre question.

Il s'agit donc de porter un autre regard sur la relation introduite en tout début de chapitre :

$$|\zeta'\rangle = \langle \chi_f | e^{-ig\hat{O}\hat{P}} | \psi_i \rangle \otimes |\zeta\rangle = \langle \chi_f | \psi_i \rangle |\zeta\rangle - ig \langle \chi_f | \hat{O} | \psi_i \rangle \hat{P} |\zeta\rangle = \langle \chi_f | \psi_i \rangle |\zeta\rangle \quad (253)$$

où l'appareil de mesure affichant le résultat zéro devient pondéré par l'amplitude de transition appropriée. C'est ainsi que nous aborderons l'annulation d'une valeur faible comme résultat de mesure au sens strict, c'est à dire comme la propriété d'une transition spécifique qui donne une information au regard de l'observable faiblement mesurée.

En se restreignant à une pré/post-sélection particulière, l'expérimentateur peut reproduire autant de fois qu'il le souhaite la même situation physique et mesurer, un à un, chaque appareil de mesure dans le but de cartographier l'ensemble des valeurs faibles dans un interféromètre par exemple. En conséquence, nous pouvons sans réserve utiliser une sorte de "loi de conservation" des valeurs faibles :  $\sum_i O_w^i = O_w$  qui est valable pour la collection des résultats des  $|\zeta_i\rangle$ , c'est à dire valable à un instant donné entre  $t_i$  et  $t_f$ , ou bien, à des instant différents (toujours entre  $t_i$  et  $t_f$ ), comme par exemple le fait que la somme des résultats de tous les  $|\zeta_i\rangle$  à un instant donné soit égale au résultat d'un appareil de mesure qui interagit plus tard ( $|\rho\rangle$ ) ou plus tôt ( $|\lambda\rangle$ ) tant que l'on se place entre les états de pré et post-sélection :  $\sum_i O_w^i = O_w^\rho = O_w^\lambda$ . Cette "loi de conservation" est l'analogue de la projection de  $\mathcal{S}$  à tout temps entre  $t_i$  et  $t_f$  pour la mesure forte abordée en fin de chapitre 1 (même si l'aléatoire se présente différemment, cf chapitre 1). Notons aussi que cette "loi de conservation" est un cas simple de la propriété n°3 du chapitre 1 avec une extension à tout temps compris entre  $t_i$  et  $t_f$  et appliquée à la décomposition d'une observable, dans sa base propre par exemple. A présent, posons arbitrairement l'annulation

des valeurs faibles.

### 2.2.2 Cas $O_w^i = 0$ : Annulation de la valeur faible d'un projecteur sur un état propre

Commençons par examiner le cas où la mesure d'un  $|\xi_i\rangle$  nous retourne la valeur  $O_w^i = 0$  dans l'interféromètre en figure 25. La quantité  $\omega_i \langle \chi_f | \hat{\Pi}_i | \psi_i \rangle / \langle \chi_f | \psi_i \rangle$  s'annule, et aucun phénomène d'interférence ne participe à cette annulation. Cela veut dire que l'alternative "chemin i", prise individuellement et dans le contexte d'une transition en particulier n'est pas possible : c'est tout simplement la translation de la fonction d'onde associée à la valeur propre de  $\omega_i$  qui n'a pas lieu.

Sous le prisme de la règle ABL, on a formellement  $P_{\text{abl}}(\hat{\Pi}_i) = 0$  (sous condition que  $\omega_i \neq 0$ ) et cela veut dire que nous obtiendrions le même résultat par la mesure forte : puisque aucun phénomène d'interférence n'a lieu ici, la mesure forte donnera toujours le même résultat, à la différence que  $\mathcal{S}$  sera projeté de manière à ce que son évolution sur le "chemin i" soit exclue. En effet, lorsque  $\mathcal{S}$  détecté à  $t_i$  dans l'état  $|\psi\rangle$  puis dans l'état  $|\chi_f\rangle$  à  $t_f$ , il ne pourra jamais être détecté dans l'état propre  $|o_i\rangle$  de  $\hat{O}$  en conservant la probabilité de transition. En revanche, l'acquisition de cette information laisse l'état final de  $\mathcal{M}$  dans une superposition d'état pouvant potentiellement afficher tous les autres résultats à la mesure d'un autre degré de liberté.

### 2.2.3 Cas $O_w^\lambda = O_w^o = 0$ : Annulation de la valeur faible d'une observable

Si on a  $O_w^\lambda = O_w^o = 0$ , autrement dit,  $\langle \chi_f | \hat{O} | \psi_i \rangle = 0$ , là, un phénomène d'interférence participe à l'annulation. C'est la résultante de la collection des états translatsés de  $\mathcal{M}$ , centrés en  $\omega_i$  et pondérés par  $\langle \chi_f | \hat{\Pi}_i | \psi_i \rangle$ , qui donne une réponse effective nulle. Ainsi, c'est la superposition particulière des états

$$\omega_1 \langle o_1 | \psi_i \rangle |o_1\rangle + \omega_2 \langle o_2 | \psi_i \rangle |o_2\rangle + \dots + \omega_n \langle o_n | \psi_i \rangle |o_n\rangle \quad (254)$$

qui ne peut pas être détectée à  $t_f$  du fait de son orthogonalité à  $\langle \chi_f |$ , ou bien, de manière équivalente, c'est la superposition

$$\omega_1 \langle o_1 | \langle \chi_f | o_1 \rangle + \omega_2 \langle o_2 | \langle \chi_f | o_2 \rangle + \dots + \omega_n \langle o_n | \langle \chi_f | o_n \rangle \quad (255)$$

qui ne peut pas être détectée à  $t_i$  du fait de son orthogonalité à  $|\psi_i\rangle$ . Ces superpositions d'états sont donc toutes deux interdites par les pré/post-sélections. La superposition d'état signifie littéralement que le système se trouve simultanément dans chacun des états, tous pondérés par l'amplitude de probabilité associée. Or, si la superposition est impossible il s'agit littéralement de l'impossibilité d'observer les propriétés  $\widehat{\Pi}_1$  et  $\widehat{\Pi}_2$  et ...  $\widehat{\Pi}_n$ , c'est à dire de manière conjointe par mesure forte ce qui se traduit par une valeur faible nulle de l'observable. Cela nous mène, de ce fait, à conclure que ces alternatives sont contrefactuelles, tant qu'elles sont toutes considérées ensembles, à savoir lors d'une mesure forte jointe.

Effectivement, la propriété n°5 du chapitre 1 dit qu'une mesure faible considère la mesure d'alternatives comme individuellement toutes vraies au même instant, sans détruire la cohérence du système, et pour preuve, la "loi de conservation" nous permet de le voir directement : si l'on mesure les valeurs faibles que nous retournent les appareils de mesure  $|\xi_i\rangle$ , on s'apercevra que les translations individuelles ont bien lieu et satisfont

$$\sum_{i=1}^n O_w^i = 0 \quad (256)$$

et il y a deux possibilités. La première, ce serait que chacun des  $O_w^i$  soient nuls. Ainsi, les translations individuelles n'apparaissent pas pour chacun des chemins et aucune interférence ne joue. Donc, cela voudrait dire que du point de vue de la mesure forte, on n'aurait beau mesurer chaque "chemin  $i$ ", les  $|\xi_i\rangle$  ne bougeraient pas puisqu'au niveau de la règle ABL, cela se traduirait par

$$\sum_i P_{\text{abl}}(\widehat{\Pi}_i) = \sum_i \left| \frac{\langle \chi_f | \widehat{\Pi}_i | \psi_i \rangle}{\langle \chi_f | \psi_i \rangle} \right|^2 = \left| \frac{\langle \chi_f | \mathbb{1} | \psi_i \rangle}{\langle \chi_f | \psi_i \rangle} \right|^2 = 0 \quad (257)$$

ce qui est un non sens, à la fois dans l'égalité, et à la fois dans la procédure : une valeur faible n'est mesurable que si les conditions limites sont accomplies (on a exclu le cas  $\omega_i = 0$  où l'appareil de mesure  $|\xi_i\rangle$  resterait inchangé alors que la transition entre  $|\psi_i\rangle$  et  $|\chi_f\rangle$  serait accomplie avec succès). En conséquence, si l'on considère une groupe de chemins fermés, une valeur faible ne peut s'annuler que si un phénomène d'interférences est à l'œuvre dans l'établissement du résultat.

Cela nous impose de considérer la deuxième possibilité comme la seule recevable : certains des  $O_w^i$  sont négatifs et c'est la signature d'une situation

contrefactuelle (voir chapitre 1). Effectivement, cela fait lien avec l'occurrence de tels événements, abordée dans le chapitre 1 avec le paradoxe des trois boîtes. La différence, c'est qu'ici, nous avons isolé l'apparition d'événements contrefactuels d'un point de vue ondulatoire, en partant de la valeur faible elle-même et de sa définition, et dans le cas où elle s'annule. Voici donc un premier critère fiable pour la valeur faible : le système  $\mathcal{S}$  est caractérisé par une configuration particulière, d'ordre ondulatoire, et la contrefactualité des résultats possible à la mesure d'une observable donnée est symbolisée par son annulation.

Lorsque le groupe de chemins considéré est non fermé, la valeur faible peut s'annuler par interférences, ou bien s'annuler parce que chaque valeur faible de chaque chemin est nulle. Dans le premier cas, l'issue de la contrefactualité est inchangée. En revanche dans le second, c'est l'annulation de la probabilité ABL pour chacun des chemins qui est en jeu. Du point de vue d'une mesure forte hypothétique, le premier cas décrit une impossibilité d'observation jointe de chacun des chemins du groupe alors que le second traduit une impossibilité d'observation de chaque chemin individuel.

Finalement et selon la situation, l'annulation de la valeur faible peut tantôt signifier l'absence d'une propriété portée par une particule lorsque les interférences ne contribuent pas, ou bien l'absence d'une propriété à interpréter de manière ondulatoire et non locale en terme de superposition d'états.

## 2.3 Bilan

Il devient clair à présent que la valeur faible rend compte d'une physique sous-jacente à la distribution de probabilité, obtenue par mesure projective. Elle nous permet de considérer la fonction d'onde au-delà de son caractère conceptuel et la superposition d'état devient un objet physique sondable entre deux conditions limites définies à deux instants différents. C'est ainsi que nous pouvons mesurer un aspect ondulatoire de la fonction d'onde, à plusieurs endroits et pour une procédure unique grâce à la mesure faible. Considérer le cas d'une valeur faible nulle, pour ce qu'elle est, nous a permis d'en venir à caractériser la contrefactualité, et surtout à la mesurer, et de manière plus naturelle que nous ne l'avons fait dans le premier chapitre. La procédure que nous avons employé était celle adaptée à des processus logique en partant d'une contrainte de nature probabiliste  $\sum_i P_{\text{abl}}(\hat{\Pi}_i) = 1$  (la probabilité ABL représentant celle associée à

une mesure forte hypothétique) à laquelle on imposait particulièrement  $P_{\text{abl}}(\widehat{\Pi}_k) = 1$ , et, grâce au lien valeur propre-valeur faible dans ce cas de figure, considérer la contextualité d'une mesure forte nous permettait de postuler la préservation de la contrefactualité des alternatives lors d'une interaction faible. Notons cependant que cette dernière approche par la règle ABL nous a tout de même servi à mettre en évidence le rôle clé des pré-sélection et post-sélection comme éléments structurels de la valeur faible.

### 3 La valeur faible : un critère pour le passé d'une particule

#### 3.1 Motivation

Il est clair que le passé d'une particule est inaccessible par mesure forte : l'information passée est perdue puisque l'interaction détruit la cohérence du système mesuré et le projette sur un état propre de l'observable en question. Une solution envisageable est celle des expériences à choix retardé introduites par Wheeler [104] où une mesure (forte) à un instant  $t$  définit le comportement d'une particule à un instant antérieur.

Dans ce but, Vaidman [102],[103] propose d'utiliser la propriété non-destructive d'une interaction faible pour évaluer la présence ou non d'une particule à un endroit et un instant donné entre deux états de pré/post-sélection. Le caractère local d'une interaction faible l'amène à donner à une valeur faible le statut de trace faible au sens où elle représente une trace laissée par la particule à l'endroit où l'interaction a eu lieu. Cette approche découle directement du formalisme TSVF évoqué en annexe. A un temps intermédiaire  $t$  au cours de la transition, le TSVF permet une description passée entre  $t_i$  et  $t$  définie par l'état de pré-sélection ainsi qu'une description future entre  $t$  et  $t_f$  définie par l'état de post-sélection. Puisque la valeur faible est un objet qui couple ces deux descriptions par l'intermédiaire de l'observable  $\widehat{O}$  mesurée,  $O_w = \langle \psi_f | \widehat{O} | \psi_i \rangle / \langle \psi_f | \psi_i \rangle$ , alors son évaluation à l'endroit de l'interaction entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{M}$  permettrait d'accéder à la valeur d'une propriété en un point  $(x, t)$  au cours de la transition.

En conséquence, l'idée est de réaliser plusieurs mesures faibles en différents points d'un interféromètre, rassembler les résultats non nuls, et reconstituer les trajectoires de la particule entre deux états définis à  $t_i$  et  $t_f$ .

### 3.2 Trace faible dans des interféromètres imbriqués

Un montage constitué de deux interféromètres imbriqués est choisi comme support d'étude [105] pour différentes situations physiques, récapitulées en figure 26, 27 et 28.

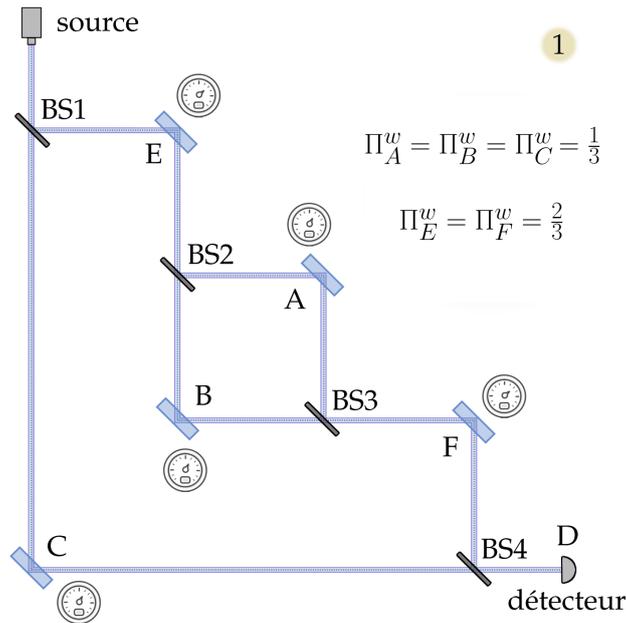


FIGURE 26 – Montage 1

Le montage met en jeu la propagation d'un photon dans un interféromètre de Mach-Zehnder dont l'une des deux branches (branche E) conduit à un deuxième interféromètre imbriqué. Le montage est constitué de lames semi réfléchissantes de réflexion  $R = \frac{2}{3}$  et transmission  $T = \frac{1}{3}$  (BS1 et BS4) et d'autres avec  $R = T = \frac{1}{2}$  (BS2 et BS3). Les interactions sont effectuées aux points A, B, C, E et F où l'on mesure la présence du photon par les projecteurs  $\hat{\Pi}_A = |A\rangle\langle A|$ , ...,  $\hat{\Pi}_F$  respectivement. Le profil transverse de la fonction d'onde joue le rôle de l'appareil de mesure  $\mathcal{M}$  et l'état du système  $\mathcal{S}$  est représenté par la branche de l'interféromètre dans laquelle la particule évolue.

Considérons, comme dans [102], un état  $|\Psi\rangle$  qui évolue selon la flèche du temps, représenté par le faisceau mauve, et un autre  $\langle\Phi|$  évoluant dans le sens opposé, représenté par des pointillés verts. Ainsi,  $|\Psi\rangle$  évolue de la source au détecteur alors que  $\langle\Phi|$  évolue du détecteur à la source dans

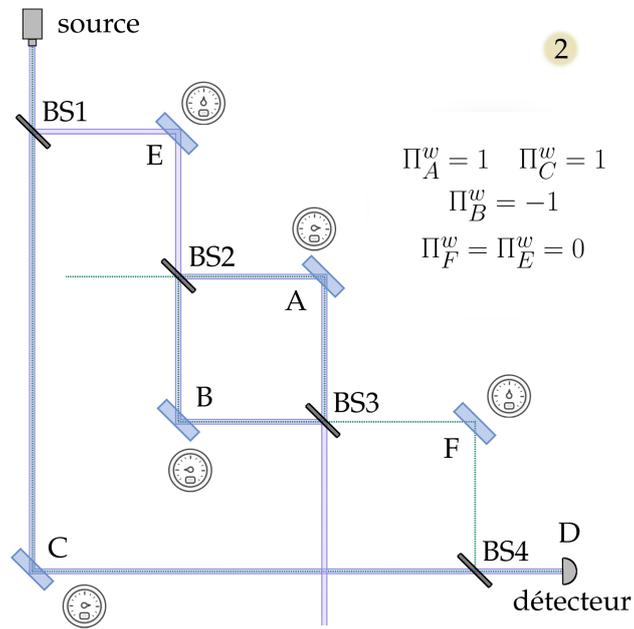


FIGURE 27 – Montage 2

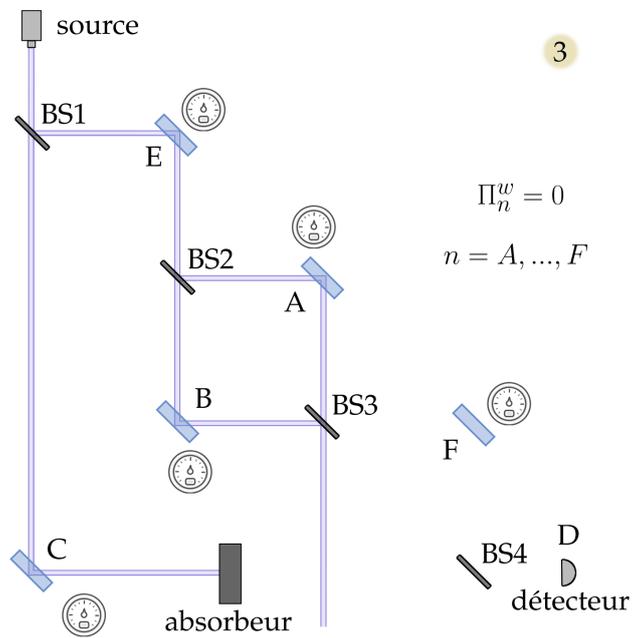


FIGURE 28 – Montage 3

le cas de pré/post-sélections réussies. Le cas n°2 est obtenu en réglant la différence de phase de telle sorte que les interférences s'annulent dans la branche F (ajout d'un facteur  $e^{i\frac{\pi}{2}}$  dans la branche B). Le cas n°3 est identique au n°2 avec un absorbeur supplémentaire à la branche C. Pour une lecture plus simple, la synthèse des résultats associés aux états  $|\Psi\rangle \langle\Phi|$  est reportée sur les figures 26, 27 et 28.

