

# Table des matières

<b>0</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
0.1	Motivation des études asymptotiques . . . . .	7
0.2	Techniques mathématiques abordées . . . . .	8
0.3	Détail des chapitres de cet ouvrage . . . . .	10
0.4	Remerciements . . . . .	11
<b>1</b>	<b>Asymptotiques formelles</b>	<b>13</b>
1.1	Exemples introductifs . . . . .	13
1.1.1	Ondes planes et équation des ondes . . . . .	13
1.1.2	Commentaires introductifs aux asymptotiques . . . . .	14
1.2	Définitions. . . . .	15
1.3	Lemme de Borel . . . . .	16
1.4	L'équation de Helmholtz . . . . .	18
1.5	Généralisation. . . . .	20
1.6	Les équations de Maxwell harmoniques . . . . .	21
1.7	Exercices . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Asymptotique Hyperbolique</b>	<b>31</b>
2.1	Stabilité et construction de solutions de systèmes symétriques . . . . .	31
2.2	Formalisme asymptotique pour les systèmes hyperboliques . . . . .	35
2.3	Application aux équations de Maxwell . . . . .	41
2.4	Existence asymptotique pour un problème elliptique . . . . .	42
2.5	Exercices du chapitre 2 . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Propagation des ondes.</b>	<b>49</b>
3.1	La solution de l'équation eikonale . . . . .	50
3.2	Résolution de l'équation de transport . . . . .	51
3.3	Calcul explicite de $\Delta\phi$ et de $a_0$ . . . . .	52
3.4	Calcul après la caustique . . . . .	55
3.5	Généralisation au cas d'une équation des ondes avec une métrique $A(x)$ . . . . .	56
3.6	Exercices du chapitre 3 . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Théorème de la phase stationnaire</b>	<b>63</b>
4.1	Méthode de Laplace . . . . .	63
4.2	Théorème de la phase non stationnaire . . . . .	66
4.3	La méthode du col pour une phase complexe. . . . .	67
4.3.1	Un calcul préliminaire . . . . .	67
4.3.2	La méthode de Laplace pour une phase complexe générale . . . . .	68
4.4	méthode du col holomorphe . . . . .	69
4.5	Le théorème de la phase stationnaire . . . . .	74
4.6	Expression du Laplacien associé à $\tilde{z}$ . . . . .	77
4.6.1	Théorème de la phase stationnaire avec paramètre . . . . .	79
4.7	Solution rayonnée . . . . .	80

4.8	Passage de la caustique pour l'équation des ondes . . . . .	85
4.9	Exercices du chapitre 4 . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Application à la physique des particules</b>	<b>91</b>
5.0	Introduction . . . . .	91
5.1	Le contexte physique . . . . .	91
5.1.1	Equation régissant $G_a$ . . . . .	92
5.1.2	Formulation du problème lorsque $x \ll 1$ . . . . .	93
5.1.3	Application du théorème de la phase stationnaire complexe. . . . .	94
<b>6</b>	<b>Espace de Fréchet des symboles.</b>	<b>95</b>
6.1	Définition . . . . .	96
6.2	Propriétés fondamentales . . . . .	97
6.3	Le problème modèle de Friedlander . . . . .	102
6.4	Exercices du chapitre 6 . . . . .	108
<b>7</b>	<b>Intégrales oscillantes</b>	<b>113</b>
7.1	Définition des opérateurs intégraux de Fourier . . . . .	114
7.2	Front d'onde des opérateurs intégraux de Fourier . . . . .	115
<b>8</b>	<b>Les opérateurs pseudo-différentiels</b>	<b>119</b>
8.1	Définition . . . . .	119
8.2	Composition des OPD . . . . .	121
8.2.1	Opérateurs proprement supportés. . . . .	121
8.2.2	Réduction des opérateurs pseudo-différentiels . . . . .	123
8.2.3	Produit de composition des symboles . . . . .	125
8.2.4	front d'onde des opérateurs pseudo-différentiels . . . . .	126
8.3	Les opérateurs pseudo-différentiels elliptiques . . . . .	127
8.3.1	Définition . . . . .	127
8.3.2	Inversion d'un opérateur elliptique . . . . .	127
8.3.3	Régularité elliptique . . . . .	129
8.3.4	Résolubilité locale d'un opérateur elliptique . . . . .	130
8.4	Changement de variable et OPD . . . . .	131
8.5	Exercices du chapitre 8 . . . . .	134
<b>9</b>	<b>Opérateurs et géométrie symplectique</b>	<b>141</b>
9.1	Solutions d'une équation pseudo-différentielle . . . . .	141
9.2	Changement de variable et objets géométriques . . . . .	146
9.2.1	Les bicaractéristiques . . . . .	146
9.2.2	Front et difféomorphisme . . . . .	148
9.3	Géométrie symplectique . . . . .	149
9.3.1	Définition géométrique du fibré cotangent . . . . .	149
9.3.2	Changement de système de coordonnées locales . . . . .	149
9.3.3	Fibré tangent . . . . .	150
9.3.4	Les formes canoniques et le champ hamiltonien . . . . .	151
9.3.5	Quelques remarques . . . . .	153
9.4	Relations canoniques et opérateurs intégraux de Fourier . . . . .	155
9.4.1	Définition des relations canoniques et des transformations canoniques . . . . .	155
9.4.2	Inversion des opérateurs intégraux de Fourier . . . . .	158
9.4.3	Composition des opérateurs intégraux de Fourier . . . . .	159
9.5	Exercices du chapitre 9 . . . . .	160

<b>10 Solutions lagrangiennes</b>	<b>167</b>
10.1 Définition des solutions lagrangiennes . . . . .	167
10.2 Représentation des lagrangiennes . . . . .	170
10.2.1 Solution lagrangienne maximale associée à une phase . . . . .	170
10.2.2 Généralisation aux phases à paramètre . . . . .	171
10.2.3 Le théorème de représentation de Hörmander . . . . .	171
10.3 Les caustiques . . . . .	173
10.4 Caustique de type pli . . . . .	178
10.4.1 Changement de variable explicite pour la phase (preuve) . . . . .	179
10.4.2 Calcul de la représentation intégrale de la solution associée . . . . .	181
10.4.3 Ansatz de D.Ludwig pour la caustique. . . . .	182
10.4.4 Calcul au voisinage de la caustique . . . . .	184
<b>11 Propagation et réflexion</b>	<b>185</b>
11.1 Définition d'un opérateur hyperbolique . . . . .	186
11.2 Equation eikonale et problème de Cauchy strictement hyperbolique . . . . .	188
11.3 Propagation hyperbolique . . . . .	190
11.4 Problèmes au bord pour l'équation des ondes. . . . .	194
11.4.1 Formule des sauts . . . . .	194
11.4.2 Réduction de l'opérateur des ondes . . . . .	199
11.4.3 Régions elliptique, hyperbolique et <i>glancing</i> . . . . .	201
11.5 Réflexion des singularités . . . . .	202
11.5.1 Parametrix pour la réflexion . . . . .	203
11.5.2 Théorème de propagation des singularités réfléchies . . . . .	210
11.5.3 Construction de la solution du problème de Dirichlet . . . . .	211
11.5.4 Analyse du problème mixte . . . . .	212
11.6 Le coefficient de réflexion . . . . .	212
11.6.1 Onde conormale . . . . .	213
11.6.2 La phase et l'amplitude après réflexion . . . . .	215
<b>12 Comptage des valeurs propres</b>	<b>221</b>
12.1 Introduction . . . . .	221
12.2 Trace du noyau de la chaleur. . . . .	226
12.2.1 L'asymptotique de Weyl pour le problème de Dirichlet à coefficients constants . . . . .	227
12.2.2 La méthode des coefficients gelés et les sommes de Lévy . . . . .	228
12.2.3 Le calcul des premiers termes dans le problème de Dirichlet . . . . .	232
12.3 Géodésiques fermées et OIF . . . . .	234
12.3.1 Formule de Poisson et pathologies du cercle et de la sphère . . . . .	234
12.3.2 Géodésiques fermées et singularités de la trace de l'opérateur des ondes. . . . .	235
12.3.3 Le support non singulier de la trace de l'opérateur des ondes et sa singularité en 0. . . . .	237
12.3.4 Contribution des géodésiques au spectre de la trace. . . . .	242
12.3.5 Relation avec l'application de premier retour de Poincaré . . . . .	246
12.3.6 Démonstration du théorème de la phase stationnant sur une sous variété . . . . .	250
12.4 Conclusion . . . . .	251
<b>13 Réflexion des ondes électromagnétiques.</b>	<b>255</b>
13.1 Géométrie et équations de Maxwell . . . . .	255
13.1.1 Formalisme différentiel . . . . .	255
13.1.2 Opérateurs de Calderon . . . . .	257
13.1.3 Écriture des équations de Maxwell dans un système de coordonnées semi-géodésiques . . . . .	259
13.2 Calcul de Hörmander-Levitan . . . . .	261
13.3 Réflexion pour Maxwell . . . . .	266

<b>14 La diffraction</b>	<b>269</b>
14.1 Le problème modèle de Friedlander . . . . .	269
14.2 L'équation des ondes à l'extérieur d'un ouvert convexe de $\mathbf{R}^2$ . . . . .	273
14.2.1 Écriture en coordonnées d'Euler . . . . .	273
14.2.2 Une autre solution asymptotique sortante. . . . .	275
14.3 Parametrix diffractive . . . . .	278
14.3.1 Symboles pour la parametrix . . . . .	278
14.3.2 Opérateur de Fourier-Airy au bord associé à la condition de Dirichlet . . . . .	279
14.3.3 OIF pour la condition d'impédance . . . . .	281
14.4 Calcul 2-microlocal de l'onde diffractée . . . . .	282
14.4.1 Les zéros du symbole de l'opérateur aux limites. . . . .	282
14.4.2 Algèbre des opérateurs unilatéraux . . . . .	283
14.4.3 Calcul de la trace de la dérivée normale de l'onde diffractée . . . . .	285
14.5 Conclusion sur les rayons . . . . .	288

# Chapitre 0

## Introduction

Ce texte est issu d'un cours enseigné à l'université de Paris 13 de février 1996 à juin 1996, puis de décembre 1996 à février 1997. Son objectif est d'apporter quelques éclaircissements sur les asymptotiques à hautes fréquences utilisées classiquement en propagation d'ondes.

Nous donnons un cadre mathématique rigoureux et précis qui permet de prouver la validité des asymptotiques hautes fréquences pour la propagation d'onde scalaires ou électromagnétiques (que cela soit dans le vide ou dans des milieux diélectriques), pour la réflexion d'une onde sur un bord (muni d'une condition de Dirichlet ou d'une condition mixte), et pour calculer l'onde au voisinage d'une caustique ou d'un point diffractif.

Ce cadre mathématique rigoureux est l'analyse microlocale, et cet ouvrage se veut une introduction à certaines techniques utilisées dans cette branche de l'analyse. Dans cette introduction, nous présentons les motivations des études asymptotiques hautes fréquences (Section 0.1) et nous expliquons en quelques mots certains des outils d'analyse microlocale utilisés.

Plus généralement, un certain nombre d'équations de la physique mathématique font apparaître des objets géométriques; le gradient, le rotationnel, la divergence, le laplacien. L'équation qui fait le mieux apparaître la relation entre la géométrie et les propriétés qualitatives des solutions est l'équation des ondes. Ceci sera particulièrement clair au chapitre 12, rédigé en collaboration avec Claude Bardos, consacré aux valeurs propres du laplacien dans une métrique  $A$  (aspect qualitatif). Les opérateurs intégraux de Fourier sont les outils naturels pour tenir compte de manière géométriquement intrinsèque des notions de propagation dans l'équation des ondes. L'énergie dans un tube de rayons associée à l'équation des ondes (introduite au chapitre 3) est la transcription physique de la notion de demi-densité, qui sera effleurée dans le chapitre 12. Le concept de demi-densité a servi de base à l'étude des opérateurs de Fourier intégraux par Hörmander [46].

De l'équation des ondes, on déduit un certain nombre d'informations sur d'autres équations : l'équation de la chaleur, le système d'équations de l'élasticité, le système d'équations de Maxwell. Ainsi les applications des opérateurs de Fourier intégraux vont au delà de l'étude de l'équation des ondes.

### 0.1 Motivation des études asymptotiques

Le calcul *a priori* de la réponse d'un objet à une émission radar est un problème important lors de la conception d'un avion ou de tout autre objet que l'on veut rendre le moins détectable possible. La réponse est donnée par le calcul de la solution des équations de Maxwell et d'une relation au bord dépendant de la nature de l'objet, la donnée initiale étant la valeur du champ électromagnétique incident (celui de l'onde radar, de longueur d'onde  $\lambda$ ).

Pour éviter la dispersion du faisceau radar dans l'atmosphère, la longueur d'onde  $\lambda$  doit être assez petite, de l'ordre du mètre ou du centimètre. Comme la fréquence de l'onde (se propageant à la vitesse de la lumière  $c$ ) est  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , cette fréquence est donc entre 1 et 100 GHz. Cette physique justifie donc l'emploi des méthodes hautes fréquences.

Supposons en plus que l'on puisse associer à l'objet, ou à une partie de ceui-ci, une longueur caractéristique  $L$ . Pour un avion, par exemple,  $L$  est de l'ordre de la dizaine de mètres. Les méthodes numériques usuelles de calcul des solutions des équations de Maxwell considèrent des mailles dont le côté est  $\lambda/8$ , soit de l'ordre du millimètre ou de la dizaine de centimètres. Le nombre de degrés de liberté utilisés est alors  $N = (8L/\lambda)^3$ , qui est au moins de l'ordre de  $10^5$ . Ce nombre de degrés de liberté correspond alors à  $6N$  inconnues, coordonnées des champs électrique et magnétique. La matrice à inverser pour résoudre le système discrétisé est alors  $6N \times 6N$ .

Ces nombres considérables ne permettent souvent pas un traitement global du problème lorsque la fréquence est trop élevée. Il est alors nécessaire de trouver des méthodes alternatives au calcul numérique global ; il s'agit des méthodes asymptotiques.

De Huyghens à Maxwell, s'est élaborée l'idée que la lumière et donc les phénomènes électromagnétiques se propagent à la fois comme des ondes et des rayons. Pour les rayons, on peut parler de position et de vitesse ou bien (grâce à la transformée de Legendre) de position et d'impulsion. Le calcul pseudo-différentiel (décrit ci-dessous) fait apparaître la coïncidence entre la variable de Fourier et l'impulsion. L'inégalité d'Heisenberg montre qu'il est impossible de localiser à la fois en position et en vitesse, et on est amené à localiser asymptotiquement et à haute fréquence. Cela conduit d'une part à un raffinement apparemment sans fin des calculs asymptotiques formels, sur lesquels des progrès qualitatifs importants ont été réalisés par V. Babich [5] et J. B. Keller [38] dans les années 50, probablement sous l'impulsion des problèmes de furtivité radar ou de détection. La quasi totalité des résultats asymptotiques ont été obtenus depuis lors. Un exposé des résultats asymptotiques formels dans un certain nombre de situations physiques est présenté par D. Bouche et F. Molinet dans le volume 16 de la collection "Mathématiques et Applications" [15].

La mise en forme rigoureuse de ces calculs a été la préoccupation essentielle d'au moins une génération de mathématiciens, et sous l'influence d'Hörmander, le formalisme de l'analyse microlocale s'est imposé.

Il est pour le moment impossible de justifier mathématiquement tous les résultats de [15]. En revanche, la preuve de la validité de certains de ces calculs asymptotiques est possible, et nous la présentons dans ce livre.

## 0.2 Techniques mathématiques abordées

Nous nous consacrons ici à l'étude des équations et systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires. Nous travaillons à **haute fréquence** pour trois raisons essentielles :

- 1) la physique du problème de détection radar est une physique à haute fréquence (ce qui peut s'exprimer par  $L/\lambda > 10$ ),
- 2) par l'introduction d'un paramètre asymptotique, on peut réaliser des calculs analytiques (voir par exemple le chapitre 1) en améliorant la précision des solutions,
- 3) enfin, on peut justifier ces asymptotiques formelles dans certains cas (voir le chapitre 2 pour un exemple de preuve, voir aussi les travaux de Lax [58]).

L'analyse microlocale (introduite par Hörmander [46] dans la fin des années 60) s'avère la méthode la plus universelle de traitement de ces problèmes haute fréquence, généralisant et justifiant par exemple les calculs effectués sur les rayons gaussiens [84] et les calculs de couche limite [15]. En effet, l'analyse microlocale est associée à un calcul pseudo-différentiel qui est un calcul symbolique explicite et à une bonne notion asymptotique (engendrée par exemple par l'ordre des symboles). Cette branche de l'Analyse étudie entre autres la régularité des distributions, non seulement localement, mais en plus en différenciant la régularité suivant toute direction de dérivation. Pour faire une analogie physique, tout se passe comme si nous considérons la régularité des distributions dans l'espace des positions-impulsions.

Lorsque  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , classe de Schwartz des fonctions à décroissance rapide, sa transformée de Fourier (indifféremment notée  $\hat{u}(\xi)$  ou  $\mathcal{F}(u)(\xi)$ ) est aussi dans la classe de Schwartz :

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx.$$

On a la formule d'inversion de Fourier :

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} u(y) e^{i(x-y) \cdot \xi} d\xi dy \quad (0.2.1)$$

De la formule  $\mathcal{F}(\partial_x u)(\xi) = i\xi \hat{u}(\xi)$ , on tire

$$\partial_{x_1} u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} i\xi_1 u(y) e^{i(x-y) \cdot \xi} dy. \quad (0.2.2)$$

Dans l'égalité (0.2.2), on appellera la fonction  $i\xi_1$  le **symbole** de l'opérateur  $\partial_{x_1}$ . Nous étudions dans le chapitre 6 les calculs asymptotiques sur les symboles, qui sont des fonctions de classe  $C^\infty$  pour  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ . A tout opérateur différentiel est associé un symbole, et, réciproquement, à tout symbole est associé un opérateur appelé opérateur pseudo-différentiel (que l'on construira ici). Le calcul de la composée de deux opérateurs pseudo-différentiels se traduit par un calcul sur les symboles, ce qui définit alors une algèbre, étudiée dans le chapitre 8. Les éléments inversibles de cette algèbre jouent un rôle particulier; il s'agit des symboles elliptiques.

Un symbole  $a(x, \xi)$  définit de manière intrinsèque un opérateur pseudo-différentiel; un changement de variable en  $x$  induit un changement de variable en  $\xi$ . Nous étudierons ces changements de variable dans le chapitre 8. Nous montrons que la notion de géométrie préservée dans  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  par le changement de variable en  $x$  dans  $\mathbb{R}^d$  est le caractère **symplectique** de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , qui est alors identifié au fibré cotangent  $T^*\mathbb{R}^d$ . Ainsi, un symbole  $a(x, \xi)$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $T^*\Omega$ . Les rayons dont nous avons parlé plus haut sont alors la trace sur  $\Omega$  de courbes géométriquement intrinsèques dans  $T^*\Omega$ , appelées bicaractéristiques.

Les calculs en analyse microlocale, quant à eux, font usage constant d'un résultat, appelé théorème de la phase stationnaire. Ce résultat est la généralisation (au moins formellement) d'une méthode connue depuis Legendre, la méthode du col. La phase de la méthode du col admet un maximum. On dit qu'elle **stationne** au point où elle admet ce maximum, d'où le nom de phase stationnaire. La différence entre la méthode de la phase stationnaire et la méthode du col provient du caractère de l'intégrale étudiée; pour  $k \in [1, +\infty[$ , l'intégrale de la méthode du col se présente sous la forme  $\int e^{-k\phi(x)} dx$ , qui est une intégrale absolument convergente lorsque  $\phi$  admet un minimum sur l'intervalle d'intégration alors que l'intégrale utilisée dans la méthode de la phase stationnaire est  $\int e^{ik\phi(x)} dx$ , qui est définie dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ .

Le théorème de la phase stationnaire, étudié au chapitre 4 est au centre de l'analyse microlocale, du calcul pseudo-différentiel, et a des applications dans d'autres domaines. Nous en présentons une dans le chapitre 5, aimablement fournie par Eric Pilon, issue des calculs de physique théorique.

Cependant, la formule (0.2.2) ne permet pas toujours de représenter correctement une solution d'une équation aux dérivées partielles. C'est le cas lorsque le problème présente une caustique ou un rayon rampant qui diffracte, ou lorsque l'on veut accéder à des propriétés mettant en jeu la structure globale des rayons. Il se trouve que dans ces cas il est possible et indispensable de généraliser la formule (0.2.2) en remplaçant  $(x - y) \cdot \xi$  par  $\phi(x, y, \xi)$ , homogène de degré 1 en  $\xi$ . L'opérateur obtenu s'appelle alors opérateur intégral de Fourier. L'étude globale des opérateurs intégraux de Fourier est une partie majeure de cet ouvrage (Chapitre 7); en effet la représentation de solutions d'équations aux dérivées partielles par des intégrales oscillantes est la mieux adaptée aux calculs asymptotiques qui font intervenir des phases sous la forme  $e^{ik\phi(x)}$ ,  $k$  grand paramètre. Aux opérateurs intégraux de Fourier et aux phases des solutions asymptotiques d'équations aux dérivées partielles sont associés des objets géométriques intrinsèques, appelés variétés lagrangiennes. La structure de ces variétés fait l'objet du chapitre 10. Même si une phase (associée à une intégrale oscillante solution d'une équation aux dérivées partielles linéaire) est singulière, la variété lagrangienne ( $\subset T^*\Omega$ )

associée est lisse, et sa projection sur  $\Omega$  est singulière. Nous étudierons ainsi certains types de singularités.

Grâce aux opérateurs intégraux de Fourier, on retrouve les théorèmes de propagation des singularités dans  $\Omega$  pour les opérateurs hyperboliques (obtenus par ailleurs, par exemple dans [81]) ainsi que les théorèmes de réflexion des singularités hyperboliques sur  $\partial\Omega$ , par exemple pour les ondes électromagnétiques. De plus, on peut construire une parametrix uniforme sortante pour le problème  $Pu = 0$  dans  $\Omega$ ,  $\gamma Lu = g$  sur le bord de  $\Omega$  quand  $\Omega$  a un bord,  $P$  et  $L$  désignant deux opérateurs différentiels et  $\gamma$  désignant l'opérateur de restriction au bord  $\partial\Omega$  quand cela est permis.

Une autre application des opérateurs intégraux de Fourier est globale et est présentée dans le chapitre 12, écrit par Claude Bardos (dont l'apport aux autres chapitres est loin d'être négligeable). Elle s'appuie sur un problème pratique, qui est d'estimer les valeurs propres d'un opérateur elliptique, typiquement le Laplacien dans un ouvert borné. Les fonctions auxquelles on souhaite accéder sont par exemple le nombre de valeurs propres plus petites qu'un  $R$  fixé, le comportement asymptotique des valeurs propres rangées par ordre croissant. On veut aussi étudier par ce biais les problèmes inverses; trouver par exemple des informations sur l'ouvert  $\Omega$  dans lequel on travaille par l'intermédiaire de ces valeurs propres. On constatera l'importance de l'aspect global des opérateurs intégraux de Fourier, qui sont les seuls à pouvoir tenir compte des géodésiques fermées. En effet, un opérateur pseudo-différentiel est pseudo-local (voir Hörmander [47]), donc ne pourra pas prendre en compte en particulier l'application de premier retour de Poincaré.

### 0.3 Détail des chapitres de cet ouvrage

Dans le chapitre 1, on introduit la notion de développement asymptotique; on démontre que toute série asymptotique est le développement de Taylor en un point d'une fonction de classe  $C^\infty$ , résultat connu sous le nom de lemme de Borel. Ce résultat sera utilisé pour construire une solution approchée de l'équation des ondes.

Dans le chapitre 2, on présente la méthode et les résultats de P. D. Lax [58] pour calculer le développement asymptotique associé à la solution d'un problème de Cauchy strictement hyperbolique. Il s'agit d'une introduction directe aux calculs asymptotiques.

Dans le chapitre 3, on utilise l'équivalence entre l'équation des ondes et l'équation de Helmholtz  $(\Delta + k^2)u = 0$ . On construit, lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ , une solution asymptotique de l'équation de Helmholtz de la forme  $a(x, k)e^{ik\phi(x)}$ , où  $a(x, k)$  admet un développement asymptotique au sens du chapitre 1. Plus précisément, on calcule l'amplitude  $a(x, k)$  sur un pinceau de rayons, une fois cette amplitude connue sur une surface équiphase de  $\phi$ . Le lemme de Borel construit alors une solution asymptotique équivalente à la solution recherchée.

Le chapitre 4 aborde une notion importante, qui est -à mon sens- à la base de l'analyse microlocale: la méthode de la phase stationnaire, étroitement liée aux développements asymptotiques. Son application est possible chaque fois que l'on peut utiliser le lemme de Morse pour représenter la phase comme une phase quadratique. Une application à la physique des particules d'une variante du théorème de la phase stationnaire fait l'objet du chapitre 5.

De même le chapitre 7 présente des intégrales *a priori* divergentes, appelées intégrales oscillantes, dont on donnera une valeur grâce au théorème de la phase stationnaire. Les opérateurs associés à ces intégrales oscillantes sont les opérateurs intégraux de Fourier. Les intégrales oscillantes du chapitre 7 font appel à des fonctions  $a(x, \theta) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^d)$ , qui ont des propriétés agréables en fonction du paramètre asymptotique  $|\theta|$ . Ce sont ces propriétés qui permettent d'introduire des règles de calcul systématiques. L'étude des fonctions  $a(x, \theta)$  fait l'objet du chapitre 6. Un cas particulier des intégrales oscillantes du chapitre 7 permet de généraliser les opérateurs différentiels en une classe d'opérateurs, appelés opérateurs pseudo-différentiels (étudiés par exemple par Kohn et Nirenberg [54]).

L'étude des propriétés et de la régularité de ces opérateurs est présentée dans le chapitre 8. En particulier, on définira une loi produit sur les symboles qui correspond à la loi de composition des opérateurs.



Le chapitre 9 étudie le caractère intrinsèque de notions liées aux opérateurs pseudo-différentiels et introduit la géométrie symplectique, cadre géométrique associé aux opérateurs pseudo-différentiels et aux opérateurs intégraux de Fourier. Utilisant ce cadre géométrique, nous donnons le théorème permettant de composer des opérateurs intégraux de Fourier.

Le chapitre 10 relie les opérateurs intégraux de Fourier et les calculs asymptotiques de Lax du chapitre 2, dans le sens où la phase  $\phi$  introduite par Lax, solution de l'équation appelée équation eikonale, peut être prise comme phase oscillante dans un opérateur intégral de Fourier, généralisant ainsi les solutions asymptotiques oscillantes. Nous étudions plus généralement les solutions lagrangiennes, généralisation de la notion de phase solution de l'équation eikonale. Nous en déduisons le comportement des solutions de problèmes hyperboliques au voisinage de caustiques.

Dans le chapitre 12, Claude Bardos détaille une application globale des opérateurs intégraux de Fourier, qui permet, à partir des valeurs propres du Laplacien, de connaître certaines propriétés de cet ouvert. Ce problème est popularisé par la phrase "Can we hear the shape of a drum?"<sup>1</sup>.

Le chapitre 13 démontre le théorème de propagation des singularités pour les ondes, généralisation des lois de l'optique géométrique, en utilisant à la fois les opérateurs intégraux de Fourier pour construire une solution et pour transformer le problème de propagation en un problème de propagation élémentaire par l'intermédiaire d'une transformation canonique. Ces deux points de vue sont équivalents.

La réflexion d'une onde électromagnétique par un objet diélectrique, première application des développements asymptotiques, est étudiée dans le chapitre 13 et le théorème de réflexion des singularités hyperboliques est démontré dans le cas d'un ouvert rempli de matériau diélectrique absorbant. Nous utilisons ici une généralisation des calculs asymptotiques de Lax à des opérateurs hyperboliques pseudo-différentiels, comme l'ont fait Hörmander [45] et Levitan [62], [63], ou plus récemment Sjöstrand et Zworski [89].

Enfin, le chapitre 14 étudie le cas diffractif, cas où le rayon incident arrive tangentiellement au bord de l'objet  $\Omega$ , dans deux cas : le problème modèle de Friedlander [41], exemple originel, et le cas de la diffraction par un convexe du plan, où sont utilisés les résultats de Gilles Lebeau sur la régularité Gevrey 3 [64] et la thèse de l'auteur [56]. Dans ce chapitre, écrit en collaboration avec Daniel Bouche, on compare les calculs de l'analyse microlocale et les calculs employés dans la méthode de la couche limite.

## 0.4 Remerciements

L'auteur souhaite remercier toutes les personnes qui ont permis que ce cours voie le jour : en premier lieu les étudiants de l'université de Paris Nord, qui ont eu la patience de suivre et de comprendre les calculs parfois compliqués qu'il faisait au tableau et l'équipe d'analyse de l'université de Paris-Nord (Michel Balabane, Laurence Halpern, Patrice Le Calvez) qui lui a donné l'opportunité d'enseigner dans le DEA de Mathématiques Applicables.

L'auteur est aussi grandement reconnaissant à Johannes Sjöstrand pour le cours de DEA que ce dernier a donné à l'université d'Orsay en 1987-1988. Il s'est appuyé sur les notes de Max Bezdard pour rédiger certains des chapitres de ce texte de cours. Il souhaite aussi remercier Gilles Lebeau, son directeur de thèse, aussi bien pour le cours suivi en 1988-1989 que pour l'éclairage que celui-ci a donné sur la réflexion des singularités et le calcul dans la zone d'ombre d'un objet.

L'auteur s'est aussi inspiré d'un texte de Jeffrey Rauch, et que celui-ci lui pardonne l'emprunt de plusieurs démonstrations pour les problèmes hyperboliques matriciels.

L'aide et les conseils de Claude Bardos<sup>2</sup> et de Jean-Michel Ghidaglia, ainsi que la relecture de Daniel Bouche et de Gérard Meurant ont été précieuses dans l'élaboration de ce cours. Les chapitres concernant les opérateurs pseudodifférentiels ont été relus avec grand soin par

<sup>1</sup>Peut on entendre la forme d'un tambour ?

<sup>2</sup>Nous souhaitons aussi que ce livre soit *in memoriam* Joseph Bardos, 1906-1997

Jean-Marc Delort, de l'Université de Paris-Nord, et je l'en remercie. Les premiers chapitres (1 à 3) ont été corrigés et améliorés par les remarques de B. Bidegaray, de l'Université Paul Sabatier, et leurs remarques ont été très utiles.

Un merci particulier à Souleymane N'Diaye, dont le mémoire de DEA de l'université de Paris-Nord (1996) a approfondi le cas du problème modèle de Friedlander. Un autre merci à Jeanne-Marie Caron, étudiante de DEA de l'université d'Orsay (1998-1999), dont l'aide pour l'amélioration du chapitre 11 a été essentielle.

L'influence de Richard Melrose et son accueil en 1993-1994 au Massachusetts Institute of Technology a aussi été fondamentale dans la genèse de ce cours.

L'accueil du C.M.L.A. entre 1997 et 1999 a permis à l'auteur de finaliser ce texte.

Enfin, toutes mes pensées vont à Christine et à Marine, qui m'ont, toutes les deux ensemble, aidé à mener ce livre jusqu'au bout.

# Chapitre 1

## Asymptotiques formelles

Dans ce chapitre, nous présentons une asymptotique formelle pour un certain nombre de systèmes d'équations de la Physique. Nous étudions l'équation des ondes, l'équation de Helmholtz dans le vide, l'équation de Helmholtz dans un milieu dispersif et plus généralement des problèmes hyperboliques. Certaines de ces asymptotiques sont présentées en exercices.

Ces asymptotiques formelles seront justifiées mathématiquement dans la suite de l'ouvrage.

### 1.1 Exemples introductifs

Nous donnons en premier lieu deux exemples qui permettent de définir un développement asymptotique. Les deux fonctions que nous présentons sont solution de l'équation des ondes, et nous pouvons calculer leur développement asymptotique. Elles ont en commun d'être oscillantes en temps et en espace.

#### 1.1.1 Ondes planes et équation des ondes

L'exemple le plus simple considéré traditionnellement est l'onde plane ( $\vec{k} \in \mathbb{R}^d, \omega \in \mathbb{R}_+$ )

$$u_p(\vec{x}, t) = e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \vec{x} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}.$$

C'est une solution (qui n'appartient pas à  $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ , mais seulement à  $L^2_{loc}$ ) de l'équation des ondes  $(\Delta - c^{-2}\partial_t^2)u = 0$  lorsque

$$\omega^2 - |\vec{k}|^2 c^2 = 0, \tag{1.1.1}$$

qui s'écrit  $|\vec{k}| = \omega/c$ , et qui s'appelle la relation de dispersion dans le vide. En fait, cette égalité est la première des égalités asymptotiques que nous rencontrerons; elle est exacte pour une onde plane. Lorsque la dimension de l'espace ambiant est 1, les deux valeurs de  $k$  possibles sont  $\pm\omega/c$ , qui correspondent à deux ondes planes, progressives, se propageant respectivement dans la direction des  $x > 0$  et des  $x < 0$ . Nous rappelons que, pour l'équation des ondes en dimension 1, on a

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - c^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - c^{-1}\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

On démontre que la solution dans  $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$  de l'équation des ondes avec données de Cauchy  $u_0(x), u_1(x)$  est

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} u_1(y) dy - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} u_1(y) dy \\ &= \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Pour ce faire, si  $u(x, t)$  est une solution de l'équation des ondes, on lui associe  $v = \partial_x u + c^{-1}\partial_t u$ , qui est solution de  $\partial_x v - c^{-1}\partial_t v = 0$ . On en déduit que  $w(z, t) = v(z - ct, t)$  vérifie  $\partial_t w(z, t) = 0$ . Il vient donc  $w(z, t) = w(z, 0) = v(z, 0)$ . L'égalité  $v = \partial_x u + c^{-1}\partial_t u$  devient

$$\partial_x u(x, t) + c^{-1}\partial_t u(x, t) = w(x + ct, 0).$$

Soit  $h(z) = \frac{1}{2} \int_0^z w(y, 0) dy$ . On vérifie que  $(\partial_x + c^{-1}\partial_t)h(x + ct) = w(x + ct, 0)$ . Il vient alors

$$(\partial_x + c^{-1}\partial_t)(u(x, t) - h(x + ct)) = 0$$

ce qui conduit immédiatement à

$$u(x, t) = h(x + ct) + g(x - ct).$$

Les conditions de Cauchy à  $t = 0$  sont

$$u_0(x, 0) = u(x, 0), \partial_t u_0(x, 0) = u_1(x, t).$$

Il vient donc les deux égalités

$$g(x) + h(x) = u_0(x), g'(x) - h'(x) = c^{-1}u_1(x),$$

ce qui donne (1.1.2).

Remarques :

1) si le support à  $t = 0$  de l'onde, égal à  $\text{Supp } u_0 \cup \text{Supp } u_1$ , est l'intervalle  $[a, b]$ , le support à  $t$  de l'onde est inclus dans  $[a - ct, b + ct]$ . Cet ensemble de points s'appelle le cône de lumière.

2) si il y a de l'information à  $t = 0$  en un point  $x_0$ , c'est-à-dire  $u_0$  ou  $u_1$  non nul, alors à  $t_0$  il y a de l'information à  $x_0 + ct_0$  et à  $x_0 - ct_0$ . Ceci traduit la propagation sur les caractéristiques à la vitesse  $c$ .

3) Nous voyons apparaître les deux ondes progressives lorsque  $u_0(x) = \pm(ik)^{-1}u_1(x) = e^{-ikx}$ . Nous omettrons désormais la vitesse  $c$ . Elle interviendra cependant de manière cachée pour les équations de Maxwell par l'intermédiaire de la relation  $\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$ , et au lieu de considérer la pulsation  $\omega$  on considèrera les équations avec le nombre d'onde  $k = \omega/c$ .

### 1.1.2 Commentaires introductifs aux asymptotiques

Dans ce paragraphe, nous utilisons les fonctions spéciales solution de l'équation des ondes (en dimension 2 ou en dimension 3), pour constater que la notion d'asymptotique apparaît naturellement.

Pour l'équation des ondes en dimension 2, nous introduisons les fonctions de Hankel. Une solution de l'équation des ondes à vitesse 1 dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  est écrite  $u(r, \theta, t) = e^{-i\omega t + i\nu\theta} f(r)$ . En remplaçant dans le Laplacien en coordonnées polaires

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (1.1.3)$$

on constate que la fonction  $f$  est solution de

$$r^2 f'' + r f' + (k^2 r^2 - \nu^2) f = 0$$

Une solution de cette équation pour  $\nu = n$ ,  $n$  entier, est la fonction de Hankel de première espèce, notée  $H_n^1(kr)$ , telle que

$$x^2 (H_n^1)''(x) + x (H_n^1)'(x) + (x^2 - n^2) H_n^1(x) = 0.$$

La fonction  $v_n(r, \theta, t) = e^{-i\omega t + in\theta} H_n^1(kr)$  est solution de l'équation des ondes en dimension 2. Si nous nous plaçons en un point  $r \neq 0$ , on écrit (voir Watson [97])

$$k^{\frac{1}{2}} H_n^1(kr) = \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{ikr - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi} \sum_{m=0}^{\infty} c_m(r) k^{-m} + O(k^n r^n e^{-2kr}). \quad (1.1.4)$$

Cette expression s'appelle un développement asymptotique en  $k^{-1}$  lorsqu'on étudie le problème à grand nombre d'onde. La vitesse de l'onde étant fixée, il est équivalent de parler de problème à **haute fréquence**.

Pour comprendre la signification de la notion d'asymptotique pour cet exemple, on définit  $H_n^M(kr)$  comme la fonction obtenue en tronquant la série (1.1.4) à l'ordre  $M$  en  $k$ . On a formellement

$$(\Delta - c^{-2} \partial_{t^2}^2) [k^{\frac{1}{2}} H_n^M(kr) e^{-i\omega t + in\theta}] = O(k^{-M+1}),$$

où la signification du terme  $O$  doit être précisée.

La fonction  $e^{in\theta} H_n^1(kr)$  est une solution de l'équation de Helmholtz à laquelle on associe une suite de fonctions  $u_M$  qui ne sont pas solution de l'équation de Helmholtz mais "qui sont un meilleur candidat quand  $M$  tend vers  $+\infty$ ", au sens où  $(\Delta - c^{-2} \partial_{t^2}^2) u_M$  sera de plus en plus petit en  $k$ . Il se trouve que ces fonctions  $u_M$  approchent la solution  $e^{in\theta} H_n^1(kr)$  de l'équation de Helmholtz, mais la question est de savoir si de tels résultats sont généraux.

Dans ce chapitre et le suivant, on définit des solutions asymptotiques formelles, qui ne sont pas des solutions au sens usuel.

## 1.2 Définitions.

Nous définissons un développement asymptotique de la manière suivante :

**Définition 1.1** Soit une fonction  $b \in C^\infty(\Omega \times ]0, 1[)$  (si on choisit un petit paramètre asymptotique  $\varepsilon$ ), ou  $b \in C^\infty(\Omega \times ]1, +\infty[)$  (si on choisit un grand paramètre asymptotique  $k$ ).

Soit une suite  $b_j(y)$  de fonctions de  $C^\infty(\Omega)$ . La relation

$$b(y, \varepsilon) \simeq \sum b_j(y) \varepsilon^j$$

signifie que, pour tout entier  $m \geq 0$ , pour tout indice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  et pour tout compact  $K$  inclus dans  $\Omega$ , il existe une constante  $C(K, m, \alpha)$  (dont le comportement n'est pas précisé ici) telle que

$$\forall y \in K, \left| \partial_{y^\alpha}^\alpha (b(y, \varepsilon) - \sum_{j=0}^{j=m} b_j(y) \varepsilon^j) \right| \leq C(K, m, \alpha) \varepsilon^m.$$

La définition se transcrit aisément pour un grand paramètre asymptotique, ainsi que la définition pour  $k \geq k_0$  ou encore  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ . On définit aussi la notion d'équivalence asymptotique de deux fonctions  $b$  et  $c$  de  $C^\infty(]0, 1[ \times \Omega)$  :

**Définition 1.2** On dit que  $b(y, \varepsilon)$  et  $c(y, \varepsilon)$  sont asymptotiquement équivalentes si

$$\forall K \subset \Omega, \forall m \geq 0, \forall \alpha, \exists C(K, m, \alpha) > 0, \forall y \in K, \left| \partial_{y^\alpha}^\alpha (b(y, \varepsilon) - c(y, \varepsilon)) \right| \leq C(K, m, \alpha) \varepsilon^m.$$

Ceci indique que, **uniformément sur tout compact de  $\Omega$ , la différence  $b - c$  est à décroissance rapide en  $\varepsilon$  (ou à décroissance rapide en  $k$ ).**

Définissons les asymptotiques oscillantes. On introduit, cette fois, un grand paramètre  $k$  afin de souligner que la notion d'asymptotique est liée à un paramètre, mais que les résultats écrits avec un 'petit' paramètre sont inséparables de ceux écrits avec un 'grand' paramètre. Considérons par exemple

$$v(x, k) = a(x, k)e^{ikx}, \quad (1.2.5)$$

où  $a$  vérifie les hypothèses de la définition 1.1. Ses dérivées en  $x$  font apparaître des puissances de  $k$ , de sorte que

$$\partial_{x^\alpha}^\alpha v(x, k) \simeq e^{ikx} k^{|\alpha|} b_\alpha(x, k),$$

où  $b_\alpha$  est encore de la forme de la définition 1.1. Pour prendre en compte dans les développements asymptotiques les fonctions de la forme (1.2.5), il est alors utile d'introduire la notion d'équivalence entre deux fonctions oscillantes, exprimée dans la

**Définition 1.3** *Soit  $a$  et  $b$  deux fonctions vérifiant les hypothèses de la définition 1.1. Soit  $\phi$  et  $\psi$  deux fonctions de classe  $C^\infty$ .*

*On dit que  $a(x, k)e^{ik\phi(x)} \simeq b(x, k)e^{ik\psi(x)}$  lorsque*

$$\begin{cases} \phi(x) = \psi(x) + \psi_0 \\ a(x, k)e^{ik\psi_0} \simeq b(x, k) \end{cases}$$

Un résultat, connu sous le nom de lemme de Borel, indique que tout développement asymptotique formel est associé à une fonction  $C^\infty$ . Il fait l'objet de la section suivante.

### 1.3 Lemme de Borel

**Théorème 1.1** • *Soit  $b_j$  une suite de nombres complexes. Il existe une fonction  $b(\varepsilon)$ , de classe  $C^\infty$ , telle que, pour tout  $M \geq 0$ ,  $b$  admette pour développement de Taylor en 0 à l'ordre  $M$*

$$b(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{j=M} b_j \varepsilon^j + \varepsilon^M o(1).$$

• *Soit  $b_j(y)$  une suite de fonctions  $C^\infty(\Omega)$ . Il existe une fonction  $b(y, \varepsilon) \in C^\infty(\Omega \times [0, 1])$  telle que*

$$b(y, \varepsilon) \simeq \sum b_j(y) \varepsilon^j.$$

Le lemme de Borel prouve l'existence d'une fonction  $b(y, \varepsilon)$  telle que  $b(y, \varepsilon) \simeq \sum_j b_j(y) \varepsilon^j$  pour une suite **quelconque** de fonctions  $C^\infty$   $b_j(y)$ , mais ne prouve pas l'existence de la somme, même ponctuelle, des  $b_j(y) \varepsilon^j$ . En fait, on considère une fonction  $b$  qui soit égale à une série infinie absolument convergente ainsi que toutes ses dérivées, et qui approche bien terme à terme la série formelle. Il n'y a pas non plus unicité, comme le montre l'exemple de la fonction  $f(x) = 1_{x \geq 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$ . En effet,  $\sum 0x^n$  peut être associée à  $f$  puisque le développement de Taylor de  $f$  en 0 est 0.

**Preuve par construction** On montre le premier point du Théorème. Pour cela, on se donne une fonction  $\chi(\varepsilon)$  dans  $C_0^\infty(]-1, 1[)$ , identiquement 1 sur  $[-0.5, 0.5]$ . On choisit convenablement (ce qui est fait ci-dessous) une suite croissante de nombres positifs  $L_j$  plus grands que 1, et on écrit

$$b(\varepsilon) = \sum_j \varepsilon^j \chi(L_j \varepsilon) b_j.$$

Sa série de Taylor en  $\varepsilon$  en 0 est  $\sum_j \varepsilon^j b_j$ .

On choisit les  $L_j$ , pour  $j \geq 1$ , par l'inégalité

$$\max_{m \leq j-1} \left| \frac{\partial^m}{\partial \varepsilon^m} (\chi(L_j \varepsilon) \varepsilon^j b_j) \right| \leq 2^{-j}. \quad (1.3.6)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^m}{\partial \varepsilon^m} (\chi(L_j \varepsilon) \varepsilon^j b_j) \right| &\leq |b_j| \sum_{p=0}^{p=m} C_m^p L_j^{m-p} \chi^{(m-p)}(L_j \varepsilon) \frac{j!}{(j-p)!} \varepsilon^{j-p} \\ &\leq |b_j| \left( \sum_{p=0}^{p=m} C_m^p L_j^{m-j} \|\chi^{(m-p)}\| \frac{j!}{(j-p)!} \right) \\ &\leq \frac{|b_j|}{L_j} \left( \sum_{p=0}^{p=m} C_m^p L_j^{m-j+1} \|\chi^{(m-p)}\| \frac{j!}{(j-p)!} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $m \leq j-1$  et  $L_j > 1$ , on trouve

$$\max_{m \leq j-1} \left| \frac{\partial^m}{\partial \varepsilon^m} (\chi(L_j \varepsilon) \varepsilon^j b_j) \right| \leq \frac{|b_j|}{L_j} 2^j j! \|\chi\|_{j-1}$$

où  $\|\chi\|_j$  est la norme  $H^j$  de  $\chi$ . On choisit alors

$$L_j \geq 2^j j! \|\chi\|_j |b_j|.$$

On obtient ainsi (1.3.6).