Ces valeurs sont obtenues de la manière suivante. Au temps initial, l'état de  $\{\mathcal{S} + \mathcal{M}\}$  est

$$|\Psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \quad (258)$$

où  $\langle x, y | \varphi \rangle$  est le profil transverse de la fonction d'onde, donné par  $\varphi(x, y) = \mathcal{A} e^{-\frac{(x+y)^2}{2\Delta^2}}$  et qui joue le rôle de  $\mathcal{M}$ . En chaque point  $i = A \dots F$ , on considère une interaction de la forme  $\hat{H}_{int}^i = \hat{\Pi}_i \cdot \hat{P}_y$ . Au final, l'hamiltonien total est (sans compter l'évolution libre)

$$\hat{H}_{int} = \sum_i \hat{H}_{int}^i = \sum_i \hat{\Pi}_i \cdot \hat{P}_y \quad (259)$$

où  $\hat{\Pi}_i$  agit sur l'état spécifiant la branche de l'interféromètre (état de  $\mathcal{S}$ ) et  $\hat{P}_y$  sur le profil de la fonction d'onde (état de  $\mathcal{M}$ ).

Posons les opérateurs d'évolution  $\hat{U}_n$  symbolisant le passage par la lame semi-réfléchissante  $n$ . Ainsi, l'état final  $|\varphi'\rangle$  de  $\mathcal{M}$  après détection en  $D$  est donné par

$$\langle x, y | \varphi' \rangle = \langle \Phi | \hat{U}_4 e^{-ig \hat{\Pi}_f \cdot \hat{P}_y} \hat{U}_3 e^{-ig \hat{\Pi}_a \cdot \hat{P}_y} e^{-ig \hat{\Pi}_b \cdot \hat{P}_y} e^{-ig \hat{\Pi}_c \cdot \hat{P}_y} \hat{U}_2 e^{-ig \hat{\Pi}_e \cdot \hat{P}_y} \hat{U}_1 |\Psi\rangle \otimes \varphi(x, y) \quad (260)$$

où  $\langle \Phi | \hat{U}_4 \dots \hat{U}_1 |\Psi\rangle$  est spécifique à chaque montage. Explicitons le déroulement de chaque étapes dans en examinant à la fois l'évolution temporelle dans le sens direct, et l'évolution temporelle inverse,

	$ \Psi\rangle$	$\hat{U}_1$	$ \Psi_1\rangle$	$\hat{U}_2$	$ \Psi_2\rangle$	$\hat{U}_3$	$ \Psi_3\rangle$	$\hat{U}_4$	$ \Psi_4\rangle$	
Pré-sélection	$\longrightarrow$	BS1	$\longrightarrow$	BS2	$\longrightarrow$	BS3	$\longrightarrow$	BS4	$\longrightarrow$	Post-sélection
	$\longleftarrow$	$\hat{U}_1^\dagger$	$\longleftarrow$	$\hat{U}_2^\dagger$	$\longleftarrow$	$\hat{U}_3^\dagger$	$\longleftarrow$	$\hat{U}_4^\dagger$	$\longleftarrow$	
	$\langle \Phi_1  $		$\langle \Phi_2  $		$\langle \Phi_3  $		$\langle \Phi_4  $		$\langle \Phi  $	

Dans le cas de la figure 26, le système se trouve successivement dans les états suivants (attention, le sens de lecture est de haut en bas pour  $|\Psi_{1,2,3,4}\rangle$ )

et de bas en haut pour  $\langle \Phi_{4,3,2,1} |$ )

$$\begin{aligned} \text{entre BS1 et BS2} \quad |\Psi_1\rangle = \hat{U}_1|\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|C\rangle + \sqrt{2}|E\rangle) \\ &= [\langle \Phi_3 | \hat{U}_2^\dagger ]^t = [\langle \Phi_2 | ]^t \end{aligned} \quad (261)$$

$$\begin{aligned} \text{entre BS2 et BS3} \quad |\Psi_2\rangle = \hat{U}_2|\Psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + |B\rangle + |C\rangle) \\ &= [\langle \Phi_4 | \hat{U}_3^\dagger ]^t = [\langle \Phi_3 | ]^t \end{aligned} \quad (262)$$

$$\begin{aligned} \text{entre BS3 et BS4} \quad |\Psi_3\rangle = \hat{U}_3|\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|C\rangle + \sqrt{2}|F\rangle) \\ &= [\langle \Phi | \hat{U}_4^\dagger ]^t = [\langle \Phi_4 | ]^t \end{aligned} \quad (263)$$

A chaque temps, on a exactement  $[\langle \Phi_{4,3,2,1} | ]^t = |\Psi_{1,2,3,4}\rangle$  (on pourrait aussi écrire  $\hat{T}|\Psi_{1,2,3,4}\rangle = (\langle \Phi_{4,3,2,1} | )^\dagger$  où l'opérateur inversion de la flèche du temps  $\hat{T}$  est l'opérateur complexe conjugué dans ce cas) et cela se manifeste par une superposition à chaque endroit des trajectoires passée et future sur la figure 26.

Cela donne les valeurs faibles suivantes

$$\Pi_E^w = \frac{2}{3} \quad \Pi_F^w = \frac{2}{3} \quad \Pi_A^w = \Pi_B^w = \Pi_C^w = \frac{1}{3} \quad (264)$$

Dans le cas du deuxième montage et en comparaison au premier, l'introduction d'une différence de phase entre les branches A et B change l'état de  $|\Psi\rangle$  à partir de BS2 alors que  $\langle \Phi |$  change à partir de BS3. Posons  $|F_\perp\rangle$  ( $|E_\perp\rangle$ ) tel que  $\langle F_\perp | F \rangle = 0$  ( $\langle E_\perp | E \rangle = 0$ ), et voyons de quelle manière change la description TSVF

$$\text{entre BS1 et BS2} \quad |\Psi_1\rangle = \hat{U}_1|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|C\rangle + \sqrt{2}|E\rangle) \quad (265)$$

$$\text{entre BS2 et BS3} \quad |\Psi_2\rangle = \hat{U}_2|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + i|B\rangle + |C\rangle) \quad (266)$$

$$\text{entre BS3 et BS4} \quad |\Psi_3\rangle = \hat{U}_3|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|C\rangle + \sqrt{2}|F_\perp\rangle) \quad (267)$$

alors que

$$\text{entre BS1 et BS2} \quad [\langle \Phi_1 | ]^t = [\langle \Phi_2 | \hat{U}_1^\dagger ]^t = \frac{1}{\sqrt{3}}(|C\rangle + \sqrt{2}|E_\perp\rangle) \quad (268)$$

$$\text{entre BS2 et BS3} \quad [\langle \Phi_2 | ]^t = [\langle \Phi_3 | \hat{U}_2^\dagger ]^t = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + i|B\rangle + |C\rangle) \quad (269)$$

$$\text{entre BS3 et BS4} \quad [\langle \Phi_3 | ]^t = [\langle \Phi_2 | \hat{U}_3^\dagger ]^t = \frac{1}{\sqrt{3}}(|C\rangle + \sqrt{2}|F\rangle) \quad (270)$$

En conséquence, Vaidman observe que  $|\Psi\rangle$  et  $\langle\Phi|$  se recouvrent avec la même amplitude de probabilité dans la branche C, ainsi que dans toutes les branches A, B et C entre BS2 et BS3. En revanche, entre BS1 et BS2 et entre BS3 et BS4, les composantes selon  $|E\rangle$ ,  $|F\rangle$ ,  $|E_\perp\rangle$  et  $|F_\perp\rangle$  sont telles qu'il n'y a aucun recouvrement dans les zones E et F. Notons que le seul chemin possible entre les pré/post-sélections est la branche C puisque la différence de phase entre A et B a précisément été choisie de manière à ce que la fonction d'onde vaille 0 en F par interférence destructive. On observe ici les valeurs faibles suivantes

$$\Pi_E^w = \Pi_F^w = 0 \quad \Pi_A^w = 1 \quad \Pi_B^w = -1 \quad \Pi_C^w = 1 \quad (271)$$

Le cas non intuitif est le n°2 : en accord avec la signification d'une trace faible, tout se passe comme si la particule n'entrait pas dans l'interféromètre imbriqué ( $\Pi_E^w = 0$ ), ni n'en sortait ( $\Pi_F^w = 0$ ), alors qu'elle laisse une trace faible à l'intérieur ( $\Pi_A^w = -\Pi_B^w = \Pi_C^w = 1$ ). En conséquence, cela aboutit à une trajectoire discontinue en terme de trace faible : la particule disparaît puis apparaît alternativement.

Dans le cas n°3, le processus de pré/post-sélection n'est jamais accompli avec succès et c'est pourquoi on ne peut observer aucune valeur faible.

Du point de vue de Vaidman, il s'agit d'un phénomène supplémentaire à ajouter à la longue liste déjà existante des effets quantiques contre intuitifs. Il fournit alors une explication dans les termes du TSVF : on observe que les seuls endroits où la trajectoire ne s'annule pas sont ceux où les états  $|\Psi\rangle$  et  $\langle\Phi|$  ont un recouvrement non nul sous condition qu'elles mènent simultanément à des pré/post-sélection réussies. Cela montre que les valeurs "bizarres" peuvent être appréhendées plus facilement en considérant la valeur faible comme le résultat d'une interférence d'un état qui remonte le temps et d'un autre qui le suit. Ainsi, dans le cadre du TSVE, l'annulation de la valeur faible s'interprète comme une trace nulle.

### 3.3 Réalisation expérimentale

La réalisation expérimentale est accomplie par Danan et al [105] qui considèrent une implémentation identique à ceci près qu'elle met en jeu la propagation d'un champ classique décrit par les équations de Maxwell plutôt que celle d'un photon. Les interactions faibles sont accomplies en considérant des miroirs vibrants à des fréquences distinctes de telle sorte à ce qu'une réflexion de l'onde classique se traduise par un déplacement vertical du miroir. Les interférences ne sont pas détruites puisque l'amplitude

de déplacement est inférieure à la taille du faisceau et la variation de chemin optique produit par le déplacement est inférieure à la taille caractéristique de l'onde. Les fréquences de vibrations sont obtenues par analyse de Fourier et la présence de la particule en un point est symbolisée par l'observation d'une fréquence non nulle.

La réalisation expérimentale reproduit les résultats attendus mais elle met en jeu la propagation d'une onde classique. En conséquence, elle fait face à de vives critiques que nous abordons dans le paragraphe suivant.

### 3.4 Brève revue des commentaires et critiques

La plupart des commentaires qui ont suivis sont basés sur la réalisation expérimentale et non sur le schéma théorique idéal. L'objectif de la plupart des critiques est la "démystification" des résultats obtenus en se focalisant sur les défauts du montage sans pour autant remettre en question la validité de la proposition originale, à savoir, si la trace faible est pertinente à la description du passé d'une particule ou non.

Par exemple, Saldanha [106] montre que le phénomène est observable pour des interférences classiques sans intervention d'une quelconque nature quantique de la particule. Effectivement, si l'on examine la forme finale de l'appareil de mesure

$$\varphi'(x, y) = \frac{\mathcal{A}}{3} \left( e^{-i g \Pi_c^w \hat{P}_y} + e^{-i g (\Pi_e^w + \Pi_a^w + \Pi_f^w) \hat{P}_y} - e^{-i g (\Pi_e^w + \Pi_b^w + \Pi_f^w) \hat{P}_y} \right) \varphi(x, y) \quad (272)$$

on observe individuellement des translations existantes de  $\Pi_e^w$  ( $\Pi_f^w$ ) qui se compensent par interférences parce que le montage a précisément été réglé de telle manière à ce que la fonction d'onde vaille zéro en F. Ainsi, les valeurs faibles nulles en E et F deviennent des artéfacts dûs à l'annulation de la fonction d'onde dans ces zones : le profil de la fonction d'onde qui joue le rôle de  $\mathcal{M}$  s'annule précisément par construction. Saldanha montre alors que pour différent déphasages entre les chemins A et B, c'est à dire lorsque le fonction d'onde ne s'annule pas forcément en F, on observe bien des valeurs faibles non nulles. Notons que cette dépendance du déphasage entre chaque branche est aussi explicitée par Potovcek et Ferenczi [107]. En conclusion, la manipulation n'a rien de quantique : on ne mesure rien en F parce qu'il n'y a rien à mesurer à cause d'interférences destructives classiques.

Un autre argument de Li et al [108] est de dire que l'interaction réalisée

aux miroirs perturbe le système. Pour le montrer, il réalise une interaction entre le photon ( $\mathcal{S}$ ) et un atome à trois niveaux qui joue le rôle de  $\mathcal{M}$ . L'inférence de la valeur faible est accomplie en mesurant successivement deux des trois niveaux de l'atome considéré.

Cela peut aussi être compris de manière plus simple en considérant les règles de l'interféromètre de Mach-Zehnder.

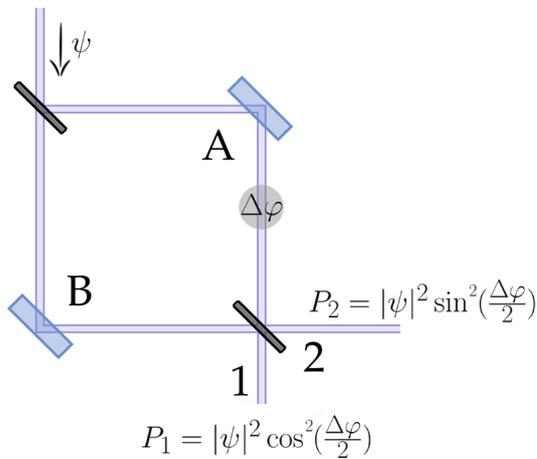


FIGURE 29 – interféromètre imbriqué

$\frac{\pi}{2}$ , on obtient au premier ordre

$$P_1 \approx |\psi|^2 \{\sin(g\Pi_A^w)\}^2 \quad P_2 \approx |\psi|^2 \{\cos(g\Pi_A^w)\}^2 \quad (273)$$

En conséquence, la mesure d'une seule des deux valeurs faible change un petit peu la probabilité de détection dans les branches de sortie 1 et 2. Un petit peu parce qu'on peut retrouver les bonnes probabilités dans le cas d'une mesure unique en branche A si l'on applique  $g \ll 1$  (la variation de la probabilité sera d'ordre  $g^2$  et sera négligeable). Donc, ce qui doit être pointé du doigt n'est pas tant une variation négligeable de la probabilité mais une erreur dans la procédure : il y a une action retour de  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{S}$ . Comme nous l'avons vu au chapitre 1, la valeur faible est précisément obtenue dans la limite où l'action retour est inexistante. Or ici, le photon qui touche le miroir le fait vibrer, c'est cette vibration qui s'imprime sur  $\mathcal{M}$ , mais en retour, la vibration du miroir introduit une différence de chemin optique qui se traduit par un déphasage dans la branche concernée et donc par une modification de  $\mathcal{S}$ . Cette deuxième action est de trop et elle devrait

On représente en figure 29 l'interféromètre imbriqué. Considérons les cas n°1 et 2 avec des miroirs fixes. Pour le cas n°1,  $\frac{\Delta\varphi}{2} = 0$  donc  $P_2 = 0$  et  $P_1 = |\psi|^2$  alors que  $P_2 = |\psi|^2$  et  $P_1 = 0$  pour le cas n°2 où  $\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{2}$ .

Si à présent, toujours dans le cas n°2, on considère la vibration du miroir A uniquement, cette dernière introduit une variation de chemin optique qui introduit un déphasage de sorte que  $\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + g\Pi_A^w$ . En conséquence, si l'on développe  $P_1$  et  $P_2$  autour de  $\frac{\Delta\varphi}{2} =$

être inexistante pour réaliser une interaction faible correcte. Le propos est donc ici l'existence de l'action retour en elle-même, même si sa contribution est négligeable (l'amplitude de vibration est inférieure à la longueur d'onde du photon).

Par ailleurs, si l'on considère les miroirs vibrants dans les deux branches, on obtient

$$\begin{aligned}
 P_1 &\approx |\psi|^2 \{\sin(g\Pi_A^w + g\Pi_B^w)\}^2 \Big|_{\Pi_A^w = -\Pi_B^w} = 0 \\
 P_2 &\approx |\psi|^2 \{\cos(g\Pi_A^w + g\Pi_B^w)\}^2 \Big|_{\Pi_A^w = -\Pi_B^w} = |\psi|^2 \quad (274)
 \end{aligned}$$

et on s'aperçoit que les perturbations s'annulent (c'est cela que montre [108]) sans besoin de considérer  $g \ll 1$ . En conséquence, lorsque les deux mesures sont accomplies, les actions retours dans chaque branche se compensent de telle manière à ce que les probabilités  $P_1$  et  $P_2$  paraissent inchangées.

Dans [109] de Alonso et Jordan, une expérience à choix retardé est accomplie tout en gardant les interactions aux miroirs. Ils ajoutent un prisme de Dove dans l'une des branches, disons A, de l'interféromètre imbriqué et observent comme rétro effet une déviation spatiale du faisceau dans les branches E et F sans pour autant obtenir des valeurs faibles différentes. Ils se demandent alors si l'ajout du prisme en A après le passage du photon par E conduit le photon à laisser rétroactivement une trace faible en E. Le prisme de Dove a la particularité d'agir sur l'état  $(|A\rangle + |B\rangle + |C\rangle)/\sqrt{3}$  de  $\mathcal{S}$  comme un opérateur identité : les faces entrante et sortante sont inclinées de telle manière à ce que la déviation effective du faisceau à la sortie du prisme soit nulle. Or, les auteurs souhaitent mesurer un rétroeffet sur la trajectoire du photon décrite par la collection des coordonnées  $(x, t)$  et procèdent alors par un léger désalignement du prisme par rapport à l'axe optique du montage en vue d'introduire une interaction non destructive. L'introduction du prisme dévie le faisceau et modifie la trajectoire mais laisse l'état de  $\mathcal{S}$  inchangé (la trajectoire change mais le photon se propage toujours dans les mêmes branches de l'interféromètre). Aussi, ce ne sont pas les valeurs des opérateurs  $\hat{\Pi}_A$ ,  $\hat{\Pi}_B$  et  $\hat{\Pi}_C$  qui changent mais celles de  $\hat{\Pi}_x$  qui évalue la présence du photon en un point donné et non dans une branche. En conséquence, les auteurs observaient un rétroeffet en évaluant  $\hat{\Pi}_x$  en A et B. Remarquons donc que si l'on observe faiblement un certain comportement pour une observable, une modification de ce comportement n'affecte pas forcément le comportement faiblement éva-

lué d'une autre observable. Pour ce cas-ci, c'est facile de concevoir que le photon peut suivre des trajectoires différentes tout en se propageant dans les mêmes branches de l'interféromètre. Nous aborderons cependant au chapitre suivant un cas moins intuitif où les observables de présence et de polarisation sont mesurées dans des branches distinctes d'un interféromètre. Cette possibilité est évoquée en conclusion dans [109] où la difficulté de l'interprétation d'un tel effet est soulignée.

Notons le travail de Griffiths [110] qui analyse la situation physique en terme d'histoires consistantes, ces dernières n'étant malheureusement que définies en terme de mesures projectives. Cela ne nourrit pas la réflexion et fait face à une critique de Vaidman [111].

Un autre commentaire de Bartkiewicz et al [112] montre que les résultats observés sont identiques à ceux de Vaidman par une analyse quantique standard plutôt que par le TSVF et ainsi que par une approche classique. Cela ne donne pas plus d'information. En effet, dans l'expérience de Danan et al [105], les auteurs font précisément l'analogie avec un champ de Maxwell classique et nous avons aussi compris que les interactions ne sont pas si faibles que cela. Finalement, [112] fait lui aussi face à une réponse de Vaidman [113] alors que Bartkiewicz et al continuent la discussion [114]. Un débat similaire oppose Nikolaev [115] (qui donne une description classique de l'expérience) et Vaidman [116].

En conclusion, les vives critiques et incompréhensions se basent sur l'aspect classique de l'expérience. Effectivement, les interactions sont telles qu'il y a une action retour et le montage met en jeu des interférences d'un champ classique. Ainsi, il s'agit d'une expérience d'optique ondulatoire classique à laquelle on applique le formalisme de la mécanique quantique mais sans pour autant donner à une onde classique le statut de superposition d'états quantiques. Naturellement, cela oriente la réflexion générale dont le propos est la trajectoire d'une particule physique finie qui disparaît et réapparaît à des endroits et instants différents ce qui semble invraisemblable.

## 4 Une proposition alternative

### 4.1 Motivation

L'existence de trajectoires discontinues lorsqu'on définit une trajectoire à partir d'une succession de mesures faibles de la position est en fait un résultat attendu, indépendant du schéma spécifique utilisé par Vaidman (voir [117], [90]). De plus, le schéma de Vaidman souffre d'un défaut important mentionné plus haut, à savoir le fait que la fonction d'onde du photon interfère destructivement sur la voie de sortie. Si la fonction d'onde est nulle, un appareil de mesure placé en voie de sortie n'interagira pas avec  $\mathcal{S}$ . Ce point est directement, ou le plus souvent indirectement, à la base des critiques mentionnées plus haut. Notre proposition est basé sur une réalisation du paradoxe des trois boîtes avec une particule de spin 1, déjà présentée dans [118], il ne s'agit donc pas d'un schéma optique.

### 4.2 Interféromètre pour une particule de spin 1

Imaginons un interféromètre dans lequel une particule de spin 1 (un atome par exemple) évolue alternativement dans trois ou deux chemins (représenté en figure 31). On souhaite mesurer la présence d'une particule dans chaque branche et à des temps différents en utilisant la branche comme système (ie le spin) et le profil de la fonction d'onde comme appareil de mesure.

À  $t_i = 0$ , on considère l'état du système  $\{\mathcal{M} + \mathcal{S}\}$  suivant

$$|\psi_i\rangle = |m_z = 0\rangle \otimes |\xi\rangle \quad (275)$$

où  $m_z$  est le nombre azimutal du spin projeté dans la direction  $z$  et où  $\langle x|\xi\rangle$  représente le profil transverse d'une fonction d'onde gaussienne. L'étape de pré-sélection est accomplie par un appareil de Stern-Gerlach qui projette le spin selon une direction arbitraire  $\hat{\alpha}$ . On obtient donc comme état de départ, une superposition des états propres de  $\hat{S}_\alpha$ , notés  $|m_\alpha = 1, 0, -1\rangle$  :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{k=0,1,-1} \langle m_\alpha = k | m_z = 0 \rangle |m_\alpha = k\rangle \otimes |\xi(t)\rangle \\ &= \sum_{k=0,1,-1} d_k(\alpha) |k_\alpha\rangle \otimes |\xi(t)\rangle \quad (276) \end{aligned}$$

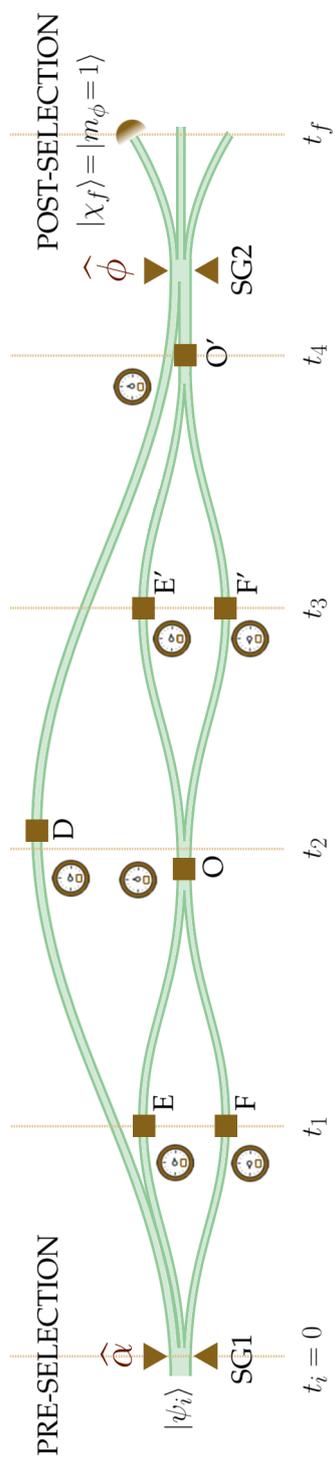


FIGURE 30 – Interféromètre pour une particule de spin 1

où l'on pose  $d_k(\alpha) = \langle m_\alpha = k | m_z = 0 \rangle$  et  $|m_\alpha = k\rangle = |k_\alpha\rangle$  comme déjà établi dans [118].

La composante  $k_\alpha = 1$  suit la branche D alors que les composantes  $k_\alpha = 0, -1$  évoluent tantôt dans des branches distinctes (E/F et E'/F') entre  $t_i$  et  $t_2$  et entre  $t_2$  et  $t_4$ , tantôt dans la même branche (O et O') à  $t_2$  et  $t_4$ .

Enfin, la post-sélection est accomplie en mesurant à nouveau le spin selon une direction  $\hat{\phi}$  où ne sont retenus que les états  $|m_\phi = 1\rangle$ . La direction  $\phi$  n'est pas arbitraire, elle est choisie de telle manière à ce que l'on ait

$$\sum_{k=-1,0} d_k(\alpha) \langle m_\phi = 1 | m_\alpha = k \rangle = \sum_{k=-1,0} d_k(\alpha) \langle 1_\phi | k_\alpha \rangle = 0 \quad (277)$$

Cela donne l'état de post-sélection

$$|\chi_f\rangle = \sum_{k=0,1,-1} \langle m_\alpha = k | m_\phi = 1 \rangle |m_\phi = 1\rangle = \sum_{k=0,1,-1} \langle k_\alpha | 1_\phi \rangle |1_\phi\rangle \quad (278)$$

Considérons une interaction faible en chacun des points  $i$  de la forme  $\hat{H}_{int} = \gamma \hat{\Pi}_i \cdot \hat{P}_x^i$ .

Afin de distinguer chacun des résultats, introduisons des appareils de mesure  $\zeta(x)$  comme

$$\zeta(x) = \zeta(x_E, x_F, x_O, x_D, x_{E'}, x_{F'}) = \zeta_E(x_E) \zeta_F(x_F) \zeta_O(x_O) \zeta_D(x_D) \zeta_{E'}(x_{E'}) \zeta_{F'}(x_{F'}) \quad (279)$$

avec chaque  $P^i$  agissant sur chaque  $\zeta_i(x_i)$ .

L'état final du profil de la fonction d'onde est donné par

$$\zeta'(x) = \langle \chi_f | \hat{U}(t_f, t_4) e^{-ig \hat{\Pi}_{O'} \cdot \hat{P}_x^{O'}} \hat{U}(t_4, t_3) e^{-ig \hat{\Pi}_{E'} \cdot \hat{P}_x^{E'}} e^{-ig \hat{\Pi}_{F'} \cdot \hat{P}_x^{F'}} \hat{U}(t_3, t_2) e^{-ig \hat{\Pi}_O \cdot \hat{P}_x^O} e^{-ig \hat{\Pi}_D \cdot \hat{P}_x^D} \hat{U}(t_2, t_1) e^{-ig \hat{\Pi}_E \cdot \hat{P}_x^E} e^{-ig \hat{\Pi}_F \cdot \hat{P}_x^F} \hat{U}(t_1, t_i) | \psi_i \rangle \zeta(x) \quad (280)$$

Explicitons l'état final de  $\mathcal{M}$  en posant  $d_k(\alpha) \equiv d_k^\alpha$  et en considérant la post-sélection comme accomplie :

$$\begin{aligned} \zeta'(x) = & \left\{ d_{-1}^\alpha \langle 1_\phi | -1_\alpha \rangle + d_0^\alpha \langle 1_\phi | 0_\alpha \rangle + d_1^\alpha \langle 1_\phi | 1_\alpha \rangle \right\} \zeta(x) \\ & - ig d_{-1}^\alpha \langle 1_\phi | -1_\alpha \rangle \hat{P}_x^{F'} \zeta(x) - ig d_0^\alpha \langle 1_\phi | 0_\alpha \rangle \hat{P}_x^{E'} \zeta(x) \\ & - ig d_1^\alpha \langle 1_\phi | 1_\alpha \rangle \hat{P}_x^D \zeta(x) - ig d_0^\alpha \langle 1_\phi | 0_\alpha \rangle \hat{P}_x^E \zeta(x) \\ & - ig (d_{-1}^\alpha \langle 1_\phi | -1_\alpha \rangle + d_0^\alpha \langle 1_\phi | 0_\alpha \rangle) \hat{P}_x^{O'} \zeta(x) \\ & - ig (d_{-1}^\alpha \langle 1_\phi | -1_\alpha \rangle + d_0^\alpha \langle 1_\phi | 0_\alpha \rangle) \hat{P}_x^O \zeta(x) \\ & - ig d_{-1}^\alpha \langle 1_\phi | -1_\alpha \rangle \hat{P}_x^F \zeta(x) \end{aligned} \quad (281)$$

où chaque coordonnées de  $\xi(x)$  est translatée de quantités proportionnelles aux valeurs faibles suivantes

$$\begin{aligned}\Pi_{F/F'}^w &= \frac{d_{-1}^\alpha \langle 1_\phi | -1_\alpha \rangle}{d_{-1}^\alpha \langle 1_\phi | -1_\alpha \rangle + d_0^\alpha \langle 1_\phi | 0_\alpha \rangle + d_1^\alpha \langle 1_\phi | 1_\alpha \rangle} \\ &= \frac{\langle \chi_f | \widehat{\Pi}_{F/F'} | \psi_i \rangle}{\langle \chi_f | \psi_i \rangle}\end{aligned}\quad (282)$$

$$\begin{aligned}\Pi_{E/E'}^w &= \frac{d_0^\alpha \langle 1_\phi | 0_\alpha \rangle}{d_{-1}^\alpha \langle 1_\phi | -1_\alpha \rangle + d_0^\alpha \langle 1_\phi | 0_\alpha \rangle + d_1^\alpha \langle 1_\phi | 1_\alpha \rangle} \\ &= \frac{\langle \chi_f | \widehat{\Pi}_{E/E'} | \psi_i \rangle}{\langle \chi_f | \psi_i \rangle}\end{aligned}\quad (283)$$

$$\begin{aligned}\Pi_{O/O'}^w &= \frac{d_{-1}^\alpha \langle 1_\phi | -1_\alpha \rangle + d_0^\alpha \langle 1_\phi | 0_\alpha \rangle}{d_{-1}^\alpha \langle 1_\phi | -1_\alpha \rangle + d_0^\alpha \langle 1_\phi | 0_\alpha \rangle + d_1^\alpha \langle 1_\phi | 1_\alpha \rangle} \\ &= \frac{\langle \chi_f | \widehat{\Pi}_{O/O'} | \psi_i \rangle}{\langle \chi_f | \psi_i \rangle}\end{aligned}\quad (284)$$

$$\begin{aligned}\Pi_D^w &= \frac{d_1^\alpha \langle 1_\phi | 1_\alpha \rangle}{d_{-1}^\alpha \langle 1_\phi | -1_\alpha \rangle + d_0^\alpha \langle 1_\phi | 0_\alpha \rangle + d_1^\alpha \langle 1_\phi | 1_\alpha \rangle} \\ &= \frac{\langle \chi_f | \widehat{\Pi}_D | \psi_i \rangle}{\langle \chi_f | \psi_i \rangle}\end{aligned}\quad (285)$$

Pour des directions  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\phi}$  bien choisies, on impose

$$\text{à } t_1 \rightarrow \Pi_E^w = 1 \quad \Pi_F^w = -1 \quad \Pi_D^w = 1 \quad (286)$$

$$\text{à } t_2 \rightarrow \Pi_O^w = 0 \quad \Pi_D^w = 1 \quad (287)$$

$$\text{à } t_3 \rightarrow \Pi_{E'}^w = 1 \quad \Pi_{F'}^w = -1 \quad \Pi_D^w = 1 \quad (288)$$

$$\text{à } t_4 \rightarrow \Pi_{O'}^w = 0 \quad \Pi_D^w = 1 \quad (289)$$

et cela reproduit la situation paradoxale où une particule quantique semble avoir des trajectoires discontinues du point de vue de la valeur faible de la présence.

### 4.3 Interprétation

Notons que l'illustration reproduit exactement les mêmes résultats que le paradoxe des trois boîtes. Or ici, nous avons choisi de mettre en valeur

l'annulation de la valeur faible par l'interférence des branches E et F (E' et F'). Cela nous a permis d'obtenir une valeur faible nulle sans pour autant que la fonction d'onde interfère destructivement en O et O' comme dans la proposition de Vaidman [102]. Ainsi, on observe ici

$$\Pi_E^w + \Pi_F^w = \Pi_O^w = \Pi_{F'}^w + \Pi_{E'}^w = \Pi_{O'}^w = 0 \quad (290)$$

mais si les branches D et F (D et F') étaient ramifiées, on observerait l'annulation de  $\Pi_{F'}^w + \Pi_D^w$ .

On peut donc conclure de manière habituelle sur l'impossibilité d'observation jointe de ces propriétés par mesure forte.

#### 4.4 Validité du critère de détermination du passé d'une particule

La valeur faible est une signature de la superposition d'états imposée par les états de pré/post-sélection. En ce sens, la connaissance des conditions limites détermine complètement la valeur faible qui est conservée tout le long de la transition.

Dans ce cadre, seul le succès de la transition permet de conclure d'une part sur ce qui se passerait si l'on effectuait une mesure forte hypothétique, et d'autre part sur la configuration de  $\mathcal{S}$  en terme de superposition d'état au cours de la transition accessible par mesure faible. En conséquence, l'image de la particule qui disparaît et réapparaît doit s'interpréter de manière ondulatoire et non locale puisque c'est une conséquence de la "règle de conservation" de la valeur faible et des amplitudes de probabilités dans un interféromètre.

Ce n'est donc pas une trajectoire à proprement parlé qui est mesurée. Pourtant, une observable est évaluée à différents endroits d'un interféromètre et à des temps successifs dans le référentiel du laboratoire. La collection des résultats permet d'établir une trajectoire de la propriété mesurée qui n'a pas forcément à voir avec la trajectoire littérale de la particule. Effectivement, au paragraphe 3.4, Alonso et Jordan [109] observent un changement de la valeur faible de  $\hat{\Pi}_x$  sans changement de la valeur faible de la présence dans une branche donnée.

Lorsque l'observable mesurée dépend du temps, la valeur faible dépendra aussi du temps. Cette fois, c'est une évolution de la propriété qui est mesurée mais toujours en respect aux conditions limites. Le terme de trajectoire pourrait alors convenir mais il s'agit de le définir sans ambiguïté :

des mesures successives d'une observable  $\widehat{O}(t)$  permettent d'évaluer une valeur faible paramétrée par  $t$ , mais constamment établie par les états de pré/post-sélections  $\forall t$ . En ce sens, la mesure à des temps différents de l'observable permet d'introduire une dépendance en temps dans l'amplitude de probabilité observée. Cependant, dans le cas d'une évolution unitaire, l'amplitude obéit aux mêmes "lois de conservation" qui sont vérifiées à chaque pas de temps et les trajectoires observées doivent s'interpréter de manière ondulatoire également.

D'ailleurs, le travail [100] sur lequel s'appuie ce chapitre fait l'objet d'une critique de Sokolovski [119] dont l'argumentation est basée sur le statut d'une amplitude de probabilité, et qui s'appuie sur une première prise de position [24]. Une réponse est aussi disponible [101].

Il considère une transition entre les états de pré- post-sélections  $|\psi_i\rangle$  et  $|\psi_f\rangle$  pouvant s'opérer par  $N$  chemins alternatifs. L'amplitude de probabilité d'atteindre  $|\psi_f\rangle$  en partant de  $|\psi_i\rangle$  tout en passant par le chemin  $j$  est notée  $A_j^{f\leftarrow i}$ . En ces termes, le point de vue de Sokolovski est que la transition entre  $|\psi_i\rangle$  et  $|\psi_f\rangle$  est décrite par des amplitudes de probabilité associées à chaque chemin ou à des groupes de chemins, mais le fait qu'elles soient accessibles par mesure faible ne change pas le fait qu'une amplitude de probabilité n'est pas associable à un évènement accompli. Il se rapproche alors de la mesure projective usuelle en physique quantique de la manière suivante : les  $N$  chemins possibles, ou les groupes de chemins possibles, entre  $|\psi_i\rangle$  et  $|\psi_f\rangle$  sont qualifiés de "réels" ou de "virtuels" selon que la présence de la particule est sondée ou non par mesure forte sur le chemin ou sur le groupe de chemins considéré. En conséquence, le passé d'une particule ne serait sondable par l'examen des chemins réels uniquement.