On a donc, pour  $m$  fixé, convergence uniforme de

$$\sum_{j \geq m+1} \frac{\partial^m}{\partial \varepsilon^m} (\chi(L_j \varepsilon) \varepsilon^j b_j).$$

La fonction  $b$ , somme de  $b_0 \chi(L_0 \varepsilon)$  et de la somme précédente pour  $m = 0$  existe et est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On écrit

$$\begin{aligned} b(\varepsilon) - \sum_{j=0}^{j=m} b_j \varepsilon^j &= b(\varepsilon) - \sum_{j=0}^m b_j \chi(L_j \varepsilon) \varepsilon^j + \sum_{j=0}^m b_j [\chi(L_j \varepsilon) - 1] \varepsilon^j \\ &= \varepsilon^{m+1} \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+m+1} \chi(L_{j+m+1} \varepsilon) \varepsilon^j + \sum_{j=0}^m b_j [\chi(L_j \varepsilon) - 1] \varepsilon^j \\ &= \varepsilon^{m+1} S_1(\varepsilon) + S_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

La fonction  $S_1$  est majorée par

$$\|\chi\|_{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|b_{j+m+1}|}{L_{j+m+1}^{j+1}} \leq \|\chi\|_{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|b_{j+m+1}|}{L_{j+m+1}} \leq \|\chi\|_{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+m+1} \|\chi\|_{j+m+1} (j+m+1)!} \leq \frac{1}{2^m}.$$

Le deuxième terme  $S_2(\varepsilon)$  de la décomposition est nul sur  $|\varepsilon| \leq \frac{1}{L_m}$ . Ainsi, pour  $1 \geq |\varepsilon| \geq \frac{1}{L_m}$ ,  $|\frac{S_2(\varepsilon)}{\varepsilon^m}| \leq \max_{|\varepsilon| \leq 1} |S_2(\varepsilon)| L_m^m$ , et, pour  $\varepsilon \geq 1$ ,  $|\sum_{j=0}^{j=m} \varepsilon^{j-m} (\chi(L_j \varepsilon) - 1)| \leq (\|\chi\| + 1) \sum_{j=0}^m |b_j|$ . On en déduit

$$S_2(\varepsilon) \leq D(m) \varepsilon^m.$$

On a prouvé l'inégalité :

$$\sup_{[-1,1]} (b(\varepsilon) - \sum_{j=0}^{j=m} b_j \varepsilon^j) \leq C_m \varepsilon^m.$$

La fonction  $b$  est de classe  $C^{\infty}$  et admet  $\sum b_j \varepsilon^j$  comme développement asymptotique en  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pour le deuxième point du théorème, on se donne un compact  $K$  en  $y$  et un ordre de troncature  $m$  de la série asymptotique.

On introduit, comme dans la preuve du premier point du théorème  $b_j(y) \chi(L_j \varepsilon) \varepsilon^j$ . On vérifie que, sur  $K$  et pour  $|\varepsilon| \leq L_j^{-1}$

$$|\partial_y^{|\alpha|+m} (b_j(y) \chi(L_j \varepsilon) \varepsilon^j)| \leq \|b_j\|_{|\alpha|} \alpha_{m,q} L_j^{-1}.$$

En remplaçant  $b_j$  dans la démonstration de la première partie par la norme  $L^{\infty}$  de  $b_j$  sur  $K$ , on obtient donc un choix des  $L_j$  assurant la convergence de la série infinie en  $\varepsilon$ . Cette convergence permet la construction d'une fonction  $b(y, \varepsilon)$  de  $C^{\infty}([-1, 1], C^{\infty}(K))$ . On a de plus un choix des  $L_j^p$  assurant la convergence uniforme de la série construite ainsi avec les

$\chi(L_j^p \varepsilon)$  et de toutes ses dérivées en  $\alpha$  d'ordre au plus  $p$ . Enfin les deux sommes partielles à l'ordre  $m$  sont égales lorsque  $|\varepsilon| \leq (2L_j^p)^{-1}$ . On évalue ensuite

$$b(y, k) - b_M(y, k) = \varepsilon^M \sum_{j=M+1}^{+\infty} \varepsilon^{j-M} \chi(L_j^p \varepsilon) a_j(y) + \sum_{j=0}^M \varepsilon^j (\chi(L_j^p \varepsilon) - 1) b_j(y),$$

ainsi que toutes les dérivées jusqu'à l'ordre  $|\alpha| = p$  inclus.

Il est facile à voir que le premier terme dans une décomposition semblable de  $\partial_{x^\alpha}^{| \alpha |} (b(y, k) - b_M(y, k))$  est majoré par  $\varepsilon^M 2^{-M}$ , et le deuxième terme est nul dans  $[-(2L_M^p)^{-1}, (2L_M^p)^{-1}]$ . Par un argument similaire au précédent, on peut trouver une constante  $C(K, M, p)$  telle que la dérivée  $\alpha$  du deuxième terme soit majorée par  $C(K, M, p) \varepsilon^M$  (on divise et comme 0 n'est pas un pôle, on a le résultat).

On peut alors appliquer le raisonnement précédent, qui permet de comparer cette fonction  $b(y, \varepsilon)$  avec la somme  $\sum_{j=0}^m b_j(y) \varepsilon^j$ . On contrôle alors

$$\partial_{y^\alpha}^{| \alpha |} (b(y, \varepsilon) - \sum_{j=0}^{j=m} b_j(y) \varepsilon^j)$$

par la constante utilisée précédemment  $\sup_{[-1,1]/[-L_j^{-1}, L_j^{-1}]} (\varepsilon^{-m} S_2(y, \varepsilon))$ . Ceci achève la preuve du Théorème 1.1.

## 1.4 L'équation de Helmholtz

Considérons à nouveau l'équation des ondes  $(\Delta - \partial_{t^2}^2)u(x, t) = 0$ . On suppose que la solution de cette équation est une distribution tempérée en temps à valeurs dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ . Sa transformée de Fourier partielle en temps, notée  $\hat{u}(x, k)$ , existe alors et on vérifie que

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{u}(x, k), \phi(x) \rangle &= \langle \hat{u}(x, k), \Delta \phi(x) \rangle = \int e^{ikt} \langle u(x, t), \Delta \phi(x) \rangle dt \\ &= \int e^{ikt} \langle \Delta u(x, t), \phi(x) \rangle dt = \int e^{ikt} \langle \partial_{t^2}^2 u(x, t), \phi(x) \rangle dt \\ &= \int -k^2 e^{ikt} \langle u(x, t), \phi(x) \rangle dt = -k^2 \langle \hat{u}(x, k), \phi(x) \rangle \end{aligned}$$

donc  $(\Delta + k^2)\hat{u}(x, k) = 0$ . Cette équation s'appelle l'équation de Helmholtz scalaire.

Réciproquement, si  $\hat{u}(x, k)$  est une distribution solution de l'équation de Helmholtz, alors

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-ikt} \hat{u}(x, k) dk$$

est solution de l'équation des ondes. Une solution asymptotique de l'équation de Helmholtz scalaire est une fonction oscillante en  $k$ , de la forme

$$a(x, k) e^{ik\phi(x)},$$

telle que  $a(x, k) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) (ik)^{-j}$ . Nous n'envisageons que le cas où  $a_0$  n'est pas identiquement nulle, ce qui revient à étudier les solutions non nulles (en effet, si il n'existe pas de  $j_0$  tel que  $a_{j_0}$  soit non identiquement nul, alors tous les termes du développement asymptotique de  $a$  sont nuls, c'est-à-dire  $a \simeq 0$ , et si il existe  $j_0$  tel que, pour  $j < j_0$   $a_j = 0$  et  $a_{j_0}$  non identiquement nul, on peut diviser  $u(x, k)$  par  $(ik)^{-j_0}$  et on se ramène alors, puisque l'équation est linéaire, à une solution dont le terme dominant est non nul). La notion d'asymptotique s'entend lorsque  $k$  tend vers l'infini, et on parle alors de solution de plus en plus oscillante. En fait, le seul résultat que cette construction asymptotique donne directement est, si  $a_M(x, k) = \sum_{j=0}^{j=M} k^{-j} a_j(x)$

$$(\Delta + k^2)[a_M(x, k) e^{ik\phi(x)}] = k^{-M} b_M(x) e^{ik\phi(x)}.$$

On note cette égalité de manière condensée



$$(\Delta + k^2)(a(x, k)e^{ik\phi(x)}) = O(k^{-\infty}) \quad (1.4.7)$$

ou

$$(\Delta + k^2)(a(x, k)e^{ik\phi(x)}) \simeq 0.$$

Le problème de **résolution de l'équation par l'intermédiaire d'une solution asymptotique** se met sous la forme

**Définition 1.4** Soit  $v(x, k) \simeq a(x, k)e^{ik\phi(x)}$  une solution asymptotique locale de l'équation de Helmholtz, qui vérifie (1.4.7). Soit  $\Sigma_0$  une hypersurface. On dit que  $u$  est solution de l'équation  $(\Delta + k^2)u(x, k) = 0$  avec la condition initiale<sup>1</sup>  $v(x, k)|_{\Sigma_0} = u(x, k)|_{\Sigma_0}$  lorsque il existe  $r(x, k)$  tel que

$$\begin{cases} r|_{\Sigma_0} = 0 \\ (\Delta + k^2)(v + r) = 0 \end{cases}$$

ou, de manière équivalente formelle,  $r = (\Delta + k^2)^{-1}(O(k^{-\infty}))$ .

Notons que le problème que l'on étudie ici est un problème de condition de Dirichlet et non un problème de Cauchy.

Pour l'instant, nous écrivons uniquement l'asymptotique formelle. En remarquant la forme classique de l'opérateur Laplacien (soit  $\Delta = \text{div}(\text{grad})$ ), on vérifie, compte-tenu des relations

$$\begin{aligned} \text{grad}(fg) &= f\text{grad}(g) + g\text{grad}(f) \\ \text{div}(fV) &= \text{grad}f \cdot V + f\text{div}(V) \end{aligned}$$

que

$$\begin{aligned} \Delta(ae^{ik\phi}) &= \text{div}(e^{ik\phi}(\text{grada} + ik\text{grad}\phi)) \\ &= [ik\text{grad}\phi \cdot (\text{grada} + ik\text{grad}\phi) + \text{div}(\text{grada} + ik\text{grad}\phi)]e^{ik\phi} \end{aligned}$$

soit

$$\Delta(ae^{ik\phi}) = e^{ik\phi}(\Delta a + ik(2\text{grada} \cdot \text{grad}\phi + a\Delta\phi) - k^2|\text{grad}\phi|^2 a). \quad (1.4.8)$$

L'égalité :

$$(\Delta + k^2)(a(x, k)e^{ik\phi(x)}) = O(k^{-\infty}) \simeq 0$$

implique :

$$\begin{cases} a_0(1 - |\text{grad}\phi|^2) = 0 \\ a_1(1 - |\text{grad}\phi|^2) + 2\text{grada}_0 \cdot \text{grad}\phi + (\Delta\phi)a_0 = 0 \\ a_j(1 - |\text{grad}\phi|^2) + 2\text{grada}_{j-1} \cdot \text{grad}\phi + (\Delta\phi)a_{j-1} + \Delta a_{j-2} = 0, j \geq 2. \end{cases} \quad (1.4.9)$$

Il est clair que lorsque  $a_0$  n'est pas identiquement nul, alors  $|\text{grad}\phi|$  est de norme 1 sur le support de  $a_0$ . On résout alors les autres égalités sur le support de  $a_0$ , et on obtient

$$2\text{grada}_0 \cdot \text{grad}\phi + (\Delta\phi)a_0 = 0,$$

puis

$$2\text{grada}_{j-1} \cdot \text{grad}\phi + (\Delta\phi)a_{j-1} + \Delta a_{j-2} = 0.$$

Les équations eikonale et de transport sont résumées dans le

---

<sup>1</sup>Ici, le mot initiale est un abus de langage bien pratique, qui sera justifié dans le chapitre 11.4 lorsqu'on étudiera les ondes conormales analytiques.

**Lemme 1.1** *On introduit les opérateurs  $L_1$  et  $L_2$  définis sur  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  par  $L_1(u) = 2\text{grad}\phi \cdot \text{grad}u + (\Delta\phi)u$  et  $L_2(u) = \Delta u$ , (l'indice de chaque opérateur fait référence à son ordre). On introduit la fonction  $L_0$  sur les champs de vecteurs dans  $\mathbb{R}^n$  telle que  $L_0(V) = 1 - |V|^2$ . Les équations précédentes s'écrivent*

$$\begin{cases} L_0(\text{grad}\phi) = 0 \\ L_1(a_0) = 0 \\ L_1(a_j) = -L_2(a_{j-1}). \end{cases}$$

*La première égalité s'appelle l'équation **eikonale**.*

*La deuxième égalité s'appelle l'équation de **transport** homogène.*

*La troisième égalité est la même équation de transport, mais inhomogène.*

Nous ferons un usage fréquent de ces équations. Un traitement des équations de transport dans le cas scalaire sera fait dans le chapitre 3.

**Remarque** Lorsque  $\phi$  est solution de l'équation eikonale  $|\nabla\phi|^2 = 1$ , la valeur de  $\phi$  sur la surface  $\Sigma_0$ , et la condition  $\nabla\phi(x)$ ,  $x \in \Sigma_0$  n'est pas tangent à  $\Sigma_0$  en  $x$  permettent de déterminer localement (dans un cas générique) la phase  $\phi$ . En effet, on est dans le cas où les courbes intégrales du champ de vecteur  $\nabla\phi$  sont transverses à  $\Sigma_0$ . On paramètre la surface  $\Sigma_0$  par un système unitaire de coordonnées locales  $u_1, \dots, u_{d-1}$ . La phase  $\phi$  restreinte à  $\Sigma_0$  est alors donnée, au voisinage de  $x_0$ , par  $\psi(u)$ . La condition de transversalité est équivalente à  $|\nabla_u\phi| < 1$ . L'équation  $\phi(x) = \phi(x_0)$  peut être résolue localement en fonction de la donnée de  $\psi$ . On note  $\Sigma = \{x, \phi(x) = \phi(x_0)\}$ .

Donnons alors une interprétation de  $\sigma$ . On suppose que la fonction  $u(x, k) = a(x, k)e^{ik\phi(x)}$  est holomorphe en  $k$  dans le demi plan complexe  $\text{Im}k < 0$ . En considérant la transformée de Fourier inverse en temps (et en appliquant le théorème de Paley-Wiener-Schwartz) on vérifie que  $v(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(u)(x, -\phi(x_0))$  est supportée d'un seul côté de  $\Sigma$ . En effet, on peut déformer le contour d'intégration de la transformée de Fourier inverse en  $\mathbb{R} - ia$ ,  $a > 0$ . Comme le résultat est indépendant de  $a$  (par holomorphicité) et que la limite lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$  est nulle pour tout  $(x, t)$  tel que  $\phi(x) + t < 0$ , on trouve que  $v$  est nulle en un point de  $\phi(x) + t < 0$ . On verra que cela revient à écrire des conditions de Cauchy sur  $v$  et sur sa dérivée à  $t = -\phi(x_0)$ .

## 1.5 Généralisation.

Nous remplaçons ici  $\Delta$  par un opérateur différentiel  $P(x, \partial_x)$  à coefficients  $C^\infty$  réels d'ordre 2, que nous écrivons :

$$P(x, \partial_x) = \sum_{j,l} a_{jl}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} + \sum_j b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x). \quad (1.5.10)$$

Nous introduisons la partie différentielle de  $P(x, \partial_x)$ , notée  $P^b(x, \partial_x)$  (suivant les notations de Taylor [93]), égale à

$$P^b(x, \partial_x) = P(x, \partial_x) - c(x). \quad (1.5.11)$$

Le problème de propagation est dit hyperbolique (et l'opérateur  $P - \partial_{t^2}^2$  est alors dit hyperbolique) quand  $A$  est une forme bilinéaire définie positive. Pour écrire le développement asymptotique formel, nous n'avons pas besoin de cette hypothèse d'ellipticité sur  $A$ , mais nous en aurons besoin pour prouver que le développement asymptotique permet d'obtenir une solution. Nous associons à  $A$  sa forme bilinéaire canonique, en tout point  $x$  :

$$A(\xi, \eta) = \sum_{j,l} a_{jl}(x) \xi_j \eta_l. \quad (1.5.12)$$

La relation

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} (a(x, k) e^{ik\phi(x)}) = \left[ \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_l} + ik \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \frac{\partial a}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial a}{\partial x_l} \right) + ika \partial_{x_j x_l}^2 \phi - k^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} a \right] e^{ik\phi}$$

permet d'écrire

$$P(a e^{ik\phi}) = [Pa + ik[2A(\text{grad}\phi, \text{grad}a) + P^b(\phi)a] - k^2 a A(\text{grad}\phi, \text{grad}\phi)] e^{ik\phi}.$$

L'opérateur de transport d'ordre 1 associé à la forme bilinéaire est :

$$L_1(a) = 2A(\text{grad}\phi, \text{grad}a) + P^b(\phi)a. \quad (1.5.13)$$

Nous vérifions que les équations eikonale et de transport associées à  $P + k^2$  sont

$$\begin{cases} 1 - A(\text{grad}\phi, \text{grad}\phi) = 0 \\ L_1(a_0) = 0 \\ L_1(a_j) = -P(a_{j-1}). \end{cases}$$

On remarque que l'opérateur  $L_1$  s'écrit  $\frac{\partial A(x, \xi, \xi)}{\partial \xi} |_{\xi = \text{grad}\phi} \frac{\partial}{\partial x} + P^b(\phi)$ .

Nous résumons les résultats

**Lemme 1.2** Soit  $P$  l'opérateur défini par (1.5.10). On lui associe la forme bilinéaire  $A$  (1.5.12), la partie différentielle  $P^b$  de  $P$  (1.5.12) et l'opérateur de transport  $L_1$  (1.5.13). Nous avons l'égalité

$$e^{-ik\phi(x)} P(a(x, k) e^{ik\phi(x)}) \simeq k^2 (1 - A(\text{grad}\phi, \text{grad}\phi)) a(x, k) + ik L_1(a_0) + \sum_{j=0} (ik)^{-j+1} (L_1(a_j) + P(a_{j-1}))$$

lorsque  $a(x, k) \simeq \sum_{j=0} a_j(x) (ik)^{-j}$ .

Dans le cas où la matrice  $a_{ij}(x)$  est symétrique définie positive, l'opérateur  $P(x, \partial_x)$  est, à un champ de vecteurs et une fonction constante près, un opérateur de type laplacien comme introduit dans l'exercice 1.2. On considère la métrique  $g_{ij}(x) = a_{ij}(x)$ . Le laplacien associé à cette métrique est

$$\begin{aligned} \Delta_a f &= (\det a(x))^{-\frac{1}{2}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sum_l a_{lj}(x) (\det a(x))^{\frac{1}{2}} \frac{\partial f}{\partial x_l} \right] \\ &= \sum_l (\det a(x))^{-\frac{1}{2}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ a_{lj}(x) (\det a(x))^{\frac{1}{2}} \frac{\partial f}{\partial x_l} \right] + \sum_{l,j} a_{lj}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_j}. \end{aligned}$$

L'opérateur  $P - \Delta_a$  est un opérateur d'ordre 1, associé à un champ de vecteurs  $V$ , tel que  $a, V$ , et  $c$  sont définis de manière unique par  $P^b - \Delta_a = V \cdot \text{grad} + c$ .

## 1.6 Les équations de Maxwell harmoniques

Dans cette section, nous étudions la résolution asymptotique d'un système d'équations aux dérivées partielles couplées : le système des équations de Maxwell harmoniques. L'emploi du terme "harmonique" provient du fait que l'on a considéré la transformée de Fourier en temps de la solution du système des équations de Maxwell dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_t$ .

Nous considérons ainsi les équations ( $\varepsilon, \mu$  indépendants de la position,  $\omega$  désigne la fréquence ou variable de Fourier en temps)

$$\begin{cases} \text{rot}E + i\omega\mu H = 0, \\ \text{rot}H - i\omega\varepsilon E = 0, \\ \text{div}E = 0, \\ \text{div}H = 0. \end{cases}$$

**Lemme 1.3** Dans la représentation

$$E_j(x) = e_j(x, \omega)e^{i\omega\phi(x)},$$

$$H_j(x) = h_j(x, \omega)e^{i\omega\phi(x)},$$

l'équation eikonale associée à ce système est

$$|\text{grad}\phi|^2 = \varepsilon\mu,$$

et les équations de transport sont

$$\begin{cases} \text{grad}\phi \wedge \text{rote}^0 - \mu\text{roth}^0 - \text{dive}^0\text{grad}\phi = 0 \\ \text{grad}\phi \wedge \text{roth}^0 - \text{div}h^0\text{grad}\phi + \varepsilon\text{rote}^0 = 0. \end{cases}$$

Nous choisissons délibérément dans ces expressions de ne pas considérer l'équation de Helmholtz vectorielle obtenue directement en remplaçant dans l'égalité  $\text{rot}E + i\omega\mu H = 0$   $E = (i\omega\varepsilon)^{-1}\text{rot}H$  puis en utilisant la condition de divergence nulle pour avoir  $\text{rot}\text{rot}E = \Delta E - \text{graddiv}E$ .

Nous présentons dans le chapitre 13 consacré aux propriétés des équations de Maxwell écrites sous forme intrinsèque les calculs de développement asymptotiques directs obtenus à partir des équations du Lemme 1.3.

Comme  $\text{rot}(fe^{i\omega\phi}) = (\text{rot}f + i\omega\text{grad}\phi \wedge f)e^{i\omega\phi}$  et de  $\text{div}(fe^{i\omega\phi}) = (\text{div}f + i\omega f.\text{grad}\phi)e^{i\omega\phi}$ , on obtient

$$\begin{cases} \text{rote} + i\omega(\text{grad}\phi \wedge e + \mu h) = 0, \\ \text{roth} + i\omega(\text{grad}\phi \wedge h - \varepsilon e) = 0, \\ \text{div}h + i\omega h.\text{grad}\phi = 0, \\ \text{dive} + i\omega e.\text{grad}\phi = 0. \end{cases} \quad (1.6.14)$$

La première équation implique  $i\omega\mu h = -\text{rote} - i\omega\text{grad}\phi \wedge e$ . En multipliant la deuxième équation par  $i\omega\mu$ , on trouve

$$\omega^2\mu\varepsilon e + i\omega\text{grad}\phi \wedge (i\omega\mu h) + \text{rot}(i\omega\mu h) = 0.$$

On en déduit alors

$$\omega^2\varepsilon\mu e - i\omega\text{grad}\phi \wedge (\text{rote} + i\omega\text{grad}\phi \wedge e) - \text{rot}(\text{rote} + i\omega\text{grad}\phi \wedge e) = 0.$$

En utilisant l'égalité

$$\text{grad}\phi \wedge (\text{grad}\phi \wedge e) = -|\text{grad}\phi|^2 e + (e.\text{grad}\phi)\text{grad}\phi \quad (1.6.15)$$

on trouve

$$\omega^2[\varepsilon\mu e - |\text{grad}\phi|^2 e + (e.\text{grad}\phi)\text{grad}\phi] - i\omega\text{grad}\phi \wedge \text{rote} - \text{rot}(\text{rote} + i\omega\text{grad}\phi \wedge e) = 0.$$

En remplaçant  $(e.\text{grad}\phi)$  grâce à la quatrième équation du système, on obtient

$$\omega^2[\varepsilon\mu e - |\text{grad}\phi|^2 e] + i\omega[\text{divegrad}\phi - \text{grad}\phi \wedge \text{rote} - \text{rot}(\text{grad}\phi \wedge e)] - \text{rotrote} = 0.$$

Lorsque l'on suppose que

$$e = \sum e^j (i\omega)^{-j}, h = \sum h^j (i\omega)^{-j},$$

avec  $e^0 \neq 0$ , on en déduit l'équation eikonale du lemme 1.3 en annulant le terme de plus haut degré en  $\omega$  de cette égalité, après avoir supposé que  $e$  admet un développement asymptotique.

L'obtention de l'équation eikonale par cette méthode, on le voit, est relativement aisée. Les relations entre les termes  $e$  et  $h$ , quant à elles, sont plus difficiles à obtenir grâce à ces méthodes de substitution. Nous utilisons une méthode directe, en remplaçant par leur développement asymptotique les quantités  $e$  et  $h$  dans le système avant substitution. Nous supposons que  $e$  et  $h$  donnent des contributions identiques en puissances de  $\omega$ . Si cela n'était pas le cas, alors on aurait soit  $\text{grad}\phi \wedge e = 0$ , soit  $h = 0$  d'après la première équation, selon que  $e$  domine  $h$  ou l'inverse. Si  $e$  est plus important que  $h$ , alors, selon la seconde équation,  $e = 0$ , ce qui donne une solution nulle. Donc  $e$  et  $h$  ont un terme principal du même ordre.

Le système des équations de Maxwell entraîne alors

$$\begin{cases} \text{grad}\phi \wedge e^0 + \mu h^0 = 0, \\ \text{grad}\phi \wedge h^0 - \varepsilon e^0 = 0, \\ e^0 \cdot \text{grad}\phi = 0, \\ h^0 \cdot \text{grad}\phi = 0, \\ \text{rote}^j + (\text{grad}\phi \wedge e^{j+1} + \mu h^{j+1}) = 0, \\ \text{roth}^j + (\text{grad}\phi \wedge h^{j+1} - \varepsilon e^{j+1}) = 0, \\ \text{div}e^j + e^{j+1} \cdot \text{grad}\phi = 0, \\ \text{div}h^j + h^{j+1} \cdot \text{grad}\phi = 0. \end{cases} \quad (1.6.16)$$

La relation (1.6.15) permet de décomposer  $e$  en utilisant le vecteur normé  $t = \frac{\text{grad}\phi}{|\text{grad}\phi|}$  :

$$e = (e \cdot t)t - t \wedge (t \wedge e).$$

Il est donc logique de considérer un système où  $t \wedge e$  et  $e \cdot t$  sont connus simultanément pour calculer la solution. En calculant  $\text{grad}\phi \wedge (\text{grad}\phi \wedge (e, h))$  comme donné par le système ci-dessus, on obtient comme système à partir des deux premières relations

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{grad}\phi \wedge e^{j+1} \\ \text{grad}\phi \wedge h^{j+1} \end{pmatrix} - |\text{grad}\phi|^2 \begin{pmatrix} e^{j+1} \\ h^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{div}e^j \\ \text{div}h^j \end{pmatrix} \cdot \text{grad}\phi - \begin{pmatrix} \text{grad}\phi \wedge \text{rote}^j \\ \text{grad}\phi \wedge \text{roth}^j \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que  $e_0$  et  $h_0$  sont orthogonaux à  $\text{grad}\phi$ , puis en utilisant (1.6.15) à  $(\varepsilon\mu - |\text{grad}\phi|^2)h^0 = 0$ . Si  $h^0$  était égal à 0, alors  $e^0$  serait aussi égal à 0. On retrouve l'équation eikonale :

$$|\text{grad}\phi|^2 = \varepsilon\mu$$

Utilisant l'équation eikonale, le premier terme du système se réécrit sous la forme

$$e^0 = \varepsilon^{-1} \text{grad}\phi \wedge h^0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} t \wedge h^0. \quad (1.6.17)$$

Notons que, dans ce cas, l'annulation du terme d'ordre 0 conduit à l'équation eikonale ainsi qu'à une relation entre les premiers termes de  $e$  et de  $h$ . L'équation de transport est obtenue par l'annulation du terme d'ordre suivant. En effet, si nous considérons les équations reliant  $\text{rote}^0, \text{roth}^0$  à  $e^1, h^1$ , et faisant agir  $\text{grad}\phi \wedge$  sur ces équations, on trouve

$$\text{grad}\phi \wedge \text{rote}^0 + \text{grad}\phi \wedge (\text{grad}\phi \wedge e^1) + \mu \text{grad}\phi \wedge h^1 = 0,$$

ce qui donne, en remplaçant  $\text{grad}\phi \wedge h^1$  par  $\varepsilon e^1 - \text{roth}^0$ , l'équation (obtenue en utilisant la relation  $\text{div}e^0 + e^1 \cdot \text{grad}\phi = 0$ , l'équation eikonale et (1.6.15))

$$\begin{cases} \text{grad}\phi \wedge \text{rote}^0 - \mu \text{roth}^0 - \text{div}e^0 \text{grad}\phi = 0 \\ \text{grad}\phi \wedge \text{roth}^0 - \text{div}h^0 \text{grad}\phi + \varepsilon \text{rote}^0 = 0 \end{cases} \quad (1.6.18)$$

Ces deux équations sont les équations de transport sur  $e^0, h^0$ . Nous avons démontré le lemme 1.3.

Pour se ramener aux équations de transport classiques (chaque coordonnée est solution d'une équation de Helmholtz scalaire, et les équations successives sur chacun des termes du

développement asymptotique sont données par (1.4.9)), il suffit pour cela de remplacer la relation  $\mu h^0 = -\text{grad}\phi \wedge e^0$  dans la première égalité de (1.6.18). Ceci donne

$$\text{grad}\phi \wedge \text{rote}^0 + \text{rot}(\text{grad}\phi \wedge e^0) - \text{div}^0 \text{grad}\phi = 0.$$

On vérifie que  $h^0$  suit la même équation de transport que  $e^0$ .

Un calcul simple mais fastidieux conduit à trouver, pour la première coordonnée  $A_1$  de  $\text{grad}\phi \wedge \text{rote}^0 + \text{rot}(\text{grad}\phi \wedge e^0)$  :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \left( \frac{\partial e_1^0}{\partial x_2} - \frac{\partial e_2^0}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \left( \frac{\partial e_3^0}{\partial x_1} - \frac{\partial e_1^0}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x_1} e_2^0 - \frac{\partial\phi}{\partial x_2} e_1^0 \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x_3} e_1^0 - \frac{\partial\phi}{\partial x_1} e_3^0 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} (\text{grad}\phi \cdot e^0) - \Delta\phi e_1^0 + \text{div}^0 \frac{\partial\phi}{\partial x_1} - 2\text{grad}\phi \cdot \frac{\partial e^0}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

On en déduit les équations de transport pour chaque terme  $e_p^0$ ,  $p = 1, 2, 3$  :

$$[2\nabla\phi \cdot \nabla + \Delta\phi]e_p^0 = 0, e^0 \cdot \nabla\phi = 0.$$

Cette méthode, on l'a vu, est fastidieuse et peu générale car la forme des opérateurs divergence, rotationnel, gradient est très particulière. Nous verrons dans le chapitre 2 comment écrire de manière générale de tels calculs, utilisant des résultats de Lax et de Rauch.

## 1.7 Exercices

**Exercice 1.0 : Solution fondamentale de l'équation de Helmholtz dans  $\mathbb{R}^3$ .** 1) Démontrer que la fonction, définie pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , égale à

$$G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi ik|x-y|}$$

est une solution de

$$(\Delta_x + k^2)G(x, y) = \delta_{x=y}.$$

Que peut-on dire de  $H(x, y) = \frac{e^{-ik|x-y|}}{4\pi ik|x-y|}$  ?

2) Donner deux solutions de  $(\Delta + k^2)u(x) = f(x)$ . Interprétation ?

**Exercice 1.1 : développement asymptotique dans l'équation des ondes** Nous considérons l'équation des ondes

$$(\Delta - \partial_t^2)u(x, t) = 0,$$

dans laquelle, remarquons le, il n'y a pas de paramètre asymptotique. Rechercher une solution formelle de cette équation sous la forme

$$u(x, t) = a(x, t, k)e^{ik\phi(x, t)}.$$

Montrer que ce problème revient à la recherche de la solution de l'équation eikonale  $L_0(\text{grad}\psi) = 0$ . On étudiera les surfaces isophases de  $\phi$ .

**Exercice 1.2 : equation de Helmholtz dans un espace muni d'une métrique  $g$**  Dans cet exercice, nous introduisons la notion de Laplacien métrique, qui nous sera utile pour étudier les équations de Maxwell dans un ouvert, localement au voisinage d'un bord. Ce laplacien métrique est la bonne formulation des problèmes d'ondes ; il sera repris dans les chapitres 11 et 12.

L'espace  $X$  considéré, inclus dans  $\mathbb{R}^n$ , est muni de la métrique  $g(x)$ . Ceci se traduit, par définition, par le fait que le produit scalaire sur  $T_x X$ , espace tangent à  $X$  en  $x$  est

$$\langle u, v \rangle_g = \sum_{ij} g_{ij}(x) u_i v_j,$$

( $g(x)$ ) étant une matrice symétrique définie positive en tout point  $x$  et ( $u, v$ ) sont deux vecteurs tangents à  $X$  en  $x$ .

1) Etendre la définition du Laplacien en généralisant la relation

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) \Delta f(x) dx = - \int (\text{grad} f \cdot \text{grad} h) dx,$$

valable dans  $\mathbb{R}^n$  muni de la métrique identité (usuelle) pour des fonctions  $C^\infty$  à support compact. On notera  $\Delta_g$  le Laplacien métrique ainsi défini.

2) Ecrire le développement asymptotique formel de  $\Delta_g + k^2$

**Exercice 1.3 : Transformée de Radon et équation des ondes.** 1) On définit la transformée de Radon par  $(\omega, s) \in S^2 \times \mathbb{R}$

$$\mathcal{R}f(\omega, s) = \int_{x \cdot \omega = s} f(x) d\hat{x},$$

$\hat{x}$  étant la coordonnée sur l'hyperplan  $x \cdot \omega = s$ .

Vérifier que  $\mathcal{R}f(-\omega, -s) = \mathcal{R}f(\omega, s)$ , et que la transformée de Fourier et la transformée de Radon sont reliées, pour  $\omega$  de norme 1, par la relation  $\mathcal{F}f(t\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-its} \mathcal{R}f(s, \omega) ds$ .

2) Calculer  $\mathcal{R}^{-1}g(x)$  et  $\mathcal{R}(\Delta f)$  pour  $n$  impair.

3) Ecrire en terme de transformée de Radon la solution de l'équation des ondes dans  $\mathbb{R}^3$  en prouver que si les données initiales ont leur support dans  $|x| < R$ , alors la solution est nulle pour  $|x| < |t| + R$ . Peut-on donner un résultat identique avec le support du terme source ?

**Solution de l'exercice 1.0** 1) Nous vérifions que

$$\partial_{x_j} G(x, y) = \frac{x_j - y_j}{|x - y|} G(x, y) \left( ik - \frac{1}{|x - y|} \right)$$

Il vient alors

$$\partial_{x_j}^2 G(x, y) = \frac{G(x, y)}{|x - y|} \left( ik - \frac{1}{|x - y|} \right) + G(x, y) \frac{x_j - y_j}{|x - y|} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^3} + \frac{(x_j - y_j)^2}{|x - y|^2} \left( ik - \frac{1}{|x - y|} \right)^2 G(x, y).$$

En sommant, on obtient

$$\Delta_x G = G \left[ \frac{3}{|x - y|} \left( ik - \frac{1}{|x - y|} \right) - \left( ik - \frac{1}{|x - y|} \right) \frac{|x - y|^2}{|x - y|^3} + \frac{|x - y|^2}{|x - y|^3} + \left( ik - \frac{1}{|x - y|} \right)^2 \right].$$

Tous calculs faits, on obtient bien  $\Delta_x G(x, y) = -k^2 G(x, y)$ . De même, en prenant le complexe conjugué dans cette relation,  $\Delta_x H(x, y) = -k^2 H(x, y)$  pour  $x \neq y$ . La distribution  $(\Delta_x + k^2)G(x, y)$  est supportée en  $x = y$ . D'autre part, on écrit, en utilisant la forme du Laplacien en coordonnées sphériques, pour une fonction test indépendante de  $\theta, \phi$  :

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\Delta_x + k^2)G(x, y)\phi(|x|)dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ikr}}{4\pi ikr} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + k^2 \phi \right] 4\pi r^2 dr.$$

Le calcul explicite donne donc, après intégrations par parties en  $r$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty k^2 r \phi(r) dr - \int_0^\infty r \partial_r \phi \partial_r (e^{ikr}) dr &= \int_0^\infty k^2 r \phi(r) dr - \int_0^\infty r \partial_r \phi \partial_r (e^{ikr}) dr \\ &= k^2 \int_0^\infty r \phi(r) dr - ik \int_0^\infty r \partial_r \phi e^{ikr} dr \\ &= k^2 \int_0^\infty r \phi(r) dr + ik \int_0^\infty \phi \partial_r (r e^{ikr}) dr \\ &= ik \int_0^\infty \phi e^{ikr} dr. \end{aligned}$$

Le résultat en découle. 2) On vérifie immédiatement que, pour  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$u(x, k) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y) f(y) dy$$

est alors une solution de  $(\Delta + k^2)u = f$ , ainsi que  $v(x, k) = \int_{\mathbb{R}^3} H(x, y) f(y) dy$ .

**Solution de l'exercice 1.1** Les relations de la section 1.4 donnent

$$\Delta_x a + ik(2\nabla_x \phi \cdot \nabla_x a + a\Delta_x \phi) - k^2 |\nabla_x \phi|^2 a - \partial_{t^2} a - ik(2\partial_t \phi \cdot \partial_t a + a\partial_{t^2}^2 \phi) + k^2 (\partial_t \phi)^2 a = 0$$

L'équation eikonale est, ici,

$$(\partial_t \phi)^2 = |\nabla_x \phi|^2.$$

L'opérateur de transport qui correspond à  $L_1$  est

$$2(\nabla_x \phi, -\partial_t \phi) \cdot (\nabla_x, \partial_t) + (\Delta - \partial_{t^2}^2) \phi.$$

Nous supposons qu'il existe un point  $(x_0, t_0)$  tel que  $\phi(x_0, t_0) = 0$  et tel que  $\nabla_t \phi(x_0, t_0) \neq 0$  (ceci représente une surface qui se propage en temps). Nous supposons de plus que la phase est  $C^\infty$  au voisinage de ce point. Au voisinage de ce point, il existe une fonction  $\psi(x)$  telle que  $\psi(x_0) = t_0$  et  $\phi(x, t) = 0 \Leftrightarrow t = \psi(x)$ .

Comme  $\phi(x, u + \psi(x)) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ , la fonction  $a(x, u) = \int_0^1 \partial_t \phi(x, su + \psi(x)) ds$  vérifie

$$\phi(x, u + \psi(x)) = ua(x, u).$$

On en déduit  $\phi(x, t) = (t - \psi(x))b(x, t)$ , avec  $b(x, t) = a(x, t - \psi(x))$ , et  $b(x, \psi(x)) \neq 0$  dans un voisinage de  $x_0$ .

$$\nabla_x \phi(x, t) = -\nabla_x \psi(x) b(x, t) + (t - \psi(x)) \nabla_x b(x, t)$$

$$\partial_t \phi(x, t) = b(x, t) + (t - \psi(x)) \partial_t b(x, t).$$

La fonction  $\phi$  est solution de l'équation eikonale, donc

$$\begin{aligned} & b^2(x, t) + 2(t - \psi(x)) b(x, t) \partial_t b(x, t) + (t - \psi(x))^2 (\partial_t b(x, t))^2 \\ &= (\nabla_x \psi(x))^2 b^2(x, t) + (t - \psi(x))^2 (\nabla_x b)^2 - 2(t - \psi(x)) \nabla_x b \cdot \nabla_x \psi. \end{aligned}$$

En écrivant cette égalité, vraie pour tout  $t$ , pour  $t = \psi(x)$  et en utilisant  $b(x, \psi(x)) \neq 0$  dans un voisinage de  $x_0$ , on trouve

$$|\nabla_x \psi| = 1$$

et

$$2b\partial_t b + (t - \psi(x))(\partial_t b)^2 = -2\nabla_x b \nabla_x \psi + (t - \psi(x))(\nabla_x b)^2.$$

On a donc vérifié que  $\phi(x, t) = b(x, t)(t - \psi(x))$ , avec  $|\nabla_x \psi| = 1$ . Les surfaces isophase de  $\phi$  peuvent être définies de même en tout point  $(x_0, t_0)$  telles que  $\partial_t \phi(x_0, t_0) \neq 0$ . On a le résultat :

Pour tout  $(x_0, t_0)$ , il existe  $\psi_{\phi(x_0, t_0)}$  telle que  $|\nabla_x \phi_a| = 1$  pour tout  $a$  et telle que, localement au voisinage de  $(x_0, t_0)$  :

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \phi(x, t) = \phi(x_0, t_0)\} = S_{\phi(x_0, t_0)} = \{(x, \psi_{\phi(x_0, t_0)}(x)), x \in \mathbb{R}\}.$$



**Solution de l'exercice 1.2** 1) Le Laplacien métrique  $\Delta_g$  est défini par

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_g f)(x) h(x) d_g x = - \int_{\mathbb{R}^n} \langle \text{grad} f, \text{grad} h \rangle_g d_g x. \quad (1.7.19)$$

Voyons ce qu'il faut prendre pour forme volume  $d_g$ . En supposant que le volume local est indépendant par changement de variable, on considère un point  $x_0$  et on écrit les vecteurs propres de la matrice  $g(x_0)$  (unitaires pour la métrique identité sur  $\mathbb{R}^n$ ), qui forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ . En écrivant alors  $g(x_0)(u, u) = \sum \lambda_j U_j^2$ , les  $U_i$  étant les coordonnées de  $u$  dans la base propre de  $g(x_0)$ , l'élément de volume est alors  $\sqrt{\prod \lambda_i}$ , ce qui donne, en notant  $|g|$  le déterminant de la matrice  $g$

$$d_g V = |g(x_0)|^{\frac{1}{2}} dV.$$

On a ainsi construit l'élément de volume  $d_g x = |g|^{\frac{1}{2}} dx$ . Cette égalité locale est due entre autres

- i) au fait qu'une matrice diagonale soit associée à un élément de volume comme ci-dessus et
- ii) au fait que l'espace des n-formes linéaires alternées sur  $\mathbb{R}^n$  est de dimension 1, donc  $d_g x = \lambda dx$ .

Utilisant la relation (1.7.19), on a

$$\int_M (\Delta_g f)(x) h(x) |g(x)|^{\frac{1}{2}} dx = - \int_M \sum_{j,l} g_{jl}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_l} |g(x)|^{\frac{1}{2}} dx.$$

On en tire immédiatement, après intégration par parties

$$\Delta_g f(x) = |g(x)|^{-\frac{1}{2}} \sum_l \partial_{x_l} (|g(x)|^{\frac{1}{2}} \sum_j g_{jl}(x) \partial_{x_l} f).$$

On réécrit cette égalité en utilisant les notations  $\text{div}$  et  $\text{grad}$  pour les opérateurs  $\partial_{x_1} + \partial_{x_2} + \partial_{x_3}$  et  $(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$  :

$$\Delta_g = |g(x)|^{-\frac{1}{2}} \text{div}(|g(x)|^{\frac{1}{2}} g(\text{grad} f)).$$

Cette formulation de l'opérateur laplacien est invariante par changement de variable riemannien. Les opérateurs divergence et rotationnel associés à cette métrique seront définis ultérieurement, lors de l'étude des équations de Maxwell.

2) En introduisant  $a(x, k) e^{ik\phi(x)}$ , on vérifie que

$$\begin{aligned} e^{-ik\phi(x)} \Delta_g (a e^{ik\phi(x)}) &= |g|^{-\frac{1}{2}} \text{div} [|g|^{\frac{1}{2}} \sum_{j,l} g_{jl}(x) (\text{grad} a + ik \text{grad} \phi a)] \\ &= |g|^{-\frac{1}{2}} \text{div} [|g|^{\frac{1}{2}} g_{jl}(x) \text{grad} a] + ik |g|^{-\frac{1}{2}} \text{div} \text{grad} \phi a \\ &\quad + ik \sum_{j,l} g_{jl}(x) \text{grad} a \text{grad} \phi - k^2 \sum_{j,l} g_{jl}(x) \text{grad} \phi \text{grad} \phi \\ &\quad + ik |g|^{-\frac{1}{2}} \text{div} [|g|^{\frac{1}{2}} \sum_j g_{ij}(x) \text{grad}_j \phi] a. \end{aligned}$$

Cet exemple montre que le calcul formel de la section (1.5) est beaucoup plus rapide; la forme bilinéaire canonique associée à  $P$  est la forme métrique et s'écrit  $\sum_{j,l} g_{jl}(x) \xi_j \xi_l$ . Sa dérivée s'écrit donc

$$\partial_{\xi_j} (A(x, \xi, \xi)) = 2 \sum_l g_{jl}(x) \xi_l$$

Comme  $\Delta_g(1) = 0$ ,  $\Delta_g$  ne comporte pas de terme constant. Le résultat en découle alors. Nous reviendrons dans une autre partie du cours au problème d'obtenir une écriture intrinsèque pour cet opérateur et en déduire une formulation plus rapide des équations eikonale et de transport.

**Solution de l'exercice 1.3** 1) On écrit

$$\mathcal{F}f(t\omega) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-itx \cdot \omega} f(x) dx.$$

On peut donc, pour tout  $\omega \in S^2$  fixé, définir de manière indépendante de  $x \cdot \omega$  une mesure sur  $x \cdot \omega = s$ . Cette mesure est notée  $d\hat{x}_\omega$ , et  $dx = d\hat{x}_\omega ds$ . On vérifie que  $\int_{x \cdot \omega = s} d\hat{x}_\omega f(x) = \mathcal{R}f(s, \omega)$ , ce qui donne l'égalité recherchée.

2) On écrit alors l'égalité sur la transformée de Fourier inverse :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi} \mathcal{F}f(\xi) d\xi.$$

On remplace la transformée de Fourier par son expression en fonction de la transformée de Radon, écrivant  $\xi = \rho\theta$ ,  $\theta$  de norme 1, et alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\rho x \cdot \theta} \int_{\mathbf{R}^3} \mathcal{F}f(\rho\theta) \rho^2 d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_{S^2} \int_{\mathbf{R}} ds e^{i\rho(x \cdot \theta - s)} \mathcal{R}f(s, \theta) \rho^2 d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{\mathbf{R}} ds e^{i\rho(x \cdot \theta - s)} |\rho|^2 d\rho \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_{S^2} d\theta \mathcal{R}f(s, \theta) \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_{S^2} d\theta [(-\frac{\partial^2}{\partial s^2}) \mathcal{R}f](x \cdot \theta, \theta). \end{aligned}$$

La dernière ligne de cette égalité provient du fait que  $|\rho|^2$  est le symbole de la dérivée seconde en  $s$ ; il sera clair qu'en dimension  $n$ , ce terme est remplacé par  $|\rho|^{n-1}$ , et donc l'opérateur équivalent sera l'opérateur pseudo-différentiel  $(-\frac{\partial^2}{\partial s^2})^{\frac{n-1}{2}}$ .