Plus précisément, sur la figure 31, les trois chemins sont virtuels : aucune mesure forte n'est implémentée et la transition est décrite par les amplitudes  $A_1^{f\leftarrow i}$ ,  $A_2^{f\leftarrow i}$  et  $A_3^{f\leftarrow i}$ .

Si la particule est détectée par mesure forte sur le chemin 1 par exemple, alors le chemin devient réelle et on peut affirmer qu'elle a emprunté le chemin 1 entre  $|\psi_i\rangle$  et  $|\psi_f\rangle$ . Si en revanche sa présence est sondée sur le groupe de chemins  $\{2 + 3\}$ , ce chemin devient réel et puisque la cohérence entre les chemins 2 et 3 est préservée, ils restent individuellement descriptibles en terme de  $A_2^{f\leftarrow i}$  et  $A_3^{f\leftarrow i}$ . En conséquence,  $\{2 + 3\}$  est réel, 2 et 3 sont virtuels, et le passé de la particule n'est pas accessible de manière exclusive en terme du chemin 2 ou du chemin 3. L'idée de trajectoire(s) réelle(s)

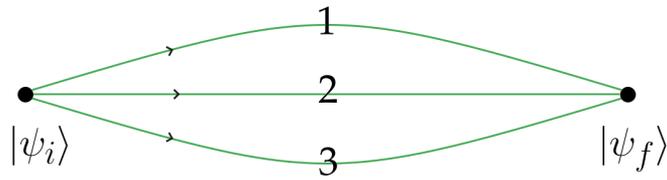


FIGURE 31 – Interféromètre à  $N = 3$  chemins

suivies par la particule et accessibles par mesure faible est ainsi exclue. En conclusion, Sokolovski recentre le débat sur ce qui peut être affirmé ou non à partir de l'examen d'une amplitude de probabilité, accessible par mesure faible, tout en prenant une position qui s'inscrit dans la limite des postulats de la physique quantique, point de vue aussi soutenu par Englert et al [120].

Or, notre point de vue n'est pas bien différent à ceci près que nous suggérons de considérer une superposition d'états au sens littéral puisque c'est cet objet qui est sondé : la valeur faible associée à un chemin donné est simultanément mesurable avec une autre valeur faible associée à un autre chemin, pour un seul processus de pré/post-sélection, et pourvu que l'on dispose d'assez de degrés de liberté jouant le rôle de  $\mathcal{M}$  pour décoder les deux résultats. En conséquence, nous considérons que nous pouvons tout de même inférer le comportement d'une propriété au regard d'une superposition d'états lorsqu'elle est fixée sans ambiguïté par des états de pré/post-sélection, tout adoptant le point de vue d'une description ondulatoire et non locale en accord avec la physique quantique. Aussi, le fait que la valeur faible soit nulle à certains endroits d'un interféromètre exprime une absence de corrélation entre les états de pré et post-sélection sur la branche (ou le groupe de branches) considérée(s) comme argumenté en section 2. C'est d'ailleurs ce que l'approche TSVF permet de clarifier : les seuls endroits où la valeur faible est non nulle sont ceux où les ondes passé/futures se recouvrent. Ce recouvrement peut adopter différentes configurations selon la propriété observée comme nous le verrons au dernier chapitre.

## 5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons analysé les propriétés d'une valeur faible nulle dans le contexte d'une reconstitution du passé d'une particule à partir

d'une succession d'interactions avec des appareils de mesure faiblement couplés. Dans un tel processus, une propriété peut prendre des valeurs discontinues tant qu'elle obéit aux conditions fixées par les états de pré/post-sélection. Ce caractère discontinu des valeurs faibles rend alors compte de l'aspect ondulatoire de  $\mathcal{S}$ , ie d'une superposition d'état, qui se manifeste finalement comme phénomène physique mesurable.



# IV Le Chat du Cheshire

## 1 Introduction

L'objet du travail détaillé dans ce chapitre est celui d'une revue de la littérature concernant le Chat du Cheshire quantique, effet proposé par Aharonov et al [117],[20], et qui a fait l'objet de tentatives de réalisations expérimentales [4], [121]. Le contenu s'appuie sur [122].

D'abord, nous décrirons le phénomène en lui même, puis nous présenterons en détail sa réalisation expérimentale. Ensuite, nous aborderons les commentaires et critiques tout en apportant notre point de vue.

## 2 Le chat du Cheshire quantique

La chat du Cheshire quantique est un phénomène introduit par Aharonov et al [20],[117]. Il est particulièrement déroutant parce qu'il considère un photon dans un interféromètre de Mach-Zehnder où la mesure faible de sa présence n'est pas nulle dans une branche uniquement alors que la mesure faible de la polarisation n'est pas nulle dans l'autre branche uniquement. Ainsi, la polarisation et la présence du photon ne sont mesurables que dans des branches séparées : tout se passe comme si la polarisation était séparée du photon pour des pré/post-sélections particulières.

Dans le roman d' "Alice aux Pays des Merveilles" de Lewis Carroll, la présence du chat se manifeste à Alice alternativement par son sourire et par le reste de son corps. Par analogie, la polarisation est symbolisée par le sourire qui apparaît désolidarisée de la particule elle même symbolisée par le corps du chat.

Ce phénomène surprenant est accompli en réalisant une pré-sélection de la forme

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|1\rangle + |2\rangle)|H\rangle \quad (291)$$



FIGURE 32 – Chat du Cheshire (tirée de l’adaptation du livre en long métrage d’animation réalisé par Tim Burton)

où  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  sont les deux sortie de la première lame semi-réfléchissante alors que  $|H\rangle$  symbolise une polarisation horizontale, et une post-sélection de la forme

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|H\rangle + |2\rangle|V\rangle) \quad (292)$$

où  $|V\rangle$  est un état de polarisation verticale.

De tels états sont pré- et post-sélectionnés dans le montage représenté en figure 33. Une lame demi-onde ("half wave plate" → HWP) placée sur le

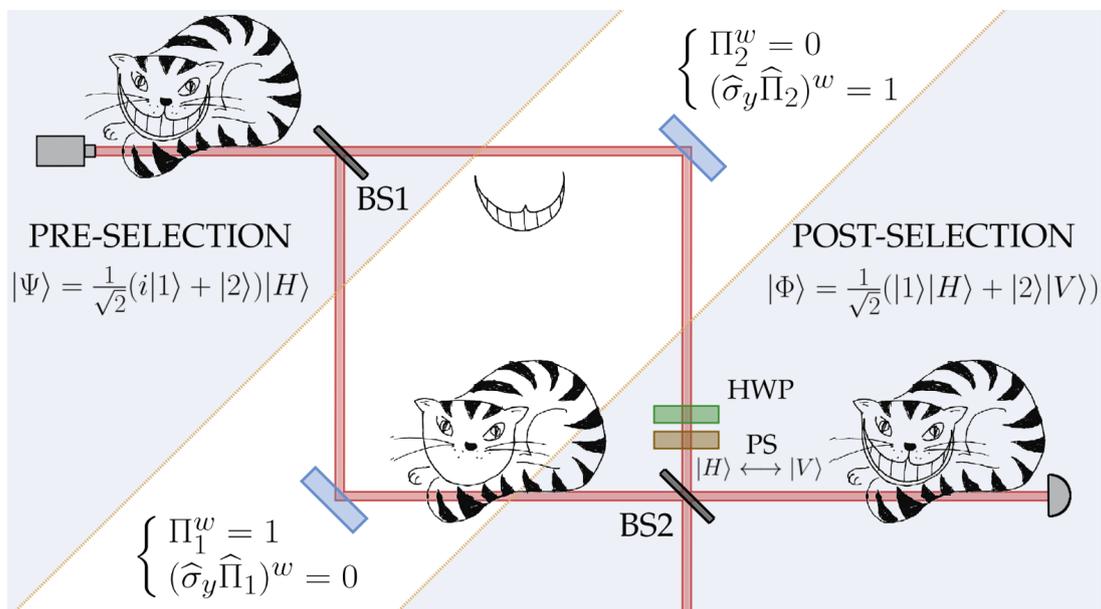


FIGURE 33 – Réalisation du chat du Cheshire (dessin du chat tiré de [4])  
 chemin 2 permet de post-sélectionner des photons polarisés verticalement

venant de la branche 2 et un déphaseur ("phase shifter"  $\rightarrow$  PS) permet de contrôler la phase relative entre les deux chemins (notamment la phase supplémentaire introduite par la lame demi-onde) et la ramène à 0 pour une post-sélection réussie.

Imaginons une interaction faible dans chaque branche. Les mesures accomplies sont celles des projecteurs  $\hat{\Pi}_1$  et  $\hat{\Pi}_2$  pour la présence de la particule dans les branches 1 et 2, alors que sa polarisation circulaire  $\hat{\sigma}_y$  (on prendra le formalisme de Jones dans lequel la polarisation s'exprime à la manière d'un spin) est mesurée dans chaque branche par l'évaluation de  $\hat{\sigma}_y \hat{\Pi}_1$  et  $\hat{\sigma}_y \hat{\Pi}_2$ , avec  $\hat{\sigma}_y = |\circ\rangle\langle\circ| - |\ominus\rangle\langle\ominus|$  (où  $|\circ\rangle = (|H\rangle + i|V\rangle)/\sqrt{2}$  et  $|\ominus\rangle = (|H\rangle - i|V\rangle)/\sqrt{2}$ ). Posons l'état  $|\varphi\rangle$  de l'appareil de mesure  $\mathcal{M}$  et considérons le profil transverse à la direction de propagation de la fonction d'onde  $\varphi(x, y) = \xi(x)\eta(y)$  où nous nous plaçons dans le cas idéal lorsque  $\xi$  et  $\eta$  sont indépendants. Le résultat de la mesure de la présence du photon sera dans le cas d'une translation de  $\xi$  suivant  $x$  alors que celui de sa polarisation sera lu par translation de  $\eta$  selon  $y$ . En conséquence, l'hamiltonien d'interaction est donné par

$$\hat{H}_{int} = \gamma \hat{\Pi}_j \cdot \hat{P}_x + \gamma \hat{\sigma}_y \hat{\Pi}_k \cdot \hat{P}_y \quad (293)$$

où  $j = 1, 2$  et  $k = 1, 2$  et avec  $g = \hbar^{-1} \int \gamma dt$ . Ainsi, l'état  $\varphi'(x, y)$  de  $\mathcal{M}$  est donné par

$$\varphi'(x, y) = \langle \Phi | e^{-ig \hat{\Pi}_j \cdot \hat{P}_x} e^{-ig \hat{\sigma}_y \hat{\Pi}_k \cdot \hat{P}_y} | \Psi \rangle \xi(x) \eta(y) \quad (294)$$

$$= \langle \Phi | \Psi \rangle \left( 1 - ig (\Pi_j)^w \cdot \hat{P}_x - ig (\sigma_y \Pi_k)^w \cdot \hat{P}_y \right) \xi(x) \eta(y) \quad (295)$$

$$= \langle \Phi | \Psi \rangle \xi(x - g (\Pi_j)^w) \eta(y - g (\sigma_y \Pi_k)^w) \quad (296)$$

$$= \varphi(x - g (\Pi_j)^w, y - g (\sigma_y \Pi_k)^w) \quad (297)$$

où

$$(\Pi_1)^w = 1 \quad (\sigma_y \Pi_1)^w = 0 \quad (298)$$

$$(\Pi_2)^w = 0 \quad (\sigma_y \Pi_2)^w = 1 \quad (299)$$

En conséquence et du point de vue d'une mesure faible, la particule apparaît complètement désolidarisée de sa polarisation et c'est ce qui définit le phénomène du chat du Cheshire : du point de vue de la mesure faible, la présence de la particule n'est mesurable que sur un chemin donné alors que sa polarisation apparaît non nulle sur l'autre chemin uniquement.

En posant  $\mathcal{I}(x, y) = |\varphi(x, y)|^2$  et  $\mathcal{I}'(x, y) = |\varphi'(x, y)|^2$ , on observe un déplacement selon  $x$  et  $y$  pour  $j = 1$  et  $k = 2$  uniquement du profil de  $\mathcal{I}(x, y)$

$$\frac{\mathcal{I}'}{\mathcal{I}} = 1 - 2g(\Pi_j)^w \partial_x \varphi(x, y) - 2g(\sigma_z \Pi_k)^w \partial_y \varphi(x, y) \quad (300)$$

Notons que [123] propose un montage dans lequel ce sont les valeurs faibles de toutes les composantes de  $\vec{\sigma}$  qui s'annulent en mettant en jeu des photons intriqués.

### 3 Tentatives de réalisations expérimentales

#### 3.1 Interféromètre à neutrons

Une tentative de réalisation expérimentale est accomplie par Denkmayr et al [4]. Les auteurs considèrent un neutron pré et post-sélectionné dans les états suivants

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle |\uparrow_x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |2\rangle |\downarrow_x\rangle \quad |\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow_x\rangle (|1\rangle + |2\rangle) \quad (301)$$

où  $|\uparrow_x \downarrow_x\rangle$  sont les états de spin du neutron selon  $x$ . Les propriétés faiblement mesurées sont représentées par  $\hat{\Pi}_j$  et  $\hat{\Pi}_k \hat{\sigma}_z$  où  $j = 1, 2$  et  $k = 1, 2$  et où  $\hat{\sigma}_z = |\downarrow_z\rangle \langle \downarrow_z| - |\uparrow_z\rangle \langle \uparrow_z|$ .

L'objectif est alors de mesurer les valeurs faibles suivantes

$$(\Pi_1)^w = 0 \quad (\sigma_z \Pi_1)^w = 1 \quad (302)$$

$$(\Pi_2)^w = 1 \quad (\sigma_z \Pi_2)^w = 0 \quad (303)$$

(attention, les chemins sont inversés en comparaison à la proposition originale). L'expérience ne respecte pas le protocole d'une mesure faible car les valeurs faibles sont indirectement déduites de mesures fortes. Nous resterons fidèles à l'expérience réalisée dans [4] pour cette section; elle sera commentée dans la suite.

##### 3.1.1 Montage

Le montage considéré est représenté en figure 34 qui est directement tirée de [4]. Le faisceau incident de neutrons passe par un prisme magnétique biréfringent (P) qui filtre les neutrons de spin orienté selon  $+z$  uniquement, et un champ magnétique ("magnetic guide field"  $\rightarrow$  GF) est imposé sur tout le montage pour conserver une orientation fixe du spin entre

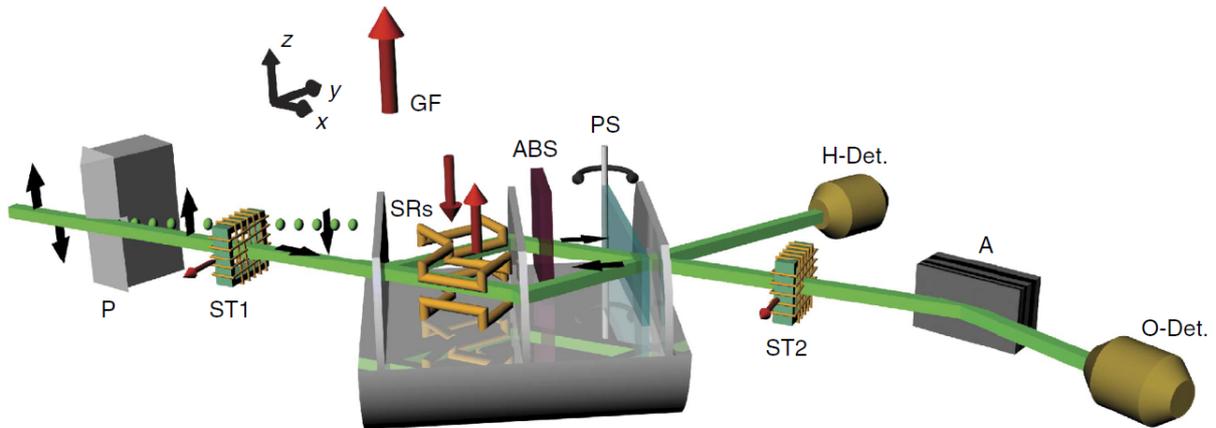


FIGURE 34 – Montage

chaque étape de l'évolution du neutron. Ensuite, une première rotation du spin de  $\pi/2$  est accomplie ("spin turner"  $\rightarrow$  ST1) dans le plan  $xy$  de telle sorte que les neutrons entrant dans l'interféromètre aient un spin aligné selon  $+x$ . Une fois dans l'interféromètre, le spin est orienté selon  $-x$  dans l'une des branches par un "spin rotator" (SRs). A ce stade, la pré-sélection est accomplie.

La post-sélection est réalisée de la manière suivante. Avant de sortir de l'interféromètre, le neutron est soumis à un déphaseur (PS) qui permet de contrôler la phase relative  $\chi$  entre les deux chemins. Ensuite, les faisceaux à la sortie de l'interféromètre sont collectés par les détecteurs H et O. Le succès de la post-sélection est symbolisé par un "clic" au détecteur O qui ne collecte que des neutrons de spin orientés selon  $+x$ . Cela est accompli en effectuant une rotation du spin avant la détection s'il est aligné selon  $-x$  (ST2) alors qu'un analyseur de spin (A) confirme l'alignement du spin du neutron à la post-sélection.

La mesure de la présence du neutron dans chaque branche est accomplie par l'introduction d'un absorbeur (ABS) alors que celle du spin est effectuée par les SRs.

### 3.1.2 Mesure de la présence du neutron

L'hamiltonien d'interaction associé à l'introduction d'un absorbeur sur le chemin  $j$  est de la forme

$$\hat{H}_{int} = -i\mu(r)\hat{\Pi}_j \quad (304)$$

où  $j = 1, 2$ ,  $\mu(r)$  symbolise la densité linéique d'absorption de l'absorbeur. En posant le coefficient d'absorption  $M_j = \int \mu(r) dr$  sur le chemin  $j$ , l'état final du système est donné par

$$\langle \psi_f | e^{-M \hat{\Pi}_j} | \psi_i \rangle \approx \langle \psi_f | (1 - M \hat{\Pi}_j) | \psi_i \rangle \approx \langle \psi_f | \psi_i \rangle (1 - M \hat{\Pi}_j^w) \quad (305)$$

Il vient l'intensité observée au détecteur O

$$\mathcal{I}_{obs} = |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 (1 - 2M \hat{\Pi}_j^w) \quad (306)$$

En conséquence, lorsque  $\hat{\Pi}_j^w = 0/1$ , on observe une diminution ou non de  $\mathcal{I}_{obs}$  de  $2M$  où  $M = 20.1$  pour le montage en question.

Les résultats sont récapitulés sur la figure 35, extraite de [4]. A gauche, l'absorbeur est placé sur le chemin 1, à droite sur le chemin 2, et le montage sans interaction est représenté au milieu. Chaque montage est accompagné du profil de  $\mathcal{I}_{obs}$  au détecteur en fonction de la différence de phase  $\chi$  entre les deux chemins. La boîte "SA" symbolise la réunion du ST2 et de l'analyseur de spin, alors que les deux boîtes marrons représentent les rotateurs de spin (SRs). Enfin,  $I_O$  symbolise l'intensité collectée par le détecteur O.

Lorsque l'absorbeur est placé sur le chemin 2, on observe une diminution de l'intensité au détecteur, alors qu'aucun changement n'est observable lorsque l'absorbeur est placé sur le chemin 1. Les auteurs concluent à partir de l'équation (306) que  $\hat{\Pi}_1^w = 0$  et  $\hat{\Pi}_2^w = 1$  : si l'absorbeur n'a eu aucun effet sur l'intensité finale dans un chemin donné, alors le neutron n'est pas dans la branche considérée au cours de la transition (et inversement pour l'observation d'une variation de  $\mathcal{I}_{obs}$ ).

### 3.1.3 Mesure du spin

La mesure du spin est accomplie en imposant successivement un champ magnétique orienté selon une direction perpendiculaire au montage z dans chacune des branches. Une telle interaction est gouvernée par l'hamiltonien

$$\hat{H}_{int} = -\frac{\gamma}{2} \hat{\sigma}_z \hat{\Pi}_j B_z \quad (307)$$

où  $\gamma$  est le facteur gyromagnétique et où le champ extérieur  $B_z$  génère une rotation  $\hat{\sigma}_z$  du spin du neutron.

En définissant par  $\alpha = 20^\circ$  l'angle de rotation due à la précession de Lar-

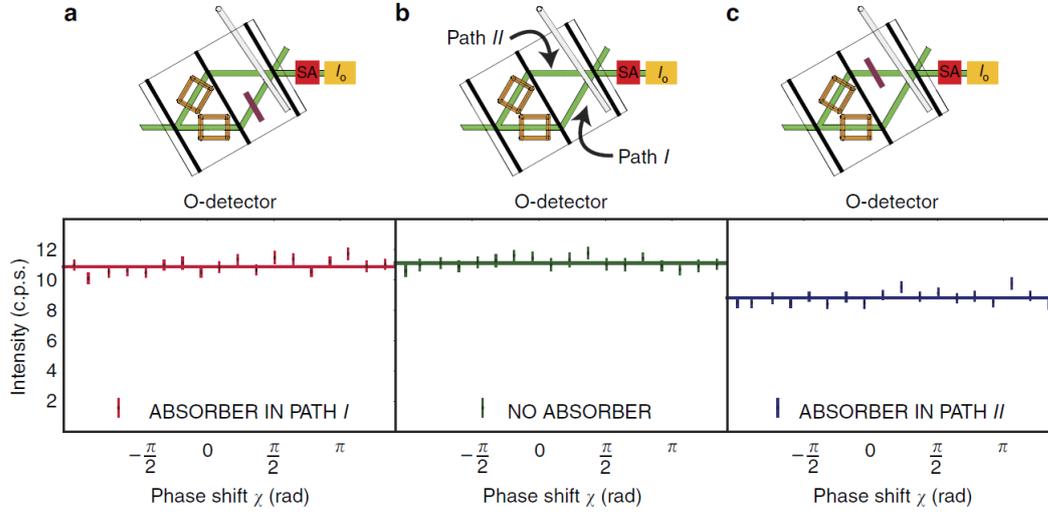


FIGURE 35 – Mesure de  $\Pi_1^w$  et  $\Pi_2^w$

mor, on obtient l'état final du système suivant

$$\langle \psi_f | e^{i \frac{\alpha}{2} \hat{\sigma}_z \hat{\Pi}_j} | \psi_i \rangle = \langle \psi_f | \cos\left(\frac{\alpha}{2} \hat{\Pi}_j\right) + i \hat{\sigma}_z \sin\left(\frac{\alpha}{2} \hat{\Pi}_j\right) | \psi_i \rangle \quad (308)$$

$$\stackrel{\alpha \ll 1}{=} \langle \psi_f | \psi_i \rangle + \frac{\alpha^2}{4} \langle \psi_f | \hat{\Pi}_j^2 | \psi_i \rangle + i \frac{\alpha}{2} \langle \psi_f | \hat{\sigma}_z \hat{\Pi}_j | \psi_i \rangle \quad (309)$$

$$= \langle \psi_f | \psi_i \rangle \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4} \Pi_j^w + i \frac{\alpha}{2} (\hat{\sigma}_z \hat{\Pi}_j)^w \right) \quad (310)$$

où nous sommes allés jusqu'au deuxième ordre dans le développement du cosinus. L'intensité associée est [4]

$$\mathcal{I}_{obs} = |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{4} \Pi_j^w + \frac{\alpha^2}{4} |(\hat{\sigma}_z \hat{\Pi}_j)^w|^2 \right) \quad (311)$$

Le développement de l'interaction donne deux termes, l'un est proportionnel à  $(\hat{\sigma}_z \hat{\Pi}_j)^w$  alors que l'autre est proportionnel à  $\Pi_j^w$ . Effectivement, la partie en cosinus développée donne une interaction proportionnelle à  $\Pi_j$  et l'interaction entre le champ magnétique et le spin fait que la valeur faible du projecteur est mesurée en même temps que celle du spin. L'inférence de la valeur faible du spin est accomplie en retranchant celle du projecteur, qui est elle même connue de l'expérience antérieure.

Les résultats sont à nouveau récapitulés sur une illustration tirée de [4] en figure 36 et qui s'organise de la même manière que la figure précédente. On observe cette fois une variation de l'intensité due au déphasage entre

les deux chemins lorsque l'interaction est accomplie dans les deux chemins, et la variation est de bien plus grande amplitude dans le cas d'une mesure au chemin 1.

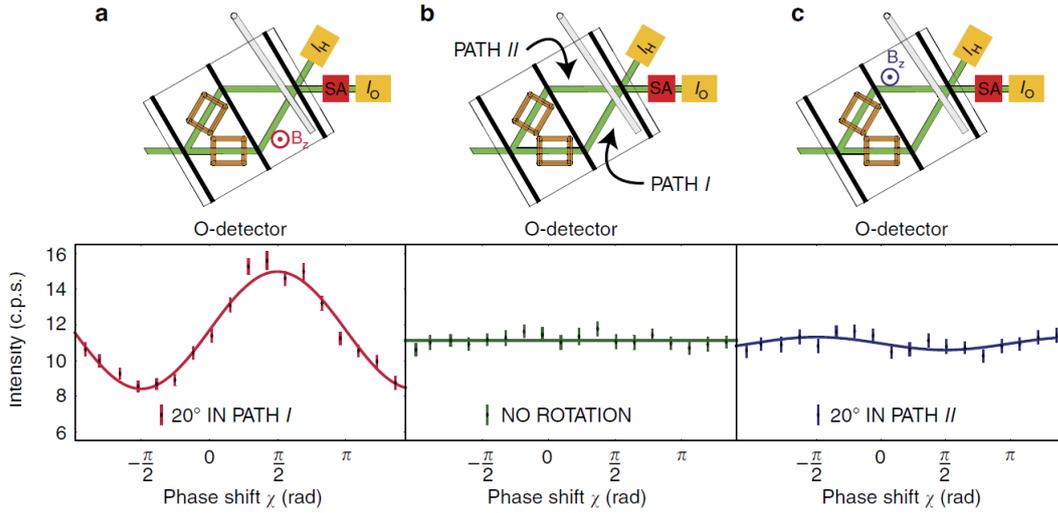


FIGURE 36 – Mesure de  $(\sigma_z \Pi_1)^w$  et  $(\sigma_z \Pi_2)^w$

Rappelons que sur le chemin 2, la valeur faible  $\Pi_2^w = 0$  est portée par le cosinus alors que  $(\sigma_z \Pi_2)^w = 1$  est portée par le sinus. Ainsi, l'interfrange observée sur le profil de l'intensité en O n'est due qu'à  $(\sigma_z \Pi_2)^w$  : une interaction accomplie sur la branche 2 génère un déphasage proportionnelle à  $(\sigma_z \Pi_2)^w$ . En revanche, sur le chemin 1, c'est  $\Pi_1^w = 1$  et  $(\sigma_z \Pi_2)^w = 0$ . En conséquence, les variations de faible amplitude observées dans le troisième cas sont dues à la variation au second ordre du cosinus, qui introduit un déphasage proportionnel à  $\Pi_1^w$ .

Finalement, l'application d'un champ dans chacune des branches ne génère une réponse proportionnelle à  $(\sigma_z \Pi_j)^w$  lorsque  $j = 2$  uniquement : les auteurs concluent que les résultats expérimentaux confirment la détection du chat du Cheshire.

### 3.2 Réalisation expérimentale avec des photons uniques

La réalisation expérimentale avec des neutrons a été suivie par une expérience en tout point analogue avec des photons [121] accomplie par Ashby et al. Nous la présentons ici, sans autant entrer dans les détails que la précédente réalisation.

L'expérience met en jeu des photons uniques dans un interféromètre de Sagnac dans lequel les valeurs faibles sont également déduites indirectement de mesures fortes. Les états de pré/post-sélection du système  $\mathcal{S}$  sont donnés respectivement par

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|V\rangle + e^{i\varphi}|2\rangle|H\rangle) \quad |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)|H\rangle \quad (312)$$

où  $\varphi$  est la différence de phase entre les chemins 1 et 2, ajustable par les expérimentateurs. Les valeurs faibles attendues sont celles de la présence du photon dans une branche donnée et celle de la polarisation circulaire dans une branche donnée qui sont

$$(\Pi_1)_w = 0 \quad (\Pi_2)_w = 1 \quad (\sigma_{circ}\Pi_1)_w = -ie^{-i\varphi} \quad (\sigma_{circ}\Pi_2)_w = 0 \quad (313)$$

Les interactions faibles sont réalisées d'une part, au moyen d'un absorbeur à haute transmission pour la mesure de présence, et d'autre part par l'introduction d'une lame demi-onde pour la mesure de la polarisation. Le déphasage introduit par cette dernière est prévenu par les expérimentateurs par l'intermédiaire du contrôle de  $\varphi$ .

### 3.2.1 Mesure de la polarisation

La polarisation circulaire représentée par  $\hat{\sigma}_{circ}\hat{\Pi}_k = (| \circ \rangle \langle \circ | - | \ominus \rangle \langle \ominus |)|k\rangle\langle k|$  est mesurée sur le chemin  $k = 1, 2$ . Dans la base  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ ,  $\hat{\sigma}_{circ} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ .  $\hat{\sigma}_{circ}$  génère une rotation du système d'un petit angle  $\theta$  de sorte que le nouvel état de  $\mathcal{S}$  soit donné par

$$|\psi'\rangle = e^{-i\theta\hat{\sigma}_{circ}\hat{\Pi}_k}|\psi_i\rangle \approx \left(1 - i\theta\hat{\sigma}_{circ}\hat{\Pi}_k - \frac{\theta^2}{2}\hat{\Pi}_k\right)|\psi\rangle \quad (314)$$

et la post-sélection de  $\mathcal{S}$  est concluante avec une probabilité

$$|\langle\phi|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|\psi\rangle|^2(1 + 2\theta\Im((\sigma_{circ}\Pi_k)_w) - \theta^2\Re((\Pi_k)_w) + \theta^2|(\sigma_{circ}\Pi_k)_w|^2) \quad (315)$$

### 3.2.2 Mesure de la présence

L'absorbeur de haute transmission  $T$  agit sur  $\mathcal{S}$  de telle sorte que son état après l'interaction sur le chemin  $k$  soit donné par ( $N$  est un facteur de normalisation)

$$|\psi'\rangle = N(1 - (1 - \sqrt{T})\hat{\Pi}_k)|\psi\rangle \quad (316)$$

d'où la nouvelle probabilité de succès de la post-sélection

$$|\langle \phi | \psi' \rangle|^2 = |\langle \phi | \psi \rangle|^2 (1 - 2(1 - \sqrt{T})(\Pi_k)_w) \quad (317)$$

### 3.2.3 Conclusion de l'expérience

De la même manière que l'expérience avec des neutrons, les valeurs faibles sont déduites de l'effet de l'interaction sur la probabilité de succès de la post-sélection à partir des équations (315) et (317). Les auteurs calculent la variation de probabilité de post-sélection  $\Delta p = (|\langle \phi | \psi \rangle|^2 - |\langle \phi | \psi' \rangle|^2) / |\langle \phi | \psi \rangle|^2$  pour le système et en déduisent les valeurs faibles. Finalement, des variations d'intensité équivalentes à l'expérience à neutrons sont observées.

## 3.3 Critiques de l'expérience

Les réalisations expérimentales ont suscité de nombreuses critiques dans la littérature, soit au niveau de la manipulation, soit au niveau du schéma théorique idéal [117] mais cependant sans distinction apparente entre ces deux aspects dans la plupart des cas. Effectivement, Correa et al [1], Michielsen et al [3] et Atherton et al [2] admettent la validité de la manipulation présentée ci-dessus pour critiquer le phénomène en lui-même. Il y a ainsi quelques confusions dans la majeure partie des commentaires et nous les récapitulons ici, tout en apportant notre point de vue. Ce qui suit est tiré de [122]. Nous nous référerons à l'expérience à neutrons comme sujet des commentaires présents dans la littérature bien que, du fait d'une procédure de mesure faible identique, l'expérience à photons uniques supporte tout autant des commentaires et remarques similaires.

Dans ce paragraphe, nous nous focalisons sur les aspects du montage [4] qui permettent l'observation ou non des degrés de liberté de polarisation et de présence.

Pour plus de clarté, séparons les observations du spin de celle de la présence du neutron dans une branche donnée. Une caractéristique commune aux mesures faibles du spin et de la présence émerge tout de même, c'est le fait que chaque processus ne met uniquement en jeu que le degré de liberté faiblement mesuré, sans aucune introduction d'un degré supplémentaire jouant le rôle de  $\mathcal{M}$ . Les interactions agissent directement sur le système et on observe la réponse en mesurant à nouveau le système. Ainsi, les auteurs ne mesurent qu'une variation de l'intensité de  $\mathcal{S}$  associée à la

perturbation introduite plus tôt sur  $\mathcal{S}$  au cours de la transition. Cet aspect dans la procédure est identifié par les auteurs des deux expériences [121] et [4] sans être développé.

### 3.3.1 Présence du neutron

La mesure faible du neutron est accomplie en insérant un absorbeur. Il s'agit d'une interaction non unitaire qui modifie la probabilité de transition et qui agit directement sur le système. L'observation de la diminution de l'intensité à l'écran est due au fait que l'absorbeur bloque certains neutrons qui ne peuvent pas atteindre la post-sélection. Ces neutrons ne sont précisément pas mesurés à la post-sélection, d'où la variation d'intensité. La quantité mesurée n'est donc pas une valeur faible mais simplement une action retour dues à l'introduction de l'absorbeur.

### 3.3.2 Présence du spin

L'interaction est unitaire avec un potentiel externe dans ce cas, mais avec cependant une erreur systématique associée à  $\Pi_j^w$ , comme le remarquent aussi Stuckey et al [124]. Effectivement, à chaque mesure de spin est associée une interaction mesurant la présence du neutron dans la branche opposée. Cela est dû au fait que les effets de l'interaction de se limite pas au premier ordre mais cela est un effet identifié par les auteurs de [4] qui le prennent en compte dans l'analyse des résultats.

De plus, il n'y a toujours pas de degré de liberté jouant le rôle de  $\mathcal{M}$  faiblement couplé à  $\mathcal{S}$  et la quantité mesurée n'est donc toujours pas une valeur faible mais une action retour mesurée en réponse à une perturbation antérieure introduite par l'expérimentateur.

## 4 Critiques de l'interprétation du phénomène physique

Nous présentons succinctement ici le travail de chaque papier critiquant l'effet du chat du Cheschire en les considérant un par un pour commenter leurs résultats plus efficacement.

## 4.1 Correa et al [1]

L'objectif poursuivi est de montrer que le chat du Cheshire n'a rien de paradoxal au sens où il peut être compris comme un simple phénomène d'interférences. Aussi, les auteurs abordent la séparation des propriétés en ces termes et la considèrent effective uniquement, du fait du comportement des interférences.

Les états de pré- et post-sélection sont respectivement définis par

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle) |H\rangle \quad |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle |H\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle |V\rangle \quad (318)$$

en considérant les mesures de  $\hat{\Pi}_j$  et de la polarisation circulaire  $\hat{\sigma} = |\circ\rangle\langle\circ| - |\ominus\rangle\langle\ominus|$  qui admet les états propres  $|\circ / \ominus\rangle = |H\rangle \pm i|V\rangle$ . Deux appareils de mesure  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont introduits, représentés par les états  $|P_1\rangle$  et  $|P_2\rangle$  et placés respectivement sur les chemins 1 et 2. Notons ici une incohérence dans le raisonnement de [1] où des appareils de mesures hypothétiques sont introduits pour étudier la version théorique du phénomène alors que leur absence n'est pas relevée dans leur analyse de l'expérience de [4]. D'ailleurs, aucun hamiltonien d'interaction n'est défini mais le comportement de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  est défini de manière arbitraire : après l'interaction,  $|P_1\rangle$  devient  $|P_1^+\rangle$  ou  $|P_1^-\rangle$  selon une polarisation  $|\circ\rangle$  ou  $|\ominus\rangle$  et reste à  $|P_1\rangle$  si aucun photon ne passe par la branche 1. En ce qui concerne  $\mathcal{M}_2$ ,  $|P_2\rangle$  ne peut que passer à l'état  $|P_2^+\rangle$  si le photon est présent dans la branche 2 ou ne change pas si le photon se propage selon la branche 1.