La formule d'inversion dans  $\mathbf{R}^n$  est

$$f(x) = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{S^{n-1}} d\theta [(-\frac{\partial^2}{\partial s^2})^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}f](x \cdot \theta, \theta). \quad (1.7.20)$$

On vérifie ensuite que, grâce à la correspondance entre la transformée de Fourier et la transformée de Radon, que

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} f)(t\omega) = \int_{\mathbf{R}} e^{-its} \mathcal{R}(\partial_{x_j} f)(s, \omega) ds$$

D'autre part, le premier terme est égal à  $it\omega_j \mathcal{F}f(t\omega)$ , égal donc à  $it\omega_j \int_{\mathbf{R}} e^{-its} \mathcal{R}f(s, \omega) ds$ . Il vient

$$\omega_j \int_{\mathbf{R}} (-\frac{\partial}{\partial s})(e^{-its}) \mathcal{R}f(s, \omega) ds = it\omega_j \int_{\mathbf{R}} e^{-its} \mathcal{R}f(s, \omega) ds = \int_{\mathbf{R}} e^{-its} \mathcal{R}(\partial_{x_j} f)(s, \omega) ds,$$

et par intégration par parties sur le premier terme

$$\omega_j \int_{\mathbf{R}} e^{-its} (\frac{\partial}{\partial s}) \mathcal{R}f(s, \omega) ds \int_{\mathbf{R}} e^{-its} \mathcal{R}(\partial_{x_j} f)(s, \omega) ds.$$

La relation

$$\omega_j (\frac{\partial}{\partial s}) \mathcal{R}f(s, \omega) = \mathcal{R}(\partial_{x_j} f)(s, \omega)$$

permet, avec  $|\omega| = 1$ , d'avoir

$$\mathcal{R}(\Delta f)(s, \omega) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\mathcal{R}f)(s, \omega).$$

3) Il est alors élémentaire de calculer la solution du problème de Cauchy. En effet, on se donne

$$(\Delta - \partial_t^2)u(x, t) = 0$$

avec  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $\partial_t u(x, 0) = u_1(x)$ , toutes supposées  $L^2(\mathbf{R}^3)$ . En considérant la transformée de Radon en  $x$  de  $u$ , notée  $F(s, \omega, t)$ , on obtient le problème :

$$(\partial_{s^2}^2 - \partial_{t^2}^2)F(s, \omega, t) = 0$$

$$F(s, \omega, 0) = \mathcal{R}u_0(s, \omega), \partial_t F(s, \omega, 0) = \mathcal{R}u_1(s, \omega).$$

La solution de ce problème est explicite; elle est donnée par l'expression (1.1.2)

On trouve

$$F(s, \omega, t) = \frac{1}{2}(\mathcal{R}u_0(t+s, \omega) + \mathcal{R}u_0(t-s, \omega)) + \frac{1}{2} \int_{t-s}^{t+s} \mathcal{R}u_1(z, \omega) dz.$$

La solution est alors la transformée de Radon inverse de  $F(s, \omega, t)$ , obtenue par l'expression (1.7.20). Alors on voit que l'on fait intervenir  $F(x \cdot \theta, \omega, t)$  dans l'expression, donc des dérivées de  $\mathcal{R}u_0(t+x \cdot \theta, \omega)$  et de  $\mathcal{R}u_0(t-x \cdot \theta, \omega)$  (et de mêmes avec  $\mathcal{R}u_1$ ). On suppose que les données initiales sont supportées pour  $|x| < r$ . Elles sont nulles pour  $|x| \geq R$ . En particulier, l'hyperplan  $x \cdot \omega = s$  pour  $s > R$  est hors de la zone où  $u_0$  est non nul, donc

$$\text{Supp}(u_0) \subset \{|x| < R\} \Rightarrow \mathcal{R}(s, \omega) = 0, s > R.$$

La variable  $s$  considérée est alors, soit  $x \cdot \theta - t$ , soit  $x \cdot \theta + t$ , donc, comme  $\theta$  est de norme 1,  $|x \cdot \theta - t| \geq |x| - t$ , donc si  $|x| > t + R$ , on a nullité de la transformée de Radon des données initiales là où on la calcule.

On vérifie ainsi que la solution est nulle pour  $|x| > |t| + R$ .



## Chapitre 2

# Méthodes asymptotiques pour les systèmes hyperboliques

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de Lax [58] qui prouvent, sous un certain nombre d'hypothèses de régularité, que les problèmes hyperboliques matriciels d'ordre 1 admettent une solution asymptotique et que cette solution asymptotique est assez proche de la solution réelle. La méthode de Lax permet de résoudre dans des cas génériques les équations eikonale et de transport obtenues dans le cas de systèmes. Nous avons obtenu, dans le lemme 1.3, que les équations sur le terme principal  $e^0, h^0$  de  $E, H$  et sur la phase  $\phi$  sont :

- l'équation eikonale sur  $\phi$  :

$$|\text{grad}\phi|^2 = \varepsilon\mu,$$

- une condition de compatibilité entre les premiers termes de  $e$  et de  $h$  :

$$e^0 = \varepsilon^{-1}\text{grad}\phi \wedge h^0$$

(équivalente à  $\mu h^0 = -\text{grad}\phi \wedge e^0$ ),

- les équations de transport sur les premiers termes

$$\begin{cases} \text{grad}\phi \wedge \text{rote}^0 - \mu\text{roth}^0 - (\text{div}e^0)\text{grad}\phi = 0 \\ \text{grad}\phi \wedge \text{roth}^0 + \varepsilon\text{rote}^0 - (\text{div}h^0)\text{grad}\phi = 0. \end{cases}$$

La situation obtenue dans ce cas est différente de celle de la section 1.4 où aucune condition de compatibilité n'apparaît, la seule relation sur le premier terme est une équation aux dérivées partielles. Dans le cas du système des équations de Maxwell, on trouve une relation **non différentielle** (appelée condition de compatibilité) et des équations aux dérivées partielles. Le présent chapitre précise et généralise la notion de relation de compatibilité et d'équation de transport induite.

## 2.1 Stabilité et construction de solutions de systèmes symétriques

Nous rappelons dans ce premier paragraphe un résultat d'existence et d'unicité classique pour le problème de Cauchy, dû à Friedrichs [27]. On introduit, suivant en cela Rauch [85] et Lax [58], un opérateur hyperbolique :

**Définition 2.1** *Un opérateur symétrique hyperbolique matriciel sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_t$  est un opérateur de  $(C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_t))^m$  dans lui-même qui se met sous la forme générale*

$$Lu = A_0(x, t)\partial_t u + \sum_{j=1}^{j=d} A_j(x, t)\partial_{x_j} u + B(x, t)u.$$

Les matrices  $(A_j)_{0 \leq j \leq d}$  sont symétriques et vérifient

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}^d, \forall p \in \mathbf{N}, \exists C_{\alpha,p}^j \in \mathbf{R}, \forall (x,t) \in \mathbf{R}^{d+1}, |\partial_x^\alpha \partial_t^p A_j(x,t)| \leq C_{\alpha,p}^j.$$

De plus,  $A_0$  est définie positive et il existe  $c > 0$  telle que  $A_0 - cId \geq 0$ .

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité

**Proposition 2.1** *Soit  $L$  un opérateur (matriciel) symétrique hyperbolique. Soit  $g \in H^\sigma(\mathbf{R}^d)$ ,  $f \in H_{loc}^1(\mathbf{R}, H^\sigma(\mathbf{R}^d))$  (dans le cas où cet opérateur est matriciel, on considère  $g_1, \dots, g_m$  et  $f_1, \dots, f_m$ ,  $m$  étant le nombre de fonctions inconnues).*

*Le problème*

$$\begin{cases} Lu = f, \\ u(x,0) = g(x), \end{cases}$$

*admet une solution unique dans  $C(\mathbf{R}, H^\sigma(\mathbf{R}^d))$ , qui vérifie l'estimation*

$$\|u(t, \cdot)\|_{H^\sigma(\mathbf{R}^d)} \leq Ce^{Ct} \|g\|_{H^\sigma(\mathbf{R}^d)} + \int_0^t Ce^{C(t-s)} \|f(s, \cdot)\|_{H^\sigma(\mathbf{R}^d)} ds.$$

**Preuve** 1) Estimation a priori. Soit  $v(x,t) = \partial_x^\alpha u$ . On vérifie que

$$A_0(x,t) \partial_t v + \sum_j A_j(x,t) \partial_{x_j} v = Lv.$$

De plus

$$\frac{d}{dt} (A_0 v, v)_{L^2(\mathbf{R}^d)} = (\partial_t A_0 v, v)_{L^2(\mathbf{R}^d)} + (A_0 \partial_t v, v)_{L^2(\mathbf{R}^d)} + (A_0 v, \partial_t v)_{L^2(\mathbf{R}^d)}.$$

En remplaçant dans le membre de droite de l'égalité précédente  $A_0 \partial_t v$  par  $Lv - \sum_j A_j \partial_{x_j} v$  et en effectuant l'intégration par parties sur  $x_j$  dans ces termes, on trouve

$$(A_0 \partial_t v, v)_{L^2(\mathbf{R}^d)} = (Lv, v)_{L^2(\mathbf{R}^d)} + \sum_j (v, \partial_{x_j} (A_j v))_{L^2(\mathbf{R}^d)}.$$

Les matrices  $A_j$ ,  $0 \leq j \leq d$ , étant symétriques, on obtient

$$\frac{d}{dt} (A_0 v, v)_{L^2(\mathbf{R}^d)} = (\partial_t A_0 v, v)_{L^2(\mathbf{R}^d)} + (Lv, v)_{L^2(\mathbf{R}^d)} + (v, Lv)_{L^2(\mathbf{R}^d)} + \left( \sum_j (\partial_{x_j} A_j) v, v \right)_{L^2(\mathbf{R}^d)}.$$

On sait que  $(A_0 v, v) = (A_0^{\frac{1}{2}} v, A_0^{\frac{1}{2}} v)$ . Comme  $(v, Lv) = (A_0^{\frac{1}{2}} v, A_0^{-\frac{1}{2}} Lv)$ , l'inégalité classique de Cauchy-Schwarz et l'inégalité  $A_0^{-\frac{1}{2}} \leq c^{-\frac{1}{2}} Id$  de la Définition 2.1 entraînent

$$(v, Lv)_{L^2(\mathbf{R}^d)} \leq c^{-\frac{1}{2}} \|Lv\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \|A_0^{\frac{1}{2}} v\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} = ((A_0 v, v)_{L^2(\mathbf{R}^d)})^{\frac{1}{2}} \|Lv\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} c^{-\frac{1}{2}}.$$

On note  $h(t) = (A_0 v, v)_{L^2(\mathbf{R}^d)}^{\frac{1}{2}}$ . Grâce aux hypothèses de la définition,  $\partial_t A_0$  est de norme majorée par la constante  $C_{0,1}^0$  et on note  $C(A) = \max_{1 \leq j \leq d} C_{1,0}^j$ . On obtient donc

$$2h(t) \frac{d}{dt} (h(t)) \leq C_{0,1}^0 c^{-1} h^2(t) + 2c^{-\frac{1}{2}} h(t) \|Lv\|_{L^2} + C(A) h^2(t),$$

ce qui donne, lorsque  $h(t) \neq 0$

$$h'(t) \leq C_1 h(t) + c^{-\frac{1}{2}} \|Lv\|_{L^2}.$$

Une application du lemme de Gronwall conduit à

$$h(t) \leq h(0)e^{C_1 t} + c^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \|Lv\|_{L^2(\mathbf{R}^d)}(s) e^{C_1(t-s)} ds,$$

expression valable même lorsque  $h$  s'annule. Remarquons que ceci provient du fait que l'adjoint de  $L$  est explicite, et que  $L - L^*$  est un opérateur borné.

Nous avons donc obtenu l'estimation  $L^2$  :

$$\begin{aligned} \|\partial_x^\alpha u\|_{L^2(\mathbf{R}^d)}(t) &\leq c^{-\frac{1}{2}} h(t) \\ &\leq c^{-\frac{1}{2}} \|A_0^{\frac{1}{2}} \partial_x^\alpha u(0)\| e^{C_1 t} + \int_0^t c^{-1} e^{C_1(t-s)} \|L \partial_x^\alpha u\|(s) ds. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

On utilise les fonctions  $C_{\alpha,\beta}$ , qui caractérisent le crochet de Poisson  $[L, \partial_x^\alpha]$ , telles que

$$L \partial_x^\alpha \phi = \partial_x^\alpha L \phi + \sum_{\beta, 1 \leq |\beta| \leq |\alpha|} C_{\alpha,\beta}(x, t) \partial_x^\beta \phi(x, t).$$

L'inégalité (2.1.1) se réécrit

$$\begin{aligned} \|\partial_x^\alpha u\|_{L^2(\mathbf{R}^d)}(t) &\leq c^{-\frac{1}{2}} \|A_0^{\frac{1}{2}} \partial_x^\alpha u(0)\| e^{C_1 t} + \int_0^t c^{-1} e^{C_1(t-s)} \|\sum_\beta C_{\alpha,\beta}(x, s) \partial_x^\beta u\|(s) ds \\ &\quad + \int_0^t c^{-1} e^{C_1(t-s)} \|\partial_x^\alpha f(\cdot, s)\|(s) ds. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

On utilise à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et on désigne par  $C^{\alpha,\beta}(s) = \max_{x \in \mathbf{R}^d} C_{\alpha,\beta}(x, s)$ . L'inégalité (2.1.2) implique alors

$$\begin{aligned} \|\partial_x^\alpha u\|_{L^2(\mathbf{R}^d)}(t) &\leq c^{-\frac{1}{2}} \|A_0^{\frac{1}{2}} \partial_x^\alpha u(0)\| e^{C_1 t} + \sum_\beta c^{-1} \int_0^t C^{\alpha,\beta}(s) e^{C_1(t-s)} \|\partial_x^\beta u\| ds \\ &\quad + \int_0^t c^{-1} e^{C_1(t-s)} \|\partial_x^\alpha f(\cdot, s)\|(s) ds. \end{aligned}$$

Notons enfin  $D_N(s) = \max_{|\alpha|, |\beta| \leq N} C^{\alpha,\beta}(s)$ . On obtient, en sommant toutes les inégalités pour  $|\alpha| \leq N$ , que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^N(\mathbf{R}^d)}(t) &\leq c^{-\frac{1}{2}} \|A_0^{\frac{1}{2}}\|_\infty \|u\|_{H^N}(0) e^{C_1 t} + c^{-1} \int_0^t D_m(s) e^{C_1(t-s)} \|u\|_{H^N}(s) ds \\ &\quad + \int_0^t c^{-1} e^{C_1(t-s)} \|\partial_x^\alpha f(\cdot, s)\|(s) ds. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Un lemme de Gronwall permet alors d'avoir encore l'inégalité *a priori* sur la solution dans  $H^N$ .

2) Existence. Montrons l'existence de l'approximation par la méthode des différences finies de Courant-Friedrichs-Lévy (CFL) [27]. Nous introduisons les opérateurs  $D_j^h$  tels que

$$D_j^h \phi(x) = \frac{1}{2h} (\phi(x + h e_j) - \phi(x - h e_j)).$$

Nous introduisons la solution  $u^h$  de

$$\begin{aligned} L^h u^h &= \partial_t u^h + \sum_j A_j(x, t) D_j^h u^h = f, \\ u^h(x, 0) &= g(x). \end{aligned}$$

On vérifie l'égalité, analogue de l'intégration par parties discrète par un simple changement de variable

$$(D_j^h u^h, A_j u^h) = -(u^h, D_j^h (A_j u^h)).$$

En considérant  $N(t) = (u^h, u^h)_{L^2(\mathbf{R}^d)}$ , on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N(t) &= 2 \operatorname{Re}(L^h u^h, u^h) - \sum_j (A_j D_j^h u^h, u^h) - \sum_j (u^h, A_j D_j^h u^h) \\ &= 2 \operatorname{Re}(L^h u^h, u^h) + \sum_j (u^h, [D_j^h (A_j u^h) - A_j D_j^h u^h]). \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} & D_j^h(A_j u^h) - A_j D_j^h u^h \\ &= \frac{A_j(x+he_j, t) - A_j(x, t)}{2h} u^h(x+he_j, t) - \frac{A_j(x-he_j, t) - A_j(x, t)}{2h} u^h(x-he_j, t), \end{aligned}$$

ce qui, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, s'écrit

$$D_j^h(A_j u^h) - A_j D_j^h u^h = \frac{1}{2} \int_0^1 \partial_j A_j(x+she_j, t) u^h(x+he_j, t) + \frac{1}{2} \int_0^1 \partial_j A_j(x-she_j, t) ds u^h(x-he_j, t).$$

On en déduit la majoration  $L^2$ , après l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur  $u^h$  et  $u^h(x+he_j)$  :

$$|(u^h, [D_j^h(A_j u^h) - A_j D_j^h u^h])| \leq \|u^h\|^2 \|\partial_j A_j\|_\infty.$$

Ceci joint avec l'inégalité

$$|2\operatorname{Re}(L^h u^h, u^h)| \leq 2\|L^h u^h\|_{L^2} \|u^h\|_{L^2}$$

donne

$$\frac{d}{dt} \|u^h\|(t) \leq \|f\|_{L^2} + \frac{1}{2} \left( \sum_j \|\partial_j A_j\|_\infty \right) \|u^h\|_{L^2}.$$

Nous obtenons l'estimation  $L^2$  suivante :

$$\|u^h\|_{L^2}(t) \leq \|g\|_{L^2} e^{\frac{1}{2}(\sum_j \|\partial_j A_j\|_\infty)t} + \int_0^t e^{\frac{1}{2}(\sum_j \|\partial_j A_j\|_\infty)(t-s)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}(s) ds.$$

Notons que la constante  $C = \sum_j \|\partial_j A_j\|_\infty$  est indépendante de  $h$ . Un raisonnement identique (laissé en exercice) montre alors la régularité  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, H^N(\mathbb{R}^d))$ .

Pour  $s = 1$ , on obtient donc, par passage à la limite, une solution qui est dans  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^d))$ . On en déduit que  $\sum_j A_j(x, t) \partial_{x_j} u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$ , ce qui donne

$$\partial_t u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)).$$

Ecrivons  $u(x, t) = u(x, 0) + \int_0^t \partial_t u(x, s) ds$ . Sur le compact  $[0, t]$ ,  $\partial_t u(x, s)$  est bornée et on a

$$\sup_{s \in [0, t]} \|\partial_t u(x, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < +\infty.$$

On en déduit la continuité locale en temps de  $u(x, t)$ . L'inégalité

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}(t) \leq \|u(x, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + t \sup_{s \in [0, t]} \|\partial_t u(x, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

implique alors que

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)).$$

Il est aisé d'obtenir l'appartenance  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^\sigma(\mathbb{R}^d))$  en s'appuyant sur  $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, H^{s+1}(\mathbb{R}^d))$ .

3) Unicité. Nous prouvons l'unicité par dualité.

Notons  $L = \partial_t + G$ , alors  ${}^t L = -\partial_t + {}^t G$ . On introduit pour toute fonction  $\psi$  à décroissance rapide (de la classe de Schwartz) une solution du problème

$${}^t L v = \psi, v|_{t=T} = 0.$$

Cette solution existe, comme on a pu le voir, et on a, pour une solution  $u$  de  $Lu = 0$ ,  $u|_{t=0} = 0$ ,



$$\begin{aligned}
\int_0^T (\psi, u) dt &= \int_0^T ({}^t L v, u) dt \\
&= \int_0^T (-\partial_t v + {}^t G v, u) dt \\
&= \int_0^T ((-\partial_t v, u) + (v, G u)) dt \\
&= -\int_0^T ((\partial_t v, u) + (u, \partial_t v)) dt \\
&= (u(\cdot, 0), v(\cdot, 0)) - (u(\cdot, T), v(\cdot, T)) = 0.
\end{aligned}$$

Ceci est valable pour toute fonction  $\psi$  dans la classe de Schwartz. Comme  $u$  appartient à l'espace  $C(\mathbb{R}, H^\sigma(\mathbb{R}^d))$ , on en déduit qu'il existe une suite de  $\psi_n$  tendant vers  $u$  par densité de  $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ . On a alors  $u = 0$ .

## 2.2 Formalisme asymptotique pour les systèmes hyperboliques

On montre dans cette section que l'on peut étendre aux systèmes hyperboliques la notion de développement asymptotique, avec en particulier l'introduction de l'équation eikonale. Soit  $L(x, t, \partial_x, \partial_t)$  un opérateur hyperbolique (Définition 2.1), agissant sur des distributions  $u(x, t) \in (\mathcal{D}')^m(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ . Nous introduisons une fonction  $u(x, t, \varepsilon)$  (appelée Ansatz) sous la forme

$$u(x, t, \varepsilon) = a(x, t, \varepsilon) e^{i\phi(x, t)/\varepsilon},$$

où il existe une suite  $a_j(x, t)$  telle que

$$a(x, t, \varepsilon) \simeq \sum_j a_j(x, t) \varepsilon^j.$$

On a donné le nom traditionnel d'Ansatz à cette forme, ce qui veut dire en allemand Conjecture. En effet, on conjecture que le système hyperbolique admet une solution de cette forme. Cette fonction est supposée vérifier :

$$L(x, t, \partial_x, \partial_t) u(x, t, \varepsilon) \simeq 0.$$

Notons que l'on écrit parfois  $u(x, t, \varepsilon) = A(x, t, \varepsilon, \theta)|_{\theta = \varepsilon^{-1}\phi(x, t)} = a(x, t, \varepsilon) e^{i\theta}$  où, sous les notations classiques de Joly-Metivier-Rauch [50],  $\theta$  est la variable "rapide" et  $(x, t)$  sont les variables "lentes".

Alors

$$L(x, t, \partial_x, \partial_t)(a(x, t, \varepsilon) e^{i\phi(x, t)/\varepsilon}) \simeq \sum_{j=-1}^{\infty} \varepsilon^j W_j(x, t) e^{i\phi(x, t)/\varepsilon},$$

où les  $W_j$  sont donnés par :

$$\begin{cases} W_{-1} = iL(x, t, \nabla_x \phi, \partial_t \phi) a_0, \\ W_j = iL(x, t, \nabla_x \phi, \partial_t \phi) a_{j+1} + L(x, t, \partial_x, \partial_t) a_j, \quad j \geq 0. \end{cases}$$

On obtient les équations

$$\begin{cases} L(x, t, \nabla_x \phi, \partial_t \phi) a_0(x, t) = 0, \\ iL(x, t, \nabla_x \phi, \partial_t \phi) a_{j+1}(x, t) + L(x, t, \partial_x, \partial_t) a_j(x, t) = 0, \quad j \geq 0. \end{cases}$$

A première vue, il semble que la première équation soit la même que pour le problème scalaire. Mais il n'en est rien : en effet dans le cas scalaire cette égalité impliquait la nullité de  $L(x, t, \nabla_x \phi, \partial_t \phi)$  qui était un nombre (ce qui donnait l'équation eikonale). En revanche dans le cas vectoriel cette équation a une solution non triviale en  $a_0$  lorsque le déterminant est nul, et dans ce cas  $a_0$  appartient au noyau de la matrice  $L(x, t, \nabla_x \phi, \partial_t \phi)$ .

$$\det(L(x, t, \nabla_x \phi(x, t), \partial_t \phi(x, t))) = 0 \quad (2.2.4)$$

On peut appeler l'équation (2.2.4) l'équation eikonale généralisée. L'équation (2.2.4) est une équation de degré  $m$  en  $\partial_t \phi$ . Cette équation a donc, en général,  $m$  racines. L'équation eikonale généralisée correspond donc à  $m$  feuilles et sur chaque feuille on aura un système d'équations de transport.

Traisons un exemple afin de montrer la différence entre le système d'équations hyperboliques et les équations scalaires. Dans le cas du système des équations de Maxwell vu dans la section 1.3, nous obtenons

$$\det K = \det \begin{pmatrix} & & & 0 & \partial_{x_3} \phi & -\partial_{x_2} \phi \\ & \varepsilon \partial_t \phi I_3 & & -\partial_{x_3} \phi & 0 & \partial_{x_1} \phi \\ & & & \partial_{x_2} \phi & -\partial_{x_1} \phi & 0 \\ 0 & -\partial_{x_3} \phi & \partial_{x_2} \phi & & & \\ \partial_{x_3} \phi & 0 & -\partial_{x_1} \phi & & \mu \partial_t \phi I_3 & \\ -\partial_{x_2} \phi & \partial_{x_1} \phi & 0 & & & \end{pmatrix} = 0.$$

Après calculs élémentaires (basés sur le calcul de  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det(D - BA^{-1}C)$ ), on trouve

$$\det K = \det((\varepsilon \mu (\partial_t \phi)^2 - (\nabla \phi)^2) I_3 + (\nabla \phi)(\nabla \phi)^t) = \varepsilon \mu (\partial_t \phi)^2 [\varepsilon \mu (\partial_t \phi)^2 - (\nabla \phi)^2].$$

L'équation eikonale est équivalente aux trois équations

$$\partial_t \phi = c |\nabla \phi|, \partial_t \phi = -c |\nabla \phi|, \partial_t \phi = 0.$$

Chacune est une feuille de la variété caractéristique.

Etudions maintenant les équations sur  $a_0$ . Pour  $\phi$  donnée, telle que, en  $(x_0, t_0)$ ,  $\text{Ker}(L(x_0, t_0, \nabla_x \phi(x_0, t_0), \partial_t \phi(x_0, t_0)))$  (qui est un sous-espace de  $\mathbb{R}^m$ ) soit non réduit à  $\{0\}$ , on suppose qu'il existe un voisinage  $V$  de  $(x_0, t_0)$  tel que la codimension de  $\text{Ker}(L(x, t, \nabla_x \phi(x, t), \partial_t \phi(x, t)))$  soit constante. Dans ce cas, on peut écrire

$$\forall (x, t) \in V, a_0(x, t) \in \text{Ker}(L(x, t, \nabla_x \phi(x, t), \partial_t \phi(x, t))), \quad (2.2.5)$$

d'où une première condition sur  $a_0$ .

Nous remarquons que cette condition n'est pas une condition différentielle sur  $a_0$ , mais une relation entre les différents coefficients. Nous avons déjà remarqué ce phénomène pour le premier terme correspondant aux équations de Maxwell harmoniques. Cette relation est donc une généralisation de la condition de compatibilité obtenue dans la section 1.6. Pour simplifier les expressions, on note  $L(\partial \phi(x, t))$  la matrice  $L(x, t, \nabla_x \phi(x, t), \partial_t \phi(x, t))$ , égale à  $\frac{\partial \phi}{\partial t} A_0(x, t) + \sum_{j=1}^{j=d} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} A_j(x, t)$ . Elle ne suffit pas pour déterminer  $a_0$ .

On détermine  $a_0$  en ajoutant aux relations de compatibilité (2.2.5) les équations différentielles que l'on obtient en annulant le terme suivant du développement asymptotique  $W_0$ . En effet, comme  $L(\partial \phi(x, t))$  est non injective, la relation  $L(x, t, \partial_x, \partial_t) a_0(x, t) = -i L(\partial \phi(x, t)) a_1(x, t)$  implique

$$L(x, t, \partial_x, \partial_t) a_0(x, t) \in \text{Im} L(\partial \phi(x, t)). \quad (2.2.6)$$

Les deux relations (2.2.5) et (2.2.6) forment un système de  $m$  équations à  $m$  inconnues, constitué de

$$m - \dim(\text{Ker}(L(\partial \phi(x_0, t_0))))$$

équations différentielles d'ordre 1 et de

$$\dim(\text{Ker}(L(\partial \phi(x_0, t_0))))$$

relations pour  $a_0$ . On introduit  $\pi(x, t)$  la projection orthogonale sur  $\text{Ker}L(\partial\phi(x, t))$ .

On démontre la proposition suivante

**Proposition 2.2** *On considère une donnée initiale en temps  $a_0(x, t_0)$  vérifiant  $\pi(x, t_0)a_0(x, t_0) = a_0(x, t_0)$ . Le vecteur  $a_0(x, t)$  est la solution unique du système hyperbolique symétrique*

$$[\pi(x, t)]L(x, t, \partial_x, \partial_t)\pi(x, t) + (I - \pi(x, t))L(x, t, \partial_x, \partial_t)(I - \pi(x, t))a_0(x, t) = 0. \quad (2.2.7)$$

Elle vérifie  $\pi(x, t)a_0(x, t) = a_0(x, t)$ .

Pour démontrer cette proposition, on utilise le lemme suivant

**Lemme 2.1** *On a les relations  $\text{Im}\pi = \text{Ker}L(\partial\phi(x, t))$  et  $\text{Ker}\pi = \text{Im}L(\partial\phi(x, t))$ .*

*La restriction de  $L(\partial\phi(x, t))$  à  $\text{Ker}\pi$  est inversible.*

On utilise les hypothèses de la définition 2.1. En effet, pour tout  $(x, t)$ , l'opérateur aux dérivées partielles est symétrique donc l'opérateur linéaire  $L(\partial\phi(x, t))$  est symétrique. Son noyau et son image sont donc en somme directe orthogonale. La restriction de  $L(\partial\phi(x, t))$  à son image est inversible.

L'équation (2.2.5) est équivalente à

$$\pi(x, t)a_0(x, t) = a_0(x, t). \quad (2.2.8)$$

Pour connaître  $a_0$ , nous ajoutons aux relations de compatibilité (2.2.8) l'équation de transport (2.2.6)

$$L(x, t, \partial_x, \partial_t)a_0 \in \text{Im}L(\partial\phi(x, t)).$$

Cette équation de transport se réécrit  $\pi(x, t)L(x, t, \partial_x, \partial_t)a_0(x, t) = 0$ , équation équivalente à

$$\pi(x, t)L(x, t, \partial_x, \partial_t)(\pi(x, t)a_0(x, t)) = 0. \quad (2.2.9)$$

Remarquons que (2.2.9) est une équation sur l'espace vectoriel  $\text{Im}\pi$ . Pour trouver  $a_0$ , on montre

**Lemme 2.2** *Le système d'équations (2.2.8), (2.2.9) + une donnée initiale en temps  $a_0(x, t_0)$  vérifiant  $\pi(x, t_0)a_0(x, t_0) = a_0(x, t_0)$  est équivalent au système hyperbolique symétrique*

$$[\pi(x, t)]L(x, t, \partial_x, \partial_t)\pi(x, t) + (I - \pi(x, t))L(x, t, \partial_x, \partial_t)(I - \pi(x, t))a_0(x, t) = 0.$$

De ce lemme, on déduit immédiatement le résultat de la proposition (2.2). En effet le système hyperbolique symétrique (2.2.7) admet une solution unique pour toute donnée initiale, ce qui prouve le résultat d'unicité de la proposition.

L'égalité  $\pi(x, t)a_0(x, t) = a_0(x, t)$  provient du fait que  $(I - \pi(x, t))a_0(x, t)$  est solution de (2.2.7) pour une donnée initiale nulle, donc par l'unicité des solutions de (2.2.7) on en déduit que  $(I - \pi(x, t))a_0(x, t) = 0$  pour tout  $(x, t)$ . Pour plus de commodité, on notera  $G(x, t, \partial_x, \partial_t) = \pi(x, t)L(x, t, \partial_x, \partial_t)\pi(x, t) + (I - \pi(x, t))L(x, t, \partial_x, \partial_t)(I - \pi(x, t))$  qui intervient dans l'égalité (2.2.7).

**Preuve du lemme** D'après (2.2.5),  $(I - \pi(x, t))a_0(x, t) = 0$ , donc

$$(I - \pi(x, t))L(x, t, \partial_x, \partial_t)(I - \pi(x, t))a_0(x, t) = 0.$$

On obtient donc, par addition de (2.2.9) à cette égalité, l'égalité (2.2.7).

La matrice coefficient de  $\partial_t$  dans l'opérateur  $G$  est  $\tilde{A}_0(x, t) = \pi(x, t)A_0(x, t)\pi(x, t) + (I - \pi(x, t))A_0(x, t)(I - \pi(x, t))$ . Comme  $A_0(x, t)$  est définie positive,  $\tilde{A}_0$  est aussi définie positive. En effet, décomposons  $A_0$  sur  $\text{Ker}\pi \oplus \text{Im}\pi$  sous la forme

$$\begin{pmatrix} A_0^{11}(x, t) & A_0^{12}(x, t) \\ {}^t A_0^{12}(x, t) & A_0^{22}(x, t) \end{pmatrix},$$

les matrices  $A_0^{11}(x, t)$  et  $A_0^{22}(x, t)$  étant symétriques. L'inégalité  $A_0 \geq cId$  se traduit, en décomposant  $u = (u_1, u_2)$ , par l'inégalité

$${}^t u_1 A_0^{11}(x, t) u_1 + {}^t u_2 A_0^{22}(x, t) u_2 + 2({}^t u_1 A_0^{12}(x, t) u_2) \geq c^t u_1 u_1 + c^t u_2 u_2.$$

Considérant successivement  $u_2 = 0$  puis  $u_1 = 0$ , on trouve que  $A_0^{11}(x, t) \geq cId$  et  $A_0^{22}(x, t) \geq cId$ , donc la matrice

$$\tilde{A}_0(x, t) = \begin{pmatrix} A_0^{11}(x, t) & 0 \\ 0 & A_0^{22}(x, t) \end{pmatrix}$$

vérifie  $\tilde{A}_0(x, t) \geq cId^1$ .

De même, toutes les matrices  $\pi(x, t)A_j(x, t)\pi(x, t)$  sont symétriques positives si les  $A_j(x, t)$  le sont. Le système (2.2.7) est donc un système hyperbolique de Cauchy car l'opérateur  $G$  est de Cauchy strictement hyperbolique en temps.

**Réciproque** On suppose (2.2.7) satisfaite et on démontre que  $c_0(x, t) = (I - \pi(x, t))a_0(x, t)$  est solution de  $G(x, t, \partial_x, \partial_t)c = 0$ . Comme  $(I - \pi(x, t))^2 = (I - \pi(x, t))$  et  $(I - \pi(x, t))\pi(x, t) = 0$ , l'équation (2.2.7) conduit à

$$(I - \pi(x, t))L(x, t, \partial_x, \partial_t)(I - \pi(x, t))a_0(x, t) = 0.$$

En utilisant cette relation dans l'équation (2.2.7), on obtient  $[\pi(x, t)L(x, t, \partial_x, \partial_t)\pi(x, t)]a_0(x, t) = 0$ . En utilisant cette fois  $\pi^2 = \pi$  et  $(I - \pi)\pi = 0$ , on trouve successivement

$$\begin{aligned} & [\pi(x, t)L(x, t, \partial_x, \partial_t)\pi(x, t) + (I - \pi(x, t))L(x, t, \partial_x, \partial_t)(I - \pi(x, t))](\pi(x, t)a_0(x, t)) \\ & = \\ & \pi(x, t)L(x, t, \partial_x, \partial_t)\pi(x, t)a_0(x, t) = 0. \end{aligned}$$

Le vecteur  $\pi(x, t)a_0(x, t)$  est donc solution du même système hyperbolique que  $a_0$  et de plus,  $\pi(x, t_0)a_0(x, t_0) = a_0(x, t_0)$ . Le résultat d'unicité rappelé ci-dessous pour les systèmes hyperboliques donne  $\pi(x, t)a_0(x, t) = a_0(x, t)$ . Donc (2.2.7) + condition initiale implique à la fois (2.2.8) et (2.2.9). Ceci achève la preuve du lemme 2.2, puisque  $a_0$  est alors déterminé de manière unique.

On définit la vitesse maximale  $c$  de sorte que la différentielle de  $\phi(x, t)$  ne s'annule pas sur

$$\Omega = \{(t, x), 0 < t < T \leq R/c, |x - a| < R - ct\}.$$

Soit  $\phi(x, t)$  une solution de l'équation eikonale :

$$\det L(x, t, \partial\phi(x, t)) = 0.$$

On lui associe la projection orthogonale  $\pi(x, t)$  sur  $\text{Im}\pi = \text{Ker}L(\partial\phi(x, t))$ . On introduit alors l'inverse  $Q$  sur  $\text{Im}L(\partial\phi(x, t))$  de l'opérateur  $(I - \pi)L(\partial\phi(x, t))(I - \pi)$ .

On recherche la solution des équations successives

i) (condition initiale)  $b_j(x, t_0) = a_j(x)$ , pour  $j \geq 0$

ii) (équation d'impédance)  $L(\partial\phi(x, t))b_0(x, t) = 0$ ,

iii) (équations de transport)  $iL(\partial\phi(x, t))b_j(x, t) + L(x, t, \partial_x, \partial_t)b_{j-1}(x, t) = 0$ .

La condition de compatibilité à l'ordre  $j$  sur  $a_j(x)$  est donnée, pour  $j \geq 1$ , à l'aide de la solution  $b_{j-1}(x, t)$  des relations i), ii), iii) par

$$(I - \pi(x, t_0))a_j(x) = iQ(x, t_0)[L(x, t, \partial_x, \partial_t)b_{j-1}](x, t_0). \quad (2.2.10)$$

<sup>1</sup>Les matrices identités utilisées dans ce paragraphe ne sont pas égales, on voit respectivement intervenir l'identité sur  $\text{Ker}\pi$ , l'identité sur  $\text{Im}\pi$  et l'identité sur l'espace entier.

**Théorème 2.1** *On suppose que la condition de compatibilité initiale est vérifiée*

$$\pi(x, t_0)a_0(x) = a_0(x). \quad (2.2.11)$$

*On suppose que (2.2.10) est vérifiée pour tout  $j$  et on se donne pour tout  $j$  la valeur de  $\pi(x, t_0)a_j(x)$  dans  $\Im\pi(x, t_0)$ .*

*Il existe une suite unique  $b_j(x, t)$  de fonctions  $C^\infty(\bar{\Omega})$  vérifiant i), ii), iii).*

**Preuve** Nous étudions ici les équations de transport inhomogènes. L'équation de transport sur  $b_{j-1}$  est donc obtenue en annulant le terme d'ordre  $j$  du développement asymptotique de l'équation. Elle s'écrit

$$L(x, t, \partial_x, \partial_t)b_{j-1} + iL(\partial\phi(x, t))b_j = 0.$$

La preuve du théorème se fait par récurrence sur  $j$ . Elle est identique pour chaque  $j$ , on l'écrit donc pour l'obtention de  $b_1$ . De l'égalité

$$b_1(x, t) = \pi b_1(x, t) + (I - \pi)b_1(x, t). \quad (2.2.12)$$

En remplaçant (2.2.12) dans l'équation de transport et en utilisant  $L(\partial\phi(x, t))\pi(x, t) = 0$ , il vient

$$L(\partial\phi(x, t))(I - \pi)b_1 = iL(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0.$$

L'équation de transport est ainsi inhomogène. On en déduit

$$(I - \pi)L(\partial\phi(x, t))(I - \pi)b_1(x, t) = i(I - \pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0(t, x).$$

La matrice  $(I - \pi)L(\partial\phi(x, t))(I - \pi)$  a pour noyau  $\text{Ker}L(\partial\phi(x, t))$ . Le noyau et l'image de  $L(\partial\phi(x, t))$  sont supplémentaires, elle est donc inversible dans  $\text{Ker}\pi = \text{Im}L(\partial\phi(x, t))$ . On note son inverse partiel  $Q$ . On en déduit

$$(I - \pi)b_1(x, t) = iQ(I - \pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0(x, t) \quad (2.2.13)$$

qui détermine donc  $(I - \pi)b_1$  en fonction de  $b_0$ . Il reste à déterminer  $\pi b_1$ . Le système dont  $\pi b_1$  est solution à partir de l'équation sur  $b_2$  :

$$iL(\partial\phi(x, t))b_2(x, t) + L(x, t, \partial_x, \partial_t)b_1(x, t) = 0.$$

Comme  $L(\partial\phi(x, t))b_2(x, t) \in \text{Im}L(\partial\phi(x, t))$  on obtient

$$\pi(x, t)L(x, t, \partial_x, \partial_t)b_1(x, t) = 0.$$

On utilise (2.2.13) et (2.2.12) pour avoir

$$\pi(x, t)L(x, t, \partial_x, \partial_t)[\pi b_1(x, t) + iQ(I - \pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0] = 0. \quad (2.2.14)$$

Déduisant de (2.2.13) l'égalité

$$(I - \pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)(I - \pi)b_1 = i(I - \pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)Q(I - \pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0$$

et ajoutant (2.2.14) à ces équations, on obtient le système hyperbolique suivant

$$G(x, t, \partial_x, \partial_t)b_1(x, t) = i(I - 2\pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)Q(I - \pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0.$$

Ce système est alors un système hyperbolique. Le théorème est alors la conséquence de la

**Proposition 2.3** Soit  $a_0(x)$  qui vérifie  $\pi(x, t_0)a_0(x) = a_0(x)$ . On détermine  $b_0(x, t)$  par la proposition 2.2. Sous la condition de compatibilité des données initiales

$$(I - \pi)a_1(x) = iQ(x, t_0)L(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0(x, t_0),$$

le système

$$\begin{cases} (I - \pi)b_1 = iQ(I - \pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0, \\ \pi L(x, t, \partial_x, \partial_t)\pi b_1 = -i\pi L(x, t, \partial_x, \partial_t)(Q(L(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0), \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} G(x, t, \partial_x, \partial_t)b_1 = i(I - 2\pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)(Q(L(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0), \\ b_1(x, t_0) = a_1(x). \end{cases}$$

Il a donc une unique solution  $b_1$ .

**Preuve** l'implication  $\Rightarrow$  vient d'être démontrée. L'implication réciproque est la suivante. On suppose ainsi

$$G(x, t, \partial_x, \partial_t)b_1(x, t) = i(I - 2\pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)(I - \pi)QL(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0. \quad (2.2.15)$$

On remarque que  $\pi G(x, t, \partial_x, \partial_t) = \pi L(x, t, \partial_x, \partial_t)\pi$  et que  $(I - \pi)G(x, t, \partial_x, \partial_t) = (I - \pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)(I - \pi)$ . Ainsi, de l'égalité (2.2.15), on déduit

$$\begin{cases} \pi L(x, t, \partial_x, \partial_t)\pi b_1(x, t) = -i\pi L(x, t, \partial_x, \partial_t)QL(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0, \\ (I - \pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)(I - \pi)b_1 = i(I - \pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)QL(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0. \end{cases}$$

De la deuxième équation de ce système, on déduit

$$(I - \pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)[(I - \pi)b_1 - iQL(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0] = 0.$$

Comme  $I - \pi$  est l'identité sur l'image de  $Q$  et  $(I - \pi)^2 = I - \pi$ , on a

$$(I - \pi)L(x, t, \partial_x, \partial_t)(I - \pi)[(I - \pi)b_1 - iQL(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0] = 0.$$

Comme  $\pi Q = 0$ , on a  $\pi L(x, t, \partial_x, \partial_t)\pi[(I - \pi)b_1 - iQL(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0] = 0$ . Ainsi, pour tout  $t$

$$G(x, t, \partial_x, \partial_t)[(I - \pi)b_1 - iQL(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0] = 0.$$

La condition de compatibilité est la condition de Cauchy nulle pour ce système hyperbolique. On en déduit pour tout  $t$  que  $(I - \pi(x, t_0))b_1(x, t) = i[QL(x, t, \partial_x, \partial_t)b_0]$ . On en déduit les deux égalités cherchées. La proposition est démontrée, ce qui démontre par récurrence le théorème 2.1.

**Remarque 1** Le système vérifié par  $\pi b_1$  est

$$G(x, t, \partial_x, \partial_t)(\pi b_1) = -i\pi LQLb_0$$

et celui vérifié par  $b_1$  est

$$G(x, t, \partial_x, \partial_t)b_1 = i(I - 2\pi)LQLb_0.$$

Ces deux systèmes sont identiques uniquement lorsque  $L(QLb_0)$  est dans  $\text{Im}\pi = \text{Ker}L(\partial\phi)$ . La seule relation qu'implique le système sur  $b_0$  est  $\pi(Lb_0) = 0$ , c'est-à-dire  $Lb_0 \in \text{Ker}\pi = \text{Im}L(\partial\phi)$ .

**Remarque 2** La condition sur  $a_j(x)$  se réduit à une donnée sur  $\pi(x, t_0)a_j(x)$ , puisque  $(I - \pi(x, t_0))a_j(x)$  est déterminé par la condition de compatibilité. D'autre part, on n'a pas automatiquement  $\pi(x, t_0)a_j(x) = a_j(x)$  contrairement au cas  $j = 0$ . Nous soulignons la différence de présentation avec [85] (Théorème 5.4) même si le résultat est identique : nous avons préféré mettre l'accent sur la condition de compatibilité induite sur le rang  $j$  par la donnée des  $j_k$  pour  $k \leq j - 1$ .

## 2.3 Application aux équations de Maxwell

Le système des équations de Maxwell est symétrique hyperbolique au sens de la définition 2.1. En effet, les équations de Maxwell s'écrivent

$$\varepsilon \partial_t E = \text{rot} H, \quad -\mu \partial_t H = \text{rot} E.$$

Introduisons le vecteur  $u = (E, H)$  et les matrices

$$A_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon I_3 & 0 \\ 0 & \mu I_3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 & -1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & 0 \\ -1 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Les équations de Maxwell s'écrivent

$$A_0 \partial_t u + A_1 \partial_{x_1} u + A_2 \partial_{x_2} u + A_3 \partial_{x_3} u = 0. \quad (2.3.16)$$

Les matrices  $A_j$  sont symétriques, et la matrice  $A_0$  est minorée par  $\min(\varepsilon, \mu)I_6$ . L'équation eikonale (2.2.4) est alors

$$\det A_0 \partial_t \Phi + A_1 \partial_{x_1} \Phi + A_2 \partial_{x_2} \Phi + A_3 \partial_{x_3} \Phi = 0. \quad (2.3.17)$$

Soit  $\text{rot}^* \Phi$  la matrice

$$\text{rot}^* \Phi = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{x_3} \Phi & -\partial_{x_2} \Phi \\ -\partial_{x_3} \Phi & 0 & \partial_{x_1} \Phi \\ \partial_{x_2} \Phi & -\partial_{x_1} \Phi & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation (2.3.17) se réécrit

$$\det \begin{pmatrix} \varepsilon \partial_t \Phi I_3 & \text{rot}^* \Phi \\ -\text{rot}^* \Phi & \mu \partial_t \Phi I_3 \end{pmatrix} = 0$$

ce qui équivaut à

$$[\varepsilon \mu (\partial_t \Phi)^2 - |\nabla \Phi|^2]^2 \varepsilon \mu (\partial_t \Phi)^2 = 0.$$

Les deux feuilles de la variété caractéristique sont donc  $\partial_t \Phi = 0$  et  $|\nabla \Phi| = (\varepsilon \mu)^{\frac{1}{2}} |\partial_t \Phi|$ . Nous nous intéressons à la deuxième feuille. Dire que  $u_0$  est dans le noyau équivaut à

$$\begin{pmatrix} (\frac{\varepsilon}{\mu})^{\frac{1}{2}} |\nabla \Phi| I_3 & \text{rot}^* \Phi \\ -\text{rot}^* \Phi & (\frac{\mu}{\varepsilon})^{\frac{1}{2}} |\nabla \Phi| I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^0 \\ h^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient les relations (1.6.17) :

$$\begin{aligned} e^0 &= \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|} \wedge h^0 \\ h^0 &= -\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|} \wedge e^0 \end{aligned}$$

C'est pour cette raison que la relation (2.2.5) est parfois appelée condition d'impédance, le nombre  $Z = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$  qui apparait ici est l'impédance du milieu. Cette notation est, bien sûr, un abus de langage car la condition d'impédance de Léontovich est une condition au bord alors que la relation (2.2.5) est une relation valable dans  $\Omega$ .

On en déduit donc la relation eikonale  $c^2(\nabla\Phi)^2 = (\partial_t\Phi)^2$  par le calcul très simple provenant de l'équation eikonale en transformée de Fourier en réécrivant  $k = \partial_t\Phi$ . Il s'agit donc (heureusement) de la même équation eikonale que pour le problème de Helmholtz.

En écrivant les relations induites par (2.2.5) dans (2.3.16), on trouve que les équations de transport reliant  $(e_1, h_1, e_0, h_0)$  qui sont celles données par (2.2.6) sont celles écrites en (1.6.18).

## 2.4 Existence asymptotique pour un problème elliptique

Dans cette section, on change de type d'opérateur, en considérant un opérateur elliptique à la place d'un opérateur hyperbolique. On souhaite montrer une application de l'analyse asymptotique pour les systèmes elliptiques d'ordre 1, et en particulier obtenir grâce aux calculs asymptotiques le gain de régularité de  $Pu \in H^s \rightarrow u \in H^{s+1}$ . Remarquons, dans le cas hyperbolique, qu'il suffit de résoudre

$$L(x, t, \partial_x, \partial_t)c(x, t, \varepsilon) = -r(x, t, \varepsilon) \simeq 0$$

avec la condition de Cauchy  $c|_{t=0} = 0$ .

Dans le cas où  $L$  est un opérateur elliptique, l'égalité ci-dessus est résoluble dans le voisinage de tout point, et la régularité de  $c$  est connue en fonction de celle de  $r$  (on peut rapprocher ce résultat du résultat provenant de Taylor énoncé plus loin en Proposition 8.7).

Nous introduisons d'abord les opérateurs elliptiques d'ordre 1.

**Définition 2.2** Soit  $P(x, t, \partial_x, \partial_t) = \sum_{j=1}^d A_j(x, t)\partial_{x_j} + A_0(x, t)\partial_t$ . On dit que  $P$  est elliptique au voisinage du point  $(x_0, t_0)$  si il existe une fonction  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  (telle que  $\chi = 1$  sur  $|x - x_0|^2 + (t - t_0)^2 \leq \varepsilon^2$ ) et une constante  $c > 0$  telles que la matrice

$$\sum_{j=1}^d \chi(x, t)\xi_j A_j(x, t) + \tau\chi(x, t)A_0(x, t)$$

soit minorée par  $c(|\xi|^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}Id$  pour tout  $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} - \{(0, 0)\}$ .

J. Rauch démontre dans son cours [85] la proposition :

**Proposition 2.4** On suppose que dans un voisinage de  $(x_0, t_0)$ ,  $P(x, t, \partial_x, \partial_t)$  est un opérateur elliptique d'ordre 1.

1. On peut résoudre  $Pc = r$  pour  $r \simeq 0$ , et il existe un  $c$  qui soit asymptotiquement nul
2. Régularité  $H^\sigma$  :

$$Pu \in H^\sigma \Rightarrow u \in H^{\sigma+1},$$

3. Régularité  $C^\infty$

$$Pu \in C^\infty \Rightarrow u \in C^\infty$$



**Preuve** Notons tout d'abord qu'il existe d'autres démonstrations de cette proposition. Nous choisissons cette preuve en relation avec les développements asymptotiques. Soit  $P(x, t, \partial_x, \partial_t)$  un opérateur elliptique au voisinage d'un point  $(x_0, t_0)$ . On considère  $\chi P$ , et on introduit  $b(x, t) = \chi Pu(x, t)$ .

La preuve se déroule en deux temps :

- on construit une solution asymptotique et on démontre que cette solution asymptotique "commence à un cran au dessus", c'est-à-dire que le premier terme du développement asymptotique est nul

- ensuite, on montre que la transformée de Fourier d'une solution peut être caractérisée par le paramètre asymptotique  $k = (||\xi||^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}$   $k \rightarrow +\infty$  et on contrôle la solution asymptotique ainsi calculée.

**Solution asymptotique d'un problème elliptique** Dans cette partie de la preuve, le paramètre asymptotique est  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Remarquons tout d'abord que si  $v(x, t, \varepsilon) = V(x, t, \varepsilon)e^{i\frac{\phi(x, t)}{\varepsilon}}$ , avec  $V(x, t, \varepsilon) \simeq \sum_l V_l(x, t)(i\varepsilon)^l$ , il vient

$$Pv(x, t, \varepsilon) = [i(\sum_{j=1}^d \frac{A_j(x, t)}{\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \frac{A_0(x, t)}{\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial t})V(x, t, \varepsilon) + (\sum_{j=1}^d A_j(x, t) \frac{\partial V}{\partial x_j} + A_0(x, t) \frac{\partial V}{\partial t})]e^{i\frac{\phi(x, t)}{\varepsilon}}.$$

Pour chaque  $(\xi_0, \tau_0) \neq (0, 0)$ , et pour toute fonction  $b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1} \times ]0, 1])$ , on peut construire une solution asymptotique de  ${}^t P v(x, t, \varepsilon) = \chi(x, t)b(x, t, \varepsilon)e^{i\frac{x \cdot \xi_0 + t \tau_0}{\varepsilon}}$ , l'opérateur  ${}^t P$  étant aussi elliptique. Dans ce cas,  $\phi(x, t) = x \cdot \xi_0 + t \tau_0$ , et on trouve

$$e^{-\frac{x \cdot \xi_0 + t \tau_0}{\varepsilon}} P v(x, t, \varepsilon) = \frac{i}{\varepsilon} [\sum_{j=1}^d A_j(x, t) \xi_{0,j} + A_0(x, t) \tau_0] V(x, t, \varepsilon) + [\sum_{j=1}^d A_j(x, t) \frac{\partial V}{\partial x_j} + A_0(x, t) \frac{\partial V}{\partial t}].$$

Supposant que  ${}^t P v(x, t, \varepsilon) = b(x, t, \varepsilon)e^{i\frac{x \cdot \xi_0 + t \tau_0}{\varepsilon}}$ ,  $b(x, t, \varepsilon) \simeq \sum_l b_l(x, t)(i\varepsilon)^l$ , on obtient les équations

$$[\sum_{j=1}^d A_j(x, t) \xi_{0,j} + A_0(x, t) \tau_0] V_0(x, t) = 0$$

et, pour  $l \geq 1$ ,

$$-[\sum_{j=1}^d A_j(x, t) \xi_{0,j} + A_0(x, t) \tau_0] + (\sum_{j=1}^d A_j(x, t) \frac{\partial V_{l-1}}{\partial x_j} + A_0(x, t) \frac{\partial V_{l-1}}{\partial t}) V_l(x, t) = \chi(x, t) b_{l-1}(x, t).$$

On en déduit  $V_0(x, t) = 0$ , et

$$V_1(x, t) = -(\sum_j A_j(x, t) \xi_{0,j} + A_0(x, t) \tau_0)^{-1} (b_0(x, t)),$$

puis toutes les équations successives donnant  $V_l$  en fonction de  $V_{l-1}$ . On introduit la convention  $\tau_0 = \xi_{0,0}$  et  $\tau = \xi_0$  et  $x_0 = t$ . Alors

$$V_2(x, t) = -(\sum_{0 \leq j \leq d} A_j(x, t) \xi_{0,j})^{-1} [b_1(x, t) + \sum_{0 \leq p \leq d} A_p(x, t) \frac{\partial}{\partial x_p} (\sum_{0 \leq j \leq d} A_j(x, t) \xi_{0,j})^{-1} (b_0(x, t))].$$

On a construit une solution asymptotique de classe  $C^\infty$  dont le premier terme est nul. On vérifie que tous les termes, qui comprennent  $b_l$  ou des dérivées de  $b_l$ , ont un support contenu dans le support de  $\chi$ , puisque  $b = \chi Pu$ .

**Régularité Sobolev de la solution asymptotique** On suppose désormais  $\|\xi_0\|^2 + \tau_0^2 = 1$ , ceci afin de différencier le paramètre  $k$  et la direction du vecteur  $(\xi, \tau)$ . La construction qui précède et le Théorème de Borel (Théorème 1.1) fournissent une solution asymptotique ( $k \rightarrow \infty, k = \varepsilon^{-1}$ )  $v(x, t, k) \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1}, S^d, k)$ , de support inclus dans  $\text{supp}\chi(x, t)$ , de

$${}^t P v(x, t, k) = \chi(x, t) e^{ik(x \cdot \xi_0 + t\tau_0)}.$$

Notons que cela revient à choisir  $Pu = e^{ik(x \cdot \xi + t\tau)}$ .

On se donne  $M$  tel que  $(1 + \eta^2)^s \eta^{-2M}$  tendent vers 0 à l'infini dans  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Cette valeur de  $M$  donne l'ordre de troncature de la série asymptotique. On note

$$v_M(x, t; \xi, \tau, k) = \sum_{l=1}^M i^l V_l(x, t, k^{-1}) k^{-l}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\chi u)(k\xi, k\tau) &= \langle u, \chi(x, t) e^{ik(x \cdot \xi + t\tau)} \rangle \\ &= \langle u, {}^t P v_M(x, t; \xi, \tau, k) \rangle + O(k^{-M}) \\ &= \langle Pu, v_M(x, t; \xi, \tau, k) \rangle + O(k^{-M}) \\ &= \langle f, e^{ik(x \cdot \xi + t\tau)} \sum_{l=1}^M k^{-l} i^l V_j(x, t; \xi, \tau, k) \rangle + O(k^{-M}) \\ &= \sum_{l=1}^{M-1} k^{-l} i^l \mathcal{F}(f V_l) + O(k^{-M}). \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Les égalités successives sur  $V_l$ , identiques à celle obtenue pour  $V_2$ , montrent que  $V_l f$  s'écrit comme le produit de  $f$  par des dérivées et quotients réguliers faisant intervenir  $\chi$  et ses dérivées. Soit  $\tilde{\chi}$  une fonction  $C^\infty$  à support compact, égale à 1 sur  $\text{supp}\chi$ . Alors  $T = \frac{\partial_{x_l} \chi}{\tilde{\chi}}$  est uniformément bornée ainsi que toutes ses dérivées. On en déduit que la transformée de Fourier de  $\partial_{x_l} \chi f$  est égale au produit de convolution de la transformée de Fourier de  $\tilde{\chi} f$  et de  $T$ . On utilise alors la régularité de  $T$ , qui implique la régularité Sobolev de  $T$ , pour trouver que l'opérateur  $\hat{g} \rightarrow \hat{T} \star \hat{g}$  est borné dans  $H^s$ . On en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\mathcal{F}(V_l f)(\xi, \tau)|^2 (1 + |\xi|^2 + \tau^2)^s d\xi d\tau \leq C(l, \chi) \|\tilde{\chi} f\|_{H^s(\mathbb{R}^{d+1})}^2.$$

Alors le changement de variable  $\xi = k\eta, \tau = k\sigma$  permet d'obtenir

$$\int_{S^d \times \mathbb{R}} |\mathcal{F}(V_l f)(k\eta, k\sigma)|^2 k^{2s+d+1} d\eta d\sigma dk \leq C(l, \chi) \|\tilde{\chi} f\|_{H^s(\mathbb{R}^{d+1})}^2.$$

De l'égalité (2.4.18), la somme commençant à  $l = 1$ , on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\mathcal{F}(\chi u)(\xi, \tau)|^2 (1 + |\xi|^2 + \tau^2)^p d\xi d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\mathcal{F}(\chi u)(k\eta, k\sigma)|^2 (k^{-2} + |\eta|^2 + \sigma^2)^p k^{2p+d+1} d\eta d\sigma \\ &\leq \max_{1 \leq l \leq M-1} (C(l, \chi)) \sum_{l \geq 1} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\mathcal{F}(f V_l)(k\eta, k\sigma)|^2 (k^{-2} + |\eta|^2 + \sigma^2)^p k^{2p+d+1-2l} d\eta d\sigma. \end{aligned}$$

Cette somme est convergente pour  $p = s + 1$  car  $l \geq 1$ , donc on obtient la régularité  $H^{s+1}$  de la solution  $u$ . Nous avons achevé la preuve du deuxième alinéa.

Le troisième alinéa du théorème se déduit du deuxième par les inclusions entre espaces de Sobolev locaux et espaces de fonctions  $C^k$ . Nous reviendrons sur ce type de méthode dans le paragraphe 8.3.4.

## 2.5 Exercices du chapitre 2

**Exercice 2.1** 1) Calculer explicitement le développement asymptotique en  $k$  de la solution

$$u(x_1, x_2, k) = \begin{pmatrix} a_1(x_1, x_2, k) \\ a_2(x_1, x_2, k) \end{pmatrix} e^{ik\phi(x_1, x_2)} \text{ de}$$

$$iku + \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \partial_{x_1} u + \begin{pmatrix} \frac{2x_1+1}{3} & \frac{\sqrt{2}(1-x_1)}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(1-x_1)}{3} & \frac{2+x_1}{3} \end{pmatrix} \partial_{x_2} u = 0. \quad (2.5.19)$$

2) On se donne une condition initiale sur  $x_1 = 0$  de la forme  $u(x_2, k) = a(x_2, k)e^{ik\psi(x_2)}$ . Déterminer la solution du problème précédent avec cette condition initiale.

**Exercice 2.2** On suppose que  $\phi$  est solution de l'équation eikonale (2.2.4) et que la dimension du noyau de  $\text{Ker}(L(\partial\phi))$  est égale à 1. Démontrer que  $a_0$  est solution d'une équation de transport scalaire caractérisée par un champ de vecteurs.

**Correction de l'exercice 2.1** On applique les résultats précédents. On vérifie que l'on a

$$ik[Id + \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \partial_{x_1} \phi + \begin{pmatrix} \frac{2x_1+1}{3} & \frac{\sqrt{2}(1-x_1)}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(1-x_1)}{3} & \frac{2+x_1}{3} \end{pmatrix} \partial_{x_2} \phi] \begin{pmatrix} a_1(x_1, x_2, k) \\ a_2(x_1, x_2, k) \end{pmatrix} + O(1) = 0$$

Il existe une solution non triviale si et seulement si le déterminant de la matrice entre crochets est nul (ce qui correspond à écrire  $\det(L(x, \nabla_x \phi)) = 0$ ). La matrice coefficient de  $\partial_{x_2} \phi$  est symétrique, donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont  $x_1$  et 1. Le vecteur propre associé à la valeur propre  $x_1$  est  $(-\sqrt{2}, 1)$ . Le vecteur propre associé à 1 est  $(1, \sqrt{2})$ . On voit ensuite que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

De ces égalités, on déduit que l'équation eikonale est équivalente à

$$\det(Id + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \partial_{x_1} \phi + \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_{x_2} \phi) = 0$$

soit

$$(1 - \partial_{x_1} \phi(x_1, x_2) + x_1 \partial_{x_2} \phi(x_1, x_2))(1 + 5\partial_{x_1} \phi(x_1, x_2) + \partial_{x_2} \phi(x_1, x_2)) = 0.$$

Nous introduisons les courbes intégrales respectives des deux champs :

$$\frac{dx_1}{ds} = -1, \quad \frac{dx_2}{ds} = x_1(s)$$

soit  $x_1(s) = x_1^0 - s$ ,  $x_2(s) = x_2^0 - x_1^0 s - \frac{s^2}{2}$  pour le premier, c'est-à-dire  $x_2 = x_2^0 - x_1^0(x_1^0 - x_1) - \frac{1}{2}(x_1 - x_1^0)^2$

$$\frac{dx_1}{ds} = 5, \quad \frac{dx_2}{ds} = 1$$

soit  $x_1(s) = x_1^0 + 5s$ ,  $x_2(s) = x_2^0 + s$  pour le deuxième, c'est-à-dire  $x_2 = x_2^0 + \frac{1}{5}(x_1 - x_1^0)$ .

On contrôle que  $\phi(x_1(s), x_2(s)) = \phi(x_1(0), x_2(0)) - s$ . On connaît donc la phase solution de l'équation eikonale si on la connaît sur une courbe orthogonale aux champs. On considère donc la courbe  $x_1 = 0$ , comme l'énoncé le suggère. Alors on trouve

- dans le premier cas  $\phi(x_1, x_2) = \phi(0, x_2 + \frac{1}{2}x_1^2) + x_1$  (les surfaces isophase sont des paraboles)
- dans le deuxième cas  $\phi(x_1, x_2) = \phi(0, x_2 - \frac{x_1}{5}) - \frac{x_1}{5}$  (les surfaces isophase sont des droites).

Représentons  $\begin{pmatrix} a_1(x_1, x_2, k) \\ a_2(x_1, x_2, k) \end{pmatrix}$  sur la base propre, par

$$\begin{pmatrix} a_1(x_1, x_2, k) \\ a_2(x_1, x_2, k) \end{pmatrix} = \alpha_1(x_1, x_2, k) \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2(x_1, x_2, k) \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

avec  $\alpha_1(x_1, x_2, k) = \frac{1}{3}(-\sqrt{2}a_1(x_1, x_2, k) + a_2(x_1, x_2, k))$ ,  $\alpha_2(x_1, x_2, k) = \frac{1}{3}(a_1(x_1, x_2, k) + \sqrt{2}a_2(x_1, x_2, k))$ .

On vérifie alors que

$$\begin{aligned} & ik\alpha_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + ik\alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} [\partial_{x_1} \alpha_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \partial_{x_1} \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}] \\ & + \begin{pmatrix} \frac{2x_1+1}{3} & \frac{\sqrt{2}(1-x_1)}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(1-x_1)}{3} & \frac{2+x_1}{3} \end{pmatrix} [\partial_{x_2} \alpha_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \partial_{x_2} \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}] \\ & + ik\alpha_1 (-\partial_{x_1} \phi + x_1 \partial_{x_2} \phi) \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + ik\alpha_2 (5\partial_{x_1} \phi + \partial_{x_2} \phi) \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

et on aboutit aux deux équations d'ordre 1

$$\begin{aligned} ik(1 - \partial_{x_1}\phi + x_1\partial_{x_2}\phi)\alpha_1 - \partial_{x_1}\alpha_1 + x_1\partial_{x_2}\alpha_1 &= 0, \\ ik(1 + 5\partial_{x_1}\phi + \partial_{x_2}\phi)\alpha_2 + 5\partial_{x_1}\alpha_2 + \partial_{x_2}\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

On remarque que ces deux équations correspondent à des solutions asymptotiques de problèmes scalaires d'ordre 1. Il n'existe pas de phase  $\phi$  et de couple  $(\alpha_1, \alpha_2)$  non nuls tels que  $\phi, \alpha_1, \alpha_2$  vérifie à la fois les deux équations.

On considère donc comme donnée la valeur de la phase à  $x_1 = 0$ , soit  $\psi(x_2)$ . Cette phase  $\psi$  génère deux phases  $\phi_1(x_1, x_2)$  et  $\phi_2(x_1, x_2)$  telles que

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, x_2) &= \psi(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2) + x_1, \\ \phi_2(x_1, x_2) &= \psi(x_2 - \frac{x_1}{5}) - \frac{x_1}{5}. \end{aligned}$$

Si  $\phi = \phi_1$ , la condition nécessaire pour que  $u$  soit solution de (2.5.19) est que  $a$  soit colinéaire au vecteur  $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ . On en déduit que  $\alpha_2 = 0$ , et  $\alpha_1$  est solution de

$$-\partial_{x_1}\alpha_1 + x_1\partial_{x_2}\alpha_1 = 0$$

et  $\alpha_1$  est donc constant sur les caractéristiques du champ  $(-1, x_1)$ . Il vient donc  $\alpha_1(x_1, x_2, k) = \alpha_1(0, x_2 + \frac{x_1^2}{2}, k)$ .

Lorsque la phase est égale à  $\phi_2$ , nécessairement  $a$  est dans le noyau de la matrice associée à  $\phi_2$ , donc  $\alpha_1 = 0$ . On trouve  $5\partial_{x_1}\alpha_2 + \partial_{x_2}\alpha_2 = 0$ , ce qui donne  $\alpha_2(x_1, x_2, k) = \alpha_2(0, x_2 - \frac{x_1}{5}, k)$ .

La phase  $\phi$  est nécessairement égale à  $\phi_1$  ou à  $\phi_2$  pour que  $u(x_1, x_2, k) = a(x_1, x_2, k)e^{ik\phi(x_1, x_2)}$  soit une solution du système (2.5.19). Dans ces cas, on a respectivement  $\alpha_2$  ou  $\alpha_1$  nul.

De ces deux résultats, on déduit que si la donnée initiale n'est pas dans l'espace propre associé à une phase particulière, alors la solution générale ne peut pas s'écrire sous la forme  $a(x_1, x_2, k)e^{ik\phi(x_1, x_2)}$ . En revanche, le système différentiel étant linéaire, toute expression de la forme

$$A(x_1, x_2, k)e^{ik\phi_1(x_1, x_2)} + B(x_1, x_2, k)e^{ik\phi_2(x_1, x_2)}$$

est solution lorsque  $A$  est colinéaire à  $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$  et lorsque  $B$  est colinéaire à  $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ , les coefficients vérifiant les lois de  $\alpha_1$  et de  $\alpha_2$ . De plus, il faut que

$$A(0, x_2, k)e^{ik\phi_1(0, x_2)} + B(0, x_2, k)e^{ik\phi_2(0, x_2)} = a(x_2, k)e^{ik\psi(x_2)}.$$

Par des manipulations élémentaires lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  et en prolongeant  $k$  dans le complexe, on déduit que  $\phi_1(0, x_2) - \psi(x_2) = C_1$ ,  $\phi_2(0, x_2) - \psi(x_2) = C_2$ ,  $C_1$  et  $C_2$  étant deux constantes. On peut les prendre nulles, quitte à inclure le terme  $e^{kC_1}$  dans  $A$  ou  $B$ . Alors il suffit de décomposer  $a(x, k) = \begin{pmatrix} A_1(x_2, k) \\ A_2(x_2, k) \end{pmatrix}$  dans la base propre  $\left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$  pour obtenir une solution à "deux phases" :

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, k) &= -\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}A_1 + A_2}{3}\right)\left(x_2 + \frac{x_1^2}{2}, k\right)e^{ik\psi(x_2 + \frac{x_1^2}{2}) + ikx_1} \\ &\quad + \left(\frac{A_1 + \sqrt{2}A_2}{3}\right)\left(x_2 - \frac{x_1}{5}, k\right)e^{ik\psi(x_2 - \frac{x_1}{5}) - ik\frac{x_1}{5}}, \\ u_2(x_1, x_2, k) &= \left(\frac{-\sqrt{2}A_1 + A_2}{3}\right)\left(x_2 + \frac{x_1^2}{2}, k\right)e^{ik\psi(x_2 + \frac{x_1^2}{2}) + ikx_1} \\ &\quad + \sqrt{2}\left(\frac{A_1 + \sqrt{2}A_2}{3}\right)\left(x_2 - \frac{x_1}{5}, k\right)e^{ik\psi(x_2 - \frac{x_1}{5}) - ik\frac{x_1}{5}}. \end{aligned}$$

On voit ainsi deux fronts se propager. On pourra les différencier si on suppose que la singularité de départ est donnée.

**Correction de l'exercice 2.2.** Si la dimension du noyau est égale à 1 au voisinage d'un point, on en déduit que  $a_0(x, t)$  est proportionnel à un vecteur  $u_0(x, t)$  de ce noyau, qui est connu explicitement puisque le noyau est de dimension 1. On écrit alors

$$a_0(x, t) = \lambda(x, t)u_0(x, t).$$

L'équation de transport générale s'écrit

$$iL(x, t, \nabla_x \phi, \partial_t \phi) a_{j+1}(x, t) + L(x, t, \partial_x, \partial_t) a_j(x, t) = 0.$$

On appelle  $u_0(x, t)$  la polarisation de l'onde.

Notons alors que l'équation de transport est

$$L(x, t, \partial_x, \partial_t) a_0(x, t) \in \text{Im} L(\partial \phi(x, t))$$

ce qui se traduit par  $\pi L(x, t, \partial_x, \partial_t) a_0 = 0$ . Comme  $a_0 = \pi a_0$  (puisque  $a_0 \in \text{Ker} L(\partial \phi(x, t))$ ), on trouve  $\pi L(x, t, \partial_x, \partial_t) \pi a_0 = 0$ , équation déjà obtenue précédemment.

L'égalité  $\pi \frac{\partial}{\partial x_j} = [\pi, \frac{\partial}{\partial x_j}] + \frac{\partial}{\partial x_j} \pi$  conduit à

$$\pi L \pi = \sum_{j=1}^d \pi A_j \pi \frac{\partial}{\partial x_j} + \pi A_0 \pi \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \pi A_j [\pi, \frac{\partial}{\partial x_j}] + \pi A_0 [\pi, \frac{\partial}{\partial t}]. \quad (2.5.20)$$

Comme  $\pi$  est de rang 1, il existe  $d + 1$  scalaires  $v_j(x, t)$ , qui sont les valeurs propres de  $\pi A_j$ , avec  $v_0(x, t) \neq 0$  (ceci car  $A_0 > 0$ ) tels que  $\pi A_j \pi(x, t) = v_j(x, t) \pi(x, t)$ . En notant  $\gamma(x, t)$  le scalaire (opérateur différentiel d'ordre  $1 - 1 = 0$ ) tel que

$$\begin{aligned} \gamma \pi &= \sum_{j=1}^d \pi A_j [\pi, \frac{\partial}{\partial x_j}] + \pi A_0 [\pi, \frac{\partial}{\partial t}], \\ \pi L \pi &= [v_0(x, t) \partial_t + \sum_{j=1}^d v_j(x, t) \partial_{x_j} + \gamma(x, t)] \pi. \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

On a donc démontré que  $\pi a_0$  est solution d'une équation régie par le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^d$   $((v_0(x, t))^{-1} v_j(x, t))_{1 \leq j \leq d}$ .

Cette relation s'obtient aussi immédiatement en remplaçant  $a_0$  par  $\lambda u_0$ . On voit alors que

$$\pi(x, t) (A_j(x, t) \partial_{x_j} (\lambda(x, t) u_0(x, t))) = (\partial_{x_j} \lambda) \pi A_j u_0 + \lambda \pi A_j \partial_{x_j} u_0,$$

qui est colinéaire à  $u_0$ ,  $\pi$  étant de rang 1 et de noyau  $\mathbb{R} u_0$ .

Donc le champ de vecteurs dont  $\lambda$  est solution est parallèle à  $\partial_\xi l \partial_x + \partial_\tau l \partial_t$ , où  $l(x, t, \xi, \tau) = i\tau A_0(x, t) + i \sum_{j=1}^d A_j(x, t) \xi_j$ . On verra plus loin le rôle de cette fonction de  $\mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1}$ , dans le chapitre 6.

**Conclusion** Le champ de vecteurs  $v_0^{-1}(v_j)$  s'appelle la vitesse de groupe de l'onde de polarisation  $u_0$ . On remarque que l'équation eikonale s'écrit

$$\det(l(x, t, \xi, \tau))|_{\tau=\partial_t \phi, \xi=\partial_x \phi} = 0.$$

Si on résout  $l(x, t, \xi, \tau) = 0$ , on trouve  $\tau = \tau(x, t, \xi)$  et l'équation donnant la polarisation est

$$\tau(x, t, \partial_x \phi) A_0(x, t) u_0(x, t) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} \phi(x, t) A_j(x, t) u_0(x, t) = 0.$$



## Chapitre 3

# Propagation des ondes.

Ce chapitre étudie la propagation d'une solution de l'équation des ondes le long des caractéristiques, comme la théorie de l'optique géométrique peut nous l'apprendre. Nous démontrons les résultats de propagation de l'optique géométrique dans le vide tant que le rayon ne rencontre pas la caustique.

Notons qu'il s'agit d'un problème local : en effet, cette solution de l'équation des ondes peut provenir de sources situées hors du domaine de calcul, et dans ce cas l'équation des ondes n'est pas satisfaite globalement (car elle n'est pas satisfaite au voisinage des sources).

Afin d'utiliser la théorie asymptotique, nous considérons l'équation de Helmholtz scalaire. Un résultat asymptotique obtenu pour l'équation de Helmholtz est équivalent, après transformée de Fourier inverse en temps, à un résultat de propagation pour l'équation des ondes. Nous considérons alors le système d'équations :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u(x, k) = 0, \\ u(x, k)|_{\Sigma} = A(x, k)|_{\Sigma}e^{ik\phi_0}, \\ S(u)(x, k) = O\left(\frac{1}{|x|}\right). \end{cases}$$

où  $\Sigma$  est une surface lisse donnée, localement plane (c'est-à-dire admettant un plan tangent bien défini),  $\phi_0$  est une constante (en d'autres termes, la phase de l'onde sur  $\Sigma$  est constante). On se restreindra aux deux cas les plus courants où  $\Sigma$  est un demi espace ou bien où  $\Sigma$  est le bord d'un ouvert  $\Theta$ . La fonction  $A$  vérifie la définition 1.1. La condition  $u(x, k)|_{\Sigma} = A(x, k)|_{\Sigma}e^{ik\phi_0}$  est une condition dite initiale, avec le même abus de langage que dans le chapitre précédent pour la représentation de  $u(x, t) = \int e^{ik\phi(x)+ikt} a(x, k) dk$  dont le front d'onde est  $\phi(x) + ct = 0$ . Le nom de "condition initiale" devrait plutôt être remplacé par l'expression "condition à  $t^* = -\phi_0/c$ ". Nous renvoyons le lecteur à la Section 11.4 pour plus de détails sur cette équivalence.

La condition  $S(u)(x, k) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$  est une condition de Sommerfeld à l'infini, dite condition sortante. Elle indique par exemple que l'onde est définie uniquement d'un côté de  $\Sigma$  pour  $t = t^*$  (à des termes de reste près, qui peuvent être soit décroissants plus vite que toute puissance inverse de  $k$ , soit exponentiellement décroissants en  $k$  selon la régularité de la solution).

Nous savons que ce problème admet localement une solution unique, par le théorème de Holmgren par exemple, ou par des résultats d'unicité de problème de Dirichlet au bord. Nous considérons cette solution  $u(x, k)$ . Nous construisons un développement asymptotique induit par le développement asymptotique de  $A$  sur  $\Sigma$ . On écrit donc  $u(x, k) = a(x, k)e^{ik\phi(x)}$ . Les équations eikonale et de transport ci-dessous ont été obtenues dans le chapitre 1 :

$$\begin{cases} |\nabla\phi|^2 = 1, \\ \nabla\phi \cdot \nabla a_0 + \frac{1}{2}\Delta\phi a_0 = 0, \\ \nabla\phi \cdot \nabla a_p + \frac{1}{2}\Delta\phi a_p = -\frac{1}{2}\Delta a_{p-1}. \end{cases} \quad (3.0.1)$$

L'introduction de  $\Sigma$ , son interprétation et son utilisation seront détaillées dans le chapitre 13.

### 3.1 La solution de l'équation eikonale

De la relation  $|\nabla\phi|^2 = 1$ , on déduit, en dérivant par rapport à chaque variable, la relation

$$\text{Hess}\phi\nabla\phi = 0,$$

la matrice  $\text{Hess}\phi$  étant la matrice hessienne, symétrique, donnée par

$$\text{Hess}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

On introduit les caractéristiques de l'équation de Hamilton-Jacobi  $|\nabla\phi|^2 = 1$ , courbes  $x(t)$  solutions du système

$$\frac{d}{dt}x(t) = \nabla\phi(x(t)), x(0) = x_0 \in \Sigma.$$

On vérifie que  $\frac{d}{dt}(\nabla\phi(x(t))) = \text{Hess}\phi(x(t))\frac{d}{dt}x(t) = \text{Hess}\phi\nabla\phi = 0$ , d'où  $\nabla\phi$  est constant sur les caractéristiques, donc

$$x(t) = x_0 + t\nabla\phi(x_0).$$

Les courbes caractéristiques sont des droites, et  $\nabla\phi$  est constant sur ces droites. De plus, comme

$$\frac{d}{dt}(\phi(x(t))) = \nabla\phi \cdot \frac{d}{dt}x(t) = 1,$$

on vérifie que  $\phi(x(t)) = \phi_0 + t$  car  $x_0 \in \Sigma$ .

Enfin, comme  $\phi(x) = \phi_0$  sur  $\Sigma$ , si on se donne une courbe  $\gamma(s) \subset \Sigma$  passant par le point  $x_0$  à  $s = 0$ ,  $\nabla\phi \cdot \gamma'(0) = 0$  ce qui indique, comme  $\gamma$  est quelconque, que  $\nabla\phi(x_0)$  est orthogonal au plan tangent à  $\Sigma$  en  $x_0$ .

Choissant une orientation, définissant un côté de la surface  $\Sigma$  grâce à  $\nabla\phi(x_0) = \vec{N}_0$  ( $\vec{N}_0$  sera appelé normale sortante à  $\Sigma$  en  $x_0$ ) et admettant la continuité de  $\phi$ , on vérifie que, au voisinage de  $x_0$ ,  $\nabla\phi(x)$  est le vecteur normal sortant à  $\Sigma$  en  $x$ . Le choix de l'orientation est très dépendant du choix de la condition sortante, nous ne rentrons pas dans le détail des résultats que le lecteur pourra trouver par exemple dans [56].

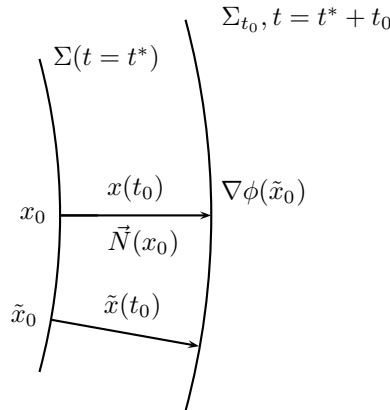


Figure 1

Le vecteur  $\nabla\phi(x(t))$ , égal à  $\nabla\phi(x(0))$ , est aussi le vecteur normal unitaire sortant à  $\Sigma_t = \{x, \phi(x) = \phi_0 + t\}$  au point  $x(t)$ .



## 3.2 Résolution de l'équation de transport

L'équation de transport se réécrit

$$\frac{d}{dt}(a_0(x(t))) + \frac{1}{2}\Delta\phi(x(t))a_0(x(t)) = 0,$$

d'où

$$a_0(x(t)) = a_0(x(0))\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \Delta\phi(x(u))du\right). \quad (3.2.2)$$

De même, en considérant l'équation de transport inhomogène dont  $a_p$  est solution, et en utilisant la méthode de la variation de la constante, on trouve

$$a_p(x(t)) = a_0(x(t))\left[\frac{a_p(x(0))}{a_0(x(0))} - \frac{1}{2}\int_0^t ds \frac{\Delta a_{p-1}(x(s))}{a_0(x(s))}\right]. \quad (3.2.3)$$

En effet, l'équation caractérisant le terme  $a_p$  est alors

$$\frac{d}{dt}(a_p(x(t))) + \frac{1}{2}\Delta\phi(x(t))a_p(x(t)) = -\frac{1}{2}\Delta a_{p-1}(x(t)).$$

L'équation homogène a pour solution  $a_0(x(t))$ , donc on écrit

$$a_p(x(t)) = C(t)a_0(x(t)),$$

ce qui donne

$$C'(t) = -\frac{1}{2}\frac{\Delta a_{p-1}(x(t))}{a_0(x(t))}.$$

Le résultat (3.2.3) en découle.

On peut donc calculer tous les termes de l'équation de transport en fonction de  $\Delta\phi$ , ou, ce qui est équivalent, en fonction de  $a_0$ .

Dans le système (3.0.1), on multiplie l'équation déterminant  $a_0$  par  $\bar{a}_0$ . On obtient

$$2\nabla\phi\nabla a_0\bar{a}_0 + \Delta\phi|a_0|^2 = 0.$$

Prenant l'expression conjuguée (on suppose qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\phi(x)/\alpha \in \mathbb{R}$  pour tout  $x$  et on divise l'équation par  $\alpha$  pour se ramener à  $\phi$  réelle) :

$$2\nabla\phi\nabla\bar{a}_0a_0 + \Delta\phi|a_0|^2 = 0.$$

Sommant les deux égalités, on obtient  $\nabla\phi\nabla(|a_0|^2) + \Delta\phi|a_0|^2 = 0$ , ainsi

$$\operatorname{div}(\nabla\phi|a_0|^2) = 0. \quad (3.2.4)$$

On considère un tube de rayon  $T$ , s'appuyant sur des surfaces isophases  $\Sigma_-$  (correspondant à  $t = t_1$ ) et  $\Sigma_+$  (correspondant à  $t = t_+$ ), le vecteur normal extérieur à  $T$  sur  $\Sigma_-$  est  $-\nabla\phi(x(t_-))$ , et le vecteur normal unitaire extérieur à  $T$  sur  $\Sigma_+$  est  $\nabla\phi(x(t_+))$ . Il est de plus délimité par des caractéristiques, ainsi  $\partial T = \Sigma_- \cup \Sigma_+ \cup \tilde{T}$ , avec, en tout point de  $\Sigma$ ,  $n \cdot \nabla\phi = 0$ .

La formule de Stokes sur  $T$  donne

$$\int_T \operatorname{div}(|a_0|^2\nabla\phi)dx = \int_{\partial T} (|a_0|^2\nabla\phi) \cdot n d\sigma = \int_{\Sigma_+} |a_0|^2 d\Sigma_+ \sigma - \int_{\Sigma_-} |a_0|^2 d\Sigma_- \sigma.$$

L'égalité  $\operatorname{div}(|a_0|^2\nabla\phi) = 0$  entraîne alors que

$$\int_{\Sigma_+} |a_0|^2 d\Sigma_+ \sigma = \int_{\Sigma_-} |a_0|^2 d\Sigma_- \sigma,$$

ce qui s'exprime aussi comme la conservation de l'énergie sur les tubes de rayons. On interprète dès maintenant  $\exp(\int_0^t \Delta\phi(x(u))du)$  comme étant la fonction mesure associée à  $d\Sigma_t \sigma$ .

### 3.3 Calcul explicite de $\Delta\phi$ et de $a_0$

Les relations (3.2.2) et (3.2.3) montrent que  $\Delta\phi$  intervient de manière essentielle dans le calcul des coefficients. Nous nous appuyons ici sur la relation

$$\Delta\phi = \text{Tr}(\text{Hess}\phi),$$

où  $\text{Hess}\phi$  est la matrice hessienne de la phase  $\phi$ . Soit  $\tau$  un vecteur tangent à  $\Sigma_0$  en  $x_0$ . La matrice de courbure de  $\Sigma_0$ , appelée traditionnellement matrice de Weingarten et notée  $W(x_0)$ , est donnée par

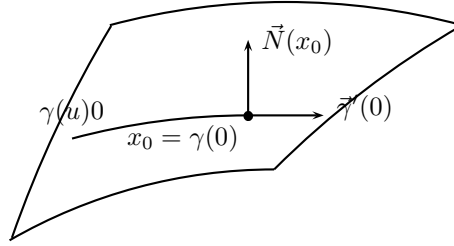
$$\text{grad}N(x_0)\tau = W(x_0)\tau,$$

ses vecteurs propres sur  $\Sigma$  sont les directions de courbure principales, ses valeurs propres sont les courbures principales. Cette matrice est définie sur l'espace tangent à la surface  $\Sigma$  en  $x_0$ .

En utilisant cette matrice, nous déterminons la matrice hessienne de la phase  $\phi$ , ce qui donnera, en calculant la trace de cette matrice hessienne, le Laplacien de  $\phi$ .

Soit  $P$  un plan passant par  $x_0$  contenant  $N(x_0)$ ,  $x_0 \in \Sigma_0$  et soit la courbe  $\gamma$  tracée sur  $\Sigma_0$ , paramétrée par l'abscisse curviligne  $u$ , égale à  $P \cap \Sigma_0$  avec  $\gamma(0) = x_0$ . Le vecteur  $\gamma'(0)$  est un vecteur tangent à  $\Sigma_0$  en  $\gamma(0)$  (et  $N(x_0), \gamma'(0)$  est une base de  $P$ ).

Figure 2



Alors les composantes du vecteur  $\gamma''(0)$  sur la base donnée par  $(\gamma'(0), N(\gamma(0)) \wedge \gamma'(0))$  sont respectivement la courbure et la torsion de la courbe  $\gamma$ . On a la relation  $\gamma''(0) = W(\gamma(0))\gamma'(0)$ .

La relation  $N(\gamma(u)) = \nabla\phi(\gamma(u))$  indique que

$$W(\gamma(u))\gamma'(u) = \text{grad}N(\gamma(u))\gamma'(u) = \text{Hess}\phi(\gamma(u))\gamma'(u).$$

Ceci implique que  $W(\gamma(0))$  et  $\text{Hess}\phi(\gamma(0))$  coïncident sur le plan tangent à  $\Sigma_0$  en  $\gamma(0)$ . De plus, comme  $\nabla\phi(\gamma(u))$  est de norme 1, on peut dériver par rapport à  $u$  l'égalité

$$\|\nabla\phi(\gamma(u))\|^2 = 1,$$

ce qui donne  $\text{Hess}\phi(\gamma(u))(\nabla\phi(\gamma(u)), \gamma'(u)) = 0$ .

Le vecteur  $\nabla\phi(\gamma(u))$  est dans son noyau (car  $\text{Hess}\phi\nabla\phi = 0$ ) et la matrice Hessienne de  $\phi$  est une matrice symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée. Le plan tangent à la variété  $\Sigma$  en  $x_0$ , qui est orthogonal à un espace propre (la droite  $\mathbb{R}N(x_0)$ ) est stable. Si on décompose  $\text{Hess}\phi$  sur le vecteur normal  $N(x_0)$  et sur les vecteurs qui diagonalisent  $W$ , comme  $W$  et  $\text{Hess}\phi$  coïncident sur le plan, on trouve que  $\text{Tr}\text{Hess}\phi = 0 + \kappa_1 + \kappa_2$ . On a donc prouvé que  $\Delta\phi(x_0) = \text{Tr}W(x_0)$ . On en déduit que  $\Delta\phi(x_0)$  est la somme des courbures principales de  $\Sigma_0$  en  $x_0$ . Le Hessien de la phase peut être identifié à l'application sur le plan tangent donnée par la matrice de Weingarten.

Etudions enfin le cas de  $\Sigma_t$ . Un point de  $\Sigma_t$  s'écrit donc  $x_0 + t\nabla\phi(x_0)$ . On peut construire la courbe  $\gamma_t(v) \subset \Sigma_t$  à partir de la courbe  $\gamma(u) \subset \Sigma_0$  en construisant les points de la forme  $\gamma_t(u) = \gamma(u) + tN(\gamma(u))$ . Comme  $u$  n'est pas une abscisse curviligne sur  $\gamma_t(u)$ , on cherche à

normaliser  $u$  pour obtenir une abscisse curviligne. Pour cela, on écrit

$$\frac{d}{du}(\gamma_t(u)) = \gamma'(u) + t\text{grad}N(\gamma(u))\gamma'(u).$$

Comme  $\text{grad}N(\gamma(u)) = W(\gamma(u))$ , il reste

$$\frac{d}{du}(\gamma_t(u)) = (Id + tW(\gamma(u)))\gamma'(u).$$

De plus, la relation  $\nabla\phi(\gamma_t(u)) = \nabla\phi(\gamma(u))$  se dérive en

$$\text{Hess}\phi(\gamma_t(u))\frac{d}{du}(\gamma_t(u)) = \text{Hess}\phi(\gamma(u))\gamma'(u),$$

ce qui donne

$$\text{Hess}\phi(\gamma_t(0))(Id + tW(\gamma(0)))\gamma'(0) = \text{Hess}\phi(\gamma(0))\gamma'(0).$$

Pour obtenir le Hessien de  $\phi$  sur  $\Sigma_t$ , on suppose que la matrice  $Id + tW(\gamma(0))$  est inversible. Dans ce cas, on trouve

$$\text{Hess}\phi(\gamma_t(0))\tau = W(\gamma(0))(Id + tW(\gamma(0)))^{-1}\tau \quad (3.3.5)$$

pour tout  $\tau$  vecteur tangent à  $\Sigma_t$ , sinon elle n'est vérifiée que sur  $\text{Im}(Id + tW(\gamma(0)))$ .

Le premier résultat est le suivant :

**Lemme 3.1** *On suppose que  $\Sigma_0$  a au moins une courbure négative. On désigne par  $R_0$  la plus grande des courbures négatives ( $-R_0$  est alors la plus petite valeur absolue des rayons de courbure négatifs).*

*Tous les  $a_j$  solution de (3.0.1), qui sont les termes successifs du développement asymptotique de  $u$ , sont de classe  $C^\infty$  sur  $[0, T]$  tant que  $\det(Id + tW(x_0)) \neq 0$ , c'est-à-dire lorsque  $T < -R_0$ ,  $R_0$  étant (en module) le plus petit rayon de courbure de  $\Sigma_0$ . Ils sont tous singuliers pour le premier point  $t$  tel que  $\det(Id + tW(x_0)) = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $t = -R_0$ .*

**Preuve** On rappelle que  $x(t)$  dépend de  $x_0$ , au sens où  $x(0) = x_0 = \gamma(0)$ . On déduit de l'égalité (3.3.5), utilisant encore  $\text{Hess}\phi(\gamma_t(0))N(\gamma_t(0)) = 0$ , l'égalité

$$\text{Hess}\phi(x(t)) = \text{Hess}\phi(x_0)(Id + tW(x_0))^{-1}. \quad (3.3.6)$$

Nous déduisons de (3.3.6) la valeur de  $a_0$ . En effet,

$$\Delta\phi(x(s)) = \text{Tr}(\text{Hess}\phi(\gamma_s(0))) = \text{Tr}(\text{Hess}\phi(x_0)(Id + sW(x_0))^{-1}).$$

On démontre que

$$\frac{d}{ds_1}\text{Log}(\det[Id + (s + s_1)W(x_0)])|_{s_1=0} = \frac{\det(Id + sW(x_0))\text{Tr}[W(x_0)(Id + sW(x_0))^{-1}]}{\det(Id + sW(x_0))} \quad (3.3.7)$$

En effet, l'égalité

$$\det(Id + (s + s_1)W(x_0)) = \det(Id + sW(x_0))[1 + s_1\text{Tr}[W(x_0)(Id + sW(x_0))^{-1}]] + O(s_1^2),$$

et le développement limité du déterminant d'une matrice permet d'obtenir la dérivée par rapport à  $s_1$ . Comme

$$\frac{d}{ds}\text{Log}(\det[Id + sW(x_0)]) = \frac{\det(Id + sW(x_0))\text{Tr}[W(x_0)(Id + sW(x_0))^{-1}]}{\det(Id + sW(x_0))},$$

on en déduit  $\int_0^t \Delta\phi(x(s))ds = \text{Log}(\det(Id + tW(x_0)))$ . On obtient l'égalité

$$a_0(x_0 + tN(x_0)) = \frac{a_0(x_0)}{(\det(Id + tW(x_0)))^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.3.8)$$

On a obtenu le terme principal.