Ces considérations posent problème : il y a par définition une corrélation introduite entre  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  qui ne sont plus indépendants (et donc qui ne respectent plus le cadre d'une mesure faible correcte où les appareils de mesures sont supposés indépendants). Ces corrélations sont telles qu'il est admis que si  $\mathcal{M}_1$  change, cela veut dire qu'une polarisation est détectée, et ceci en même temps que la présence du photon : "si  $\mathcal{M}_1$  ne bouge pas, il n'y a pas de photon dans la branche 1". Si  $\mathcal{M}_1$  ne bouge pas, cela implique que  $\mathcal{M}_2$  bouge. Or, le propos du chat du Cheshire est précisément la séparation des degrés de liberté d'une particule donc considérer une corrélation ad hoc entre les deux appareils de mesure est un traitement incohérent qui anticipe le résultat d'une mesure.

Dans la suite, l'état de  $\{\mathcal{S} + \mathcal{M}\}$  juste après l'interaction est directement

posé par (C est une constante de normalisation)

$$\frac{C}{2} |1\rangle |+\rangle |P_1^+\rangle |P_2\rangle + \frac{C}{2} |1\rangle |-\rangle |P_1^-\rangle |P_2\rangle + \frac{iC}{\sqrt{2}} |2\rangle |H\rangle |P_1\rangle |P_2^+\rangle \quad (319)$$

qui est une écriture indépendante de la précision de  $\mathcal{M}$  : un tel état est obtenu en considérant une interaction de Von Neumann pour un état pré-sélectionné donné. Ainsi, les variations de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  ne sont dues qu'à une translation d'une quantité proportionnelle aux valeurs propres de  $|\odot\rangle\langle\odot|$ ,  $|\oslash\rangle\langle\oslash|$  et  $\hat{\Pi}_2$  pour  $|P_1^+\rangle$ ,  $|P_1^-\rangle$  et  $|P_2^+\rangle$  respectivement. Cet aspect n'est pas gênant dans la mesure où le comportement d'une interaction faible est retrouvé en considérant  $\langle P_i | P_i^\pm \rangle = 1 - \epsilon$ . Par contre, les corrélations entre  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  considérées apparaissent dans le fait (i)  $\mathcal{M}_2$  donne à la fois l'information sur la présence et la polarisation alors que  $\mathcal{M}_1$  ne donne que la présence avec un lien ad hoc entre leur comportement (ii) cette corrélation est d'autant plus fautive dans ce cas puisque en l'absence de post-sélection, un appareil de mesure supplémentaire détecterait les composantes  $|\odot\rangle$  et  $|\oslash\rangle$  dans le chemin 2 où le photon est aussi polarisé  $|H\rangle$  et encore un autre appareil de mesure détecterait la présence du photon dans la branche 1. En conséquence, les auteurs ont choisi d'appliquer des considérations sur le comportement de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  qui reproduisent ce qu'on aurait eu si on avait post-sélectionné le système.

C'est donc sans surprise que l'ajout de la post-sélection mène au comportement correct de l'état final de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ , en introduisant une translation d'une quantité arbitraire  $\delta$ , il vient

$$F'(x, y) = C \{ 2F(x, y - \delta) + F(x - \delta, y) - F(x + \delta, y) \} \quad (320)$$

où on a posé  $\langle x | P_1 \rangle = f(x)$ ,  $\langle y | P_1 \rangle = g(y)$  et  $\langle x | P_1 \rangle \langle y | P_1 \rangle = f(x)g(y) = F(x, y)$ .

Dans le but de montrer que le chat du Cheshire n'est qu'un simple phénomène d'interférences, les auteurs expriment  $|F'(x, y)|^2$  dans la limite projective où aucune fonction translatée ne se recouvre (il s'agit donc de la somme de chaque termes de la dernière relation pris en valeur absolue et élevés au carré), et concluent que l'intensité permet d'identifier chacun des résultats mais c'est en oubliant que le cas de mesures projectives simultanées est à considérer dans un contexte différent.

Aussi, puisque d'après les auteurs, les résultats sont accessibles par mesures faibles individuelles et simultanées, Correa et al rendent responsable les interférences considérées dans l'approximation faible, elles-mêmes obtenue par développement au premier ordre de  $F'(x, y)$ . Ce développement

donne

$$F'(x, y) = 2CF(x - \delta, y - \delta) \quad (321)$$

où on obtient un comportement en accord avec les valeurs faibles attendues. Finalement, Correa et al reprennent d'une mauvaise manière la définition d'une valeur faible : c'est la résultante des interférences des états de  $\mathcal{M}$  centrés en chaque valeur propre permise par les états pré/post-sélectionnés de l'opérateur mesuré, et cela n'a pas bougé depuis l'introduction de cette notion [12] en 1988. Donc c'est précisément par interférence qu'on obtient une valeur faible nulle du spin et c'est aussi précisément le propos de la valeur faible.

Les auteurs confondent ainsi un simple phénomène d'interférence avec le sens que l'on peut leur accorder dans le cadre d'une interaction faible. La résultante des interférences des états de  $\mathcal{M}$  sont définies par des données relatives au système uniquement et comme nous le verrons dans la suite, il n'est pas vraiment question de séparation des propriétés qui est une interprétation valable dans le cadre de la mesure projective. Ici, les interférences rendent bien compte d'une mesure d'une amplitude de transition qui s'annule pour une propriété donnée, dans une branche donnée, et pour des états de pré/post-sélection donnés. En conclusion, il manque une réflexion sur une grandeur physique de  $\mathcal{S}$  représentée par des interférences de  $\mathcal{M}$  et sur la manière selon laquelle on peut les interpréter vis à vis de  $\mathcal{S}$ .

## 4.2 Atherton et al [2]

L'objectif poursuivi est identique à celui de Correa et al, à savoir que le chat du Cheshire peut être décrit par des interférences classiques d'un champ électrique (notons que [1] signale aussi que leurs développements sont valables pour un champ de Maxwell classique).

Un montage est réalisé dans lequel la présence du champ est mesurée avec un absorbeur et la polarisation avec une lame demi-onde. Il s'agit donc d'une version classique du montage de Denkmayr et al [4] qui reproduit des résultats identiques au niveau des intensités obtenues. En admettant que l'expérience de [4] est valable, les auteurs concluent alors que le phénomène n'est rien de plus qu'un phénomène d'interférences classiques.

Effectivement, une mesure faible étant la résultante d'interférences, il est toujours possible de réaliser un montage qui reproduit les mêmes interférences d'une manière classique mais où chaque état translaté de  $\mathcal{M}$  ne

symbolise plus une alternative de résultat de  $\mathcal{S}$  à une mesure projective. Ainsi, tout comme Saldanha et al [106] au chapitre 3, il y a confusion entre le cadre où l'on peut parler d'optique ondulatoire et de simple interférences et le cas de la valeur faible où les interférences quantiques déterminent la dynamique de  $\mathcal{M}$  entre deux états de pré/post-sélection. D'ailleurs, un champ de Maxwell qui se propage dans un interféromètre présente une propriété non ambiguë définie à chaque instant dans chaque branche au contraire d'une fonction d'onde dont la propriété est définie dès lors qu'on la mesure.

### 4.3 Michielsen et al [3]

Michielsen et al reproduisent l'expérience de Denkmayr et al [4] à l'aide d'une simulation basée sur un modèle d'évènements discrets (voir [125] pour plus d'information). La simulation permet de lancer un par un les neutrons dans l'interféromètre dont la trajectoire peut être suivie à tout moment, alors qu'une distribution de probabilité associée aux résultats d'une mesure est obtenue pour  $n \rightarrow \infty$  neutrons lancés.

La particule se présente sous forme de messenger qui contient l'information des valeurs des propriétés du neutron à un instant donné. Ici, le messenger est paramétré par son spin et son temps de parcours dans l'interféromètre qui correspond à la mesure de la présence du neutron dans la simulation. L'avantage de la simulation étant le suivi de la trajectoire du neutron, les auteurs reproduisent l'expérience [4] tout en évaluant à un temps intermédiaire la séparation ou non des degrés de liberté de présence et de polarisation dans chaque branche. Ainsi, puisque leur simulation reproduit correctement les résultats de l'expérience, Michielsen et al concluent que, puisque ils n'observent aucune séparation du spin et de la présence sur la particule messenger au cours de la transition, le chat du Cheshire est une illusion.

Ici, il n'est pas question d'interaction faible et les auteurs se limitent au protocole expérimental de Denkmayr et al [4] plutôt que de considérer le schéma théorique basé sur les mesures faibles : ils n'utilisent pas d'appareil de mesure ni ne définissent de valeur faible respectivement à leur modèle de simulations discrètes. En conséquence, leurs commentaires s'appliquent à la réalisation expérimentale uniquement.

#### 4.4 Retour sur la mesure de la présence dans l'interféromètre à neutrons [4]

Les choix des protocoles expérimentaux de [4] et [121] n'ont pas permis de vérifier l'effet du chat du Cheshire, idée basée sur les mesures faibles, mais les auteurs concluent par une observation des résultats attendus pour la présence du neutron. Comment cela se fait-il ?

Rappelons les états de pré/post-sélection,

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|\uparrow_x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle|\downarrow_x\rangle \quad |\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_x\rangle(|1\rangle + |2\rangle) \quad (322)$$

et regardons les résultats de mesure de la présence et du spin du neutron dans chacune des branches et pour des processus forts analogues aux processus faibles.

Mesurons la présence du neutron en posant l'état de  $\{\mathcal{M} + \mathcal{S}\}$  à  $t_i$  comme  $|\psi_i\rangle \otimes |\varphi\rangle$  avec l'hamiltonien

$$\hat{H}_{int} = \gamma \hat{\Pi}_1 \cdot \hat{P}_x + \gamma \hat{\Pi}_2 \cdot \hat{P}_y \quad (323)$$

tel que la mesure de la présence sur le chemin 1 affecte la coordonnée  $x$  du profil transverse  $|\varphi\rangle$ , et celle du chemin 2 la coordonnée  $y$ .

Ainsi,  $\varphi'(x, y)$  après la post-sélection est donné par (avec  $\int \hbar^{-1} \gamma dt \equiv 1$ )

$$\varphi'(x, y) = \langle x, y, \psi_f | e^{-i\hat{\Pi}_1 \cdot \hat{P}_x - i\hat{\Pi}_2 \cdot \hat{P}_y} | \psi_i \rangle | \varphi \rangle \quad (324)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x, y, 1 \uparrow_x | 1 \uparrow_x \rangle e^{-i\hat{P}_x} | \varphi \rangle \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x, y, 2 \uparrow_x | 2 \downarrow_x \rangle e^{-i\hat{P}_y} | \varphi \rangle \end{aligned} \quad (325)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(x - 1, y) \quad (326)$$

L'intensité associée et normalisée par la probabilité de succès de la transition  $|\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 = 1/4$  est

$$\mathcal{I}_{\text{présence}} = |\varphi'(x, y)|^2 = \frac{1}{2} |\varphi(x - 1, y)|^2 \quad (327)$$

qui n'est pas observable à coup sûr.

Le profil spatial de  $\varphi'(x, y)$  indique qu'une observation de la présence du neutron dans la première branche est directement corrélée à une absence

de celui-ci dans la deuxième branche (et inversement). Ainsi, que l'on mesure  $\hat{X}$  ou  $\hat{Y}$  sur  $\varphi'(x, y)$ , on obtiendra la même information, à savoir que le neutron a dû être dans la branche 1 pour être détecté successivement en  $|\psi_i\rangle$  et en  $|\psi_f\rangle$ . Donc, si la mesure est répétée un grand nombre de fois,  $\mathcal{S}$  collapsera toujours vers l'état "chemin 1" en ce qui concerne la présence. Si nous avons choisi de n'utiliser qu'un degré de liberté unique de  $|\varphi\rangle$  sur lequel nous aurions pu lire la réponse du passage du neutron par les chemins 1 ou 2, nous n'observerions qu'une seule translation associée au passage par le chemin 1 et c'est le seul résultat que nous pouvons mesurer étant donné les états de polarisation imposés aux pré/post-sélection. L'issue du collapse aurait donc été inchangée en comparaison au cas précédent (équation (326)).

Puisque il n'y a qu'une seule translation dans le cas fort, c'est exactement la même chose dans le cas faible où aucun phénomène d'interférences ne contribue à l'établissement de la valeur faible. La seule différence se situe dans le collapse de  $\mathcal{S}$  pour le cas fort uniquement.

En conclusion, le résultat de la mesure forte est identique à celui auquel on s'attend lors de la mesure faible. Dans l'expérience [4], l'information mesurée est celle due à une action retour sur la probabilité de post-sélection induite par une mesure forte du système à un temps intermédiaire. Puisque le résultat de la mesure forte est identique à celui d'une mesure faible chaque fois que la post-sélection est concluante, le neutron ne peut se trouver que dans la branche 1.

## 5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons concilié et clarifié les critiques du Chat du Cheshire quantique présentes dans la littérature, qu'elles soient théoriques ou expérimentales. Nous retiendrons que les réalisations expérimentales menées jusqu'ici ne reproduisent pas le phénomène et que la plupart des critiques n'analysent la séparation des propriétés que de manière incomplète.

Effectivement, l'issue d'une telle discussion dépend de l'interprétation de la dynamique de l'appareil de mesure. Puisque l'appareil de mesure rend compte d'une quantité relevant de l'élément de transition entre les pré/post-sélection, il est difficile d'associer à une valeur faible une situation physique comme c'est le cas de la valeur propre associable à un vecteur propre. Cependant, nous avons détaillé au chapitre précédent que l'annulation de

la valeur faible implique que la post-sélection ne peut pas être atteinte par la fraction du système qui a interagit avec l'observable mesurée au cours de son interaction faible avec  $\mathcal{M}$ .

Ainsi, lorsque la valeur faible d'un projecteur est nulle sur le chemin 2, cela implique  $\langle \Phi | \hat{\Pi}_2 | \Psi \rangle = 0$  qui illustre l'absence de corrélation entre les pré/post-sélections sur le deuxième chemin. En revanche, puisque la mesure forte de Von Neumann donne un résultat identique, on peut conclure dans ce cas particulier, que la particule ne peut pas avoir été dans la deuxième branche et être détectée en  $\langle \Phi |$  et  $| \Psi \rangle$  à  $t_i$  et  $t_f$ .

En ce qui concerne la valeur faible de la polarisation sur le chemin 1, un phénomène d'interférence des états de l'appareil de mesure participe à son annulation et  $\langle \Phi | \hat{\Pi}_2 \hat{\sigma}_x | \Psi \rangle = 0$  n'admet pas de description similaire à celle du lien vecteur propre/valeur propre où une valeur propre nulle est associée à vecteur propre particulier.

Étant donné que nous sommes dans le cas d'une mesure de  $\hat{\Pi}_{1/2}$  d'une part, et de  $\hat{\Pi}_{1/2} \hat{\sigma}_z$  d'autre part, nous pourrions être tenté de traiter la séparation des propriétés à la lumière de la contextualité d'une mesure en séparant la mesure simple de la mesure jointe puis en considérant les propriétés 5 et 6 du chapitre 1. Or ici, nous ne nous trouvons pas dans un processus logique puisque  $|\langle \psi_i | \psi_f \rangle|^2 = 1/4 \neq 1/0$ . L'assignement de 0 ou 1 par la règle ABL à des événements n'est donc pas la seule configuration qui mène à des valeurs faibles étranges. En revanche, il n'existe pas encore de preuve que les violations des conditions algébriques pour des pré/post-sélection non logiques impliquent de considérer la contextualité [68].

Cependant, l'annulation d'une valeur faible s'interprète de manière ondulatoire et met en jeu des amplitudes de probabilité. Aussi, une séparation des propriétés en ces termes n'est pas intuitive mais cet effet n'est pas paradoxal pour autant : la superposition d'états quantiques est bien définie, et la valeur faible rend observable un aspect ondulatoire du système.



# Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail de thèse, nous avons commencé par présenter les propriétés principales de la valeur faible. Il s'agit du résultat obtenu après une interaction entre un système et un appareil de mesure, entre la mesure de deux états pré/post-sélectionnés et dans un régime particulier dans lequel l'état du système n'est pas projeté. Il s'ensuit que la valeur faible rend compte de la configuration de la superposition d'états qu'a pris le système entre la pré-sélection et la post-sélection. Cependant, l'association d'une valeur faible à une situation physique particulière demeure obscure, en particulier parce que celle-ci est complexe et qu'elle n'est pas confinée au spectre de l'observable mesurée.

La propriété non-destructive de l'interaction faible nous permet d'accéder aux propriétés ondulatoires à plusieurs endroits et à des temps intermédiaires différents au sein d'une même transition. Cela nous permet de reconstituer les trajectoires d'une particule au cours d'une transition et de sonder le recouvrement entre une fonction d'onde qui se propage selon la flèche du temps et une autre qui se propage de manière rétrograde.

Plus particulièrement, nous avons présenté dans le chapitre 2 un protocole de mesure des trajectoires de Feynman au sein d'un dispositif à fentes d'Young. La difficulté d'une telle mesure est que celle-ci nécessiterait d'implémenter un grand nombre d'interactions et cela est peu commode en vue d'une réalisation expérimentale. C'est pourquoi nous avons présenté un protocole simple de quatre interactions au plus qui peuvent être lues en plusieurs étapes. Notons que sur la base du même principe, ce protocole est extensible à l'implémentation d'autant d'interactions faibles qu'on le souhaite pourvu que l'on ajoute le nombre d'étapes adéquat. Les trajectoires faibles mesurées sont alors des trajectoires moyennes que l'on identifie aux trajectoires classiques contenues dans le propagateur. Dans le cas

de l'ouverture des deux fentes, cela aboutit à la mesure de plusieurs trajectoires moyennes issues de chaque fente qui se superposent à l'endroit de l'interaction et la superposition d'état peut ainsi être mise en évidence. L'accès aux trajectoires contenues dans le propagateur est alors indirect grâce à des réalisations successives du dispositif dans des cas d'ouverture d'une et deux fentes.