Pour obtenir le terme  $a_1$ , on rappelle l'équation satisfaite par le terme  $a_j$ ; il s'agit de

$$2\frac{da_j}{ds} + \Delta\phi a_j = -i\Delta a_{j-1}$$

qui se réécrit

$$\frac{db_j}{ds} = -\frac{i}{2}a_0^{-1}\Delta a_{j-1}$$

où  $b_j = a_j/a_0$ . On trouve ainsi

$$b_j(x(s)) = b_j(x_0) - \frac{i}{2} \int_0^t a_0(x(s))^{-1} \Delta a_{j-1}(x(s)) ds.$$

l'hypothèse  $t \in [0, T[$ ,  $T$  étant la première valeur de  $t$  pour laquelle  $\det(Id + tW(x_0)) = 0$ , sur la caractéristique issue de  $x_0$ . En supposant les deux courbures principales de  $\Sigma_0$  égales à  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ , celles-ci pouvant être négatives,  $\det(Id + tW(x_0)) = (1 + t\kappa_1)(1 + t\kappa_2)$  et il vient  $T = +\infty$  si les deux courbures sont positives,  $T = \min(-\kappa_1^{-1}, -\kappa_2^{-1})$  sinon. Lorsque  $T < +\infty$ , **on dit que le point  $x(T)$  est un point de la caustique associée à la phase.**

**Proposition 3.1** 1. La solution explicite du système d'équations (3.0.1) est donnée par

$$x(t) = x_0 + tN(x_0),$$

où  $x_0 \in \Sigma_0$  et  $N(x_0)$  est la normale unitaire sortante à  $\Sigma_0$  en  $x_0$ , un voisinage de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^3$  étant paramétré par  $x_0 \in \Sigma_0$  et  $t$ . Les solutions de (3.0.1) sont

$$a_p(x(t)) = \frac{a_p(x_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta a_{p-1}(x(s)) (\det(Id + sW(x_0)))^{\frac{1}{2}} ds}{(\det(Id + tW(x_0)))^{\frac{1}{2}}}.$$

2. Lorsque  $t < T$ , tous les  $a_p(x(t))$  sont des fonctions  $C^\infty$  en  $t$ .
3. En supposant  $\Omega$  totalement caractéristique pour  $\Sigma_0$  au temps  $T$  (c'est-à-dire que tout point de  $\Omega$  est atteint par un point de la forme  $x(t), x_0 \in \Sigma_0, t < T$  et la transformation  $\Sigma_0 \times [0, T[ \rightarrow \Omega$  est un difféomorphisme sur son image), il existe  $a(x, k) \in C^\infty([1, +\infty], C^\infty(\Omega))$  telle que

$$(k^{-2}\Delta + 1)a(x, k)e^{ik\phi(x)} \simeq 0.$$

**Preuve** Les calculs précédents prouvent les points 1 et 2 de la proposition, concernant les caractéristiques. Quant au point 3, on prouve par le théorème dit de Borel (Théorème 1.1) qu'une suite de fonctions  $C^\infty(\Omega)$  permet de construire une fonction  $a(x, k)$  qui est dans  $C^\infty([1, +\infty], C^\infty(\Omega))$  qui admette comme développement asymptotique en  $k$  la série formelle des  $a_p(x)(ik)^{-p}$ . On peut alors évaluer  $(k^{-2}\Delta + 1)a(x, k)e^{ik\phi(x)}$  par (1.4.8). Se fixant alors  $M$ , ordre de troncature de la série et notant  $a_M(x, k)$  la somme des  $M$  premiers termes de la série  $a_j(x)(ik)^{-j}$ , on applique le résultat du Lemme de Borel (Théorème 1.1).

### 3.4 Calcul après la caustique

On considère désormais la solution du système

$$(\Delta + k^2)u(x, k) = 0, u(x, k)|_{\Sigma} = A(x, k)|_{\Sigma} e^{ik\phi_0}$$

et que cette solution existe partout. Pour tout point  $x_0$  de  $\Sigma$ , on considère le rayon associé  $x_0 + t\nabla\phi(x_0) = x_0 + tN(x_0)$ . Nous supposons que, sur  $[0, T]$ , la matrice  $(I + tW(x_0))$  n'est singulière qu'en  $t = t_0$ ,  $0 < t_0 < T$ . Le rayon ne présente pas de singularité (ceci est conforme avec la définition des caustiques, qui correspondent à une accumulation de rayons et non à la singularité d'un rayon).

On démontre que l'amplitude peut être calculée pour tout  $t \in ]t_0, T]$  connaissant l'amplitude au voisinage de  $x(T)$ . Pour cela, on suppose que  $u(x + TN(x), k)$  admet un développement asymptotique en  $k$  au voisinage de  $x_0$ . On exprime l'amplitude en tout point de la forme  $x + tN(x)$ ,  $t_0 < t \leq T$  à partir du développement de  $u(x + TN(x), k)$  au voisinage du point  $x + tN(x)$ . De la proposition 3.1, on déduit que  $(\Delta + k^2)u = 0$ ,  $u(x, k)|_{\Sigma_T} = A^T(x, k)|_{\Sigma_T} e^{ik(\phi_0 + T)}$  admet une solution en fonction de  $Id + tW(x)$ . On choisit pour cela le sens de parcours rétrograde sur la caractéristique dont l'équation est  $\frac{d}{dt}x(t) = -N(x + TN(x))$ . Soit  $t_0$  la plus petite solution positive de  $\det(Id + t_0W(x_0)) = 0$ . Ainsi l'amplitude  $a_0(x(t))$  de la proposition 3.1 diverge lorsque  $t \rightarrow t_0$ ,  $t < t_0$ . On montre

**Lemme 3.2** *Soit  $t$  tel que  $t_0 < t \leq T$ . La solution  $a_0$  de (3.0.1) est donnée par la relation*

$$a_0(x(t)) = \frac{a_0(x(T))}{(\det(Id + (t - T)W(x_0)))^{\frac{1}{2}}} e^{ik(T-t)}.$$

**Preuve** On considère le système d'équations eikonale et de transport, paramétré par  $s$  :

$$\begin{cases} \nabla\phi(y(s)) = -\nabla\phi(x_0), \\ y(s) = x(T) - s\nabla\phi(x_0), \\ \nabla\phi(y(s)) \cdot \nabla a_0(y(s)) + \frac{1}{2}\Delta\phi(y(s))a_0(y(s)) = 0. \end{cases} \quad (3.4.9)$$

Soit  $\Sigma_T$  l'ensemble des points  $x$  tels que  $\phi(x) = t_0 + T$ . On note  $W_T$  la matrice de Weingarten de  $\Sigma_T$ . Pour  $s = 0$ , on remarque que  $y(0) = x(T) = x_0 + TN(x_0) \in \Sigma_T$  et que  $\nabla\phi(y(0)) = -\nabla\phi(x_0)$ . Le point  $y(0)$  appartient à la surface  $\Sigma_T$ . De la proposition 3.1, on déduit  $y(s) = x(T - s)$  et

$$a_0(y(s)) = \frac{a_0(y(0))}{(\det(Id - sW_T(x_0)))^{\frac{1}{2}}}.$$

Remarquons aussi que lorsque  $\Gamma(u)$  est une courbe sur  $\Sigma_T$  et que  $\Gamma_s$  est sa transportée par  $-s\nabla\phi(x_0)$ ,

$$\frac{d}{du}(\Gamma_s(u)) = (Id - sW_T(\Gamma(u)))\Gamma'(u).$$

L'équation de transport d'ordre 0 de (3.4.9) se transforme en

$$\frac{d}{ds}(\text{Log}(a_0(y(s)))) + \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \text{Log}(\det(Id - sW_T(x_0))) = 0.$$

Ceci achève la preuve du lemme.

Pour déterminer l'expression de  $a_0(x(T))$  en fonction de  $a_0(x_0)$  il faut avoir l'outil appelé **phase stationnaire**. Rendez vous donc au chapitre 4, Section 4.8 pour résoudre ce problème.

**Remarque** Pour  $(t_1, t_2) \in [0, t_0[$  ou  $(t_1, t_2) \in ]t_0, T]^2$ , on définit un tube de rayon par sa section  $V_{t_1}$  (qui est un voisinage de  $x(t_1)$  dans  $\Sigma_{t_1}$ , et qui peut aussi être construit comme l'intersection d'un voisinage de  $x(t_1)$  dans  $\mathbb{R}^3$ ) et par

$$T_{t_1, t_2} = \{x + tN_{t_1}(x), 0 \leq t \leq t_2 - t_1, x \in \Sigma_{t_1} \cap V_{t_1}\}.$$

On note alors

$$\Phi(t) = \int_{S_t} |a_0|^2(x) d\sigma.$$

où  $d\sigma$  est la mesure de surface sur  $S_t = \Sigma_t \cap T_{t_1, t_2}$ . C'est le flux d'énergie dans le tube de rayon.

D'après les équations sur  $a_0(x)$ ,  $\Phi(t)$  est indépendant de  $t$  pour  $t \in [0, t_0[$  comme pour  $t \in ]t_0, T]$ . Nous démontrons dans la section 4.8 que  $\Phi(0)$  et  $\Phi(T)$  sont proportionnels ( et  $\Phi(T) = \Phi(0)$ , résultat utilisé dans [] .)

### 3.5 Généralisation au cas d'une équation des ondes avec une métrique $A(x)$

On considère une matrice  $A(x)$  symétrique positive. On considère l'équation des ondes suivante :

$$Pu = [\partial_t^2 - \sum_{j,l} \partial_{x_j} (A_{jl}(x) \partial_{x_l})]u = 0.$$

On recherche la solution de l'équation eikonale en temps et en espace, ainsi que de l'équation de transport. On considère à cet effet une fonction  $u(x, t, k) = a(x, t, k)e^{ik\phi(x, t)}$  où  $a$  admet le développement asymptotique

$$a(x, t, k) \simeq \sum_{j \geq 0} a_j(x, t)(ik)^{-j}.$$

Alors

$$Pu(x, t, k) = k^2 U(x, t, k)e^{ik\phi(x, t)}$$

où  $a(x, t, k) \simeq \sum_{j \geq 0} a_j(x, t)(ik)^{-j}$  implique que

$$U(x, t, k) \simeq P_j(a)(x, t)(ik)^{-j}.$$

On vérifie que

$$P_0(a)(x, t) = a_0(x, t)((A(x)\nabla_x \phi, \nabla_x \phi) - (\partial_t \phi)^2)$$

$$P_1(x, t) = a_1(x, t)((A(x)\nabla_x \phi, \nabla_x \phi) - (\partial_t \phi)^2) - 2\partial_t \phi \partial_t a_0 + 2(A(x)\nabla_x \phi, \nabla_x a_0) + a_0(x, t)P\phi.$$

L'équation eikonale est alors

$$\partial_t \phi(x, t) = -(A(x)\nabla_x \phi, \nabla_x \phi)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous considérons des fonctions  $\phi$  particulières, adaptées à la propagation d'ondes :  $\phi(x, t) = \psi(x) - t$ . Rappelons que ce choix revient à évaluer la surface  $\phi(x, t) = 0$  et à la résoudre en temps.

Considérons  $f$  une solution de

$$\partial_t f + (A(x)\nabla_x \psi(x)) \cdot \nabla_x f = 0$$

et  $h$  la solution de l'équation de transport avec condition initiale

$$\begin{aligned} \partial_t h + (A(x)\nabla_x \psi) \cdot \nabla_x h + \nabla_x \cdot (A(x)\nabla_x \psi) h &= 0, \\ h(x, 0) &= 1 \end{aligned}$$

On introduit l'application de  $V \subset \mathbb{R}^n$  dans  $W \subset \mathbb{R}^n$  qui, à  $x$  fait correspondre  $X(x, t)$  la solution de

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= A(X(x, t))\nabla_x \psi(X(x, t)), \\ X(x, 0) &= x. \end{aligned}$$

On démontre

**Lemme 3.3** *On considère l'équation eikonale (dont la phase solution est  $t - \psi(x)$ ) et l'équation de transport déduite de l'opérateur des ondes dans une métrique riemannienne  $A$ . Les caractéristiques  $X(x, t)$ , solution de*

$$\frac{dx}{dt} = A(x(t))\nabla_x \psi(x(t)), x(0) = x$$

vérifient

$$a_0(x(t), t) \left( \det \frac{dX}{dx} \right)^{-\frac{1}{2}} = a_0(x, 0).$$

Ceci traduit la conservation de l'énergie sur les tubes de rayons.

**Remarque préliminaire** On vérifie que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) h(x, t) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t f h + \partial_t h f) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \{ (A(x)\nabla_x \psi) \cdot \nabla_x (f h) + \nabla_x \cdot (A(x)\nabla_x \psi) (f h) \} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x (A(x)\nabla_x \psi f h) dx = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, à  $t$  fixé,  $X(x, t)$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . On sait que, comme  $f$  est invariante sur les caractéristiques, à savoir  $f(X(x, t)) = f(x)$ , on trouve que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, 0) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(X(x, t), t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(X, t) \frac{dX}{\left| \frac{dX}{dx}(X, t) \right|},$$

Ceci implique que, utilisant  $h(x, 0) = 1$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) h(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, 0) h(x, 0) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, 0) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(X, t)}{\left| \frac{dX}{dx} \right|} dX.$$

On retrouve que cette égalité est vraie lorsque

$$(h(x, t))^{-1} = \left| \frac{dX}{dx} \right|.$$

On va démontrer cette égalité en calculant séparément  $h$  et  $\left| \frac{dX}{dx} \right|$ .

**Equation vérifiée par  $h$**  Soit  $\sigma(x) = \operatorname{div}[A(x)\nabla_x \psi(x)]$ . La fonction  $h(X(x, t), t)$  est solution de

$$\begin{aligned} \partial_t (h(X(x, t), t)) &= \partial_t h(X(x, t), t) + \nabla_x h(X(x, t), t) \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= -(A(X(x, t))\nabla_x \psi(X(x, t))) \cdot \nabla_x h(X(x, t), t) \\ &\quad - \operatorname{div}(A(X(x, t))\nabla_x \psi(X(x, t))) h(X(x, t), t) \\ &\quad + \nabla_x h(X(x, t), t) \cdot (A(X(x, t))\nabla_x \psi(X(x, t))) \\ &= -\sigma(X(x, t)) h(X(x, t), t). \end{aligned}$$

Ainsi

$$h(x(t), t) = h(x, 0) e^{-\int_0^t \sigma(X(x, s)) ds}.$$

L'équation de transport sur  $a_0$ , qui a été obtenue ci-dessus, est

$$-2\partial_t\phi\partial_t a_0 + 2(A(x)\nabla_x\phi, \nabla_x a_0) - a_0(x, t)[\partial_{t^2}^2\phi - \sum_{j,l} \partial_{x_j}(A_{jl}(x)\partial_{x_l}\phi)] = 0.$$

En multipliant par  $\bar{a}_0$  et en prenant la partie réelle de l'expression obtenue, on trouve

$$-\partial_t\phi\partial_t(|a_0|^2) - \partial_{t^2}^2\phi|a_0|^2 + (A(x)\nabla_x\phi, \nabla_x|a_0|^2) + \sum_{j,l} \partial_{x_j}(A_{jl}(x)\partial_{x_l}\phi)|a_0|^2 = 0.$$

Ainsi il reste

$$-\partial_t[|a_0|^2\partial_t\phi] + \sum_{j,l} \partial_{x_l}[A_{jl}(x)\partial_{x_l}\phi|a_0|^2] = 0.$$

Lorsque la phase  $\phi(x, t)$  est égale à  $\psi(x) - t$ , il en découle que

$$\partial_t|a_0|^2 + \sum_{j,l} \partial_{x_j}[A_{jl}(x)\partial_{x_l}\psi|a_0|^2] = 0.$$

**Calcul direct de la jacobienne** L'équation des caractéristiques est

$$\frac{dX_i}{dt} = \sum_j A_{ij}(X(x, t)) \frac{\partial\psi}{\partial x_j}(X(x, t)).$$

En la dérivant par rapport à  $x_p$ , on trouve

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial X_i}{\partial x_p} = \sum_q \frac{\partial}{\partial X_q} \left[ \sum_j A_{ij}(X) \frac{\partial\psi}{\partial x_j}(X) \right]_{X=X(x,t)} \frac{\partial X_q}{\partial x_p}(x, t).$$

On note  $B_{iq}(x, t) = \frac{\partial}{\partial X_q} \left[ \sum_j A_{ij}(X) \frac{\partial\psi}{\partial x_j}(X) \right]_{X=X(x,t)}$ . De l'égalité

$$\frac{d}{dt} \left| \frac{dX}{dx} \right| = \sum_l \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial x_d} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_2}{\partial x_d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_q B_{ql} \frac{\partial X_q}{\partial x_1} & \sum_q B_{ql} \frac{\partial X_q}{\partial x_2} & \cdots & \sum_q B_{ql} \frac{\partial X_q}{\partial x_d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial X_d}{\partial x_1} & \frac{\partial X_d}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_d}{\partial x_d} \end{array} \right|,$$

on déduit, en développant par rapport à la  $q$ -ième ligne et en utilisant le fait qu'un déterminant avec deux lignes identiques est nul, l'égalité

$$\frac{d}{dt} \left| \frac{dX}{dx} \right| = \sum_l B_{lq} \delta_{lq} \left| \frac{dX}{dx} \right|.$$

On remarque enfin que

$$\sum_l B_{ll}(x, t) = \sum_{l,j} \frac{\partial A_{lj}}{\partial x_l}(X(x, t)) \frac{\partial\psi}{\partial x_j}(X(x, t)) + A_{lj}(X(x, t)) \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j \partial x_l}(X(x, t)) = \sigma(x).$$

La quantité  $|\frac{dX}{dx}(t)|$  et  $h^{-1}(t)$  sont solution de la même équation différentielle du premier ordre, et comme pour  $t = 0$ ,  $X(x, 0) = x$ ,  $|\frac{dX}{dx}|(x, 0) = 1 = h^{-1}(0)$ . On a donc  $|\frac{dX}{dx}(t)| = h^{-1}(t)$ . L'équation obtenue sur  $|a_0(X(x, t), t)|^2$  est la même que l'équation sur  $h(x, t)$ , on en déduit

$$\begin{aligned} |a_0(X(x, t), t)|^2 &= |a_0(x(0), 0)|^2 e^{-\int_0^t \sigma(X(x,s)) ds} \\ \Rightarrow \\ a_0(X(x, t), t) \left( \left| \frac{dX(x,t)}{dx} \right| \right)^{-\frac{1}{2}} &= a_0(x, 0). \end{aligned}$$



### 3.6 Exercices du chapitre 3

**Exercice 3.1 : Propagation d'une onde.** Calculer pour tout point de l'espace les ondes suivantes :

1) une onde centrée au point  $O$  à  $t = -T$ , dont l'amplitude est connue pour  $t = 0$  sur la sphère de rayon  $T$ , se propageant à vitesse 1.

2) une onde se propageant à vitesse 1, dont le front d'onde à  $t = 0$  est la sphère  $S_0$  de centre  $O$  et de rayon  $T$ , se propageant dans la direction du vecteur normal intérieur à  $S_0$ .

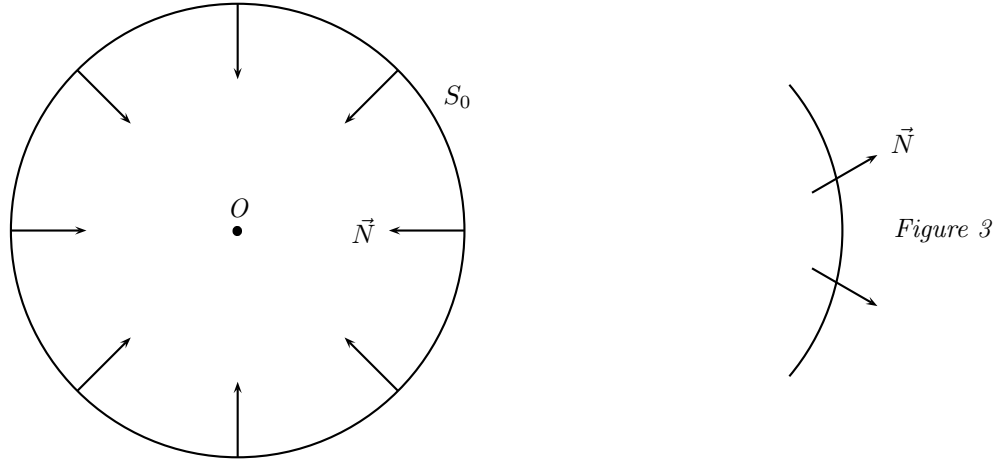


Figure 3

**Exercice 3.2 : Equation des ondes avec vitesse variable** On considère l'équation des ondes avec une vitesse dépendant de la position (uniquement) :

$$(\partial_t^2 - c^{-2}(x)\Delta)u = 0.$$

1) Quelle est l'équation eikonale ? Quelles sont les équations de transport ? Les écrire dans les variables  $(x, t)$  et dans les variables  $x$ .

2) Proposer une équation des caractéristiques de sorte que la phase  $\phi(x)$  vérifie  $\phi(x(s)) = \phi(x(0)) - s$ . Donner les équations vérifiées par les caractéristiques. Résoudre les équations de transport.

3) Refaire l'analyse, si cela est possible, avec l'équation  $Pu = 0$ ,  $P = \partial^2 - \text{div}(A(x)\nabla)$ .

4) Proposer un changement de variable dans l'équation de départ.

**Solution de l'exercice 3.1** Nous imaginons une onde, centrée en  $O$  à  $t = -T$ , se propageant à la vitesse 1 dans le vide. A l'instant  $t = 0$ , cette onde a son front d'onde situé sur la sphère de rayon  $T$ . La surface  $\Sigma_0$  est donc  $\{x, |x| = T\}$ . Le vecteur  $\nabla\phi$  est donc  $\vec{e}_r$ . Comme  $\Delta\phi = \text{div}(\text{grad}\phi)$ , on vérifie que

$$\Delta\phi = \partial_x\left(\frac{x}{r}\right) + \partial_y\left(\frac{y}{r}\right) + \partial_z\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{2}{r},$$

Utilisant le résultat précédent, on trouve que  $x(t) = x_0 + t\vec{e}_r = x_0 + t\frac{x_0}{|x_0|}$ , et donc lorsque  $x_0 \in B_T$ ,  $x(t) \in B_{t+T}$ .

On retrouve l'équation de transport

$$\frac{d}{dt}a_0(x(t)) = -\frac{a_0(x(t))}{t+T}$$

d'où

$$a_0(x(t)) = a_0(x_0)\left(1 + \frac{t}{T}\right)^{-1}$$

puis

$$a_p(x(t)) = \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{-1} \left[ a_p(x(0)) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta a_{p-1}(x(s)) \left(1 + \frac{s}{T}\right) ds \right]$$

Dans la deuxième application, nous supposons au contraire que le front est  $\Sigma_0$ , muni de la deuxième orientation. On vérifie alors que

$$\Sigma_t = \{x, |x| = T - t\}, x(t) = x_0 - t \frac{x_0}{|x_0|}$$

puis que  $a_0(x(t)) = a_0(x_0)\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{-1}$ .

On vérifie donc que  $a_0(x(t))$  devient singulier pour  $t = T$ . Les rayons se focalisent tous au point 0, et tous les termes de l'équation de transport deviennent singuliers. Nous avons donc exhibé deux cas où on pouvait résoudre les équations de transport, et dans un cas  $t$  peut aller jusqu'à  $+\infty$ .

**Solution de l'exercice 3.2** 1) Nous introduisons donc un petit paramètre  $\varepsilon$ . Alors on recherche une solution sous la forme

$$\sigma(x, t, \varepsilon) e^{i\psi(x, t)/\varepsilon}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^{-2} [(\partial_t \psi)^2 - c^{-2}(x)(\nabla_x \psi)^2] \\ & + i\varepsilon^{-1} [2\partial_t \psi \partial_t \sigma - 2c^{-2}(x) \nabla_x \psi \nabla_x \sigma + (\partial_{t^2}^2 \psi - c^{-2}(x) \Delta \psi) \sigma] \\ & + (\partial_{t^2}^2 - c^{-2}(x) \Delta) \sigma = 0. \end{aligned}$$

L'équation eikonale est alors

$$(\partial_t \psi)^2 = c^{-2}(x)(\nabla_x \psi)^2.$$

On peut écrire, au voisinage d'un point  $(x_0, t_0)$  avec l'hypothèse  $\partial_t \psi(x_0, t_0) \neq 0$ ,

$$\psi(x, t) - \psi(x_0, t_0) = a(x, t)(t - \psi(x)),$$

où  $t_0 = \psi(x_0)$  et  $a(x_0, t_0) \neq 0$ . On vérifie que l'équation satisfaite par  $\phi$  et par  $a$  se met sous la forme

$$\begin{aligned} & a^2(x, t) [1 - c^{-2}(x)(\nabla_x \phi(x))^2] = \\ & -(t - \phi(x)) \left[ \frac{2}{c^2} a \nabla_x a \nabla_x \phi + 2a \partial_t a + (t - \phi(x)) (\partial_t a)^2 - \frac{1}{c^2} (t - \phi(x)) (\nabla_x a)^2 \right], \end{aligned}$$

ce qui donne, en  $t = \phi(x)$  au voisinage de  $x = x_0$

$$(\nabla_x \phi(x))^2 = c^2(x).$$

et l'équation sur  $a$  correspondant à annuler le terme de droite entre crochets.

Obtenir l'équation de transport n'est pas évident sous cette forme; il faut plutôt revenir à une formulation du type

$$b(x, t, \varepsilon) e^{i \frac{t - \phi(x)}{\varepsilon}}$$

et obtenir l'équation de transport sur  $b$ . En effet, cela revient à imposer  $\psi(x, t) = t - \phi(x)$ , auquel cas  $\nabla_x \psi = -\nabla_x \phi$  et  $\Delta \psi = -\Delta \phi$ ,  $\partial_{t^2}^2 \psi = 0$ . Les équations de transport deviennent

$$\partial_t b + c^{-2}(x) \nabla_x \phi \nabla_x b + \frac{1}{2} c^{-2}(x) \Delta \phi b - \frac{i\varepsilon}{2} (\partial_{t^2}^2 - c^{-2} \Delta) b = 0.$$

Cette équation de transport, simple, sera étudiée plus loin. Pour l'instant, concentrons nous sur les définitions des caractéristiques. Celles-ci doivent être orthogonales aux surfaces d'onde, donc on doit avoir

$$\frac{dx}{ds} = \alpha(x(s)) \nabla_x \phi(x(s)).$$

La fonction  $\phi(x(s))$  est, suivant l'hypothèse de l'énoncé, linéaire en  $s$  donc

$$\frac{d}{ds}(\phi(x(s))) = 1 = \nabla_x \phi(x(s)) \frac{dx}{ds} = \alpha(x(s)) (\nabla_x \phi(x(s)))^2,$$

ce qui donne  $\alpha(x) = c^{-2}(x)$ . Si les courbes caractéristiques sont définies par

$$\frac{dx}{ds} = c^{-2}(x(s)) \nabla_x \phi(x(s)), \quad , x(0) \text{ donné}$$

alors  $\phi(x(s)) = \phi(x(0)) + s$ .

Notons que, contrairement au cas scalaire (vitesse constante), les rayons ne sont pas des droites. En effet, soit  $\vec{t}(x(s)) = \frac{\nabla_x \phi(x(s))}{c}$ . C'est le vecteur unitaire tangent au rayon. Alors, lorsqu'on le dérive, en utilisant  $Hess\phi \nabla_x \phi = c \nabla_x c$ , égalité qui provient de l'équation eikonale, on trouve

$$\frac{d}{ds}(\vec{t}(x(s))) = \frac{Hess\phi \frac{dx}{ds}}{c} - \frac{\nabla_x c \frac{dx}{ds}}{c^2} \nabla_x \phi = \frac{1}{c^2} (\nabla_x c - (\vec{t} \cdot \nabla_x c) \vec{t}),$$

qui est la projection orthogonale de  $\nabla_x c$  dans le plan orthogonal à  $\vec{t}$ . Ce vecteur n'a aucune raison d'être nul.



## Chapitre 4

# Théorème de la phase stationnaire

Dans cette section, nous introduisons un des outils essentiels de compréhension plus profonde des propagations d'onde : le théorème de la phase stationnaire. Nous emploierons dans la plupart des cas étudiés cette appellation, même lorsqu'il s'agira de la méthode du col.

Traditionnellement, les méthodes de phase stationnaire s'appliquent à des intégrales dites oscillantes, et permettent de trouver, sous un certain nombre de conditions, un équivalent lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ , de  $\int_{\Omega} a(x, k) e^{ik\phi(x)}$ . Historiquement, cette intégrale n'a pas été la première à être étudiée. La méthode du col, quant à elle, permet d'obtenir un équivalent d'intégrales de la forme  $\int_a^b \sigma(x) e^{k\psi(x)} dx$ , où la phase  $\psi$  présente un maximum non dégénéré en un point  $x_0$  de l'intervalle  $[a, b]$ . La méthode de la phase stationnaire diffère sensiblement, dans son principe, de la méthode du col. En effet, dans le théorème de la phase stationnaire, le point critique considéré est un point stationnaire pour la fonction  $\phi(x)$  (cela peut être un maximum, un minimum ou un point selle) alors que la méthode du col s'applique uniquement au voisinage d'un maximum.

L'intégrale  $\int_{\Omega} a(x, k) e^{ik\phi(x)} dx$  s'appelle une intégrale oscillante, et une théorie détaillée fait l'objet du chapitre 9. Notons, pour justifier l'emploi de cette dénomination, que lorsque  $\phi$  est réelle, la fonction  $e^{ik\phi(x)}$  est oscillante. Par exemple, si on considère  $\phi(x) = x^2$ , pour  $x \in [-1, 1]$ , lorsque  $k$  est grand, les intervalles où  $\phi$  prend les mêmes valeurs sont les intervalles  $[(\frac{2\pi n}{k})^{\frac{1}{2}}, (\frac{2\pi(n+1)}{k})^{\frac{1}{2}}]$ .

Ainsi, la méthode de la phase stationnaire est plus générale que la méthode de Laplace, puisque la phase peut être de la forme  $e^{ik\phi(x)}$ . Dans tout ce qui suit, on appellera souvent théorème de la phase stationnaire tous les résultats qui reviennent formellement au calcul d'un extremum non dégénéré d'une phase.

### 4.1 Méthode de Laplace

Nous donnons le résultat de la méthode de Laplace que l'on trouve par exemple dans le livre d'exercices de Polya et Czego [83].

Laplace [57] a introduit cette méthode pour le calcul de  $\int dx \cos rxc^{-a^2x^2}$  lorsque les bornes sont  $-\infty$  et  $+\infty$  (p 107),  $c$  désignant l'exponentielle de 1. Par commodité, on le remplacera par  $e$ , notation à laquelle nous sommes habitués. Pour le calcul d'un équivalent de  $\int y dx$ , Laplace a introduit la représentation  $y = Y e^{-t^{\mu+1}}$  où  $Y$  admet un développement de Taylor (p 101). Il étudie alors le cas particulier  $\mu = 1$  (p 112), dont il déduit le développement de  $\int y dx$ .

Polya et Czego ont présenté cette méthode dans [83] pour le calcul d'un équivalent en  $n$  de  $\int_a^b [f(x)]^n dx$ , où  $f$ , strictement positive, présente un maximum intérieur à  $[a, b]$ . Si on réécrit  $f(x) = e^{\log f(x)}$ , notant  $\phi(x) = \log f(x)$ , on formule le résultat de Polya et Czego sous

**Lemme 4.1** Soit  $\phi(x)$  de classe  $C^2$  sur  $]a, b[$ ,  $a < a_1 < a_2 < b$ , qui atteint son maximum en un seul point  $x_0$  de l'intervalle  $]a_1, a_2[$ , tel que  $\phi''(x_0) < 0$ . Soit  $a(x)$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , telle que  $a(x_0) \neq 0$ .

Un équivalent asymptotique lorsque  $k \rightarrow +\infty$  de

$$\int_{a_1}^{a_2} a(x)e^{k\phi(x)} dx$$

est  $(\frac{2\pi}{k(-\phi''(x_0))})^{\frac{1}{2}} e^{k\phi(x_0)} a(x_0)$ .

**Preuve** Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $\varepsilon$  tels que, pour  $x \in I = ]a_1, x_0 - \varepsilon[ \cup ]x_0 + \varepsilon, a_2[$ , alors  $\phi(x) \leq \phi(x_0) - \varepsilon_0$ . On écrit

$$e^{-k\phi(x_0)} \int_{a_1}^{a_2} a(x)e^{k\phi(x)} dx = \int_I a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))} dx + \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))} dx.$$

On remarque que

$$\phi(x) - \phi(x_0) = (x - x_0)^2 \int_0^1 (1-t)\phi''(tx + (1-t)x_0) dt.$$

On suppose que  $a(x_0) \neq 0$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit, il existe  $\alpha, \beta > 0$  tels que  $\beta < |a(x_0)|$  et  $\alpha + \phi''(x_0) < 0$  et pour tout  $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$

$$(x - x_0)^2 [\phi''(x_0) - \alpha] \leq \phi(x) - \phi(x_0) \leq (x - x_0)^2 [\phi''(x_0) + \alpha].$$

$$a(x_0) - \beta \leq a(x) \leq a(x_0) + \beta,$$

ce qui permet de majorer et de minorer  $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))} dx$  par

$$\begin{aligned} (|a(x_0)| - \beta) e^{k\phi(x_0)} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-k(-\phi''(x_0)+\alpha)(x-x_0)^2} dx &\leq \\ | \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))} dx | & \\ \leq (|a(x_0)| + \beta) e^{k\phi(x_0)} \int_{\mathbf{R}} e^{-k(-\phi''(x_0)-\alpha)(x-x_0)^2} dx. & \end{aligned}$$

On rappelle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k[-\phi''(x_0) \mp \alpha](x-x_0)^2} dx = (\frac{2\pi}{k|\phi''(x_0) \pm \alpha|})^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, on vérifie que

$$\int_{x_0+\varepsilon}^{+\infty} e^{-kC(x-x_0)^2} dx \leq -\frac{1}{2kC\varepsilon} \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} (-2kC(x-x_0)) e^{-k(x-x_0)^2 C} dx \leq \frac{1}{2kC\varepsilon} e^{-k\varepsilon^2 C}, \quad (4.1.1)$$

ainsi on a les inégalités

$$\begin{aligned} (|a(x_0)| - \beta) e^{k\phi(x_0)} (\frac{2\pi}{k(-\phi''(x_0)+\alpha)})^{\frac{1}{2}} - 2 \int_{x_0+\varepsilon}^{+\infty} e^{-k(-\phi''(x_0)+\varepsilon)(x-x_0)^2} dx &\leq \\ | \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))} dx | & \\ \leq (|a(x_0)| + \beta) e^{k\phi(x_0)} \int_{\mathbf{R}} e^{-k(-\phi''(x_0)-\varepsilon)(x-x_0)^2} dx. & \end{aligned}$$

On a de plus l'inégalité  $|\int_I a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))} dx| \leq M e^{-k\varepsilon_0}$ .

On en déduit que  $k^{\frac{1}{2}} e^{-k\phi(x_0)} \int_{a_1}^{a_2} a(x)e^{k\phi(x)} dx - a(x_0) (\frac{2\pi}{(-\phi''(x_0)+\alpha)})^{\frac{1}{2}}$  tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ . Ceci achève la preuve du lemme 4.1.

On généralise ce résultat à un intervalle compact  $K$  de  $\mathbf{R}^n$  et une phase  $\phi(x)$  définie sur ce compact. On étudie

$$\int_K e^{k\phi(x)} a(x) dx.$$

Considérons l'ensemble des points où  $\phi'$  s'annule. Dans un premier cas, on suppose que cet ensemble est vide. Comme  $\phi'$  ne s'annule pas sur le compact  $K$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|\phi'| \geq \delta$ . On a alors

$$\begin{aligned} \int_K e^{k\phi(x)} a(x) dx &= \frac{1}{k} \int_K \frac{d}{dx} (e^{k\phi(x)}) \frac{a(x)}{\phi'(x)} dx \\ &= -\frac{1}{k} \int_K e^{k\phi(x)} \frac{d}{dx} \left( \frac{a(x)}{\phi'(x)} \right) dx + \frac{1}{k} \int_{\partial K} e^{k\phi(x)} \frac{a(x)}{\phi'(x)} d\sigma(x). \end{aligned}$$

La phase  $\phi$  admet son maximum, noté  $l$ , sur le bord  $\partial\Omega$ .

On vérifie que  $\frac{d}{dx} \left( \frac{a(x)}{\phi'(x)} \right) = \frac{a'(x)}{\phi'(x)} - \frac{a(x)\phi''(x)}{(\phi'(x))^2}$ . Ainsi  $|\frac{d}{dx} \left( \frac{a(x)}{\phi'(x)} \right)| \leq \frac{|a'|_\infty}{\delta} + \frac{|a|_\infty |\phi''|_\infty}{\delta^2}$ . Il existe donc une constante  $C$ , égale à  $\mu(K) \left( \frac{|a'|_\infty}{\delta} + \frac{|a|_\infty |\phi''|_\infty}{\delta^2} \right) + \mu(\partial K) \frac{|a|_\infty}{\delta}$  ( $\mu(K)$  désigne dans ce paragraphe la mesure de Lebesgue de  $K$ ), telle que

$$\left| \int_K e^{k\phi(x)} a(x) dx \right| \leq \frac{C}{k} e^{kl}.$$

On a obtenu une majoration dont le terme principal est en  $k^{-1} e^{k \max \phi}$ . Elle est donc négligeable par rapport au terme du Lemme 4.1.

Dans le cas contraire, **on suppose que les points où la dérivée s'annule sont en nombre fini, isolés et contenus dans l'intérieur de  $K$** . On les note  $x_1, \dots, x_N$  et on suppose aussi (et c'est une condition générique) que  $\phi''(x_j) \neq 0$ . On a le

**Lemme 4.2** *Soit  $J \subset \{1, \dots, N\}$  l'ensemble des indices des points où  $\phi$  atteint son maximum, égal à  $l$ . Alors*

$$e^{-kl} \int_K e^{k\phi(x)} a(x) dx \simeq \left( \frac{2\pi}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j \in J} \frac{a(x_j)}{(-\phi''(x_j))^{\frac{1}{2}}}.$$

**Preuve** Il existe  $N + 1$  fonctions  $\chi_1, \dots, \chi_N$  dans  $C_0^\infty(K)$  telles que

$$\chi + \sum_{j=1}^N \chi_j = 1,$$

chaque fonction  $\chi_j$  est supportée dans un compact  $K_j$  contenant  $x_j$ , est égale à 1 sur un voisinage  $K'_j$  de  $x_j$ , tel que, sur  $K'_j$ ,  $\phi''(x)$  ne s'annule pas et les  $K'_j$  sont disjoints. La fonction  $\chi$ , quant à elle, a son support dans le complémentaire d'un ouvert borné  $\tilde{K}$  ne contenant aucun des  $x_j$ . Ainsi la restriction de  $\chi$  sur  $K$  a son support dans un compact ne contenant aucun des  $x_j$ .

On a ainsi écrit

$$e^{-kl} \int_K e^{k\phi(x)} a(x) dx = \sum_{j \in J} e^{-kl} \int_K e^{k\phi(x)} a(x) \chi_j(x) dx + \sum_{j \notin J} e^{-kl} \int_K e^{k\phi(x)} a(x) \chi_j(x) dx + e^{-kl} \int_K e^{k\phi(x)} a(x) \chi(x) dx.$$

Considérons  $a_j = \int_K e^{k\phi(x)} a(x) \chi_j(x)$ . Le compact  $K_j$  contient uniquement le point critique  $x_j$ . Si  $\phi(x_j)$  est un maximum de  $\phi$  sur l'intervalle considéré, alors on applique le Lemme 4.1. Lorsque  $j \notin J$ , le maximum est strictement inférieur à  $l$ , ainsi  $e^{k(\phi(x_j) - l)}$  est exponentiellement décroissant, donc est  $O(k^{-1})$ .

Étudions le cas  $x_j$  minimum de  $\phi$ . Dans ce cas, on peut appliquer le principe du maximum et il existe un point  $x_{j'}$ ,  $j' \neq j$ , qui soit un maximum, tel que  $\phi(x_{j'}) > \max_{x \in K_j} \phi(x) + b$ ,  $b$  étant une constante strictement positive. Ainsi  $\phi(x) \leq \phi(x_{j'}) - b$ , d'où on déduit

$$a_j e^{-k\phi(x_{j'})} = \int_{K_j} a(x) \chi_j(x) e^{k(\phi(x) - \phi(x_{j'}))} dx,$$

qui est donc uniformément majoré par  $e^{-bk} \mu(K_j) \sup_{K_j} |a|$ .

D'autre part, sur le support de  $\chi$ , il n'y a pas de points critiques. Le maximum de  $\phi$  sur le support de  $\chi$ , noté  $l_0$  est strictement inférieur à  $l$ . Cette intégrale est donc négligeable, et on en déduit le résultat du Lemme 4.2.

## 4.2 Théorème de la phase non stationnaire

Nous énonçons un premier résultat de régularité asymptotique pour une intégrale oscillante, associé à un intégrand comprenant le terme  $e^{ik\phi(x)}$ . De telles phases feront l'objet de la section 11.3.

**Lemme 4.3** *Soit  $\phi(x)$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ouvert borné,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . On suppose que  $\phi$  n'admet pas de point critique sur  $\Omega$ .*

*Soit  $a \in C_0^\infty(\Omega)$ , de support contenu dans  $K$  compact. On introduit  $u(k) = \int_\Omega a(x)e^{ik\phi(x)} dx$ . Pour tout  $N$ , il existe une constante  $C_N$  telle que*

$$|u(k)| \leq C_N k^{-N}.$$

**Preuve** On sait que  $\partial_{x_j}[e^{ik\phi(x)}] = ik\partial_{x_j}\phi(x)e^{ik\phi(x)}$ . On en déduit

$$e^{ik\phi(x)} = \left[ \frac{1}{ik} \sum_j \frac{\partial_{x_j}\phi}{|\nabla\phi|^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] (e^{ik\phi(x)}).$$

Soit  $L$  l'opérateur

$$L(f) = - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{f(x)(\partial_{x_j}\phi)}{|\nabla\phi|^2} \right).$$

Le gradient  $\nabla\phi$  n'a pas de zéro sur le compact  $K$ , donc il existe  $c > 0$  tel que  $|\nabla\phi| \geq c$ , donc l'opérateur  $L$  ne présente pas de singularité. De l'égalité

$$a(x) = \sum_j \frac{a(x)(\partial_{x_j}\phi)}{\sum_p (\partial_{x_p}\phi)^2} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}$$

on déduit, après intégration par parties pour  $a \in C_0^\infty(\Omega)$  :

$$\int_\Omega a(x)e^{ik\phi(x)} dx = \frac{1}{ik} \int_\Omega L(a)e^{ik\phi(x)} dx.$$

Les coefficients de  $L$  sont  $C^\infty$  et dépendent des dérivées de  $\phi$  d'ordre 2. Par composition, les coefficients de  $L^k$  dépendent des dérivées de  $\phi$  à l'ordre  $k+1$  au plus. On vérifie alors que, si  $|a|_p$  désigne le maximum sur  $\Omega$  des dérivées de  $a$  au plus d'ordre  $p$ , alors pour tout  $M$  il existe une constante  $C_M$  telle que

$$|L^M(a)| \leq C_M(|\phi|_{M+1}, |a|_M). \quad (4.2.2)$$

Par intégrations par parties successives, on trouve

$$\int_\Omega a(x)e^{ik\phi(x)} dx = \left(\frac{1}{ik}\right)^M \int_\Omega L^M(a)e^{ik\phi(x)} dx$$

ce qui conduit à l'inégalité du lemme, en utilisant la majoration (4.2.2).

On a donc démontré que, lorsque la phase ne stationne pas, l'intégrale oscillante est majorée par toute puissance inverse de  $k$ .



### 4.3 La méthode du col pour une phase complexe.

#### 4.3.1 Un calcul préliminaire

Soit  $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Nous considérons ici l'expression

$$I(a, \lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{2}(x-i)^2} a(x) dx.$$

Notons que, sur  $\mathbb{R}$ , la phase ne présente pas de point critique. En revanche, de

$$-\frac{\lambda}{2}(x-i)^2 = -\frac{\lambda}{2}x^2 + i\lambda x + \frac{\lambda}{2},$$

on déduit la majoration

$$|I(a, \lambda)| \leq \|a\|_{\infty} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\lambda/2},$$

dont on pourrait déduire que l'intégrale se comporte en  $e^{\frac{\lambda}{2}}$ , et donc que nous n'aurions pas de développement asymptotique. Ce n'est pas le cas; en effet on écrit

$$I(a, \lambda) = e^{\frac{\lambda}{2}} \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} a(x) \cos(\lambda x) dx + i \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} a(x) \sin(\lambda x) dx \right].$$

Soit  $M$  l'opérateur

$$Mf(x) = \frac{1}{(x-i)} \frac{\partial f}{\partial x}(x).$$

Son opérateur adjoint donné par  $\int Lfg dx = -\int Mgf dx$  est l'opérateur  $L$  de la section précédente

$$Lf(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f(x)}{x-i} \right).$$

Ces deux opérateurs agissent sur les fonctions  $C^{\infty}(\mathbb{R})$ . La relation

$$L(e^{-\frac{\lambda}{2}(x-i)^2}) = -\lambda e^{-\frac{\lambda}{2}(x-i)^2}$$

implique

$$I(a, \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} M(e^{-\frac{\lambda}{2}(x-i)^2}) a(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{2}(x-i)^2} L(a)(x) dx.$$

Il vient

$$I(a, \lambda) = \lambda^{-N} I(L^N(a), \lambda).$$

Ces calculs ressemblent à la preuve du théorème de la phase non stationnaire. La majoration obtenue est alors

$$\forall N, \exists C_N > 0, |I(a, \lambda)| \leq C_N \|a\|_{C^N(\mathbb{R})} \lambda^{-N} e^{\lambda/2}.$$

On verra dans la suite de ce chapitre que nous ne sommes pas dans le cadre du théorème de la phase stationnaire (auquel cas on pourrait conclure que cette phase est non stationnaire) : une des hypothèses cruciales (le comportement de la phase en  $\lambda$ ), qui est que  $\operatorname{Re}(-\frac{1}{2}(x-i)^2) \leq 0$ , n'est pas vérifiée.