Nous nous sommes également intéressés à une situation générale où la valeur faible s'annule à un endroit donné au sein d'un interféromètre. Après avoir étudié les implications de son annulation en terme d'états propres de l'observable mesurée, nous avons compris comment une valeur faible nulle est reliée à une situation contrefactuelle. Nous avons ainsi considéré un interféromètre pour une particule de spin 1 tout à fait analogue à la situation du paradoxe des trois boîtes présentée au chapitre 1. En effet, cette situation présente une situation contrefactuelle comme cela avait déjà été compris dans la littérature grâce à l'étude de la règle ABL dans un contexte de processus logiques. L'avantage de notre approche est qu'elle permet d'identifier une situation contrefactuelle directement à partir d'une valeur de la valeur faible. A la lumière de ce critère, nous avons analysé les propriétés d'une valeur faible nulle dans le contexte d'une reconstitution du passé d'une particule tout en concluant que le caractère discontinu d'une valeur faible n'explique que la dépendance des états de pré/post-sélection.

Enfin, le dernier chapitre est un travail de revue de la littérature scientifique qui traite du phénomène du Chat du Cheshire quantique. Après avoir présenté le phénomène du Chat du Cheshire de manière théorique, nous avons détaillé les tentatives expérimentales qui visaient à le mettre en évidence. Cela nous a permis d'éclaircir et clarifier les arguments présentés dans la littérature et de discriminer les remarques relevant de l'expérience de celles de la théorie. Nous avons ainsi conclu qu'aucune réalisation expérimentale n'a encore rendu compte du Chat du Cheshire alors que ce phénomène doit être compris de manière ondulatoire.

Finalement, les implications physiques d'une valeur faible restent mal définies. Une des raisons est que nous n'avons pour l'instant d'autre choix que d'étudier sa signification à la lumière d'un phénomène d'interférences des états propres de l'observable mesurée. Dans ce cadre, la valeur faible se présente comme une grandeur "hybride" qui peut rendre compte d'une moyenne ou d'une valeur propre selon les états de pré/post-sélection choi-

sis. En conséquence, le traitement habituel des propriétés en terme de valeurs propres/vecteurs propres n'est pas adapté pour comprendre la valeur faible qui se présente comme une propriété non locale d'une superposition d'états. Ainsi, il n'existe pas encore de formulation algébrique pour la mesure faible, qui permettrait de s'affranchir du formalisme standard. Effectivement, un tel lien pourrait nous donner un nouveau point de vue sur la dualité onde corpuscule et de ce fait, cela nous permettrait de caractériser un système quantique à cette lumière.

Une telle formulation mettrait en jeu une superposition des états de pré/post-sélections qui évoluent respectivement selon la flèche du temps et selon son opposé : dans l'approche du TSVF, les propriétés mesurées aux pré/post-sélections sont les seules à établir une valeur faible et peuvent être toutes les deux vérifiées à n'importe quel temps intermédiaire de la transition. Ainsi, ce travail futur fournirait une interprétation projective propre à une mesure faible qui rendrait alors compte d'une situation physique de manière nouvelle, et qui pourrait à la fois donner un lien explicite avec le caractère ondulatoire précis de la valeur faible.

Une telle approche nous permettrait d'aller plus loin dans le travail présenté dans les chapitres 3 et 4.

Un autre aspect abordé dans ce manuscrit est celui de l'examen de trajectoires quantiques obtenues par mesure faible. Du fait de la propriété ondulatoire d'une valeur faible, une succession d'interactions mesure plusieurs trajectoires entre des états de pré/post-sélection. Effectivement, ces trajectoires passent par tous les points où les états de pré/post-sélections se recouvrent mutuellement et en ce sens, la valeur faible se présente plutôt comme une propriété rendant compte de leur superposition à un endroit et un temps précis plutôt que d'une trajectoire particulière.

En conséquence, les trajectoires faibles telle qu'elles sont étudiées dans ce manuscrit sont une fonction d'une transition, elles sont d'ailleurs proportionnelles à l'élément de transition entre les pré/post-sélections. C'est pourquoi on pourrait alors se demander s'il serait possible de définir des trajectoires faibles uniquement par rapport au propagateur du système. Cela pourrait être accompli en considérant une succession de mesures fortes de la position, ce qui donnerait une réalisation donnée de l'évolution spatiale du système. Des mesures faibles effectuées entre deux mesures fortes donneraient des valeurs faibles définies par rapport à cette réalisation.

Ce travail futur nous permettrait alors de définir une valeur faible vis à vis

d'une trajectoire de Feynman particulière et d'en comprendre le sens et le rôle en respect à une intégrale de chemin.



## Annexe : Formalisme des deux vecteurs d'états

La description par deux vecteurs d'état d'un système quantique  $\mathcal{S}$  (two state vectors formalism  $\rightarrow$  TSVF) est introduite par Aharonov, Vaidman et Reznik ([126],[60],[61]). Dans la même idée, l'analyse transactionnelle offre un point de vue symétrique en temps de la mécanique quantique [127], et s'inspire elle-même du modèle de l'"emitter-absorber" introduit plus tôt par Wheeler et Feynman dans le contexte de l'électrodynamique classique et quantique [128],[129]. Le lecteur peut consulter [50] et [130] pour une bonne revue du formalisme et [127] pour s'initier à l'analyse transactionnelle.

Nous préférons ici parler de point de vue pratique et phénoménologique et non d'interprétation et d'implication philosophique du formalisme. Les conflits engendrés quant à la compatibilité de l'interprétation de Copenhague et de la (l') (as)symétrie du temps sortent largement du cadre de l'expérience physique. La question qui en découle est celle du *réalisme* de la fonction d'onde avec des réflexions autour du  $\psi$ -ontologique (propriété physique pré existante et indépendante de l'observateur) et du  $\psi$ -épistémique (outil mathématique virtuelle telle l'action  $S(q, \dot{q}, t)$  en physique classique) et n'est pas pertinente dans notre cas. Le lecteur peut cependant consulter [131] ou [132] qui constituent deux avis opposés, s'il souhaite explorer ce genre de réflexion.

Habituellement, un système est décrit par un seul état  $|\Psi\rangle$  obtenu après mesure de  $\mathcal{S}$  dans le passé. Cette description est asymétrique en temps car la connaissance de  $|\Psi\rangle$  ne contraint que partiellement le résultat d'une seconde mesure dans le futur. En physique classique, la description est symétrique puisque un résultat de mesure dans le futur est totalement contraint par le résultat dans le passé. Aharonov et Vaidman demandent alors si cette asymétrie est intrinsèque à la nature quantique de  $\mathcal{S}$  ou si on

peut trouver un formalisme qui permet de s'en affranchir. Ainsi, la TSVF vise à rétablir la symétrie du temps du point de vue de la mesure d'un système quantique [130].

Le processus de pré/post-sélection est maintenant décrit par l'ensemble  $\chi$  des deux vecteurs d'état à l'instant  $t$  (voir figure 37, où l'opposition de phase n'est qu'esthétique)

$$\chi \equiv |\Psi(t)\rangle, \langle\Phi(t)| \quad |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_i) |\Psi(t_i)\rangle \quad \langle\Phi(t)| = \langle\Phi(t_f)| \hat{U}^\dagger(t, t_f) \quad (328)$$

où  $\hat{U}(t_1, t_2) = e^{-i \int_{t_1}^{t_2} \hat{H} dt}$ .  $|\Psi\rangle$  est un état qui évolue selon la flèche du temps et est défini par une mesure passé alors que  $|\Phi\rangle$  évolue dans le sens opposé et est défini par une mesure future.

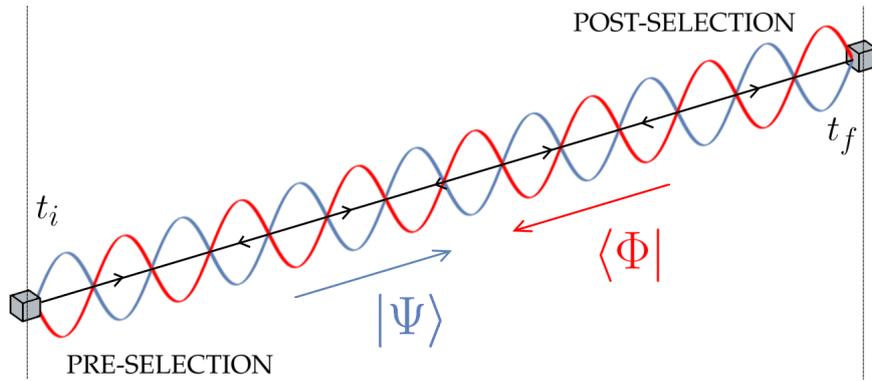


FIGURE 37 – Two state vector approach

De manière générale,  $|\Psi\rangle = \sum_i a_i |\psi_i\rangle$  et  $\langle\Phi| = \sum_i \langle\phi_i| b_i^*$ . Ainsi, le deux vecteurs d'état généralisé [60] est donné par

$$\chi \equiv \sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle, \langle\phi_i| \quad \text{où } \alpha_i = b_i^* a_i \text{ et où } \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j^* \langle\phi_i|\phi_j\rangle \langle\psi_i|\psi_j\rangle = 1 \quad (329)$$

Dans [126], Aharonov et Reznik introduisent l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{II}$  défini par toutes les combinaisons linéaires des  $\{|\psi_i\rangle, \langle\phi_i|\}$  où  $\{|\psi_i\rangle\}$  et  $\{|\phi_i\rangle\} \in \mathcal{H}_I$ . La superposition la plus générale d'un deux vecteurs d'états est ainsi d'écrite par l'opérateur  $\hat{\mathcal{P}}$

$$\hat{\mathcal{P}}_{\psi_i, \phi_i} = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j^* \frac{|\psi_i\rangle \langle\phi_j|}{\langle\phi_j|\psi_i\rangle} \quad (330)$$

avec le produit scalaire  $\langle\hat{\mathcal{P}}_1, \hat{\mathcal{P}}_2\rangle \equiv \text{Tr}(\hat{\mathcal{P}}_1^\dagger, \hat{\mathcal{P}}_2)$  et la condition de normalisation  $\langle\hat{\mathcal{P}}, \mathbb{1}\rangle = 1$ . Enfin, un troisième espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{\text{phys}}$  est introduit

dans lequel on ne retient que les états tels que  $a_i b_j^* \langle \phi_j | \widehat{U}(t_f, t_i) | \psi_i \rangle \neq 0$ . Les auteurs montrent que la manipulation d'un tel objet donne des résultats équivalents à ceux prédit par le formalisme standard, tout en leur donnant un sens conceptuel nouveau [50].

D'ailleurs, c'est ce que suggère le TSVF : il donne à voir un nouveau point de vue conceptuel plutôt qu'un formalisme pour traiter la physique quantique. Comme vue en section précédente, le TSVF permet de considérer les deux conditions limites imposées par les pré/post-sélections de manière simultanée et d'imposer un cadre dans lequel le passé et le futur sont connus avec certitude, ce qui simplifie même certaines expressions comme la règle ABL. Effectivement, le TSVF nous dirait de garder la règle ABL présentée telle quelle alors que son étude du point de vue standard nous contraindrait à introduire l'amplitude de probabilité conditionnelle de la post-sélection :

$$P(o_n, t | b_j, t_f; d_i, t_i) = \frac{P(o_n, t | \Psi, t_i) P(\Phi, t_f | o_n, t; \Psi, t_i)}{\sum_n P(o_n, t | \Psi, t_i) P(\Phi, t_f | o_n, t; \Psi, t_i)} \quad (331)$$

où  $P(\Phi, t_f | o_n, t; \Psi, t_i)$  peut être explicité à son tour par la règle de Bayes [60].

Notons aussi que l'expression d'une valeur faible  $O_w$  est symétrique sous l'échange  $|\Psi\rangle \leftrightarrow \langle\Phi|$ . Effectivement, échanger les états de départ et d'arrivée conduit à la valeur faible complexe conjuguée  $O_w^*$  mais correspond à la fois à des conditions limites qui sont chacune solution de l'équation de Schrödinger conjuguée, d'où la symétrie. Remarquons cependant que si un formalisme symétrique en temps est possible, il n'est jamais accessible par l'expérimentateur qui verra toujours un processus de pré/post sélection asymétrique : la pré-sélection peut être réussie (ou refaite si elle échoue) alors que la post-sélection ne réussie pas forcément et son échec nous impose de recommencer la pré-sélection [130].

En conclusion, un point de vue symétrique en temps [50]

1. ne change pas les prédictions de la physique quantique standard [127]
2. permet de décrire efficacement une mesure faible d'un point de vue conceptuel
3. peut simplifier certaines expressions et certains calculs de probabilité conditionnelle [127],[128]

Dans [133], Aharonov et Gruss examinent la décohérence d'un système  $\mathcal{S}$ - $\mathcal{M}$  décrit par le TSVF alors que Shikano et Hosaya le font dans [134], Vaidman étudie l'état défini dans le futur uniquement dans [135], et enfin, Massar et Popescu montrent qu'il est possible de caractériser un état arbitraire par des pré/post sélections dans le cadre du TSVF [136]. Les sujets de la rétrocausalité et du libre arbitre sont abordés dans [137] et [138] où mesures forte et faible sont combinées.

Le lecteur peut aussi consulter [139] (d'ailleurs dédié à Wigner) et [140] qui sont de bons ouvrages sur la physique du renversement du temps.

Si le TSVF est un puissant atout de compréhension, il reste néanmoins inaccessible pour l'expérimentateur. Il correspond à une description valable dans un "référentiel" particulier : du point de vue du TSVF, la valeur faible est décrite par l'interférence d'une onde passée et d'une onde future, elle émerge donc au temps intermédiaire de la transition. Dans le référentiel du laboratoire, la valeur faible s'établit à  $t_f$ , lorsque l'expérimentateur prend acte du succès de la post-sélection.

# Bibliographie

- [1] Raul Corrêa, Marcelo França Santos, CH Monken, and Pablo L Saldanha. ‘quantum cheshire cat’ as simple quantum interference. *New Journal of Physics*, 17(5) :053042, 2015.
- [2] David P Atherton, Gambhir Ranjit, Andrew A Geraci, and Jonathan D Weinstein. Observation of a classical cheshire cat in an optical interferometer. *Optics letters*, 40(6) :879–881, 2015.
- [3] K Michielsen, Th Lippert, and H De Raedt. Mysterious quantum cheshire cat : an illusion. In *The Nature of Light : What are Photons ? VI*, volume 9570, page 95700O. International Society for Optics and Photonics, 2015.
- [4] Tobias Denkmayr, Hermann Geppert, Stephan Sponar, Hartmut Lemmel, Alexandre Matzkin, Jeff Tollaksen, and Yuji Hasegawa. Observation of a quantum cheshire cat in a matter-wave interferometer experiment. *Nature communications*, 5 :5492, 2014.
- [5] Paul Adrien Maurice Dirac. *The principles of quantum mechanics*. Number 27. Oxford university press, 1981.
- [6] George W Mackey. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Courier Corporation, 2013.
- [7] Peter R Holland. *The quantum theory of motion : an account of the de Broglie-Bohm causal interpretation of quantum mechanics*. Cambridge university press, 1995.
- [8] John Archibald Wheeler and Wojciech Hubert Zurek. *Quantum theory and measurement*. Princeton University Press, 2014.
- [9] DJ Bohm, C Dewdney, and BH Hiley. A quantum potential approach to the wheeler delayed-choice experiment. *Nature*, 315(6017) :294, 1985.
- [10] H. D. Zeh. On the interpretation of measurement in quantum theory. *Foundations of Physics*, 1(1) :69–76, Mar 1970.

- [11] W. H. Zurek. Pointer basis of quantum apparatus : Into what mixture does the wave packet collapse? *Phys. Rev. D*, 24 :1516–1525, Sep 1981.
- [12] Yakir Aharonov, David Z. Albert, and Lev Vaidman. How the result of a measurement of a component of the spin of a spin one half particle can turn out to be 100. *Phys. Rev. Lett.*, 60 :1351–1354, Apr 1988.
- [13] Anthony J Leggett. Comment on “how the result of a measurement of a component of the spin of a spin-(1/2 particle can turn out to be 100”. *Physical review letters*, 62(19) :2325, 1989.
- [14] Asher Peres. Quantum measurements with postselection. *Physical review letters*, 62(19) :2326, 1989.
- [15] I. M. Duck, P. M. Stevenson, and E. C. G. Sudarshan. The sense in which a weak measurement of a half integer spin particle’s spin component yields a value 100. *Phys. Rev. D*, 40 :2112–2117, Sep 1989.
- [16] Alonso Botero. Geometric phase and modulus relations for probability amplitudes as functions on complex parameter spaces. *Journal of Mathematical Physics*, 44(11) :5279–5295, 2003.
- [17] Richard Jozsa. Complex weak values in quantum measurement. *Phys. Rev. A*, 76 :044103, Oct 2007.
- [18] Yakir Aharonov and L Vaidman. How one shutter can close n slits. *Physical Review A*, 67(4) :042107, 2003.
- [19] L Hardy. *Phys. Rev. Lett.*, 68 :2981, 1992.
- [20] Yakir Aharonov, Sandu Popescu, Daniel Rohrlich, and Paul Skrzypczyk. Quantum cheshire cats. *New Journal of Physics*, 15(11) :113015, 2013.
- [21] Bengt EY Svensson. What is a quantum-mechanical “weak value” the value of? *Foundations of Physics*, 43(10) :1193–1205, 2013.
- [22] Lev Vaidman. Weak-measurement elements of reality. *Foundations of Physics*, 26(7) :895–906, 1996.
- [23] RE Kastner. Weak values and consistent histories in quantum theory. *Studies in History and Philosophy of Science Part B : Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 35(1) :57–71, 2004.
- [24] D. Sokolovski. Asking photons where they have been in plain language. *Physics Letters A*, 381(4) :227 – 232, 2017.