Pour poursuivre l'analyse, soit  $F(\lambda) = I(1, \lambda)$ . Cette fonction, qui est définie pour tout  $\lambda > 0$  vérifie, après dérivation (licite) sous le signe somme, l'équation différentielle :

$$F'(\lambda) = -\frac{1}{2\lambda} F(\lambda)$$

d'où on déduit  $\lambda^{\frac{1}{2}} F(\lambda) = F(1)$ . On a ainsi

$$\lambda^{\frac{1}{2}}F(\lambda) = \int_R e^{-\frac{1}{2}(u-\lambda^{\frac{1}{2}}i)^2} du.$$

Lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ , la limite de cette quantité est  $(2\pi)^{\frac{1}{2}}$ . Comme la fonction  $\lambda^{\frac{1}{2}}F(\lambda)$  est constante, continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Elle est donc égale à sa limite  $(2\pi)^{\frac{1}{2}}$ . Nous avons donc obtenu

$$I(1, \lambda) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous verrons ci-après qu'il s'agit d'un résultat analogue à celui donné par la transformée de Bergmann.

Si on veut calculer  $I(1, \lambda)$  en utilisant la méthode de Laplace (que l'on appelle aussi méthode du col), on introduit le contour dans le plan complexe qui soit le rectangle dont un des côtés est  $[-R, R]$  et dont le côté opposé passe par le point  $i$ . La fonction  $e^{-\frac{\lambda}{2}(x-i)^2}$  est holomorphe dans ce rectangle, donc l'intégrale sur le rectangle est nulle. Ceci aboutit à

$$\int_{-R}^R e^{-\frac{\lambda}{2}(x-i)^2} dx = \int_{-R}^R e^{-\frac{\lambda t^2}{2}} + i \int_0^1 e^{-\frac{\lambda}{2}(-R-iu-i)^2} du + i \int_0^1 e^{-\frac{\lambda}{2}(R+iu-i)^2} du.$$

Le premier terme est équivalent à  $\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$  lorsque  $R$  tend vers  $+\infty$  grâce au lemme 4.1.

Les deux autres termes sont majorés par  $e^{-\frac{\lambda}{2}(R^2-1)}$ , qui tendent vers 0 plus vite que toute puissance de  $\lambda$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ , ceci dès que  $R > 1$ . Par déformation du contour d'intégration, on s'est ramené à la méthode de Laplace.

Maintenant, supposons  $a(z)$  holomorphe dans la bande  $0 \leq \Im z \leq 1$ , avec des majorations de  $a$  et de toutes ses dérivées analogues à celles de  $a \in \mathcal{S}$ .

Le calcul peut être fait identiquement, et on trouve

$$I(a, \lambda) \simeq \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda \frac{t^2}{2}} a(t+i) dt.$$

Sur cette intégrale, on applique le théorème de la phase stationnaire usuel.

### 4.3.2 La méthode de Laplace pour une phase complexe générale

On considère une fonction holomorphe  $\phi$  vérifiant les hypothèses suivantes :

1. sur l'adhérence  $\bar{B}$  d'un ouvert connexe  $B$  du plan complexe,  $\phi$  n'admet qu'un seul point critique  $z_0$  et il est non dégénéré. On a alors  $\phi'(z_0) = 0$ ,  $\phi''(z_0) \neq 0$ .
2. il existe un chemin  $z(t)$  vérifiant  $z(0) = z_0$ ,  $\dot{z}(0) \neq 0$  (et  $\phi(z(t))$  est orienté dans le sens inverse du sens trigonométrique) et un  $\varepsilon > 0$  tels que

$$\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \operatorname{Re}[\phi(z(t)) - \phi(z_0)] \leq 0.$$

De plus,  $\operatorname{Re}(\phi(z(\pm\varepsilon)) - \phi(z_0)) < 0$ .

3. En définissant  $\bar{B} \cap \mathbb{R} = [a_-, a_+]$ , il existe deux chemins  $\mathcal{C}_{\pm}$  tels que  $\mathcal{C}_{\pm}$  joint  $a_{\pm}$  à  $z(\pm\varepsilon)$ , de longueur  $L_{\pm}$  ne dépendant que de l'ouvert  $B$ , et une constante  $\delta > 0$  tels que, sur  $\mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_-$  :

$$\operatorname{Re}[\phi(u) - \phi(z_0)] \leq -\delta.$$

On a alors la proposition

**Proposition 4.1** *Pour tout  $a$  symbole holomorphe sur la région  $\Omega$  définie par  $[a_-, a_+]$ ,  $\mathcal{C}_+$ ,  $\mathcal{C}_-$ ,  $z([-\varepsilon, \varepsilon])$ ,*

$$e^{-\lambda\phi(z_0)} \int_{a_-}^{a_+} e^{\lambda\phi(x)} a(x) dx$$

admet un développement asymptotique en  $\lambda$  qui est celui de

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\lambda(\phi(z(t))-\phi(z_0))} a(z(t)) \dot{z}(t) dt.$$

**Preuve** Comme les fonctions  $a$  et  $\phi$  sont holomorphes sur  $\Omega$ , l'intégrale sur le contour  $\partial\Omega$  est nulle (théorème de Cauchy). Ceci s'écrit, en tenant compte des orientations et en supposant  $C_{\pm}$  parcourus dans le sens trigonométrique par des chemins orientés  $\gamma_{\pm}(s)$  (avec  $|\dot{\gamma}_{\pm}| = 1$ ), on a

$$\begin{aligned} e^{-\lambda\phi(z_0)} \int_{a_-}^{a_+} e^{\lambda\phi(x)} a(x) dx &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\lambda(\phi(z(t))-\phi(z_0))} a(z(t)) \dot{z}(t) dt \\ &+ \int_{C_+} e^{\lambda(\phi(\gamma_+(s))-\phi(z_0))} a(\gamma_+(s)) \dot{\gamma}_+(s) ds \\ &+ \int_{C_-} e^{\lambda(\phi(\gamma_-(s))-\phi(z_0))} a(\gamma_-(s)) \dot{\gamma}_-(s) ds \end{aligned}$$

On note  $r(\lambda) = \int_{C_+} e^{\lambda(\phi(\gamma_+(s))-\phi(z_0))} a(\gamma_+(s)) \dot{\gamma}_+(s) ds + \int_{C_-} e^{\lambda(\phi(\gamma_-(s))-\phi(z_0))} a(\gamma_-(s)) \dot{\gamma}_-(s) ds$ . On applique le théorème de la phase stationnaire usuel au premier terme, puisque  $\psi(t) = -i(\phi(z(t)) - \phi(z_0))$  vérifie  $\Im\psi \geq 0$ , avec inégalité stricte au bord, et  $\psi$  admet un point critique en  $t = 0$  de valeur 0.

On sait que  $|r(\lambda)| \leq \|a\|_{\infty}(L_+ + L_-)e^{-\lambda\delta}$ . On écrit

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\lambda(\phi(z(t))-\phi(z_0))} a(z(t)) \dot{z}(t) dt = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{N-1} a_p \lambda^{-p} + r_N(\lambda)$$

avec  $|r_N(\lambda)| \leq C_N \lambda^{-N}$  pour  $\lambda \geq \lambda_0$ , la constante dépendant de  $a$  et de ses dérivées dans le domaine  $\Omega$ . On introduit alors  $r'_N(\lambda) = r_N(\lambda) + r(\lambda)$ . Il existe une constante  $C'_N$  telle que, pour  $\lambda \geq \lambda_0$

$$|r'_N(\lambda)| \leq C'_N \lambda^{-N}.$$

On a ainsi prouvé la proposition.

**Corollaire 4.1** *Si dans l'ouvert  $\Omega$ , la phase  $\phi$  admet plusieurs points critiques  $z_1, \dots, z_d$  tels que  $\operatorname{Re}\phi(z_1) > \operatorname{Re}\phi(z_2) > \dots > \operatorname{Re}\phi(z_d)$ , alors, sous les mêmes hypothèses 1. et 2. que précédemment pour les points critiques*

$$e^{-\lambda\phi(z_1)} \int_a^b a(x) e^{\lambda\phi(x)}$$

*admet un développement asymptotique qui est celui uniquement au voisinage de  $z_1$ , pourvu qu'on puisse déformer le bord du domaine en un contour tel que  $\operatorname{Re}(\phi(z) - \phi(z_1)) \leq -\delta < 0$ , sauf dans un voisinage de  $z_1$ .*

## 4.4 La méthode du col : majoration uniforme du reste pour un symbole holomorphe

Il existe autant de théorèmes de la phase stationnaire que de situations dans lesquelles on peut se ramener à un tel développement. Nous verrons par exemple dans le chapitre 5 un autre énoncé, qui sera aussi utilisé dans la section 4.8. Il se produira même des cas où la phase sera stationnaire dégénérée, comme le cas se présentera dans le chapitre 11, le chapitre 12 ou encore le chapitre 14 : leur point commun étant l'existence d'une phase oscillante plus générale, qui se réduise en presque tous les points en la phase considérée, et qui présente un point critique non dégénéré<sup>1</sup>. L'énoncé de cette section se rapproche de la méthode de Laplace, qui s'appelle

<sup>1</sup>Plus précisément, si la phase  $\phi(x)$  admet un point critique dégénéré en  $x_0$ , on pourra trouver une phase  $\psi(x, \theta)$  qui est équivalente à  $\phi$  et qui n'a pas de point critique dégénéré.

aussi méthode du col, ce qui explique le titre du chapitre. C'est un résultat donné dans le livre de J. Sjostrand [88] :

**Théorème 4.1** *Il existe une constante  $C_N$  ne dépendant que de la dimension  $N$ , telle que pour tout  $n, k > 0$ , et toute fonction holomorphe  $u$  définie sur un voisinage de la boule de rayon 1 dans  $\mathbb{C}^N$ ,*

$$k^{\frac{N}{2}} \int_{|x| \leq 1, x \in \mathbb{R}^N} e^{-kx^2/2} u(x) dx = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \sum_{p=0}^{p=n} u_p k^{-p} + R_n(k)$$

où les  $u_p$  sont égaux à  $\frac{1}{(p!)} ((\frac{\Delta}{2})^p u)(0)$  et où le reste  $R_n$  vérifie

$$|R_n(k)| \leq C_N (n+1)^{\frac{N}{2}} k^{-n-1} (n+1)! 2^{n+1} \sup_{|z| \leq 1, z \in \mathbb{C}^N} |u(z)|$$

**Preuve** La démonstration de ce théorème de la phase stationnaire complexe se fait en deux étapes :

1. Majoration du reste en utilisant le principe du maximum.
2. Calcul de chaque terme à partir de la série de Taylor

Nous commençons par la preuve du deuxième point.

On vérifie, sur  $z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1$ , l'inégalité (provenant de  $|u^{(p)}(0)| \leq p! \sup_{|z| \leq 1, z \in \mathbb{C}} |u(z)|$ )

$$|u(z) - \sum_{p=0}^{p=2n-1} \frac{u^{(p)}(0)}{p!} z^p| \leq (2n+1) \sup_{|z| \leq 1, z \in \mathbb{C}} |u(z)|.$$

Par le principe du maximum holomorphe sur  $u$ , on en déduit

$$|u(z) - \sum_{p=0}^{p=2n-1} \frac{u^{(p)}(0)}{p!} z^p| \leq (2n+1) \sup_{|z| \leq 1, z \in \mathbb{C}} |u(z)| |z|^{2n}.$$

On peut généraliser cette inégalité sur  $\mathbb{C}^N$  en considérant toutes les droites complexes de  $\mathbb{C}^N$  passant par l'origine et les fonctions  $f(\lambda) = u(\lambda z)$ , où  $z \in \mathbb{C}^N$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On obtient (utilisant  $\sum_{\alpha+\delta_j=\beta} \frac{p!}{\alpha!} = \frac{p!}{\beta!} \sum \beta_j = \frac{(p+1)!}{\beta!}$  dans le raisonnement par récurrence)

$$\partial^p f(\lambda) = \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!} z^\alpha \partial^\alpha u(0),$$

ce qui entraîne

$$| \sum_{\alpha, |\alpha|=p} \frac{\partial^\alpha u}{\alpha!} z^\alpha | \leq \sup_{|z| \leq 1, z \in \mathbb{C}^N} |u(z)| \quad (4.4.3)$$

et, en utilisant le résultat pour  $N = 1$ ,

$$|u(z) - \sum_{p=0}^{p=2n-1} \sum_{|\alpha|=p} \frac{u^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} z^\alpha| \leq (2n+1)^N [\sup_{|z| \leq 1, z \in \mathbb{C}^N} |u(z)|] |z|^{2n}. \quad (4.4.4)$$

La majoration du reste dans le théorème 4.1 provient alors de cette majoration.

**Calcul de l'intégrale pour un polynôme** On vérifie pour une fonction homogène  $p_{2l}$  de degré  $2l$  que

$$I(p_{2l}) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-x^2/2} p_{2l}(x) dx = (l!)^{-1} (2\pi)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^l (p_{2l})(0). \quad (4.4.5)$$

En effet,  $\int e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\Delta}{2} p_{2l} dx = \frac{1}{2} \int x \cdot \nabla_x p_{2l} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  après intégration par parties. On remarque que  $x \cdot \nabla_x p_{2l} = 2l p_{2l}(x)$ , d'où on déduit  $\int e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{\Delta}{2} p_{2l}\right)(x) dx = l \int e^{-\frac{x^2}{2}} p_{2l}(x) dx$ . D'autre part,  $\left(\frac{\Delta}{2}\right)^m (p_{2l})(0) = \delta_{ml} C_l (2l)!$ , où  $C_l$  est la somme des coefficients des termes en  $x_j^{2l}$  dans  $p_{2l}$ . On applique alors un raisonnement par récurrence sur l'ordre d'homogénéité. On remarque de plus que pour un polynôme homogène d'ordre impair, l'intégrale est nulle.

On en déduit

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{-k \frac{x^2}{2}} \left( \sum_{|\alpha| \leq 2n+1} \frac{u^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^\alpha \right) dx = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{N}{2}} \sum_{l=0}^n \frac{1}{l! k^l} \left[ \left(\frac{\Delta}{2}\right)^l \left( \sum_{|\alpha|=2l} \frac{u^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^\alpha \right) \right](0).$$

On note alors que

$$\left(\frac{\Delta}{2}\right)^l \left( \sum_{|\alpha|=2l} \frac{u^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^\alpha \right)(0) = \left(\left(\frac{\Delta}{2}\right)^l u\right)(0),$$

ainsi

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{-k \frac{x^2}{2}} \left( \sum_{|\alpha| \leq 2n+1} \frac{u^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^\alpha \right) dx = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{N}{2}} \sum_{l=0}^n \frac{1}{l! k^l} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^l u(0).$$

Introduisons

$$R_n(k) = k^{\frac{N}{2}} \int_{|x| \leq 1} e^{-k \frac{x^2}{2}} u(x) dx - (2\pi)^{\frac{N}{2}} \sum_{l=0}^n \frac{1}{l! k^l} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^l u(0).$$

Il vient

$$R_n(k) = k^{\frac{N}{2}} \int_{|x| \leq 1} e^{-k \frac{x^2}{2}} [u(x) - \sum_{|\alpha| \leq 2n+1} \frac{u^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^\alpha] dx - k^{\frac{N}{2}} \int_{|x| \geq 1} e^{-k \frac{x^2}{2}} \left[ \sum_{|\alpha| \leq 2n+1} \frac{u^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^\alpha \right] dx.$$

On note  $S_n(k) = k^{\frac{N}{2}} \int_{|x| \geq 1} e^{-k \frac{x^2}{2}} \left[ \sum_{|\alpha| \leq 2n+1} \frac{u^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^\alpha \right] dx$ . Par changement de variable  $x = r\omega$ ,  $\omega \in S^{N-1}$ , on trouve

$$S_n(k) = k^{\frac{N}{2}} \sum_{p=0}^{p=2n+1} \int_1^\infty e^{-k \frac{r^2}{2}} r^{N-1+p} dr \sum_{|\alpha|=p} \int_{S^{N-1}} \frac{u^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} \omega^\alpha d\omega.$$

Utilisant l'inégalité (4.4.3), on trouve que

$$|S_n(k)| \leq k^{\frac{N}{2}} \sum_{p=0}^{p=2n+1} \int_1^\infty e^{-k \frac{r^2}{2}} r^{N-1+p} dr \text{Vol}(S^{N-1}) \sup_{|z| \leq 1} |u(z)|.$$

De l'inégalité (4.4.4), on déduit alors l'inégalité

$$|R_n(k)| \leq \text{Vol}(S^{N-1}) \sup_{|z| \leq 1} |u(z)| \left[ k^{\frac{N}{2}} \int_0^1 (2n+3) r^{2n+2} r^{N-1} e^{-k \frac{r^2}{2}} dr + \sum_{p=0}^{p=2n+1} k^{\frac{N}{2}} \int_1^\infty e^{-k \frac{r^2}{2}} r^{N-1+p} dr \right]. \quad (4.4.6)$$

Comme  $\sum_0^{2n+1} 1 = 2n + 2$  et que, pour  $r \geq 1$  et  $p \leq 2n + 1$ ,  $r^{N+p-1} \leq r^{2n+N+1}$ , on trouve

$$|R_n(k)| \leq \text{Vol}(S^{N-1}) \sup_{|z| \leq 1} |u(z)| (2n + 3) k^{\frac{N}{2}} \int_0^\infty r^{2n+N+1} e^{-k \frac{r^2}{2}} dr.$$

Nous souhaitons calculer cette intégrale et en trouver un équivalent lorsque  $n$  est infini. Introduisons

$$F(k) = \int_0^\infty e^{-k \frac{r^2}{2}} dr, G(k) = \int_0^\infty r e^{-k \frac{r^2}{2}} dr.$$

On a

$$F(k) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{1}{2}}, G(k) = \frac{1}{k}.$$

De plus

$$\int_0^\infty r^{2p} e^{-k \frac{r^2}{2}} dr = (-2)^p F^{(p)}(k), \int_0^\infty r^{2p+1} e^{-k \frac{r^2}{2}} dr = (-2)^p G^{(p)}(k).$$

On déduit de ces relations

$$\int_0^\infty r^{2p} e^{-k \frac{r^2}{2}} dr = (2\pi)^{\frac{1}{2}} k^{-p-\frac{1}{2}} \frac{(2p)!}{p!} \frac{1}{2^p}, \int_0^\infty r^{2p+1} e^{-k \frac{r^2}{2}} dr = k^{-p-1} p!.$$

On recherche donc un équivalent, lorsque  $n$  est grand, de  $2^{\frac{N}{2}+n} (n + \frac{N}{2})!$  lorsque  $N$  est pair, et de  $(2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{(2n+N+1)!}{(n+\frac{N+1}{2})!} 2^{-n-\frac{N+1}{2}}$  lorsque  $N$  est impair. Pour fixer les idées, divisons par  $n!$  et utilisons la formule de Stirling. Pour  $N$  pair, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{2^{\frac{N}{2}+n} (n + \frac{N}{2})!}{n!} &\simeq 2^{\frac{N}{2}+n} (n + \frac{N}{2})^{n+\frac{N}{2}} e^{-n-\frac{N}{2}} (2\pi(n + \frac{N}{2}))^{\frac{1}{2}} n^{-n} e^n (2\pi n)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{N}{2}+n} e^{-\frac{N}{2}} (1 + \frac{N}{2n})^{\frac{1}{2}} (n+1)^{\frac{N}{2}} (1 + \frac{\frac{N}{2}-1}{n+1})^{\frac{N}{2}} (1 + \frac{N}{2n})^n, \end{aligned}$$

ce qui donne comme équivalent  $G^{(n+\frac{N}{2})}(k) \simeq C'_N 2^n (n+1)^{\frac{N}{2}} n! k^{-n-\frac{N}{2}-1}$ .

De même, pour  $N$  impair, on trouve comme équivalent

$$\begin{aligned} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{(2n+N+1)!}{n!(n+\frac{N+1}{2})!} 2^{-n-\frac{N+1}{2}} &\simeq \frac{(2n+N+1)^{2n+N+1+\frac{1}{2}} e^{-2n-N-1}}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (n+\frac{N+1}{2})^{n+\frac{N+1}{2}+\frac{1}{2}}} e^{n+\frac{N+1}{2}} 2^{-n-\frac{N+1}{2}} \\ &\simeq \sqrt{2} (n+1)^{\frac{N}{2}} (1 + \frac{N+1}{2n})^{n+\frac{1}{2}} (\frac{n+\frac{N+1}{2}}{n+1})^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{N+1}{2}} 2^{n+\frac{N+1}{2}} \end{aligned}$$

on trouve de même

$$F^{(n+\frac{N+1}{2})}(k) \simeq C''_N 2^n (n+1)^{\frac{N}{2}} n! k^{-n-\frac{N+1}{2}-\frac{1}{2}}.$$

L'expression  $(2n+3)k^{\frac{N}{2}} \int_0^\infty r^{2n+N+1} e^{-k \frac{r^2}{2}} dr / 2^{n+1} (n+1)! (n+1)^{\frac{N}{2}} k^{n+\frac{N}{2}+1}$  a pour limite  $C'_N$  lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ . Elle est donc bornée pour tout  $n$  par une constante  $C_N$ .

$$|R_n(k)| \leq C_N \text{Vol}(S^{N-1}) \sup_{|z| \leq 1} |u(z)| (n+1)! (n+1)^{\frac{N}{2}} 2^{n+1} k^{-n-1}.$$

Le théorème 4.1 est démontré. Notons que c'est un théorème très puissant grâce à l'holomorphie : on a trouvé un majorant explicite dont le comportement en  $n$  est connu précisément. Cet équivalent est  $2^{n+1} (n+1)! (n+1)^{\frac{N}{2}} k^{-n-1}$ .

Remarque : pour  $N = 1$ , on trouve  $\int_0^\infty r^{2n} e^{-k \frac{r^2}{2}} dr = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{(2n+2)!}{(n+1)! 2^{n+1}} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} (n+1)! 2^{n+1} \frac{C_1^{n+1}}{2^{2n+2}}$ , donc la constante  $C_1$  est  $(\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}$ . Pour  $N = 2$ , le calcul d'intégrale donne  $2^{n+1} (n+1)!$ , d'où  $C_2 = 2$ .

On généralise ce résultat en remplaçant  $x^2/2$  par la forme quadratique non dégénérée  $q(x) = \frac{1}{2}(Qx.x)$ . Pour cela, on définit le laplacien associé à la forme quadratique (ce qui fait l'objet de la suite de cette section)

**Proposition 4.2** *Si  $q$  est une forme quadratique définie positive, on désigne par  $\Delta_q$  l'opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients constants qui est le Laplacien associé à la forme quadratique. Alors, pour  $u \in C_0^\infty(B_N)$ , on a*

$$\int_{B_N} e^{-kq(x)} u(x) dx \simeq \left( \frac{(2\pi)^N}{k^N \det Q} \right)^{\frac{1}{2}} \sum \frac{1}{m! k^m} \left( \frac{\Delta_q}{2} \right)^m (u)(0).$$

**Preuve** On utilise le changement de variable orthogonal donné par  $q(x) = \frac{1}{2} \sum a_i v_i^2$  caractérisé par  $Pv = x$  où  $P$  est une matrice unitaire. Notons que  $\det Q = \prod a_i$ . Comme le changement de variable est orthonormé, on a

$$\int_{B_N} e^{-kq(x)} u(x) dx = \int_{B_N} e^{-\frac{k}{2} (\sum_i a_i v_i^2)} u(Pv) dv.$$

Soit  $U(v) = u(Pv)$ . Il est immédiat que

$$\int_{B_N} e^{-kq(x)} u(x) dx = \int_{\tilde{B}_N} e^{-\frac{k}{2} \sum_i t_i^2} U\left(\frac{t_i}{\sqrt{a_i}}\right) \frac{dt}{(\prod a_i)^{\frac{1}{2}}}$$

où la boule  $\tilde{B}_N$  est un ellipsoïde induit par les  $\sqrt{a_i}$ . Comme  $q(x) = \frac{1}{2} (Qx \cdot x) = \frac{1}{2} ({}^t P Q P v, v) = \frac{1}{2} \sum a_i v_i^2$ , on trouve  $Q = P \text{Diag}(a_i) P$ . Il vient

$$\int_{\tilde{B}_N} e^{-\frac{k}{2} \sum_i t_i^2} U\left(\frac{t_i}{\sqrt{a_i}}\right) \frac{dt}{(\det Q)^{\frac{1}{2}}} \simeq \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{k^{\frac{N}{2}} (\det Q)^{\frac{1}{2}}} \sum_{p \leq n} k^{-p} \left(\frac{L}{2}\right)^p U(0)$$

où

$$L = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial^2}{\partial t_i^2} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{1}{a_i} \frac{\partial^2}{\partial v_i^2}.$$

On note que  $\frac{\partial^2 U}{\partial v_i^2} = \sum_{l,m} P_{il} P_{im} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_m}(Pv)$ , alors on trouve

$$LU = \sum_{l,m,i} \frac{1}{a_i} P_{il} P_{im} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_m}(Pv)$$

qui définit l'opérateur laplacien associé à la forme quadratique  $Q$  sous la forme

$$\Delta_q = \text{div}(Q^{-1} \text{grad}). \quad (4.4.7)$$

On souhaite généraliser le développement asymptotique de la Proposition 4.2 à une phase quelconque, de manière intrinsèque.

**Lemme 4.4** *On suppose que  $\phi$  admet un point critique non dégénéré  $x_0$  et que la matrice Hessienne de  $\phi$  est définie positive. On obtient le Laplacien associé à  $\phi$  en  $x_0$  grâce à l'égalité*

$$e^{k\phi(x_0)} \int e^{-k\phi(x)} a(x) dx \simeq \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{k^{\frac{N}{2}} (\det \text{Hess} \phi(x_0))^{\frac{1}{2}}} \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m! k^m} \left( \frac{\Delta_\phi}{2} \right)^m u(x_0). \quad (4.4.8)$$

On applique le lemme de Morse au voisinage d'un point critique non dégénéré en notant  $p$  le nombre de valeurs propres positives (en comptant leur multiplicité) de  $\text{Hess} \phi(x_0)$ . Il existe un système de coordonnées  $\tilde{x}$  tel que, localement

$$\phi(x) = \phi(x_0) + \frac{1}{2} \left( \sum_{i \leq p} (\tilde{x}_i)^2 - \sum_{j > p} (\tilde{x}_j)^2 \right), \quad (4.4.9)$$

L'application  $x \rightarrow \tilde{x}$  est un difféomorphisme local de  $\mathbb{R}^N$ . Dans le cas étudié ci-dessous  $p = N$ , et on calcule

$$\int_{B_N} e^{-k\phi(x)} u(x) dx = e^{-k\phi(x_0)} \int_{\tilde{B}_N} e^{-\frac{k}{2} \sum_{j=1}^N (\tilde{x}_j)^2} u(x^{-1}(\tilde{x})) |Jac(\frac{\partial x^{-1}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}})| d\tilde{x}.$$

Pour ce faire, on utilise le résultat de la proposition 4.2 puisque cette phase est quadratique (d'après le lemme de Morse et l'hypothèse en  $x_0$ ). Le développement asymptotique de

$$e^{k\phi(x_0)} \int_{B_N} e^{-k\phi(x)} u(x) dx$$

est donc

$$\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{N}{2}} \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!k^p} \left(\frac{\Delta_{\tilde{x}}}{2}\right)^p [u(x^{-1}(\tilde{x})) |Jac(\frac{\partial x^{-1}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}})|](x_0) \quad (4.4.10)$$

En égalant les termes de même ordre en  $k$  des égalités (4.4.8) et (4.4.10) et en notant que  $\det\phi''(x_0) = |\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}|^2(x_0)$ , on trouve que

$$\left(\frac{\Delta_{\tilde{x}}}{2}\right)^p [u(x^{-1}(\tilde{x})) |Jac(\frac{\partial x^{-1}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}})|](x_0) = |Jac(\frac{\partial x^{-1}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}})(x_0)| \left(\frac{\Delta_{\phi}}{2}\right)^p u(x_0).$$

On en déduit une définition formelle du laplacien  $\Delta_{\phi}$  associé à la phase  $\phi$  au voisinage de  $x_0$  :

$$\Delta_{\phi} u = |Jac(\frac{\partial x^{-1}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}})|^{-1} \Delta_{\tilde{x}} (|Jac(\frac{\partial x^{-1}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}})| u)$$

En dimension 1, on calculera explicitement de laplacien dans la section 4.6.

## 4.5 Le théorème de la phase stationnaire

Les résultats énoncés ci-dessus le sont lorsque l'intégrale à calculer contient un terme de la forme  $e^{-k\phi(x)}$ . Il s'agit de généralisations de la méthode de Laplace ou méthode du col.

Les développements asymptotiques obtenus dans les sections précédentes peuvent être écrits formellement pour des intégrales la forme  $\int a(x) e^{ik\phi(x)} dx$ . Nous démontrons dans cette section que les expressions trouvées **sont** les développements asymptotiques de l'intégrale  $\int a(x) e^{ik\phi(x)} dx$ . Les deux résultats principaux (issus du traité de Hörmander, Théorème 7.7.5 de [46]) sont énoncés dans la proposition suivante.

**Proposition 4.3** *Soit  $\phi$  une phase sur  $\mathbb{R}^N$  admettant en  $x_0$  un point critique non dégénéré, c'est-à-dire  $\nabla_x \phi(x_0) = 0$  et  $\text{Hess}\phi(x_0)$  inversible. Nous supposons pour (i) que  $\text{Re}\phi \geq 0$  dans un voisinage de  $x_0$  et pour (ii) que  $\Im\phi \geq 0$  sur  $B(x_0, r)$ .*

*Alors les deux résultats suivants sont vrais, pour  $\chi$  fonction  $C^\infty$  à support compact dans une boule de centre  $x_0$  (les déterminations des racines de  $\det\text{Hess}\phi(x_0)$  sont choisies de partie réelle positive)*

$$(i) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \chi(x) e^{-k\phi(x)} u(x) dx \simeq \left(\frac{(2\pi)^N}{k^N \det\text{Hess}\phi(x_0)}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{p \geq 0} k^{-p} (p!)^{-1} \left(\frac{1}{2} \Delta_{\phi}\right)^p (u)(x_0) e^{-k\phi(x_0)},$$

$$(ii) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \chi(x) e^{ik\phi(x)} u(x) dx \simeq \left(\frac{(2\pi)^N}{k^N \det\text{Hess}\phi(x_0)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{iN\pi}{4}} \sum_{p \geq 0} \left(\frac{i}{k}\right)^p (p!)^{-1} \left(\frac{1}{2} \Delta_{\phi}\right)^p (u)(x_0) e^{ik\phi(x_0)}.$$

Notons que, pour le premier alinéa, la condition  $\text{Re}\phi \geq 0$  implique que la phase est nécessairement de la forme (4.5.11). Quant au deuxième alinéa de la proposition, il n'est vrai que pour une phase telle que  $\Im\phi(x) > 0$  sur le bord de l'ouvert étudié (voir [88], Théorème 2.8). En revanche, si  $u$  est à décroissance rapide, le Lemme 7.7.3 de Hörmander [47] permet de retrouver le théorème.



**Preuve** Comme  $\text{Hess}\phi_0$  est non dégénérée, on applique (4.4.9). Si, de plus, la matrice Hessienne est symétrique définie positive en  $x_0$ , il existe un changement de variable tel que, au voisinage de  $x_0$

$$\phi(x) = \phi(x_0) + \frac{1}{2}(\tilde{z}, \tilde{z}). \quad (4.5.11)$$

Du résultat obtenu dans le cas où la matrice  $\text{Hess}\phi(x_0)$  est définie positive, on déduit le résultat dans le cas général où  $\phi$  est donnée par (4.4.9) en séparant successivement les intégrales sur les variables  $\tilde{x}_j$  pour  $j \leq p$  et  $\tilde{x}_j$  pour  $j > p$ . On remarquera alors que le résultat sur  $\int a(\tilde{x})e^{-\frac{k}{2}\tilde{x}^2}d\tilde{x}$  est obtenu en prenant l'expression conjuguée du développement asymptotique de  $\int \bar{a}(\tilde{x})e^{\frac{k}{2}\tilde{x}^2}d\tilde{x}$ .

**Lemme 4.5** Dans le cas (4.5.11), il existe une matrice  $Q(x)$  telle que  $\phi(x) = \phi(x_0) + \frac{1}{2}(Q(x)z.z)$ ,  $z = x - x_0$ .

On applique la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\phi(x) = \phi(x_0) + \sum_{i,j} \int_0^1 (1-t) \partial_{x_i x_j}^2 \phi(tx + (1-t)x_0)(x - x_0, x - x_0) dt.$$

On note alors

$$Q_{jk}(x) = 2 \int_0^1 (1-t) \partial_{x_j x_k}^2 \phi(tx + (1-t)x_0) dt,$$

qui se démontre en remarquant que si  $g(t) = \nabla \phi(tx + (1-t)x_0)(x - x_0)$ ,

$$\int_0^1 (1-t) \sum_{i,j} \partial_{x_i x_j}^2 \phi(tx + (1-t)x_0)(x - x_0, x - x_0) dt = \int_0^1 (1-t) g'(t) dt$$

et par intégration par parties, en utilisant  $\int_0^1 g(t) dt = \phi(x) - \phi(x_0)$ , on obtient  $\int_0^1 (1-t) g'(t) dt = \phi(x) - \phi(x_0) + g(0)$ .

On vérifie que  $Q_{j,k}(x_0) = 2 \partial_{x_j x_k}^2 \phi(x_0) \int_0^1 (1-t) dt$  d'où la matrice  $(Q_{j,k}(x_0))$  est symétrique définie positive. Comme  $\phi$  est de classe  $C^3$ , il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour  $|x - x_0| \leq \varepsilon_0$  la matrice  $(Q_{j,k}(x))$  est définie positive. La racine de la matrice  $Q(x_0)$  est la matrice caractérisée par la valeur propre  $\sqrt{\lambda_i}$  sur le sous espace propre  $E_i$ . On écrit alors

$$Q(x) = (Q(x_0))^{\frac{1}{2}} [Id + (Q(x_0))^{-\frac{1}{2}} (Q(x) - Q(x_0)) (Q(x_0))^{-\frac{1}{2}}] (Q(x_0))^{\frac{1}{2}}.$$

La racine carrée de la matrice  $Id + R(x)$ , où  $\|R(x)\| \leq \varepsilon$  pour une norme usuelle, peut être calculée par le développement en série entière associé à  $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ . Ce développement est absolument convergent, les puissances de  $R$  commutent entre elles, ce qui construit  $B(x)$  symétrique telle que  ${}^t B(x) B(x) = Id + R(x)$ . La matrice racine  $A(x)$  telle que  ${}^t A(x) A(x) = Q(x)$  est alors  $A(x) = B(x) (Q(x_0))^{\frac{1}{2}}$ . On prend  $\tilde{z} = A(x)x$  ce qui donne

$$\phi(x) = \phi(x_0) + \frac{1}{2} (A(x)x.A(x)x) = \phi(x_0) + \frac{1}{2} (\tilde{z}.\tilde{z}).$$

Par définition, le Laplacien métrique est donc

$$\tilde{\Delta} = \sum_j \partial_{\tilde{z}_j}^2.$$

Le premier alinéa est démontré.

La preuve suivante du deuxième alinéa est directement inspirée de celle du lemme 7.7.3 de Hörmander. Elle s'appuie sur la transformée de Fourier de la distribution  $e^{i\frac{x^2}{2}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

**Lemme 4.6** La transformée de Fourier de  $e^{i\frac{x^2}{2}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  est la distribution tempérée  $(2\pi)^{\frac{N}{2}} e^{i\frac{\xi^2}{2}}$ .

Considérons  $u(x) = e^{i(\sum_j x_j^2)/2}$ . Alors  $D_j u(x) = ix_j u$ .

Supposons  $v$  distribution vérifiant les égalités  $D_j v(x) = i\xi_j v$ . En considérant  $v/u$ , on trouve que  $D_j(v/u) = u^{-2}(D_j v u - D_j u v) = 0$ . Donc  $v/u$  est une constante.

En prenant la transformée de Fourier de l'égalité  $D_j u = ix_j u$ , on trouve

$$\xi_j \hat{u}(\xi) = -iD_j(\hat{u}).$$

On applique le résultat précédent, ce qui donne  $\hat{u}(\xi) = \hat{u}(0)e^{i\sum_j(\xi_j^2)/2}$ . Le coefficient  $\hat{u}(0)$  s'obtient en introduisant une modification simple de  $u(x)$  sous la forme  $u_\varepsilon(x) = e^{i(\sum_j(1+i\varepsilon)x_j^2)/2}$ . La fonction  $u_\varepsilon$  est dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  et au sens de  $\mathcal{S}'$ ,  $u_\varepsilon$  tend vers  $u$ . De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(x) e^{-ix \cdot \xi} dx = \prod_{j=1}^{j=N} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_j \xi_j + i\frac{x_j^2}{2} - \varepsilon \frac{x_j^2}{2}} dx_j \right).$$

Remarquons que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_j \xi_j + i\frac{x_j^2}{2} - \varepsilon \frac{x_j^2}{2}} dx_j = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} dy e^{-\frac{y^2}{2} + i\frac{y^2}{\varepsilon} - iy \frac{\xi_j}{\sqrt{\varepsilon}}}$$

Il suffit ainsi d'étudier l'intégrale

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} dy e^{-\frac{y^2}{2} + i\lambda \frac{y^2}{2} - iy\zeta}.$$

Par déformation dans le plan complexe de l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  en l'intégrale sur  $\mathbb{R} + i\zeta$ , on trouve que

$$F(0) = e^{-\frac{\zeta^2}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

La fonction  $F$  est dérivable, et sa dérivée est

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} dy \frac{i}{2(1-i\lambda)^2} [((1-i\lambda)y + i\zeta)^2 - 2i\zeta((1-i\lambda)y + i\zeta) - \zeta^2] e^{-\frac{y^2}{2} + i\lambda \frac{y^2}{2} - iy\zeta} \\ &= -i \frac{\zeta^2}{2(1-i\lambda)^2} F(\lambda) + \frac{i}{2(1-i\lambda)} F(\lambda) \end{aligned}$$

par intégrations par parties.

On a alors

$$\frac{d}{d\lambda} (e^{\frac{\zeta^2}{2(1-i\lambda)}} F(\lambda)) = \frac{i}{2(1-i\lambda)} e^{\frac{\zeta^2}{2(1-i\lambda)}} F(\lambda).$$

Si on note  $G(\lambda) = e^{\frac{\zeta^2}{2(1-i\lambda)}} F(\lambda)$ , on vérifie que, si la racine de  $1 - i\lambda$  avec partie réelle positive est notée  $(1 - i\lambda)^{\frac{1}{2}}$ ,

$$\frac{d}{d\lambda} [(1 - i\lambda)^{\frac{1}{2}} G(\lambda)] = 0.$$

Remarquons que

$$(1 - i\lambda)^{\frac{1}{2}} = \alpha(\lambda) + i\beta(\lambda) = \left(\frac{1}{2}(1 + (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}})\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{i\lambda}{2} \left(\frac{1}{2}(1 + (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}})\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, comme  $G(0) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$  et que  $G$  est continue en  $\lambda = 0$ , l'intégrale étant normalement convergente, il vient

$$F(\lambda) = e^{-\frac{\zeta^2}{2(1-i\lambda)}} \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{(1 - i\lambda)^{\frac{1}{2}}}.$$

En remplaçant  $\zeta$  par  $\xi_j/\sqrt{\varepsilon}$ ,  $\lambda$  par  $\varepsilon^{-1}$ , on trouve

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-ix_j \xi_j + i \frac{x_j^2}{2} - \varepsilon \frac{x_j^2}{2}} dx_j = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \frac{i}{\varepsilon})^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{\xi_j^2}{2i - 2\varepsilon}}.$$

Comme  $\beta(\frac{1}{\varepsilon}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\alpha(\varepsilon)}$  et que  $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \alpha(\varepsilon^{-1})$  tend vers  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \beta(\varepsilon^{-1})$  tend vers  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Ainsi la limite au sens de  $\mathcal{S}'$  de  $\hat{u}_\varepsilon(\xi)$  est  $(2\pi)^{\frac{N}{2}} e^{i \frac{N\pi}{4}} e^{\frac{\xi^2}{2i}}$ .

Par homothétie, la transformée de Fourier de  $x \rightarrow e^{ikx^2/2}$  est

$$\xi \rightarrow \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{N/2} e^{i \frac{N\pi}{4}} e^{-i\xi^2/2k}.$$

On considère alors  $h \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ . On a

$$\langle e^{ik \frac{x^2}{2}}, h \rangle = \int e^{ik \frac{x^2}{2}} h(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^N} \int d\xi \hat{h}(\xi) \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{N}{2}} e^{iN \frac{\pi}{4}} e^{-i \frac{\xi^2}{2k}}.$$

On utilise le développement en série entière de l'exponentielle, ce qui aboutit au développement asymptotique de cette intégrale.

**Remarque** Le théorème de la phase stationnaire oscillante peut aussi se démontrer en considérant une déformation du contour d'intégration dans le plan complexe. On vérifie qu'il s'agit de considérer  $ix^2 = -(e^{-\frac{i\pi}{4}} x)^2 = -y^2$ . Classiquement, on considère l'intégrale sur le grand cercle de rayon  $R$ , que l'on divise en  $\theta \leq \pi/4 - a$  et  $\pi/4 - a \leq \theta \leq \pi/4$ . Dans le premier cas, nous avons une majoration de la phase par  $R \sin a$  et dans le deuxième cas, on utilise une majoration de l'intégrale en  $Ra$  (par domaine d'intégration fini). On utilise alors le fait que l'intégrand est à support compact ou à décroissance rapide pour contrôler cette intégrale sur le grand cercle. On a donc égalité de l'intégrale sur  $\mathbf{R}$  et de l'intégrale sur  $\mathbf{R}e^{\frac{i\pi}{4}}$ . A titre documentaire, cette méthode est utilisée en physique quantique et s'appelle la rotation de Wick.

## 4.6 Expression du Laplacien associé à $\tilde{z}$

Nous donnons dans cette section une construction du Laplacien associé à une phase stationnaire. On retrouve rigoureusement dans le cas particulier de la dimension 1 le résultat de la proposition 4.2.

**Proposition 4.4** *On considère une phase  $\phi$  présentant un point critique non dégénéré en  $x_0$ , de signature  $(d, 0)$ , c'est-à-dire  $\nabla_x \phi(x_0) = 0$  et  $\text{Hess} \phi(x_0)$  est une forme quadratique de signature  $(d, 0)$ . Au voisinage de  $x_0$ , il existe un difféomorphisme  $h$  de  $\mathbf{R}^d$  dans  $\mathbf{R}^d$ , tel que*

$$\phi(x) = \frac{1}{2} (h(x))^2 + \phi(x_0).$$

Son jacobien est  $J(x) = \det(h'(x))$ .

Le Laplacien associé à cette phase au voisinage du point  $x_0$  est donné par la relation suivante

$$\Delta_\phi a(x) = \text{div}[J(x)(h'^t h')^{-1} \nabla \frac{a}{J}].$$

Dans le cas de la dimension 1 d'espace, où  $h'(x)$  est une fonction et  $J(x) = h'(x)$ , on trouve

$$\Delta_{\frac{1}{2}h^2(x)} a(x) = \partial_x \left[ \frac{1}{h'(x)} \partial_x \left( \frac{1}{h'(x)} a(x) \right) \right].$$

Nous commençons par la dimension 1 d'espace. Par translation, on suppose  $\phi(0) = \phi'(0) = 0, \phi''(0) > 0$ . La phase  $\phi(x)$  considérée s'écrit alors

$$\phi(x) = x^2 \int_0^1 \phi''(tx)(1-t)dt.$$

Nous introduisons la fonction

$$h(x) = x(2 \int_0^1 \phi''(tx)(1-t)dt)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette fonction est  $C^\infty$  dans un voisinage  $] -\varepsilon_0, \varepsilon_0[$  de 0, choisi de sorte que

$$2 \int_0^1 \phi''(tx)(1-t)dt > \frac{1}{2}\phi''(0).$$

Elle est strictement monotone sur cet intervalle, donc c'est un difféomorphisme de  $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  sur  $[h(-\varepsilon_0), h(\varepsilon_0)]$  qui est un voisinage de 0. On note  $g$  sa fonction réciproque, ainsi

$$\int_{-\varepsilon_0}^{+\varepsilon_0} e^{-k\phi(x)} a(x) dx = \int_{-\varepsilon_0}^{+\varepsilon_0} e^{-\frac{1}{2}k(h(x))^2} a(x) dx = \int_{h(-\varepsilon_0)}^{h(\varepsilon_0)} e^{-\frac{1}{2}ky^2} g'(y)u(g(y))dy.$$

En utilisant le résultat du théorème 4.1, on trouve

$$\int_{h(-\varepsilon_0)}^{h(\varepsilon_0)} e^{-\frac{1}{2}ky^2} g'(y)a(g(y))dy \simeq \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{p=n} \frac{k^{-p}}{p!} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^p [g' \cdot (a \circ g)](0)$$

Soit  $L_1$  l'opérateur  $g'(h(x)) \frac{\partial}{\partial x}$ . La relation  $\frac{\partial}{\partial y}[\phi(g(y))] = g'(h(x)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(g(y))$  implique

$$\int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} e^{-k\phi(x)} a(x) dx \simeq \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^n \frac{1}{p! 2^p k^p} L_1^{2p} [g'(h(x))a(x)]|_{x=0}.$$

Soit  $L_2$  l'opérateur donné par  $L_2 a = \frac{\partial}{\partial x} [g'(h(x))a(x)]$ . l'opérateur  $-L_2$  est l'adjoint de l'opérateur  $L_1$ . On voit alors que

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} e^{-k\phi(x)} a(x) dx &\simeq \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^n g'(h(0)) \frac{1}{p! 2^p k^p} L_2^{2p} a(0) \\ &\simeq \left(\frac{2\pi}{k\phi''(0)}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^n \frac{1}{p! 2^p k^p} (L_2^{2p} a)(0). \end{aligned}$$

Ceci est une conséquence des égalités  $g'(h(0)) = g'(0) = \frac{1}{h'(0)} = \frac{1}{(\phi''(0))^{\frac{1}{2}}}$ . On note alors

$$\Delta_{\frac{1}{2}h^2} a(x) = \partial_x \left( \frac{1}{h'(x)} \partial_x \left( \frac{1}{h'(x)} a(x) \right) \right),$$

qui est un opérateur différentiel à coefficients variables, mais qui n'est en aucun cas égal à  $(\text{Hess}\phi(0))^{-1} \partial_x^2 a$ . La formule de la phase stationnaire est alors

$$\int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} e^{-k\phi(x)} a(x) dx \simeq \left(\frac{2\pi}{k\phi''(0)}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^n \frac{1}{p! k^p} \left[ \frac{1}{2} (\Delta_{\frac{1}{2}h^2})^p a \right](0).$$

Nous nous plaçons dans le cas où  $\text{Hess}\phi(x_0)$  est une matrice définie positive. En utilisant le difféomorphisme  $h(x) = \tilde{x}$ , difféomorphisme local du voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  sur un voisinage de  $0 \in \mathbb{R}^d$ , d'application réciproque  $g$ , on trouve, en introduisant  $J_{pq}(y) = \frac{\partial g_p}{\partial y_q}(y)$ , et  $j(y) = \det(J_{pq}(y))$  et en rappelant que  $\phi(x) = \phi(x_0) + \frac{1}{2}(h(x))^2$ ,

$$\frac{\partial}{\partial y_q} [a(g(y))j(y)] = \sum_p J_{pq}(y) \frac{\partial}{\partial x_p} [a(x)j(h(x))]$$

puis

$$\Delta_y[a(g(y))j(y)] = \sum_{i,j,p} J_{pj} \frac{\partial}{\partial x_p} \left[ \sum_i J_{ij}(h(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} [a(x)j(h(x))] \right].$$

Cette formule est peu explicite. Par intégrations par parties contre une fonction test  $v(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , à laquelle on associe la fonction test  $V(x) = v(h(x))$ , on a les égalités successives :

$$\begin{aligned} \int \Delta_y[a(g(y))j(y)]v(y)dy &= - \int \nabla_y[a(g(y))j(y)]\nabla_y v dy \\ &= - \int ({}^t J \nabla_x V \cdot {}^t J \nabla_x (a \cdot (j \circ h))) \det h'(x) dx \\ &= - \int (\nabla_x V \cdot J^t J \nabla_x (a \cdot (j \circ h))) \det h'(x) dx \\ &= \int V(x) \nabla_x \cdot [J^t J \nabla_x (a \cdot (j \circ h))] \det h'(x) dx. \end{aligned}$$

On introduit l'opérateur différentiel  $D$  donné par

$$Da(x) = \nabla_x \cdot [\det h'(x) J^t J \nabla_x [a(x) \cdot j(h(x))]].$$

Alors

$$\int \Delta_y[a(g(y))j(y)]v(y)dy = \int V(x)Da(x)dx = \int v(y)Da(g(y)) \frac{dy}{\det h'(g(y))}.$$

On en déduit (avec la relation  $j(y)\det h'(g(y)) = 1$ )

$$\Delta_y[a(g(y))j(y)] = \frac{1}{\det h'(x)} \operatorname{div}_x [\det h'(x) J^t J \nabla_x \left( \frac{a}{\det h'(x)} \right)] \Big|_{x=g(y)} = D(a)(g(y))j(y).$$

Par récurrence on trouve

$$\Delta_y^p[a(g(y))j(y)] = D^p(a)(g(y))j(y).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int e^{-k\phi(x)} a(x) dx &\simeq \left( \frac{2\pi}{k} \right)^{\frac{d}{2}} e^{-k\phi(x_0)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{k^p 2^p p!} D^p(a)(x_0) j(0) \\ &\simeq \left( \frac{(2\pi)^d}{k^d \det \operatorname{Hess}_\phi(x_0)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-k\phi(x_0)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{k^p 2^p p!} D^p(a)(x_0). \end{aligned}$$

Le laplacien associé à la phase  $\phi$  est alors naturellement

$$\Delta_\phi a = Da = \nabla_x \cdot [\det h'(x) J^t J \nabla_x \left[ \frac{a(x)}{\det h'(x)} \right]].$$

La proposition 4.4 est démontrée.

Dans un certain nombre d'applications, on veut éliminer seulement une partie des variables d'intégration, il est alors nécessaire de conserver les autres variables d'intégration comme paramètres. Le point critique dans les variables que l'on veut éliminer dépend alors de ces paramètres. Une généralisation aisée du théorème de la phase stationnaire est le théorème de la phase stationnaire avec paramètres. C'est l'objet de la section suivante

#### 4.6.1 Théorème de la phase stationnaire avec paramètre

Les situations générales où l'on souhaite utiliser le théorème de la phase stationnaire comportent en général plusieurs variables, et il pourra être utile d'appliquer le théorème seulement sur une partie des variables. On considère à cet effet une intégrale de la forme

$$\int dx dy e^{ik\phi(x,y)} a(x,y,k).$$

On a le Théorème suivant (théorème 7.7.6 de [47]) :

**Théorème 4.2** *On suppose que  $\nabla_x \phi(0, 0) = 0$ ,  $\text{Hess}_x \phi(0, 0)$  est non dégénéré,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n-d}$ . La signature de la matrice hessienne (différence entre le nombre de valeurs propres positives et négatives) est notée  $\sigma$ . On suppose  $a$  de classe  $C^\infty$ , à support compact contenant  $x_0$ .*

1. *Le lieu des points critiques de  $\phi$  en  $x$ , donné par  $\nabla_x \phi(x, y) = 0$ , se met sous la forme  $x = x(y)$  pour  $y$  dans un voisinage de  $y = 0$ , avec  $x(0) = 0$ .*
2. *On suppose  $a$  de classe  $C^\infty$ , supportée dans un voisinage  $V \times W$  de  $x = y = 0$ . Il existe des opérateurs différentiels  $L_j^\phi(x, y, \partial_x)$  en  $x$  d'ordre  $2j$ , dépendant du paramètre  $y$  et de la phase  $\phi$ , tel que*

$$\int a(x, y, k) e^{ik\phi(x, y)} dy$$

$$\simeq e^{i\sigma\pi/4} \left( \frac{2\pi}{k^d \det(\text{Hess}_x \phi)(x(y), y)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{ik\phi(x(y), y)} \sum_j L_j^\phi(x, y, \partial_x) a|_{x=x(y)}(y) k^{-j}.$$

3. *On suppose qu'il existe un changement de variable  $(x, y) \leftrightarrow (X, Y)$  qui soit un difféomorphisme. Alors les points critiques des phases  $\phi(x, y)$  et  $\Phi(x, Y)$  peuvent être distincts, les valeurs critiques et le développement asymptotique sont invariants.*

Le dernier alinéa de ce théorème est extrêmement utile, lorsque l'on recherche des formes canoniques de phases ayant certaines propriétés. Nous verrons par exemple que lorsque une phase  $\phi(x, t)$  admet deux points critiques en  $t$  qui sont confondus pour  $x = 0$ , alors on peut représenter cette phase sous la forme

$$\phi_0(x) + \frac{T^3}{3} - a(x)T$$

ce qui permet d'exprimer  $\int b(x, T) e^{ik(\phi_0(x) + \frac{T^3}{3} - a(x)T)} dT$  s'exprime à l'aide de la fonction d'Airy (introduite ci-dessous dans l'exercice 4.1). Cette représentation sera utilisée dans la section 10.4. La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 4.2. Le théorème 4.2 sera également utilisé dans le chapitre 12.

## 4.7 Application à la solution de l'équation des ondes rayonnée par une source sur une surface

Nous considérons une surface lisse  $S$ , bornée ou non. On cherche à calculer, pour  $x \notin S$

$$I_k(x) = \int_S \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} c(y) d\sigma_S(y). \quad (4.7.12)$$

Nous ne nous préoccupons ici que de résultats locaux. La variété  $S$  peut être une surface libre dans l'espace, sur laquelle est connue une solution; elle peut aussi être le bord d'un obstacle. On la supposera compacte, ou on supposera  $c$  à support compact.

**Cas où  $c$  ne dépend pas de  $k$ .** Comme  $(\Delta + k^2) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = 0$  pour  $x \notin S$  (comme ceci a été remarqué dans le chapitre 1), on a

$$(\Delta + k^2) I_k(x) = 0 \quad \forall x \notin S.$$

Nous calculons cette intégrale en utilisant le théorème de la phase stationnaire (Proposition 4.3, alinéa (ii)). Pour cela, introduisons  $\phi_0(y) = |y - x|$ . On introduit un paramétrage local de la surface, comme cela sera détaillé plus loin (Chapitre 11) et les coordonnées semi-géodésiques  $u \in \mathbb{R}^{n-1} \cap V(y_0)$ ,  $y_0 \in S$ ,  $V$  voisinage dans  $\mathbb{R}^n$  de  $y_0$ . Un point de  $V(y_0)$  est représenté par  $u$  et par  $l$  tel que  $y = Y(u, l) = y(u) + l\bar{n}(y(u))$ . Le jacobien de la transformation est calculé

plus loin (Section 11.4, Section 11.4.2); il fait intervenir la matrice géodésique du bord. Nous introduisons la matrice  $\tilde{M}(u, l) = (\partial_j y_k, \partial_l y_k)$ .

On introduit  $\Phi(u) = \phi_0(y(u))$ , on vérifie que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_j} = \frac{y(u) - x}{|y(u) - x|} \cdot \frac{\partial y}{\partial u_j}.$$

Les vecteurs  $(\frac{\partial y}{\partial u_j})$  forment une base de l'espace tangent  $T_{y(u)}S$ . La phase  $\Phi$  stationne si et seulement si  $y(u) - x$  est orthogonal au vecteur  $\frac{\partial y}{\partial u_j}(u)$  pour tout  $j$ , donc orthogonal à l'hyperplan tangent  $T_{y(u)}S$ . Soit  $y(u_0)$  un point critique. Il existe  $\lambda$  tel que

$$\frac{y(u) - x}{|y(u) - x|} = \lambda \vec{n}(y(u)). \quad (4.7.13)$$

La comparaison des normes donne  $\lambda = \pm 1$  et l'orientation donne  $\lambda = -1$ .

Il existe donc  $u_0$  et  $l_0$  tels que  $x = y(u_0) + l_0 \vec{n}(y(u_0))$ . Alors  $u = u_0$  est une solution de (4.7.13). Le point  $y$  correspondant est donc un point qui rend extremum la distance au bord. Il n'est pas nécessairement unique; en effet, si la surface  $S$  est une sphère, et si le point  $x$  est le centre de la sphère, alors tous les points de la surface conviennent.

Cependant, lorsqu'on suppose  $S = \partial\Omega$ , où  $\Omega$  est convexe, et si  $y \in V(y_0) \cap C\Omega$ , alors le vecteur  $\vec{n}(y_0)$  défini ci-dessus est la normale extérieure à  $\Omega$  en  $y_0$ , il y a unicité de la solution de (4.7.13). Pour montrer ceci, calculons le Jacobien. Il suffit de montrer que la matrice  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j}$  est non dégénérée pour obtenir l'unicité locale de la solution du système  $\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = 0$ . De  $\frac{\partial \Phi}{\partial u_j} = \frac{y(u) - x}{|y(u) - x|} \cdot \frac{\partial y}{\partial u_j}$ , on déduit

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial u_m} = \frac{y(u) - x}{|y(u) - x|} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u_j \partial u_m} + \frac{\partial_{u_m} y \cdot \partial_{u_j} y}{|y(u) - x|} - \frac{(y(u) - x, \partial_{u_j} y)(y(u) - x, \partial_{u_m} y)}{|y(u) - x|^3}. \quad (4.7.14)$$

On calcule cette valeur au point critique  $u_0$ . De l'orthogonalité de  $\vec{n}$  et du vecteur tangent à la surface, on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial u_m}(u_0) &= -\vec{n}(y(u_0)) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u_j \partial u_m} + \frac{\partial_{u_m} y \cdot \partial_{u_j} y}{|y(u) - x|} - \frac{(\vec{n}(y(u_0)), \partial_{u_j} y)(\vec{n}(y(u_0)), \partial_{u_m} y)}{|y(u_0) - x|^3} \\ &= -\vec{n}(y(u_0)) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u_j \partial u_m} + \frac{\partial_{u_m} y \cdot \partial_{u_j} y}{|y(u) - x|} \end{aligned}$$

Comme  $\vec{n}(y(u)) \cdot \partial_{u_j} y(u) = 0$ , on obtient les identités

$$\frac{\partial}{\partial u_m} (\vec{n}(y(u)) \cdot \partial_{u_j} y(u) + \vec{n}(y(u)) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u_j \partial u_m}(u)) = 0.$$

Il en découle, introduisant comme dans la section 1 la matrice de Weingarten  $W$  qui est la dérivée du vecteur normal le long d'une direction tangente (et dont les valeurs propres sont les courbures principales de la surface  $\partial\Omega$ ), de sorte que  $\frac{\partial}{\partial u_m} (\vec{n}(y(u))) = W(y(u)) \frac{\partial y}{\partial u_m}$

$$W(y(u)) \cdot \partial_{u_m} y(u) \partial_{u_j} y(u) + \vec{n}(y(u)) \cdot \partial_{u_j \partial u_m}^2 y(u) = 0, \quad (4.7.15)$$

ce qui conduit à

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial u_m}(u_0) = -W(y(u)) \cdot \partial_{u_m} y(u) \partial_{u_j} y(u) + \frac{\partial_{u_m} y \cdot \partial_{u_j} y}{|y(u) - x|}.$$

Le déterminant de  $(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial u_m}(u_0))$  est nul lorsque le point  $x$  est situé au centre de courbure de  $S$ . On introduit la matrice

$$L(x, y(u)) = W(y(u)) + \frac{1}{|x - y(u)|} Id$$

Il vient

$$(\det(\partial_{u_j u_m}^2 \Phi)(u_0))^{-\frac{1}{2}} d\sigma_S(y)/du = (\det(W(y(u)) + \frac{1}{|x-y(u)|} Id))^{-\frac{1}{2}},$$

et l'équivalent de  $I_k$  donné par le théorème de la phase stationnaire est égal à

$$I_k(x) \simeq \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{n-1}{2}} c(y(u_0)) (\det(W(y(u_0)) + \frac{1}{|x-y(u_0)|} Id))^{-\frac{1}{2}} e^{ik|x-y(u_0)|}.$$

Le calcul ci-dessus a été effectué lorsque  $c(y)$  est indépendant de  $k$ .

**Cas où  $c$  présente une phase oscillante en  $k$**  On suppose dans une deuxième application que  $c(y, k) = a(y, k)e^{ik\phi(y)}$  où  $a$  est à support compact en  $y$ . La phase considérée est

$$\psi(y) = |x-y| + \phi(y).$$

Le gradient de la phase, utilisant la même représentation du bord  $y = y(u)$ , est

$$\partial_{u_j} \psi(y(u)) = \left[ \frac{y(u) - x}{|y(u) - x|} + \nabla \phi \right] \cdot \partial_{u_j} y(u).$$

Ce gradient est nul lorsque le vecteur  $\left[ \frac{y(u) - x}{|y(u) - x|} + \nabla \phi \right]$  est orthogonal aux vecteurs  $(\partial_{u_j} y(u))$ . Cela signifie qu'il est colinéaire à  $\vec{n}(y(u))$ . Pour un point critique, il existe  $\lambda$  tel que

$$\frac{y(u) - x}{|y(u) - x|} + \nabla \phi = \lambda \vec{n}(y(u)).$$

On remarque que  $\nabla \phi$  est tangent à  $S$ , donc orthogonal à  $\vec{n}$  au point considéré et de plus  $|\nabla \phi(y(u))| \leq 1$ . On suppose que  $S = \partial\Omega$ ,  $\Omega$  convexe et que  $x \in C\Omega$ . Il vient  $\lambda^2 + (\nabla \phi(y(u)))^2 = 1$ , ainsi on définit un vecteur normal unitaire par

$$\frac{y(u) - x}{|y(u) - x|} = (1 - \|\nabla \phi(y(u))\|^2)^{\frac{1}{2}} \vec{n}(y(u)) - \nabla \phi(y(u)) = \vec{t}(u). \quad (4.7.16)$$

La recherche de  $u$  est équivalente à la résolution de l'équation  $x = y(u) + \mu \vec{t}(y(u))$ .

Un cas particulier intéressant est le cas où  $\nabla \phi(y(u))$  est de norme 1. Le point  $x$  est alors situé sur la tangente à  $S$  parallèle au vecteur  $\nabla \phi(y)$ . Il s'agit donc, pour  $x$  donné, de trouver le point de tangence de toute droite issue de  $x$  tangente à  $S$ , ce qui donnera les points  $y(u)$  admissibles.

On utilise  $|\nabla \phi(y(u))| \leq 1$  pour calculer le jacobien de  $u \rightarrow \phi(y(u))$ . La relation (4.7.14) permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \partial_{u_j u_m}^2 (\psi(y(u))) &= \frac{y(u) - x}{|y(u) - x|} \cdot \partial_{u_j u_m}^2 y + \frac{\partial_{u_m} y \cdot \partial_{u_j} y}{|y(u) - x|} + \nabla \phi(y(u)) \cdot \partial_{u_j u_m}^2 y \\ &\quad - \frac{((y(u) - x) \cdot \partial_{u_j} y)((y(u) - x) \cdot \partial_{u_m} y)}{|y(u) - x|^3} + \text{Hess} \phi \partial_{u_j} y \partial_{u_m} y. \end{aligned}$$

Éliminant des termes grâce à (4.7.16) et utilisant l'orthogonalité de  $\vec{n}(y(u))$  avec  $\partial_{u_j} y(u)$ , on trouve

$$\begin{aligned} \partial_{u_j u_m}^2 (\psi(y(u))) &= (1 - (\nabla \phi(y(u)))^2)^{\frac{1}{2}} \vec{n}(y(u)) \cdot \partial_{u_j u_m}^2 y + \frac{\partial_{u_m} y \cdot \partial_{u_j} y}{|y(u) - x|} \\ &\quad - \frac{(\nabla \phi(y(u)) \cdot \partial_{u_j} y)((\nabla \phi(y(u)) \cdot \partial_{u_m} y)}{|y(u) - x|} + \text{Hess} \phi \partial_{u_j} y \partial_{u_m} y. \end{aligned}$$

Utilisant enfin (4.7.15), on obtient

$$\begin{aligned} \partial_{u_j u_m}^2 (\psi(y(u))) &= (1 - (\nabla \phi(y(u)))^2)^{\frac{1}{2}} W(y(u)) \partial_{u_j} y \partial_{u_m} y + \frac{\partial_{u_m} y \cdot \partial_{u_j} y}{|y(u) - x|} \\ &\quad - \frac{(\nabla \phi(y(u)) \cdot \partial_{u_j} y)((\nabla \phi(y(u)) \cdot \partial_{u_m} y)}{|y(u) - x|} + \text{Hess} \phi \partial_{u_j} y \partial_{u_m} y. \end{aligned}$$

On introduit la projection orthogonale  $\pi$  parallèlement à  $\nabla \phi(y(u))$ . On a



$$\begin{aligned} \partial_{u_j u_m}^2 (\psi(y(u))) &= (1 - (\nabla\phi(y(u)))^2)^{\frac{1}{2}} [W(y(u)) + \frac{1}{|y(u)-x|} Id] \partial_{u_j} y \partial_{u_m} y \\ &\quad + \text{Hess}\phi \partial_{u_j} y \partial_{u_m} y + \frac{|\nabla\phi(y(u))|^2}{|y(u)-x|} \pi(\partial_{u_j} y) \cdot \pi(\partial_{u_m} y). \end{aligned}$$

Ceci permet d'obtenir, dans le cas où  $|\nabla\phi| = 1$ , que le jacobien de la transformation est égal à  $\det[\text{Hess}\phi + \frac{1}{|y(u)-x|} Id]$ .

Nous énonçons les résultats de ce paragraphe

**Proposition 4.5** *La contribution asymptotique d'une source  $c(y, k)$  (supposée à support compact en  $y$  ou bien  $S$  est compacte) sur un bord  $S$  à l'intégrale*

$$I_k(x) = \int_S \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} c(y, k) d\sigma_S(y)$$

dépend de manière cruciale du comportement de la phase de la source sur le bord, supposée de la forme

$$c(y, k) = a(y, k) e^{ik\phi(y)}.$$

Le point  $y(u(x))$  où on calcule  $a(y, k)$  (qui est le point du bord influençant la valeur de  $I_k(x)$ ) est solution de

$$\frac{y(u) - x}{|y(u) - x|} = (1 - (\nabla\phi(y(u)))^2)^{\frac{1}{2}} \vec{n}(y(u)) - \nabla\phi(y(u)).$$

Le jacobien de la phase est alors

$$\det[(1 - |\nabla\phi|^2)W(y(u)) + \text{Hess}\phi(y(u)) + \frac{1}{|y(u) - x|}].$$

Les deux cas limites que nous pouvons utiliser sont

- la phase  $\phi$  est nulle. Le point  $y(u)$  est celui qui minimise la distance à  $S$ . Le jacobien est égal au produit  $\Pi(\kappa_i + \frac{1}{d(x, S)})$ , les  $\kappa_i$  étant les courbures principales de la surface au point  $y(u)$ .
- la phase  $\phi$  de norme de gradient 1. Soit  $y(u)$  un point du bord tel que la droite  $(xy(u))$  est tangente à  $S$ . Le jacobien de la phase est le produit des  $\beta + \frac{1}{|y(u)-x|}$  où  $\beta$  est une valeur propre de la matrice hessienne de  $\phi$ .

La discussion précédente sur les points critiques de la phase permet d'obtenir un développement asymptotique de  $I_k(x)$ .

Nous terminons cette section d'applications de la méthode de la phase stationnaire à l'équation des ondes par le calcul de scattering qui se trouve dans tous les cours de matrice de scattering. On le trouve par exemple dans le cours de R. B. Melrose, donné à l'université de Stanford [77].

Pour cela, on introduit la résolution spectrale de l'identité, qui est la transcription en coordonnées polaires de l'identité

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{iz\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

qui se réécrit

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_0^{+\infty} \int_{S^{n-1}} e^{i\lambda x \cdot \omega} \hat{f}(\lambda\omega) \lambda^{n-1} d\lambda d\omega.$$

Soit  $E_0(\lambda)$  est le projecteur spectral, donné par

$$E_0(\lambda) f(x, \lambda) = (2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} e^{i\lambda x \cdot \omega} \lambda^{n-1} \hat{f}(\lambda\omega) d\omega.$$

D'après le théorème spectral

$$Id = \int_0^\infty E_0(\lambda) d\lambda.$$

Soit  $\Phi_0(x, \omega, \lambda) = e^{i\lambda x \cdot \omega}$  la famille d'ondes planes caractérisée par la direction  $\omega$  et la norme du vecteur d'onde  $\lambda > 0$ . Alors

$$E_0(\lambda) = (2\pi)^{-n} \lambda^{n-1} F_0(\lambda) F_0^*(\lambda)$$

où  $F_0$  agit de  $\mathcal{C}^\infty(S^{n-1})$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  :

$$F_0(\lambda)g(x) = \int_{S^{n-1}} \Phi_0(x, \omega, \lambda)g(\omega) d\omega$$

et  $F_0^*(\lambda)$  agit de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{C}^\infty(S^{n-1})$  :

$$F_0^*(\lambda)h(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(x, \omega, -\lambda)h(y) dy$$

On obtient, par l'application du théorème de la phase stationnaire

$$F_0(\lambda)g(\theta|x|) \simeq e^{i\lambda|x|}(\lambda|x|)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}\pi(n-1)i} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j \geq 0} |\lambda x|^{-j} h_j^+(\theta) + e^{-i\lambda|x|}(\lambda|x|)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}\pi(n-1)i} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j \geq 0} |\lambda x|^{-j} h_j^-(\theta). \quad (4.7.17)$$

On écrit  $x = |x|\theta$ . La phase s'écrit alors  $i\lambda|x|\theta \cdot \omega$ . Comme l'intégrale est invariante par rotation, on choisit les coordonnées sur  $S^{n-1}$  de sorte que  $\theta \cdot \omega = \omega_1$ , avec  $\omega_1 = \pm(1 - (\omega')^2)^{\frac{1}{2}}$ . On note  $J(\omega')$  le jacobien de la transformation  $d_{S^{n-1}}\omega$  en  $d\omega'$ . Il vient

$$\begin{aligned} F_0(\lambda)g(\theta|x|) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda|x|\omega_1} g(\omega_1, \omega') J(\omega') d\omega' \\ &= \int_{S^{n-1}} e^{i\lambda|x|(1-(\omega')^2)^{\frac{1}{2}}} g((1-(\omega')^2)^{\frac{1}{2}}, \omega') J(\omega') d\omega' \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\lambda|x|(1-(\omega')^2)^{\frac{1}{2}}} g(-(1-(\omega')^2)^{\frac{1}{2}}, \omega') J(\omega') d\omega'. \end{aligned}$$

Grâce au développement limité  $(1 - (\omega')^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(\omega')^2 + o((\omega')^2)$ , on vérifie que le théorème de la phase stationnaire s'applique au point  $\omega' = 0$  et que  $h_0^+(\theta) = g(\theta)$ ,  $h_0^-(\theta) = g(-\theta)$ . Les termes  $h_j^\pm$  sont des résultats de l'action d'itérées du laplacien sur la sphère, qui est l'opérateur  $L$  associé au point critique  $\theta \cdot \omega = \pm 1$  de la phase  $\theta \cdot \omega$ .

De l'expression  $\Delta = -\int_0^\infty \lambda^2 E_0(\lambda) d\lambda$ , on déduit le fait que toute solution de  $(\Delta - \lambda^2)u = 0$  vérifie donc  $(|\xi|^2 - \lambda^2)\hat{u}(\xi) = 0$ , soit, en prenant  $\xi = r\theta$ , l'égalité  $\hat{u}(\xi) = \delta(r - \lambda)g_1(\theta)$ . Par transformée de Fourier inverse, on trouve

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{irx \cdot \theta} \delta(r - \lambda) g_1(\theta) r^{n-1} dr d\theta$$

donc

$$u = F_0(\lambda)((2\pi)^{-n} \lambda^{n-1} g_1).$$

Le développement asymptotique ci-dessus étendu à  $g_1$  distribution conduit à

**Lemme 4.7** *Pour toute fonction  $h(\theta)$  de classe  $\mathcal{C}^\infty(S^{n-1})$ , il existe une solution de  $(\Delta + \lambda^2)u = 0$  admettant pour  $|x| \rightarrow \infty$  le développement*

$$u(|x|\theta) = e^{i\lambda|x|} |x|^{-\frac{1}{2}(n-1)} h(\theta) + e^{-i\lambda|x|} |x|^{-\frac{1}{2}(n-1)} h_1(\theta) + O(|x|^{-\frac{1}{2}(n+1)}).$$

La relation entre  $h_1$  et  $h$  est, en vertu du développement asymptotique

$$h_1(\theta) = i^{n-1} h(-\theta)$$

qui est la plus simple des matrices de scattering.

## 4.8 Passage de la caustique pour l'équation des ondes

Dans cette section, nous utilisons les résultats sur la phase stationnaire complexe pour compléter la section 3.4 du chapitre 3. En particulier, nous calculons la valeur de  $a_0(x(T))$  solution de (3.0.1) pour  $T > t_0$ , où  $t_0$  est le premier point pour lequel  $\det(Id + t_0W(x_0)) = 0$ , s'il existe. On introduit  $\psi(t) = \phi_0 + t$ . Pour  $t < t_0$  on sait que  $\psi(t) = \phi(x(t))$  et on remarque que  $\psi$  est définie partout. est bien définie.

Nous démontrons le résultat suivant :

**Proposition 4.6** *Soit  $\Sigma$  une surface de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $a(x, k) \simeq \sum_j a_j(x)k^{-j}$ ,  $a_j$  étant de classe  $C^\infty$  sur  $\Sigma$ , et  $a$  étant de classe  $C^\infty$  sur  $\Sigma \times [1, +\infty[$ . On considère une constante  $\phi_0 \in \mathbb{R}$ . Soit  $b(x, k) \simeq b_j(x)k^{-j}$  solution de*

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)(b(x, k)e^{ik\phi(x)}) \simeq 0, \\ \phi(x) = \phi_0, x \in \Sigma, \\ b(x, k)|_\Sigma = a(x, k). \end{cases}$$

*On sait calculer tous les termes  $b(x, k)$  sur chaque droite  $x(t) = x_0 + tN(x_0)$  hors des points  $t \geq 0$  tels que  $\det(Id + tW(x_0)) = 0$ . En particulier*

$$b_0(x) = \sum_{x_0 \in \Sigma, x = x_0 + tN(x_0)} \frac{a_0(x_0)}{(|\det(Id + tW(x_0))|)^{\frac{1}{2}}} e^{in\frac{\pi}{2}}$$

*où  $-n$  est l'indice de Maslov, égal au nombre de points de la caustique traversés entre 0 et  $t$  sur chaque droite  $x_0 + sN(x_0)$ .*

Nous n'avons cependant pas ici exprimé la solution au voisinage du point  $t_0$ , point de la caustique; ceci sera fait dans la section suivante.

**Preuve** On appelle transformée de Bargmann de la fonction  $u(x) \in L^1(V), V \subset \mathbb{R}^d$  la fonction holomorphe

$$Tu(z, k) = \int_V e^{-\frac{k}{2}(z-x)^2} u(x) dx.$$

La transformée de Bargmann permet de s'affranchir des points de la caustique  $\mathcal{C}$  en déformant le paramètre sur les bicaractéristiques dans le complexe, pour que la fonction obtenue soit toujours continue en  $t$ . En fait, on va déformer le paramètre jusqu'en  $t - i$ . Nous notons

$$d(t, k) = Tu(x_0 + (t - i)\nabla\phi(x_0), k).$$

Nous écrivons

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \phi(x) + \frac{i}{2}(x - (x_0 + t\nabla\phi(x_0)) + i\nabla\phi(x_0))^2 \\ &= \phi(x) - \frac{i}{2} + \frac{i}{2}(x - (x_0 + t\nabla\phi(x_0)))^2 - \nabla\phi(x_0) \cdot (x - (x_0 + t\nabla\phi(x_0))) \end{aligned}$$

Cette phase admet un point critique en  $x$  au point  $x = x_0 + t\nabla\phi(x_0)$ . En effet, il existe une matrice  $A(x)$  telle que

$$\nabla\phi(x) - \nabla\phi(x_0 + t\nabla\phi(x_0)) = A(x) \cdot [x - (x_0 + t\nabla\phi(x_0))].$$

La matrice  $A(x) + iId$  est inversible puisque  $A$  est réelle.

Il existe un voisinage  $V$  de  $t = 0$  tel que, pour  $t \in V$ , l'équation  $\nabla_x \psi(x) = 0$  admet une solution unique égale à  $x = x_0 + t\nabla\phi(x_0)$ . On remarque que ce résultat est vrai pour  $x$  dans la composante connexe de  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}$  contenant  $\Sigma$ . De plus, la matrice hessienne de cette phase est  $Id + i\text{Hess}\phi(x)$ . Nous sommes dans les conditions d'application du théorème de la phase stationnaire complexe, la valeur critique de la phase est  $i/2 + \phi(x_0 + t\nabla\phi(x_0)) = i/2 + \phi_0 + t$  et le déterminant de la Jacobienne est  $i^3 \det(W_t(x_0) - iId)$ .

Dans la suite de la preuve, nous considérons un point  $x_0 \in \Sigma$  et nous étudions le rayon issu de  $x_0$ . La solution est la superposition de l'ensemble des solutions, où on considère pour chaque  $x$  l'ensemble des points  $x_0 \in \Sigma$  tels qu'il existe  $t$  tel que  $x = x_0 + t\nabla\phi(x_0)$ .

On peut se demander pourquoi il pourrait y avoir plusieurs solutions. Ceci sera présenté plus loin ; notons pour l'instant que la phase caractérisant une caustique simple (le pli) est donnée par

$$\Phi(a(x), b(x), T) = \frac{T^3}{3} - a(x)T + b(x)$$

et qu'un calcul de phase stationnaire amène à considérer deux points critiques lorsque  $a(x) > 0$  (voir Exercice 4.1 pour la preuve de cette affirmation). Le résultat du Lemme 4.2 donne une contribution pour toutes les valeurs critiques. Cette approche est un sujet de recherche actuel : le calcul numérique des solutions multivaluées de l'équation eikonale est maintenant opérationnel (voir les travaux de J.D. Benamou, la thèse de I. Sollic, et la recherche de solutions de viscosité multivaluées dans [11], [90], [12], [1]).

Dans la suite de la preuve, nous considérons un point  $x_0 \in \Sigma$  et nous étudions le rayon issu de  $x_0$ . Considérons l'amplitude  $b_0^*(y)$  associée à la partie de l'onde portée sur le rayon  $x_0$  ( $y \in \{x_0 + s\nabla\phi(x_0)\}$ ). On considère alors l'expression  $d^*(t, k)$  provenant du calcul de phase stationnaire en ce point. Le théorème de la phase stationnaire (Proposition 4.1) conduit (en dimension  $d = 3$ ) à

$$d^*(t, k) \simeq e^{\frac{k}{2}} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} b_0^*(x_0 + t\nabla\phi(x_0)) e^{i\phi_0 + it} (\det(Id - iW_t(x_0)))^{-\frac{1}{2}} (1 + O(k^{-1})).$$

Ceci est vrai pour tout  $t$  sur le rayon, hors de  $t_0$ , en modifiant de manière adéquate l'argument (remplaçant par exemple  $t$  par  $t - T$  et le point  $x_0$  par le point  $x_0 + T\nabla\phi(x_0)$ ). L'expression de  $d^*(t, k)$  pour  $t < t_0$  se transforme en utilisant la relation

$$W_t(x_0) = (Id + tW(x_0))^{-1}W(x_0)$$

et la relation

$$b_0^*(x_0 + t\nabla\phi(x_0)) = b_0^*(x_0) / (\det(Id + tW(x_0)))^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient, pour  $t < t_0$  (seul le terme principal est écrit ici)

$$\begin{aligned} d^*(t, k) &= e^{\frac{k}{2}} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} b_0^*(x_0) e^{i\phi_0 + it} [\det(Id + tW(x_0))(Id - iW_t(x_0))]^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{k}{2}} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} b_0^*(x_0) e^{i\phi_0 + it} [\det(Id + (t - i)W(x_0))]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De même, on vérifie pour  $t > t_0$

$$\begin{aligned} d^*(t, k) &= e^{\frac{k}{2}} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} b_0^*(x_0 + T\nabla\phi(x_0)) e^{i\phi_0 + i(t - T + T)} [\det(Id + (t - T)W(x_0))(Id - iW_t(x_0))]^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{k}{2}} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} b_0^*(x_0 + T\nabla\phi(x_0)) e^{i\phi_0 + it} [\det(Id + (t - i)W(x_0))]^{-\frac{1}{2}} [\det(Id + TW(x_0))]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

La fonction  $Tu(z, k)$  est holomorphe dans  $\Im z \neq 0$  par majoration analytique, donc en particulier la fonction  $Tu(x_0 + (t - i)\nabla\phi(x_0), k)$  est continue en  $t$ . La détermination de la racine est choisie pour que la fonction

$$t \rightarrow (\det(Id + tW(x_0)))^{\frac{1}{2}} (\det(Id - iW_t(x_0)))^{\frac{1}{2}}$$

soit continue en  $t$ . On en déduit l'égalité

$$b_0^*(x_0) = b_0^*(x_0 + T\nabla\phi(x_0)) [\det(Id + TW(x_0))]^{\frac{1}{2}}.$$

Le choix de la détermination de la racine carrée permet d'écrire, en utilisant l'indice de Maslov  $n$ ,

$$(\det(Id + tW(x_0)))^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{in\pi}{2}} (|\det(Id + tW(x_0))|)^{-\frac{1}{2}}.$$

En particulier, si on se place dans le cas  $d = 3$  et  $\kappa_1 < \kappa_2 < 0$ , alors

$$\begin{cases} 0 < t < -\kappa_1^{-1}, n = 0, \\ -\kappa_1^{-1} < t < -\kappa_2^{-1}, n = -1, \\ t > -\kappa_2^{-1}, n = -2. \end{cases} \quad (4.8.18)$$

Nous avons ainsi calculé l'amplitude le long d'un rayon. Pour obtenir la solution de l'équation de Helmholtz, il faut superposer l'ensemble des solutions, et, en particulier, pour chaque  $x$ , considérer l'ensemble des  $x_0 \in \Sigma$  tels qu'il existe  $t$  tel que  $x_0 + t\nabla\phi(x_0) = x$ . En tout point  $x$  de l'espace la solution asymptotique est la superposition des amplitudes correspondant à tous les rayons issus de  $\Sigma$  arrivant au point  $x$  à l'instant  $t$ . Ainsi, même si  $b_0^*(x_0) = a_0(x_0)$ , il n'y a aucune raison pour que  $a_0(x_0 + t\nabla\phi(x_0)) = b_0^*(x_0 + t\nabla\phi(x_0))$ , mais  $a_0(x_0 + t\nabla\phi(x_0))$  pourra s'écrire  $b_0^*(x_0 + t\nabla\phi(x_0)) + c_0$ , où  $c_0$  fera éventuellement référence à une autre valeur de  $a_0$  en  $y_0$  tel que  $y_0 + t\nabla_x\phi(y_0) = x = x_0 + t\nabla\phi(x_0)$ .

## 4.9 Exercices du chapitre 4

**Exercice 4.1 : La fonction d'Airy** 1) On définit la fonction d'Airy  $Ai$  comme la transformée de Fourier inverse de  $\exp(i\frac{\xi^3}{3})$ . Démontrer que  $Ai \in \mathcal{S}'$  est une fonction de classe  $C^\infty$  telle que, pour tout  $\eta > 0$ ,

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\eta} \exp(i\xi^3/3 + ix\xi) d\xi.$$

2) Démontrer que  $Ai$  est solution de l'équation différentielle

$$Ai''(x) = xAi(x).$$

3) En choisissant  $\eta$  dans la question 1 en fonction de  $x$  de manière adéquate, démontrer que la phase peut se mettre sous la forme, pour tout  $x > 0$  :

$$-\xi^2\sqrt{x} + i\frac{\xi^3}{3}.$$

Calculer un développement asymptotique de  $Ai$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$

4) Retrouver le développement asymptotique en écrivant  $Ai(k^{\frac{2}{3}}u)$  et en appliquant le théorème de la phase stationnaire.

**Exercice 4.2 Phase stationnaire dégénérée** Soit  $\phi(z)$  une phase sur une variété  $X$  qui stationne sur une sous variété  $W$  de dimension  $d$ , c'est-à-dire  $\nabla_z\phi(z)|_{z \in W} = 0$ .

1) Démontrer qu'il existe un système de coordonnées locales  $z = (x, y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$  tel que le système d'équations  $\partial_x\phi(x, y) = 0$  admette pour solution  $x = x(y)$  au voisinage d'un point  $(x(y_0), y_0)$  de  $W$ , et que, localement, l'équation de  $W$  soit  $x = x(y)$ .

2) On suppose maintenant que, dans ce système de coordonnées locales,  $\text{Hess}_{x^2}\phi$  est non dégénéré. Calculer, pour  $a(z) \in C^\infty(X)$ , l'intégrale

$$\int_X e^{ik\phi(z)} a(z) dz.$$

**Solution de l'exercice 4.1** 1) On vérifie que

$$\text{Re}(i\frac{\xi^3}{3} + i\xi x) = \text{Re}(i(\zeta + i\eta)^3/3 + i\zeta x - \eta x) = -\zeta^2\eta + \eta^3/3 - \eta x.$$

L'intégrale converge donc. Il n'y a pas de résidu entre  $\Im\xi = \eta_1$  et  $\Im\xi = \eta_2$  dans le plan complexe, donc elle est indépendante de  $\eta > 0$ .

Elle est alors de classe  $C^\infty$  puisque le comportement en  $\xi$  est en  $e^{-\eta\xi^2}$ .

On vérifie enfin que, au sens des distributions de  $\mathcal{S}'$ ,  $\exp(i(\zeta + i\eta)^3/3)$  converge vers  $\exp(i\zeta^3/3)$  lorsque  $\eta$  tend vers 0 par valeurs positives, donc on peut appliquer la continuité de la transformée de Fourier et donc on a convergence dans  $\mathcal{S}'$ .

2) On vérifie que

$$\int_{\mathbf{R}+i\eta} (\zeta^2 + x)e^{i(\zeta^3/3+\zeta x)} d\zeta = 0.$$

On remarque que le terme  $\zeta^2$  correspond à  $-Ai''(x)$ , d'où le résultat.

3) La phase stationne en  $\xi = -i\eta \pm ix^{\frac{1}{2}}$  lorsque  $x > 0$ . On choisit  $\eta = x^{\frac{1}{2}}$  pour avoir les deux points critiques 0 et  $2ix^{\frac{1}{2}}$ . On vérifie que la phase s'écrit, pour cette valeur de  $\eta$  :

$$i(\xi^3/3 + ix^{\frac{1}{2}}\xi^2 + \frac{2}{3}ix^{\frac{3}{2}}).$$

On a alors

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) \int_{\mathbf{R}} e^{-x^{\frac{1}{2}}\xi + i\xi^3/3} d\xi.$$

En effectuant le développement de Taylor de l'exponentielle, on trouve

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) \int_{\xi \in \mathbf{R}} d\xi \left[ \sum_{p=0}^N \left(\frac{i}{3}\right)^p \frac{\xi^{3p}}{(p)!} e^{-x^{\frac{1}{2}}\xi^2} + R_N \right].$$

On a l'égalité  $\int_{\mathbf{R}} \xi^{3q} e^{-x^{\frac{1}{2}}\xi^2} d\xi = x^{-3q/4-1/4} \int_{\mathbf{R}} u^{3q} e^{-u^2} du$ , nulle lorsque  $q$  est impair. Pour  $q = 2p$ , on trouve  $2 \int_0^{+\infty} \frac{dv}{2v^{\frac{1}{2}}} v^{3p} e^{-v} = \Gamma(3p + \frac{1}{2})$ . Chaque terme de la somme est alors égal à

$$x^{-\frac{1}{4}} \left[ \sum_{p=0}^N (-9)^p \frac{\Gamma(3p + \frac{1}{2})}{(2p)!} x^{-3p/2} \right],$$

car le terme  $(q!)^{-1}$  est égal à  $((2p)!)^{-1}$ . Le développement asymptotique de  $Ai(x)$  s'écrit alors

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) x^{-\frac{1}{4}} \sum_{p=0}^N (-1)^p \frac{\Gamma(3p + \frac{1}{2})}{(2p)!} x^{-\frac{3p}{2}} + \int_{\xi \in \mathbf{R}} d\xi R_N$$

Le terme  $R_n$  est majoré par le premier terme après la troncature de la série définissant  $\Phi$  que l'on n'a pas considéré, soit  $\frac{\xi^{3N}}{N!}$ . Ceci donne alors le majorant du terme général de la série.

4) Nous écrivons

$$Ai(k^{\frac{2}{3}}u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi \in \mathbf{R} + ik^{\frac{1}{3}}\eta} e^{i(\xi^3/3 + k^{\frac{2}{3}}u\xi)} d\xi.$$

Effectuons le changement de variable  $\xi = k^{\frac{1}{3}}\tau$ , l'intégrale a lieu sur  $\tau \in \mathbf{R} + i\eta$ . Alors

$$Ai(k^{\frac{2}{3}}u) = \frac{k^{\frac{1}{3}}}{2\pi} \int_{\tau \in \mathbf{R} + i\eta} e^{ik(\tau^3/3 + u\tau)} d\tau.$$

La phase  $\phi(s) = u(s + i\eta) + \frac{1}{3}(s + i\eta)^3$  admet deux points critiques complexes qui sont  $s = -i\eta \pm i\sqrt{u}$  pour  $u > 0$ . Le jacobien est alors égal à  $2(s_c + i\eta) = \pm 2i\sqrt{u}$ . La valeur critique est  $\pm iu^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(\pm i)^3 u^{\frac{3}{2}} = \pm i\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$ . Celle correspondant à  $-i\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$  donne une phase qui tend vers  $+\infty$  à  $+\infty$ . Nous la rejetons car  $Ai$  admet une limite lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Il reste alors

$$\frac{k^{\frac{1}{3}}}{2\pi} \left( \frac{2\pi}{k2\sqrt{u}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-k^{\frac{2}{3}}u^{\frac{3}{2}}}$$

comme premier terme, c'est-à-dire le  $k^{-\frac{1}{6}} e^{-\frac{2}{3}ku^{\frac{3}{2}}} u^{-\frac{1}{4}} (4\pi)^{-\frac{1}{2}}$ . En remarquant que  $x = k^{\frac{2}{3}}u$ , on retrouve le comportement de la forme  $x^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2}$ . Notons que cette méthode de recherche des points de phase stationnaire complexe sera utilisée dans le chapitre 5.

Une remarque pour terminer cette étude de la fonction d'Airy : on note que  $Ai(x)$  est solution de l'équation  $u'' - xu = 0$ . Cette solution est exponentiellement décroissante pour  $x > 0$ , mais elle

n'est pas nulle, alors qu'elle vérifie la condition de Sommerfeld en  $+\infty$ . Ceci nous aide à préciser nos idées sur la notion de support dont nous avons parlé : en effet le support de la fonction d'Airy est  $\mathbb{R}$  tout entier, mais, asymptotiquement, elle contribue uniquement dans la zone  $x \leq 0$ . Il y a donc une différence entre le support et le support asymptotique. Si on forme par exemple l'équation eikonale vérifiée par une phase  $\phi$  correspondant à  $Ai(x)$ , on trouve  $(\phi')^2 + x = 0$ , donc la phase n'est définie que dans la zone  $x \leq 0$  et les rayons associés vivent dans  $x \leq 0$ . En revanche, là encore, la solution a pour support  $\mathbb{R}$  tout entier.

La dernière remarque est la suivante : la fonction d'Airy est l'unique solution dans  $\mathcal{S}'$  de  $u'' = xu$ . En particulier, c'est une solution frontière, dont le graphe sépare le graphe des solutions qui s'annulent de celui des solutions dont la dérivée s'annule. Si on note  $w_0$  et  $w_1$  les solutions respectivement associées aux données de Cauchy  $(u(0) = 1, u'(0) = 0)$  et  $(u(0) = 0, u'(0) = 1)$ , on trouve  $A'(x) = Ai(0)[w_0(x) - \int_0^\infty \frac{ds}{(w_0(s))^2} w_1(x)]$ , ce qui fixe la condition de Cauchy sur  $Ai$ . Ceci est l'équivalent du fait qu'une seule condition de Cauchy suffit lorsqu'on a la condition de décroissance à l'infini (Sommerfeld par exemple).

**Preuve de l'exercice 4.2** Le résultat (dû à Colin de Verdière), est le résultat global qui permettra, dans le chapitre 12, de tenir compte des géodésiques fermées dans l'influence d'un objet.