- [25] K. J. Resch and A. M. Steinberg. Extracting joint weak values with local, single-particle measurements. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :130402, Mar 2004.
- [26] Kazuhiro Yokota, Takashi Yamamoto, Masato Koashi, and Nobuyuki Imoto. Direct observation of hardy’s paradox by joint weak measurement with an entangled photon pair. *New Journal of Physics*, 11(3) :033011, 2009.
- [27] GJ Pryde, JL O’Brien, AG White, TC Ralph, and HM Wiseman. Measurement of quantum weak values of photon polarization. *Physical Review Letters*, 94(22) :220405, 2005.
- [28] Jeff S Lundeen, Brandon Sutherland, Aabid Patel, Corey Stewart, and Charles Bamber. Direct measurement of the quantum wavefunction. *Nature*, 474(7350) :188, 2011.
- [29] Lee A Rozema, Ardavan Darabi, Dylan H Mahler, Alex Hayat, Yasaman Soudagar, and Aephraim M Steinberg. Violation of heisenberg’s measurement-disturbance relationship by weak measurements. *Physical review letters*, 109(10) :100404, 2012.
- [30] Nathan S Williams and Andrew N Jordan. Weak values and the leggett-garg inequality in solid-state qubits. *Physical review letters*, 100(2) :026804, 2008.
- [31] Justin Dressel, Mehul Malik, Filippo M. Miatto, Andrew N. Jordan, and Robert W. Boyd. Colloquium : Understanding quantum weak values : Basics and applications. *Rev. Mod. Phys.*, 86 :307–316, Mar 2014.
- [32] Mirko Cormann, Mathilde Remy, Branko Kolaric, and Yves Caudano. Revealing geometric phases in modular and weak values with a quantum eraser. *Physical Review A*, 93(4) :042124, 2016.
- [33] Andrew N Jordan, Julián Martínez-Rincón, and John C Howell. Technical advantages for weak-value amplification : when less is more. *Physical Review X*, 4(1) :011031, 2014.
- [34] Dawei Lu, Aharon Brodutch, Jun Li, Hang Li, and Raymond Laflamme. Experimental realization of post-selected weak measurements on an nmr quantum processor. *New Journal of Physics*, 16(5) :053015, 2014.
- [35] John Von Neumann. *Mathematical Eoundations of Quantum Mechanics*. 1955.

- [36] Yakir Aharonov and Alonso Botero. Quantum averages of weak values. *Phys. Rev. A*, 72 :052111, Nov 2005.
- [37] P Ben Dixon, David J Starling, Andrew N Jordan, and John C Howell. Ultrasensitive beam deflection measurement via interferometric weak value amplification. *Physical review letters*, 102(17) :173601, 2009.
- [38] J. Dressel and Jordan. Significance of the imaginary part of the weak value. *Phys. Rev. A*, 85 :012107, Jan 2012.
- [39] Justin Dressel, Agarwal, and Jordan. Contextual values of observables in quantum measurements. *Physical review letters*, 104(24) :240401, 2010.
- [40] Justin Dressel and Andrew N Jordan. Contextual-value approach to the generalized measurement of observables. *Physical Review A*, 85(2) :022123, 2012.
- [41] Matteo GA Paris. The modern tools of quantum mechanics. *The European Physical Journal Special Topics*, 203(1) :61–86, 2012.
- [42] Alexander S Holevo. *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2011.
- [43] Ingemar Bengtsson and Karol Życzkowski. *Geometry of quantum states : an introduction to quantum entanglement*. Cambridge university press, 2017.
- [44] A Matzkin. Weak values and quantum properties. *Foundations of Physics*, 49(3) :298–316, 2019.
- [45] Aephraim M Steinberg. How much time does a tunneling particle spend in the barrier region? *Physical review letters*, 74(13) :2405, 1995.
- [46] Aephraim M Steinberg. Conditional probabilities in quantum theory and the tunneling-time controversy. *Physical Review A*, 52(1) :32, 1995.
- [47] H. M. Wiseman. Weak values, quantum trajectories, and the cavity-qed experiment on wave-particle correlation. *Phys. Rev. A*, 65 :032111, Feb 2002.
- [48] Fabrizio Piacentini, Alessio Avella, Enrico Rebufello, Rudi Lussana, Federica Villa, Alberto Tosi, Marco Gramegna, Giorgio Brida, Eliahu Cohen, Lev Vaidman, et al. Determining the quantum expectation value by measuring a single photon. *Nature Physics*, 13(12) :1191, 2017.

- [49] Jeff Tollaksen. Pre-and post-selection, weak values and contextuality. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 40(30) :9033, 2007.
- [50] Yakir Aharonov and Jeff Tollaksen. New insights on time-symmetry in quantum mechanics. *arXiv preprint arXiv :0706.1232*, 2007.
- [51] Yakir Aharonov, Peter G. Bergmann, and Joel L. Lebowitz. Time symmetry in the quantum process of measurement. *Phys. Rev.*, 134 :B1410–B1416, Jun 1964.
- [52] Yakir Aharonov, Peter G Bergmann, and Joel L Lebowitz. Time symmetry in the quantum process of measurement. *Physical Review*, 134(6B) :B1410, 1964.
- [53] O. Cohen and B. J. Hiley. Elements of reality, lorentz invariance, and the product rule. *Foundations of Physics*, 26(1) :1–15, Jan 1996.
- [54] Lev Vaidman. Weak-measurement elements of reality. *Foundations of Physics*, 26(7) :895–906, Jul 1996.
- [55] Oliver Cohen. Pre-and postselected quantum systems, counterfactual measurements, and consistent histories. *Physical Review A*, 51(6) :4373, 1995.
- [56] Yakir Aharonov, Sandu Popescu, and Jeff Tollaksen. A time-symmetric formulation of quantum mechanics. 2010.
- [57] Lev Vaidman. Lorentz-invariant “elements of reality” and the joint measurability of commuting observables. *Phys. Rev. Lett.*, 70 :3369–3372, May 1993.
- [58] Huw Price. *Time’s arrow & Archimedes’ point : new directions for the physics of time*. Oxford University Press, USA, 1997.
- [59] Matthew S Leifer and Robert W Spekkens. Pre-and post-selection paradoxes and contextuality in quantum mechanics. *Physical review letters*, 95(20) :200405, 2005.
- [60] Yakir Aharonov and Lev Vaidman. Complete description of a quantum system at a given time. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 24(10) :2315, 1991.
- [61] Yakir Aharonov and Lev Vaidman. Properties of a quantum system during the time interval between two measurements. *Physical Review A*, 41(1) :11, 1990.
- [62] Asher Peres. Two simple proofs of the Kochen-Specker theorem. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 24(4) :L175, 1991.

- [63] N David Mermin. Hidden variables and the two theorems of john bell. *Reviews of Modern Physics*, 65(3) :803, 1993.
- [64] Kochen and Specker. *J. Math. Mech.*, 17 :59, 1967.
- [65] John S Bell. *Rev. Mod. Phys.*, 38 :447, 1966.
- [66] Michael Kernaghan. Bell-kochen-specker theorem for 20 vectors. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 27(21) :L829, 1994.
- [67] Matthew F Pusey. Anomalous weak values are proofs of contextuality. *Physical review letters*, 113(20) :200401, 2014.
- [68] Matthew S Leifer and RW Spekkens. Logical pre-and post-selection paradoxes, measurement-disturbance and contextuality. *International Journal of Theoretical Physics*, 44(11) :1977–1987, 2005.
- [69] D Sokolovski, I Puerto Giménez, and R Sala Mayato. Path integrals, the abl rule and the three-box paradox. *Physics Letters A*, 372(44) :6578–6583, 2008.
- [70] Tamar Ravon and Lev Vaidman. The three-box paradox revisited. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 40(11) :2873, 2007.
- [71] K A Kirkpatrick. Classical three-box ‘paradox’. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 36(17) :4891, 2003.
- [72] Klaus Mølmer. Counterfactual statements and weak measurements : an experimental proposal. *Physics Letters A*, 292(3) :151 – 155, 2001.
- [73] S. E. Ahnert and M. C. Payne. Linear optics implementation of weak values in hardy’s paradox. *Phys. Rev. A*, 70 :042102, Oct 2004.
- [74] J. S. Lundeen and A. M. Steinberg. Experimental joint weak measurement on a photon pair as a probe of hardy’s paradox. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :020404, Jan 2009.
- [75] JS Lundeen, KJ Resch, and AM Steinberg. Comment on “linear optics implementation of weak values in hardy’s paradox”. *Physical Review A*, 72(1) :016101, 2005.
- [76] S. E. Ahnert and M. C. Payne. Reply to “comment on ‘linear optics implementation of weak values in hardy’s paradox’ ”. *Phys. Rev. A*, 72 :016102, Jul 2005.
- [77] D. Sokolovski, I. Puerto Giménez, and R. Sala Mayato. Feynman-path analysis of hardy’s paradox : Measurements and the uncertainty principle. *Physics Letters A*, 372(21) :3784 – 3791, 2008.

- [78] Yakir Aharonov, Alonso Botero, Sandu Popescu, Benni Reznik, and Jeff Tollaksen. Revisiting hardy’s paradox : counterfactual statements, real measurements, entanglement and weak values. *Physics Letters A*, 301(3-4) :130–138, 2002.
- [79] Joshua Combes, Christopher Ferrie, Matthew S Leifer, and Matthew F Pusey. Why protective measurement does not establish the reality of the quantum state. *Quantum Studies : Mathematics and Foundations*, 5(2) :189–211, 2018.
- [80] D. Sokolovski. Weak values, “negative probability,” and the uncertainty principle. *Phys. Rev. A*, 76 :042125, Oct 2007.
- [81] N David Mermin. Limits to quantum mechanics as a source of magic tricks : Retrodiction and the bell-kochen-specker theorem. *Physical review letters*, 74(6) :831, 1995.
- [82] Robert W. Spekkens. Negativity and contextuality are equivalent notions of nonclassicality. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :020401, Jul 2008.
- [83] Akio Hosoya and Minoru Koga. Weak values as context-dependent values of observables and born’s rule. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 44(41) :415303, 2011.
- [84] Akio Hosoya and Yutaka Shikano. Strange weak values. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 43(38) :385307, 2010.
- [85] Lawrence S Schulman. *Techniques and applications of path integration*. Courier Corporation, 2012.
- [86] AR Hibbs and Richard Phillips Feynman. *Quantum mechanics and path integrals*. McGraw-Hill Interamericana, 1965.
- [87] C. R. Leavens. Weak measurements from the point of view of bohmian mechanics. *Foundations of Physics*, 35(3) :469–491, Mar 2005.
- [88] Sacha Kocsis, Boris Braverman, Sylvain Ravets, Martin J. Stevens, Richard P. Mirin, L. Krister Shalm, and Aephraim M. Steinberg. Observing the average trajectories of single photons in a two-slit interferometer. *Science*, 332(6034) :1170–1173, 2011.
- [89] Atushi Tanaka. Semiclassical theory of weak values. *Physics Letters A*, 297(5-6) :307–312, 2002.
- [90] A Matzkin. Observing trajectories with weak measurements in quantum systems in the semiclassical regime. *Physical review letters*, 109(15) :150407, 2012.

- [91] LP Withers Jr and FA Narducci. Bilocal current densities and mean trajectories in a young interferometer with two gaussian slits and two detectors. *Journal of Mathematical Physics*, 56(6) :062106, 2015.
- [92] Takuya Mori and Izumi Tsutsui. Quantum trajectories based on the weak value. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2015(4), 2015.
- [93] Takuya Mori and Izumi Tsutsui. Weak value and the wave–particle duality. *Quantum Studies : Mathematics and Foundations*, 2(4) :371–378, 2015.
- [94] Mathieu Beau. Feynman path integral approach to electron diffraction for one and two slits : analytical results. *European Journal of Physics*, 33(5) :1023–1039, jun 2012.
- [95] Antonio Zecca. Two-slit diffraction pattern for gaussian wave packets. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(3) :911–918, Mar 1999.
- [96] Donald H Kobe. Aharonov-bohm effect revisited. *Annals of physics*, 123(2) :381–410, 1979.
- [97] H Yabuki. Feynman path integrals in the young double-slit experiment. *International journal of theoretical physics*, 25(2) :159–174, 1986.
- [98] Mathieu Beau and TC Dorlas. Three-dimensional quantum slit diffraction and diffraction in time. *International Journal of Theoretical Physics*, 54(6) :1882–1907, 2015.
- [99] Dylan H Mahler, Lee Rozema, Kent Fisher, Lydia Vermeyden, Kevin J Resch, Howard M Wiseman, and Aephraim Steinberg. Experimental nonlocal and surreal bohmian trajectories. *Science advances*, 2(2) :e1501466, 2016.
- [100] Q Duprey and A Matzkin. Null weak values and the past of a quantum particle. *Physical Review A*, 95(3) :032110, 2017.
- [101] Q Duprey and A Matzkin. Reply to “comment on ‘null weak values and the past of a quantum particle’”. *Physical Review A*, 97(4) :046103, 2018.
- [102] Lev Vaidman. Past of a quantum particle. *Physical Review A*, 87(5) :052104, 2013.
- [103] Lev Vaidman. Tracing the past of a quantum particle. *Physical Review A*, 89(2) :024102, 2014.

- [104] AR Marlow. *Mathematical foundations of quantum theory*. Elsevier, 2012.
- [105] Ariel Danan, Demitry Farfurnik, Shimshon Bar-Ad, and Lev Vaidman. Asking photons where they have been. *Physical review letters*, 111(24) :240402, 2013.
- [106] Pablo L Saldanha. Interpreting a nested mach-zehnder interferometer with classical optics. *Physical Review A*, 89(3) :033825, 2014.
- [107] Václav Potoček and Gergely Ferenczi. Which-way information in a nested mach-zehnder interferometer. *Physical Review A*, 92(2) :023829, 2015.
- [108] Zheng-Hong Li, M Al-Amri, and M Suhail Zubairy. Comment on “past of a quantum particle”. *Physical Review A*, 88(4) :046102, 2013.
- [109] Miguel A Alonso and Andrew N Jordan. Can a dove prism change the past of a single photon? *Quantum Studies : Mathematics and Foundations*, 2(3) :255–261, 2015.
- [110] Robert B Griffiths. Particle path through a nested mach-zehnder interferometer. *Physical Review A*, 94(3) :032115, 2016.
- [111] L Vaidman. Comment on “particle path through a nested mach-zehnder interferometer”. *Physical Review A*, 95(6) :066101, 2017.
- [112] Karol Bartkiewicz, Antonin Cernoch, Dalibor Javurek, Karel Lemr, Jan Soubusta, and Jirfii Svozilik. One-state vector formalism for the evolution of a quantum state through nested mach-zehnder interferometers. *Physical Review A*, 91(1) :012103, 2015.
- [113] Lev Vaidman. Comment on “one-state vector formalism for the evolution of a quantum state through nested mach-zehnder interferometers”. *Physical Review A*, 93(3) :036103, 2016.
- [114] Karol Bartkiewicz, Antonin Cernoch, Dalibor Javurek, Karel Lemr, Jan Soubusta, and Jirfii Svozilik. Reply to “comment on ‘one-state vector formalism for the evolution of a quantum state through nested mach-zehnder interferometers’ ”. *Phys. Rev. A*, 93 :036104, Mar 2016.
- [115] Gennadii Nikolaevich Nikolaev. Paradox of photons disconnected trajectories being located by means of “weak measurements” in the nested mach–zehnder interferometer. *JETP letters*, 105(3) :152–157, 2017.

- [116] Lev Vaidman. A comment on "paradox of photons disconnected trajectories being located by means of 'weak measurements' in the nested mach-zehnder interferometer". *arXiv preprint arXiv :1705.02137*, 2017.
- [117] Yakir Aharonov and Daniel Rohrlich. *Quantum paradoxes*. Wiley Online Library, 2005.
- [118] A Matzkin and AK Pan. Three-box paradox and 'cheshire cat grin' : the case of spin-1 atoms. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 46(31) :315307, 2013.
- [119] D Sokolovski. Comment on "null weak values and the past of a quantum particle". *Physical Review A*, 97(4) :046102, 2018.
- [120] Berthold-Georg Englert, Kelvin Horia, Jibo Dai, Yink Loong Len, and Hui Khoo Ng. Past of a quantum particle revisited. *Physical Review A*, 96(2) :022126, 2017.
- [121] James M Ashby, Peter D Schwarz, and Maximilian Schlosshauer. Observation of the quantum paradox of separation of a single photon from one of its properties. *Physical Review A*, 94(1) :012102, 2016.
- [122] Q. Duprey, S. Kanjilal, U. Sinha, D. Home, and A. Matzkin. The quantum cheshire cat effect : Theoretical basis and observational implications. *Annals of Physics*, 391 :1 – 15, 2018.
- [123] Yelena Guryanova, Nicolas Brunner, and Sandu Popescu. The complete quantum cheshire cat. *arXiv preprint arXiv :1203.4215*, 2012.
- [124] WM Stuckey, Michael Silberstein, and Timothy McDevitt. Concerning quadratic interaction in the quantum cheshire cat experiment. *arXiv preprint arXiv :1410.1522*, 2014.
- [125] Hans De Raedt, Fenping Jin, and Kristel Michielsen. Event-based simulation of neutron interferometry experiments. *Quantum Matter*, 1(1) :20–40, 2012.
- [126] B. Reznik and Y. Aharonov. Time-symmetric formulation of quantum mechanics. *Phys. Rev. A*, 52 :2538–2550, Oct 1995.
- [127] John G. Cramer. The transactional interpretation of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 58 :647–687, Jul 1986.
- [128] John Archibald Wheeler and Richard Phillips Feynman. Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action. *Rev. Mod. Phys.*, 21 :425–433, Jul 1949.

- [129] John Archibald Wheeler and Richard Phillips Feynman. Interaction with the absorber as the mechanism of radiation. *Rev. Mod. Phys.*, 17 :157–181, Apr 1945.
- [130] Yakir Aharonov and Lev Vaidman. The two-state vector formalism : an updated review. In *Time in quantum mechanics*, pages 399–447. Springer, 2008.
- [131] Huw Price. Does time-symmetry imply retrocausality? how the quantum world says “maybe”? *Studies in History and Philosophy of Science Part B : Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 43(2) :75 – 83, 2012.
- [132] Matthew S. Leifer. Is a time symmetric interpretation of quantum theory possible without retrocausality? *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science*, 473(2202) :2016 – 0607, 2017.
- [133] Yakir Aharonov and Eyal Y Gruss. Two-time interpretation of quantum mechanics. *arXiv preprint quant-ph/0507269*, 2005.
- [134] Yutaka Shikano and Akio Hosoya. Weak values with decoherence. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 43(2) :025304, 2009.
- [135] Lev Vaidman. Backward evolving quantum states. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 40(12) :3275, 2007.
- [136] Serge Massar and Sandu Popescu. Estimating preselected and post-selected ensembles. *Physical Review A*, 84(5) :052106, 2011.
- [137] Yakir Aharonov, Eliahu Cohen, and Tomer Shushi. Retrocausality with free will.
- [138] Yakir Aharonov, Eliahu Cohen, Doron Grossman, and Avshalom C Elitzur. Can weak measurement lend empirical support to quantum retrocausality? In *EPJ Web of Conferences*, volume 58, page 01015. EDP Sciences, 2013.
- [139] Robert Sachs. *The physics of time reversal*. 1987.
- [140] Eugene Wigner. *Violations of Symmetry in Physics*. 1995.