1) Nous notons que le système d'équations

$$\nabla_z \phi(z) = 0$$

est un système de rang  $n - d$ , puisque l'espace des  $z$  solutions est de dimension  $d$ . Ceci veut dire qu'il existe  $n - d$  équations indépendantes (s'en convaincre en regardant les équations tangentes). Notons alors les coordonnées en question  $(z_{j_1}, \dots, z_{j_{n-d}})$ . En réordonnant les coordonnées et en considérant que  $(z_k)_{k \notin \{j_1, \dots, j_{n-d}\}}$  est diffeomorphe à  $\mathbb{R}^d$ , on peut écrire  $z = (x, y), y \in \mathbb{R}^d$ . Alors les équations

$$\nabla_x \phi(x, y) = 0$$

sont  $n - d$  équations indépendantes. Par le théorème des fonctions implicites, on peut considérer  $y$  comme un paramètre, remarquer que  $\text{Hess}_{x^2} \phi$  est inversible, et écrire la solution comme  $x = x(y)$ . Alors on peut écrire

$$\int_X e^{i\phi(z)} a(z) dz = \int_{\mathbb{R}^d} dy \int_{\mathbb{R}^{n-d}} dx e^{ik\phi(x,y)} a(x,y) J(x,y).$$

L'application du théorème de la phase stationnaire en  $x$  (Théorème 4.2) conduit à

$$\int_X e^{ik\phi(z)} a(z) dz \simeq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy (2\pi/k)^{\frac{n-d}{2}}}{|\det \text{Hess}_{x^2} \phi(x(y), y)|^{\frac{1}{2}}} \left( \sum_{n \geq 0} L^n(y, \partial_y, \partial_x) a(x, y) \Big|_{x=x(y)} \right) e^{ik\phi(x(y), y)}.$$

On note alors que  $\partial_{y_j} \phi(x(y), y) = \sum_p \partial_{x_p} \phi(x(y), y) \frac{\partial x_p}{\partial y_j} + \partial_{y_j} \phi(x(y), y)$ . En utilisant le fait que la phase  $\phi(z)$  stationne sur  $W$ , on vérifie que  $\partial_{y_j} \phi(x(y), y) = 0$ , donc

$$\partial_{y_j} \phi(z)|_W = 0.$$

On note alors la valeur constante de  $\phi(z)$  sur  $W$  par  $\phi(W)$ . Il reste alors

$$\int_X e^{ik\phi(z)} a(z) dz \simeq e^{ik\phi(W)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(2\pi/k)^{\frac{n-d}{2}} dy}{|\det \text{Hess}_{x^2} \phi(x(y), y)|^{\frac{1}{2}}} \left( \sum_{n \geq 0} L^n(y, \partial_y, \partial_x) a(x, y) \Big|_{x=x(y)} \right).$$





# Chapitre 5

## Application à la physique des particules

### 5.0 Introduction

Nous présentons ici, sur une idée d'E. Pilon, un exemple simple d'application du théorème de la phase stationnaire tel que les physiciens des particules peuvent l'utiliser. La section 5.1 est due à E. Pilon, s'inspirant de [82]. Dans un premier paragraphe, nous définissons la quantité physique que nous étudions ; il s'agit en l'occurrence de la distribution de gluons dans un proton. Dans un deuxième paragraphe, nous obtenons la forme intégrale d'un équivalent de la densité de probabilité. La section 4.3 est consacrée à une généralisation du théorème de la phase stationnaire énoncé plus haut, en insistant sur quelques difficultés dues au fait que le point de phase stationnaire n'est pas sur le contour. Nous donnons alors une interprétation physique du résultat.

### 5.1 Le contexte physique

Comme le neutron, avec lequel il constitue les noyaux des atomes, le proton n'est pas une particule élémentaire : c'est un état lié de sous-constituants, des *quarks* ( quanta de matière ) et des *gluons* ( quanta du champ de rayonnement associé à l'interaction considérée ; ils sont à l'interaction forte au niveau élémentaire ce que les photons sont à l'électromagnétisme ). Ces sous-constituants sont très fortement liés - quarks et gluons sont astreints à se “confiner” en états liés (appelés génériquement *hadrons*) : pour des raisons énergétiques, il leur est interdit de s'échapper librement les uns des autres à des distances supérieures au femtomètre, typiquement le rayon d'un proton.

Néanmoins, lorsqu'un proton subit une collision à haute énergie devant son énergie de masse, et mettant en jeu un transfert d'énergie-impulsion grand devant l'énergie de liaison de ses sous-constituants, ce proton se comporte, de façon la plus probable, non pas comme un tout cohérent réagissant “d'un seul tenant”, mais comme un faisceau de quarks et gluons collimés, quantiquement incohérents et quasi-libres ( appelés génériquement *partons* ). Un seul parton participe activement à la collision à grand transfert ; les autres n'interviennent qu'ultérieurement lors de la recombinaison des divers quarks et gluons produits en hadrons dans l'état final de la collision.

Parmi les quantités physiquement pertinentes lors de l'étude de ces collisions figurent les “densités partoniques” dans le proton, notées  $G_a(x, Q^2)$ , qui fournissent la densité de probabilité  $x G_a(x, Q^2)$  pour qu'un parton d'espèce  $a$ , ( quark ou antiquark de tel ou tel type, ou gluon ) ayant dans le hadron une “épaisseur transverse”  $\hbar/Q$  ( perpendiculairement à l'axe

de la collision ;  $Q$  est de l'ordre de grandeur du transfert d'énergie-impulsion de la collision ), porte la fraction  $x$  ( entre 0 et 1 ) d'énergie-impulsion du proton incident dont il fait partie. Le lecteur intéressé par les détails se reportera utilement à [82], [34], [35].

La ChromoDynamique Quantique, théorie de l'interaction forte au niveau élémentaire des quarks et des gluons, permet en principe de calculer ces quantités ; toutefois en pratique leur calcul complet est actuellement inextricable.

### 5.1.1 Equation régissant $G_a$ .

Lorsque  $Q^2$  est grand devant le carré de l'énergie de masse du proton, et lorsque  $x$  n'est, ni très petit devant 1, ni voisin de 1, la dépendance en  $Q^2$  des densités partoniques  $G_a(x, Q^2)$  est contrôlée par l'équation linéaire de la forme :

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} G_a(x, Q^2) = \bar{\alpha}(Q^2) \sum_b \int_0^1 dy dz \delta(x - yz) P_{ab}(y) G_b(z, Q^2) \quad (5.1.1)$$

appelées “équations de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi” [30], du nom de leurs inventeurs ( voir aussi les cours [34], [35], [82] ), où

- le paramètre de couplage  $\bar{\alpha}(Q^2)$  est une fonction connue ( inversement proportionnelle au logarithme de  $Q^2$  ) ;
- les  $P_{ab}(z)$  sont des distributions connues.

Une méthode de résolution standard consiste à effectuer une transformation de Mellin sur  $x$  :

$$\bar{G}_a(n, Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-1} G_a(x, Q^2). \quad (5.1.2)$$

En introduisant la variable dite “d'évolution naturelle”  $\xi$  définie par

$$\xi = \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dQ^2}{Q^2} \bar{\alpha}(Q^2), \quad (5.1.3)$$

on obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre pour chaque  $\bar{G}_a(n, Q^2)$ , explicitée en (5.1.5). Les “conditions initiales”, pour un  $Q_0^2$  de l'ordre de grandeur du carré de l'énergie de masse du proton, sont incalculables à l'heure actuelle à partir des premiers principes. Il s'agit plutôt de ce que l'on “mesure” dans ces collisions. Dans cet exemple, nous les paramètrons sous une forme simple. Dans la “représentation des  $x$ ”, ce paramétrage est de la forme :

$$G_a(x, Q_0^2) \simeq N_a x^{\alpha_a - 1} (1 - x)^{\beta_a} P_a(x) \quad (5.1.4)$$

où

- $N$  est une normalisation ;
- $\alpha_a > -1$  contrôle le profil à petit  $x$  ;
- $\beta_a > 0$  contrôle le profil à  $x$  voisin de 1 ;
- $P_a(x)$  est une fonction simple contrôlant le profil aux  $x$  intermédiaires,

auquel correspond, par transformation de Mellin (5.1.2), la forme en “représentation des  $n$ ” des conditions initiales  $\bar{G}_a(n, Q_0^2)$ .

La solution recherchée en “représentation des  $x$ ” s'obtient alors par transformée de Mellin inverse. Le traitement usuel de cette transformée de Mellin inverse s'effectue par l'intermédiaire d'un calcul numérique, ou, dans certains cas, grâce à une application du théorème de la phase stationnaire. Rigoureusement parlant, ces équations sont obtenues dans le régime où

$$\bar{\alpha}(Q^2) \ll 1, \quad \bar{\alpha}(Q^2) |\text{Log} x| \ll 1, \quad \bar{\alpha}(Q^2) |\text{Log}(1 - x)| \ll 1$$

et elles sont physiquement incorrectes hors de ce domaine. Il est malgré tout intéressant de l'étudier dans le cas où  $x \ll 1$ , ce qui sera un cas d'application du théorème de la phase stationnaire.

### 5.1.2 Formulation du problème lorsque $x \ll 1$

La fonction (écrite pour le gluon)  $\tilde{H}_g(n, \xi) = \tilde{G}_g(n, Q^2(\xi))$  est solution d'une équation de forme :

$$\frac{\partial \tilde{H}_g}{\partial \xi}(n, \xi) = \left( \frac{c}{n-1} - b + o(n-1) \right) \tilde{H}_g(n, \xi) \quad (5.1.5)$$

où  $b$  et  $c$  sont des constantes positives connues. En supprimant le terme  $o(n-1)$  et en considérant la nouvelle équation ainsi obtenue, la nouvelle fonction inconnue étant notée  $H_g(n, \xi)$ , on trouve la solution en "représentation des  $n$ " :

$$H_g(n, \xi) = e^{\frac{c\xi}{n-1} - b\xi} H_g(n, 0) \quad (5.1.6)$$

Utilisant la transformée de Mellin inverse, on trouve son expression en "représentation des  $x$ " après changement de variable  $\omega = n - 1$  :

$$x \mathcal{M}^{-1}(H_g)(x, \xi) = e^{-b\xi} \int_{C_\omega} \frac{d\omega}{2\pi i} x^{-\omega} e^{\frac{c\xi}{\omega}} H_g(1 + \omega, 0) \quad (5.1.7)$$

$C_\omega$  est un contour parallèle à l'axe imaginaire pur, et passant à droite de 0, singularité dominante de l'intégrand.

Avec  $\zeta = \text{Log} \frac{1}{x}$ ,  $u = \sqrt{c\xi\zeta}$ ,  $\omega = t\sqrt{\frac{c\xi}{\zeta}}$  et  $f(t) = t + \frac{1}{t}$ , ceci se réécrit :

$$x \mathcal{M}^{-1}(H_g)(x, \xi) \simeq e^{-b\xi} \sqrt{\frac{c\xi}{\zeta}} \int_{C_t} \frac{dt}{2\pi i} e^{uf(t)} H_g \left( 1 + t\sqrt{\frac{c\xi}{\zeta}}, 0 \right) \quad (5.1.8)$$

$C_t$  est un contour parallèle à l'axe imaginaire pur, et passant à droite de 0.

Nous souhaitons démontrer dans cette partie l'approximation suivante, lorsque  $u \gg 1$  :

$$x \mathcal{M}^{-1}(H_g)(x, \xi) \simeq \sqrt{\frac{c\xi}{\zeta}} \left[ 4\pi\sqrt{c\xi\zeta} \right]^{-\frac{1}{2}} \bar{G}_g \left( 1 + \sqrt{\frac{c\xi}{\zeta}}, 0 \right) e^{-b\xi + 2\sqrt{c\xi\zeta}} \left[ 1 + O \left( \frac{1}{\sqrt{c\xi\zeta}} \right) \right]. \quad (5.1.9)$$

#### Remarques

- (i) L'intégrale  $\int_{C_t} \frac{dt}{2\pi i} e^{uf(t)}$  est la représentation intégrale d'une fonction de Bessel.
- (ii) En "représentation des  $x$ ", l'équation (5.1.5) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [x H_g(x, \xi)] = \int_x^1 dz \left( \frac{c}{z} - b \right) [z H_g(z, \xi)].$$

En posant  $x H_g(x, \xi) = e^{-b\xi} g(\zeta, \xi)$ , on voit que la fonction  $g$  satisfait une "équation d'onde avec masse imaginaire pure" [34] :

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \xi} g(\zeta, \xi) = c g(\zeta, \xi)$$

dont une solution pertinente est la fonction de Bessel ci-dessus.

2 - A priori, cette expression n'est pertinente que si  $\sqrt{c\xi/\zeta} \ll 1$ . En effet, elle résulte de la résolution de l'équation (5.1.5) où intervient l'approximation  $\tilde{P}_{gg}(n) \sim \frac{c}{n-1} - b + o(n-1)$ , qui n'est valable que lorsque  $n \rightarrow 1$ . Le "col en  $n$ ", donné par l'expression  $1 + \sqrt{c\xi/\zeta}$  doit donc être voisin de 1. On constate néanmoins que ce comportement lorsque  $\sqrt{c\xi/\zeta} \geq 1$  est,

au moins qualitativement, similaire à celui de la solution exacte.

3 - Un mot encore sur la validité physique de ce résultat. On constate que, à  $\xi$  i.e.  $Q^2$  fixés, celui-ci croît avec  $\zeta$  plus rapidement que toute puissance de  $\zeta$  du fait du facteur exponentiel. Ceci contredit une conséquence de l'unitarité imposée par la mécanique quantique, qui contraint  $G_g(x, \xi)$  à ne pas croître plus vite que  $\zeta^2$ . Cette contradiction est due au fait que l'équation étudiée est obtenue dans le régime  $\alpha(\bar{Q}^2)\zeta \ll 1$ , où sont négligés des termes associés à des mécanismes physiques qui deviennent essentiels lorsque  $\zeta \rightarrow \infty$  : les partons portant une fraction  $x$  infime de l'énergie-impulsion du proton ont une densité si élevée qu'ils ne sont pas quasi libres et indépendants, mais au contraire interagissent, et ces interactions limitent leurs densités. Le phénomène non linéaire qui conduirait à cette saturation est ignoré ici.

### 5.1.3 Application du théorème de la phase stationnaire complexe.

L'application du théorème 4.1 à la fonction  $f(t) = t + \frac{1}{t}$ , pour peu que la condition que  $\Omega$  ne contienne pas le point singulier 0, donne tout de suite la contribution du point de phase stationnaire  $t = 1$ , qui correspond à la valeur critique 2. On a ainsi démontré (5.1.9). Ceci permet donc de retrouver l'approximation de la fonction de répartition.

Bien sûr, cet exemple est élémentaire. D'autres exemples de théorie des champs, beaucoup plus compliqués, tiennent compte de la méthode du col pour leur résolution. Ceci est par exemple à rapprocher des résultats de G. Benarous pour l'évaluation des intégrales de Feynmann [13].

## Chapitre 6

# Espace de Fréchet des symboles.

Dans cette partie, nous présentons le calcul symbolique classique, tel qu'il a été introduit par Hörmander [47]. Nous notons indifféremment par  $\hat{u}$  ou par  $\mathcal{F}(u)$  la transformée de Fourier d'un élément  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ . Les symboles ont été introduits pour généraliser les opérateurs différentiels ordinaires, en s'appuyant sur la relation

$$i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \mathcal{F}(\partial_x^\alpha u)(\xi)$$

qui se réécrit, pour  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  :

$$\partial_x^\alpha u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Dans cette formulation, par exemple, nous vérifions que, pour  $P = a_0(x, t) \partial_t + \sum_{j=1}^{j=d} a_j(x, t) \partial_{x_j}$ , (opérateur introduit dans le chapitre 2 dans le cas  $m = 1$ ) on obtient

$$Pu(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} [ia_0(x, t)\tau + i \sum_{j=1}^{j=d} \xi_j a_j(x, t)] \hat{u}(\xi, \tau) e^{ix \cdot \xi + it \cdot \tau} d\xi d\tau.$$

En écrivant  $\hat{u}(\xi, \tau) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} u(y, s) dy ds$  et en remplaçant dans l'intégrale précédente (qui est une intégrale convergente,  $Pu(x, t)$  s'écrit formellement

$$Pu(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^{2d+2}} a(x, t, \xi, \tau) e^{i(x-y)\xi + i(t-s)\tau} u(y, s) dy ds d\xi d\tau, \quad (6.0.1)$$

où  $a(x, t, \xi, \tau) = [ia_0(x, t)\tau + i \sum_{j=1}^{j=d} \xi_j a_j(x, t)]$ . En effet, cette intégrale n'est pas l'intégrale d'une fonction de  $L^1(\mathbb{R}^{2d+2})$ .

Dans l'exercice 2.2, cette fonction avait été introduite et notée  $l(x, t, \xi, \tau)$ , et sa variété nulle correspondait au lieu des points  $(x, t, \nabla_x \phi, \partial_t \phi)$ ,  $\phi$  phase solution de l'équation eikonale.

Nous effectuons le changement de variable  $\xi = \lambda \Xi$ ,  $\tau = \lambda \sigma$ , et nous vérifions que nous nous ramenons à des intégrales du type de celles étudiées dans le chapitre 4, où le paramètre asymptotique est  $\lambda$ . Dans le chapitre 7, nous considérerons des intégrales de la forme

$$I_{a, \phi}(u) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^N} dy d\theta e^{i\phi(x, y, \theta)} a(x, y, \theta) u(y) \quad (6.0.2)$$

qui sont la généralisation de la représentation (6.0.1) des opérateurs différentiels, la variable  $\theta$  remplaçant  $(\xi, \tau)$  et la variable  $y$  remplaçant  $(y, s)$ .

Nous voulons pouvoir appliquer le théorème de la phase non stationnaire, donc nous souhaitons pouvoir différentier autant de fois que nous le voulons en  $y$  et en  $\theta$  dans les intégrales définies par (6.0.2). De plus, nous voulons que le comportement de cette intégrale soit identique à celui de (6.0.1), donc une dérivation par rapport à la variable  $\theta$  de la fonction  $a(x, y, \theta)$ , analogue de  $a(x, t, \xi, \tau)$  dans (6.0.1), doit entraîner une diminution de 1 de la puissance de  $\theta$ ,

alors qu'une dérivation en  $y$  ou en  $x$  ne doit rien changer dans le comportement en  $|\theta|$  pour  $\theta$  grand.

En nous appuyant sur ces remarques, nous définissons un ensemble de fonctions  $C^\infty$ , possédant des propriétés de décroissance dans la variable  $\theta$ , que nous appelons symboles. Dans la présentation originelle de L. Hörmander, les intégrales oscillantes du type (6.0.2) ont été étudiées en premier. Les symboles forment une algèbre, et nous verrons dans le chapitre suivant que cette algèbre est associée à une algèbre d'opérateurs, appelés opérateurs pseudo-différentiels, qui contient les opérateurs différentiels à coefficients variables usuels. Nous généralisons dans le chapitre 9 cette algèbre d'opérateurs en ce que L. Hörmander appelle les opérateurs intégraux de Fourier, et qui sont l'un des outils essentiels que ce cours souhaite présenter.

Nous étudions dans ce chapitre les propriétés topologiques de cette algèbre de symboles, nous réservons au chapitre 8 le fait de définir le calcul symbolique (produit de deux symboles compatible avec la composition des opérateurs associés). Notons que la motivation historique d'introduction des symboles n'est pas celle employée ici, les symboles ont été créés pour transcrire aisément sur des fonctions les règles de calculs sur les opérateurs différentiels. Nous privilégions cette présentation parce qu'elle est la suite logique des théorèmes de la phase stationnaire.

Nous démontrerons l'analogue du lemme de Borel (Théorème 1.1) pour des symboles de degré d'homogénéité (ou d'ordre) décroissant. Cette partie est inspirée presque totalement du cours donné par J. Sjostrand à l'université d'Orsay en 1987-1988 [42].

## 6.1 Définition

On se place sur un ouvert  $X \subset \mathbb{R}^d$ , et on définit l'espace des symboles d'ordre  $m$  sur  $X \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  et de poids  $\rho, \delta$  par

$$\begin{aligned} S_{\rho, \delta}^m(X \times \mathbb{R}^d) = \\ \{a(x, \theta) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^d) \forall K \subset\subset X, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \exists C(m, K, \alpha, \beta, a) \\ \sup_{(x, \theta) \in K \times \mathbb{R}^d, |\theta| \geq 1} |\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a(x, \theta)| \leq C(K, \alpha, \beta, a)(1 + |\theta|)^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|}\} \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

De tels espaces sont non vides : en effet, considérant  $a(x, \xi) = \xi_1^m$ , on vérifie que

$$|\alpha| \geq 1, |\beta'| \geq 1 \Rightarrow \partial_\xi^{\beta'} \partial_x^\alpha a = 0.$$

Comme  $\partial_{\xi_1}^{\beta_1} a = \frac{m!}{\beta_1!} \xi_1^{m - \beta_1}$ , on trouve que, dans les cas où cette dérivée est non nulle ( $\beta_1 \leq m$ )

$$(1 + |\xi|)^{-m + \rho|\beta| - \delta|\alpha|} |\partial_{\xi_1}^{\beta_1} \partial_x^\alpha a| \leq \frac{m!}{\beta_1!} |\xi_1|^{m - \beta_1} (1 + |\xi_1|)^{-m + \rho\beta_1},$$

qui est, pour tout  $\rho$  et pour tout  $\delta$ , majoré par  $\frac{m!}{\beta_1!}$ . Lorsque  $\alpha \neq 0$  ou  $\beta' \neq 0$ , l'inégalité est trivialement vérifiée.

On définit aussi l'espace  $S^{-\infty}$  des symboles qui décroissent plus vite que toute puissance inverse de  $\theta$  :

$$S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^d) = \{a, \sup_K |\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a| \leq C(a, \alpha, \beta, K, M)(1 + |\theta|)^{-M}\}.$$

Notons que la définition des symboles donnée dans ce chapitre, et que nous utiliserons désormais, est plus générale que la définition du préambule, puisque nous autorisons  $\rho \leq 1$  (c'est-à-dire une perte de puissances de  $\theta$  moindre que 1 à chaque dérivation) ainsi que  $\delta \geq 0$  (c'est-à-dire un gain possible de puissances de  $\theta$  lorsque l'on dérive par rapport à  $x$ ). Des exemples de tels symboles sont utilisés dans ce cours ; en particulier on pourra rencontrer  $(\rho, \delta) = (\frac{1}{3}, 0)$  et  $(\rho, \delta) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ .

Donnons tout de suite un exemple d'un symbole de  $S_{1,0}^0$ , qui nous sera utile par la suite : le symbole troncature. Considérons une fonction  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , telle que  $\chi(\theta) = 1$  pour  $|\theta| \leq 1/2$  et  $\chi(\theta) = 0$  pour  $|\theta| \geq 1$ .

**Le symbole  $\chi_j(\theta) = \chi(\frac{\theta}{j})$  est borné dans  $S_{1,0}^1(X \times \mathbb{R}^d)$ .**

En effet, lorsque l'on calcule  $\partial_\theta^\beta \chi_j(\theta)$ , on trouve

$$\partial_\theta^\beta \chi_j = j^{-|\beta|} (\partial_\theta^\beta \chi) \left( \frac{\theta}{j} \right)$$

La fonction  $\chi$  est  $C_0^\infty$  donc il existe  $c_\beta$  tel que  $(\partial_\theta^\beta \chi) \leq c_\beta$ . On vérifie que, pour  $|\theta| \geq 2j$ ,  $(1 + \theta)^{|\beta|} \partial_\theta^\beta \chi_j = 0$  et est majorée par  $(1 + 2j)^{|\beta|} j^{-|\beta|}$  pour  $|\theta| \leq 2j$ , donc par  $3^{|\beta|}$ . On a donc

$$\partial_\theta^\beta \chi_j \leq 3^{|\beta|} c_\beta (1 + |\theta|)^{-|\beta|}$$

ce qui prouve l'appartenance de  $\chi_j$  à  $S_{1,0}^0$ .

## 6.2 Propriétés fondamentales

Il est aisé de vérifier que le produit d'un élément de  $S_{\rho,\delta}^m$  et de  $S_{\rho,\delta}^{m_1}$  est dans  $S_{\rho,\delta}^{m+m_1}$ . Par les formules de Leibniz, en effet, on a

$$\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta (ab)(x, \theta) = \sum_{\alpha', \beta', |\alpha'| \leq |\alpha|, |\beta'| \leq |\beta|} C_{\alpha,\beta}^{\alpha',\beta'} (\partial_x^{\alpha'} \partial_\theta^{\beta'} a) (\partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\theta^{\beta-\beta'} b).$$

On en déduit

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta (ab)(x, \theta)|_{x \in K, \theta \in \mathbb{R}^d} \leq \sum_{\alpha', \beta', |\alpha'| \leq |\alpha|, |\beta'| \leq |\beta|} C_{\alpha,\beta}^{\alpha',\beta'} N_{\alpha',\beta',K}(a) N_{\alpha-\alpha',\beta-\beta',K}(b).$$

et donc

$$N_{\alpha,\beta,K}(ab) \leq \sum_{\alpha' \leq \alpha, \beta' \leq \beta} C_{\alpha,\beta}^{\alpha',\beta'} (\sup_{\alpha' \leq \alpha, \beta' \leq \beta} N_{\alpha',\beta',K}(a)) (\sup_{\alpha' \leq \alpha, \beta' \leq \beta} N_{\alpha',\beta',K}(b)).$$

Des propriétés classiques et importantes des symboles sont énoncées dans les deux propositions qui suivent :

**Proposition 6.1** • Si  $a \in S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^N)$ , alors, pour tout  $m' \geq m$ ,  $\rho' \leq \rho$  et tout  $\delta' \geq \delta$ ,  $a \in S_{\rho',\delta'}^{m'}$ .

• Lorsque  $K$  est fixé et  $a \in S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^N)$ , la plus petite constante  $C(m, K, \alpha, \beta, a)$  satisfaisant à la définition 6.1.3 est notée  $N_{\alpha,\beta,K}^m(a)$ . On définit ainsi une famille de semi-normes  $N_{\alpha,\beta,K}^m$  sur  $S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^d)$ . L'espace des symboles muni de cette famille de semi-normes est un espace de Fréchet.

• Pour cette famille de semi-normes, l'espace  $S^{-\infty}$  est dense, pour la topologie de  $S_{\rho',\delta'}^{m'}$ , dans  $S_{\rho,\delta}^m$  pour  $m' > m$ .

Le premier alinéa de la proposition implique :

$$a \in S_{\rho,\delta}^m, b \in S_{\rho',\delta'}^{m_1} \Rightarrow ab \in S_{\min(\rho,\rho'), \max(\delta,\delta')}^{m+m_1}.$$

Le dernier alinéa de la proposition 6.1 est une conséquence de

**Proposition 6.2** Si  $(a_j)_{j \geq 1}$  est une suite bornée dans  $S_{\rho,\delta}^m$ , qui converge ponctuellement vers  $a(x, \theta)$ , la limite  $a$  est dans  $S_{\rho,\delta}^m$  et la suite  $(a_j)$  converge au sens des symboles dans  $S_{\rho,\delta}^{m'}$  pour  $m' > m$ .

**Preuve de la proposition 6.2** Nous désignons par  $C_{\alpha,\beta,K}$  le majorant uniforme de toutes les normes des  $\partial_\theta^\beta \partial_x^\alpha a_j$  sur  $K$ , qui est indépendant de  $j$ .

Grâce aux inégalités permettant de contrôler  $\partial_x f$  en fonction de  $\partial_{x^2}^2 f$  et de  $f$ , on vérifie que, sur tout compact  $K$

$$|\partial_x(a_j - a_l)| \leq C_1(K) \|a_j - a_l\|_\infty + C_2(K) (\|a_j - a_l\|_\infty \|\partial_{x^2}^2(a_j - a_l)\|_\infty)^{\frac{1}{2}}.$$

On sait que la suite  $a_j$  est bornée dans  $S^m$ , donc en particulier, sur un compact, on sait que

$$\|\partial_{x^2}^2(a_j - a_l)\|_\infty \leq 2(1 + |\theta|)^{m+2\delta} C_{2,0,K}.$$

Nous nous plaçons sur un compact  $\mathcal{K}$  en  $\theta$  pour appliquer le résultat précédent, donc

$$|\partial_x(a_j - a_l)| \leq C_1(K) \|a_j - a_l\|_\infty + C_2(K) C_{2,0,K}^{\frac{1}{2}} (\|a_j - a_l\|_\infty)^{\frac{1}{2}}.$$

Il y a majoration uniforme de la norme infini de la suite sur le compact  $K \times \mathcal{K}$ , convergence ponctuelle en tout point, donc convergence uniforme sur le compact  $K \times \mathcal{K}$ . On en conclut que la suite  $\partial_x a_j$  est une suite de Cauchy sur ce compact, uniformément bornée, donc elle converge et la limite est uniforme.

Par récurrence sur la longueur  $|\alpha| + |\beta|$ , on démontre que la suite  $\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a_j$  est de Cauchy et uniformément convergente sur tout compact de la forme  $K \times \mathcal{K}$ . Malheureusement, on ne peut pas vérifier la convergence uniforme sur  $K \times \mathbb{R}^d$ , car ce n'est pas un compact. En revanche, on trouve que la limite  $a$  est dans  $C^\infty(X \times \mathbb{R}^d)$ , et comme on a

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a_j| \leq C_{\alpha,\beta,K} (1 + |\theta|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|},$$

la convergence simple prouve que la limite simple est dans  $S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^d)$ . On introduit  $k_j^{\alpha,\beta}(x, \theta) = \partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta (a_j - a)(x, \theta) (1 + |\theta|)^{-m'+\rho|\beta|-\delta|\alpha|}$ . On remarque que

$$|k_j^{\alpha,\beta}(x, \theta)| \leq (1 + |\theta|)^{m-m'} 2C_{\alpha,\beta,K}.$$

Définissons  $R_\varepsilon^{\alpha,\beta,K} > 0$  tel que, pour  $|\theta| \geq R_\varepsilon^{\alpha,\beta,K}$ , on ait  $(1 + |\theta|)^{m-m'} 2C_{\alpha,\beta,K} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Sur le compact  $K \times B(0, R_\varepsilon^{\alpha,\beta,K})$ , la suite  $a_j$  converge uniformément dans  $C^\infty$  vers  $a$ . La suite  $\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a_j$  converge donc sur ce compact vers  $\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a$ , donc il existe  $j(\varepsilon, \alpha, \beta, K)$  tel que

$$j \geq j(\varepsilon, \alpha, \beta, K) \Rightarrow k_j^{\alpha,\beta}(x, \theta) \leq \frac{\varepsilon}{2}, (x, \theta) \in K \times B(0, R_\varepsilon^{\alpha,\beta,K}).$$

La suite  $k_j(x, \theta)$  converge uniformément sur  $K \times \mathbb{R}^d$  vers 0, ce qui achève la preuve de la proposition 6.2.

On utilise une troncature en  $\theta$  pour se ramener à des symboles à support compact. La preuve du dernier alinéa de la proposition 6.1 s'obtient par construction, pour  $a \in S_{\rho,\delta}^m$ , d'une suite de  $S^{-\infty}$  convergeant vers  $a$ . Comme  $\chi_j \in S_{1,0}^0 \cap S^{-\infty}$ , la suite de symboles  $a_j = a\chi_j$  est bornée au sens de la topologie de  $S_{\rho,\delta}^m$ , est dans  $S^{-\infty}$  et converge ponctuellement vers  $a$ . On utilise le troisième alinéa de la proposition 6.2 pour obtenir que  $a_j$  converge vers  $a$  pour la topologie de  $S_{\rho,\delta}^{m'}$ ,  $m' > m$ . Ceci montre la densité de  $S^{-\infty}$  dans  $S_{\rho,\delta}^m$  pour la topologie de  $S_{\rho,\delta}^{m'}$  pour  $m' > m$ . Réciproquement, si une suite  $a_j$  vérifie les hypothèses de la proposition 6.2, on en déduit qu'il y a convergence sur tout compact de  $\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a_j$  vers  $\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a$ . La proposition 6.2 est démontrée.

**Proposition 6.3** Soit  $a_j \in S_{\rho,\delta}^{m_j}(X \times \mathbb{R}^N)$ . On suppose que la suite décroissante  $m_j$  tend vers  $-\infty$ . Alors il existe  $a \in S_{\rho,\delta}^{m_0}$ , unique modulo  $S^{-\infty}$ , tel que

$$a - \sum_{j < k} a_j \in S_{\rho,\delta}^{m_k}.$$



**Preuve de la proposition 6.3** On démontre l'unicité. Soit  $a'$  un autre symbole. Alors  $a - a'$  est dans  $S^{m_k}$  pour tout  $k$ . Il est donc dans  $S^{-N}$  pour tout  $N$ , ce qui justifie  $a - a' \in S^{-\infty}$ .

L'existence de  $a$  provient d'un raisonnement analogue à celui employé pour la démonstration du théorème de Borel (Théorème 1.1) (il existe une fonction  $C^\infty$  dont la série de Taylor quelconque est donnée). Nous construisons, pour  $L_j \geq 1$  suite strictement croissante tendant vers  $+\infty$  le symbole

$$\tilde{a}_j(x, \theta) = (1 - \chi(\frac{\theta}{L_j}))a_j(x, \theta).$$

Si  $\theta$  est donné, alors pour  $|\frac{\theta}{L_j}| \leq \frac{1}{2}$ ,  $\tilde{a}_j = 0$ . Donc si  $j$  est tel que  $L_j \geq 2|\theta|$ , alors  $\tilde{a}_j(x, \theta) = 0$ . On peut donc définir, pour tout  $(x, \theta)$ , la somme des  $\tilde{a}_j$ , qui est localement finie. La fonction obtenue  $a(x, \theta)$  est une fonction  $C^\infty(X \times \mathbb{R}^d)$ .

On note dans ce paragraphe  $\chi_j$  la fonction (qui a été écrite ci-dessus  $\chi_{L_j}$ ) :

$$\chi_j : \theta \rightarrow \chi(\frac{\theta}{L_j})$$

est un symbole de  $S_{1,0}^0(\mathbb{R}^d)$ . Le symbole  $\tilde{a}_j$  est dans  $S_{\rho,\delta}^{m_j}$ , donc dans  $S_{\rho,\delta}^{m_j+1}$ . On peut alors choisir la suite  $L_j$  (comme dans la preuve du Théorème 1.1) tel que, pour tout  $j \leq |\alpha| + |\beta|$ ,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta \tilde{a}_j(x, \theta)| \leq 2^{-j} (1 + |\theta|)^{1+m_j-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}. \quad (6.2.4)$$

En effet, nous vérifions que  $|\tilde{a}_0| \leq |a_0|$  sur le support de  $1 - \chi(L_0\theta)$ , qui est inclus dans  $\theta \geq \frac{1}{2}L_0$ . Donc, sur le support de  $\tilde{a}_0$ ,

$$(1 + |\theta|)^{-1-m_0} |\tilde{a}_0| \leq \sup_{|\theta| \geq \frac{1}{2}L_0} N_{0,0,K}(a_0) (1 + |\theta|)^{-1} \leq \frac{2N_{0,0,K}(a_0)}{2 + L_0}.$$

Le choix de  $L_0$  est  $L_0 \geq 2N_{0,0,K}$ .

On procède pour la suite par un raisonnement par récurrence. On suppose que les  $L_j$  ont été choisis de sorte que, pour  $0 \leq j \leq n-1$ , on ait

$$|\alpha| + |\beta| \leq l \leq n-1 \Rightarrow N_{\alpha,\beta,K}^{m_l+1}(\tilde{a}_l) \leq 2^{-l}.$$

Soit  $j = n$  et on étudie  $\tilde{a}_j$ . On vérifie que

$$b = \partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta (\tilde{a}_j) = \partial_x^\alpha \left[ \sum_{\beta' \leq \beta} C_{\beta,\beta'} \partial_\theta^{\beta'} a_j L_j^{-|\beta|+|\beta'|} (\partial_\theta^{\beta-\beta'} \chi) \left( \frac{\theta}{L_j} \right) \right].$$

Comme  $N_{\alpha,\beta,K}^{m_j+1}(\tilde{a}_j) = \max |b(x, \theta)| (1 + |\theta|)^{-m_j-1-\delta|\alpha|+\rho|\beta|}$ , on utilise

$$\begin{aligned} & b(x, \theta) (1 + |\theta|)^{-m_j-1-\delta|\alpha|+\rho|\beta|} \\ &= (1 + |\theta|)^{-1} \sum_{\beta' \leq \beta} C_{\beta,\beta'} [(1 + |\theta|)^{-m_j-\delta|\alpha|+\rho|\beta'|} \partial_x^\alpha \partial_\theta^{\beta'} a_j] (1 + |\theta|)^{\rho(|\beta|-|\beta'|)} L_j^{-|\beta|+|\beta'|} (\partial_\theta^{\beta-\beta'} \chi) \left( \frac{\theta}{L_j} \right). \end{aligned}$$

On désigne par  $D_{j,\beta}$  la constante  $(\sum_{\beta' \leq \beta} |C_{\beta,\beta'}|) \max_{\alpha \leq \beta} \|\partial_\theta^\alpha \chi\| \max N_{\alpha,\beta',K}^{m_j}(a_j)$ . De l'identité

$$b(x, \theta) (1 + |\theta|)^{-m_j-1-\delta|\alpha|+\rho|\beta|} = 0 \text{ sur } \chi = 1$$

on déduit l'inégalité

$$|b(x, \theta) (1 + |\theta|)^{-m_j-1-\delta|\alpha|+\rho|\beta|}| \leq \frac{2}{L_j} D_{j,\beta}.$$

On prend alors  $L_j \geq 2^{j+1}D_{j,\beta}$ , ce qui donne l'inégalité (6.2.4). Notons ici que le contrôle de  $\tilde{a}_j$  dans  $S_{\rho,\delta}^{m_j+1}$  est un contrôle en  $2^{-j}$ . Par exemple, on remarque que la suite  $1 - \chi_j \in S_{1,0}^0$  tend vers 0 dans  $S_{1,0}^1$ .

On considère alors  $\alpha, \beta, k, K$  donnés. Pour  $p \geq N \geq |\alpha| + |\beta|$ , on a

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta \tilde{a}_p| \leq 2^{-p}(1 + |\theta|)^{1+m_p-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$$

donc a fortiori, puisque  $m_p \leq m_N$  et que  $a - \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{a}_p = \sum_{p=N}^{\infty} \tilde{a}_p$

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta (a - \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{a}_p)| \leq (1 + |\theta|)^{1+m_N-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}.$$

On choisit  $N$  tel que  $m_{k+1} \geq m_N + 1$  et  $N \geq |\alpha| + |\beta|$ . Ceci est possible car la suite  $m_k$  tend vers  $-\infty$ . Ensuite, on écrit  $c_{k+1} = a - \sum_{j \leq k} a_j$  et on vérifie

$$c_{k+1}(x, \theta) = \sum_{k+1 \leq j \leq N-1} \tilde{a}_j + (a - \sum_{j \leq N-1} \tilde{a}_j) + \sum_{j \leq k} (\tilde{a}_j - a_j).$$

On utilise le fait que  $\sum_{j \leq k} (a_j - \tilde{a}_j)$  est dans  $S^{-\infty}$ , l'inégalité

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta (a - \sum_{p=0}^{N_1} \tilde{a}_p)| \leq (1 + |\theta|)^{1+m_N-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$$

que nous venons de démontrer et l'inégalité (obtenue car  $\tilde{a}_j$  est le produit de  $a_j \in S_{\rho,\delta}^{m_j}$  et de  $(1 - \chi_j) \in S_{1,0}^0 \subset S_{\rho,\delta}^0$ )

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta \tilde{a}_j(x, \theta)| \leq D(\alpha, \beta)(1 + |\theta|)^{m_j-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}.$$

On a alors l'inégalité

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta c_{k+1}(x, \theta)| \leq ND(\alpha, \beta)(1 + |\theta|)^{m_{k+1}-\rho|\beta|+\delta|\alpha|} + (1 + |\theta|)^{m_{k+1}-\rho|\beta|+\delta|\alpha|} + C_1(1 + |\theta|)^{m_{k+1}-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$$

et cette majoration prouve l'appartenance de  $c_{k+1}$  à  $S_{\rho,\delta}^{m_{k+1}}$ .

Nous avons donc démontré la convergence au sens des normes de  $S^{m_0}$  de  $\sum_{j \leq k} a_j$ . Ceci achève la preuve de la Proposition 6.3.

Remarque : on voit ici qu'il n'y a pas unicité, puisque le choix de deux fonctions  $\chi$  ou de deux suites  $L_j$  pour la même fonction  $\chi$  conduit à deux sommes  $\sum \tilde{a}_j$  différentes.

**Proposition 6.4** *On se donne une suite  $a_j$  dans  $S_{\rho,\delta}^{m_j}$  et on suppose que  $m_j$  décroît vers  $-\infty$ . On suppose qu'il existe  $a$  tel que, pour tout compact  $K$ , tout multi indice, il existe  $M_{\alpha,\beta}$  et  $C_{\alpha,\beta,K}$  tels que*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a_j| \leq C_{\alpha,\beta,K}(1 + |\theta|)^{M_{\alpha,\beta}}.$$

*On suppose qu'il existe une suite  $m'_k$  qui tend vers  $-\infty$  telle que*

$$|a(x, \theta) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j(x, \theta)| \leq C_{K,k}(1 + |\theta|)^{m'_k}.$$

*Alors  $a = \sum_{j=0}^{j=+\infty} a_j$ , modulo  $S^{-\infty}$ .*

**Preuve de la proposition 6.4.** Par la proposition 6.3,  $a' = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$  existe et est dans  $S_{\rho,\delta}^{m_0}$ . Alors  $b = a - a'$  vérifie

$$b = a - \sum_0^{k-1} a_j + \sum_0^{k-1} a_j - a'.$$

Le premier terme est majoré par  $C_{K,k}(1 + |\theta|)^{m'_k}$  par l'hypothèse de la proposition et le deuxième terme l'est par  $C_{K,k,0,0}(1 + |\theta|)^{m_k}$  par le résultat de la proposition 6.3.

Pour tout  $M$  entier positif, il existe  $k$  tel que  $m_k$  et  $m'_k$  soient tous les deux plus petits que  $-M$ . Il existe donc  $C_{K,M}$  tel que

$$|b| \leq C_{K,M}(1 + |\theta|)^{-M}.$$

Rappelons l'inégalité suivante pour  $|\alpha| + |\beta| = 1$  :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta b(x, \theta)| \leq C(K)(\sup|b|)^{\frac{1}{2}}((\sup|\partial_x^{2\alpha} \partial_\theta^{2\beta} b|)^{\frac{1}{2}} + (\sup|b|)^{\frac{1}{2}}). \quad (6.2.5)$$

On se place dans le cas  $|\alpha| + |\beta| = 2$ , pour généraliser cette inégalité. On obtient

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta b| \leq C_{|\alpha+|\beta|}(K)[\max|b| + \max|b|^{\frac{1}{2}}] \times \max_{|\gamma_1|+|\gamma_2|=|\alpha+|\beta|} \partial_{x^{\gamma_1} \theta^{\gamma_2}}^{2(\gamma_2+\gamma_1)} b|^{\frac{1}{2}}].$$

En effet on démontre l'inégalité suivante :

$$\|f'''\|_\infty \leq C_1(K)\|f\|_\infty + C_2(K)\|f^{(4)}\|_\infty.$$

Si on restreint  $f$  à  $[-a, a]$ ,  $a > 0$ , alors il existe  $\theta_1, \theta_2 \in ]0, 1[$  tels que

$$f'''(0) = \frac{f(x) + f(-x) - 2f(0)}{x^2} - \frac{x^2}{24}(f^{(4)}(\theta_1 x) + f^{(4)}(-\theta_2 x)).$$

Si  $f^{(iv)} = 0$ , on trouve  $|f''(0)| \leq \frac{4}{x^2}\|f\|_\infty$ . Dans le cas contraire, on a

$$|f''(0)| \leq \frac{4}{x^2}\|f\|_\infty + \frac{x^2}{12}\|f^{(iv)}\|_\infty$$

et on optimise ce majorant pour  $|x| \leq a$ . Dans le cas où  $4\sqrt{3}(\frac{\|f\|_\infty}{\|f^{(4)}\|_\infty})^{\frac{1}{2}} > a^2$ , on trouve recherchée :

$$|f''(0)| \leq \frac{8}{a^2}\|f\|_\infty + \frac{2}{\sqrt{3}}\|f\|_\infty^{\frac{1}{2}}\|f^{(4)}\|_\infty^{\frac{1}{2}}.$$

Cette inégalité est moins bonne lorsque  $a$  est petit. Il faut alors étudier ce cas, c'est-à-dire lorsque le point où on calcule un majorant de  $f'''$  se rapproche du bord du compact. On calcule  $5f(x) - 4f(2x) + f(3x)$ , ce qui permet d'obtenir  $f''(0)$  en fonction de  $f$  et  $f^{(4)}$ .

Pour la majoration d'une dérivée croisée, on écrit

$$\begin{aligned} \|\partial_{x\theta}^2 f\| &\leq C_1[\|\partial_x f\| + \|\partial_x f\|^{\frac{1}{2}}\|\partial_{x\theta^2}^3 f\|^{\frac{1}{2}}] \\ \|\partial_{x\theta^2}^3 f\| &\leq C_1[\|\partial_{\theta^2}^2 f\| + \|\partial_{\theta^2}^2 f\|^{\frac{1}{2}}\|\partial_{x^2\theta^2}^4 f\|^{\frac{1}{2}}]. \end{aligned}$$

On utilise les majorants

$$\|\partial_x f\| \leq C_1[\|f\| + \|f\|^{\frac{1}{2}}\|\partial_{x^2}^2 f\|^{\frac{1}{2}}]$$

et les majorants démontrés dans le cas d'une variable (la constante  $C_2$  est celle adaptée à l'inégalité pour la dérivée seconde avec le compact en  $x$  et en  $\theta$ )

$$\begin{aligned} \|\partial_{x^2}^2 f\| &\leq C_2[\|f\| + \|f\|^{\frac{1}{2}}\|\partial_{x^4}^4 f\|^{\frac{1}{2}}] \\ \|\partial_{\theta^2}^2 f\| &\leq C_2[\|f\| + \|f\|^{\frac{1}{2}}\|\partial_{\theta^4}^4 f\|^{\frac{1}{2}}]. \end{aligned}$$

On a une majoration par une fonction de la forme  $M(\|f\|, \|\partial_{x^4}^4 f\|, \|\partial_{\theta^4}^4 f\|, \|\partial_{x^2\theta^2}^4 f\|)$  (qui est compliquée), elle même majorée par

$$C_3[\|f\| + \|f\|^{\frac{1}{2}} \max_{|\alpha|+|\beta|=2} \|\partial_{x^{2\alpha}}^{2\alpha} \partial_{\theta^{2\beta}}^{2\beta} f\|^{\frac{1}{2}}].$$

Ce raisonnement peut se poursuivre pour  $|\alpha| + |\beta| = n \in \mathbb{N}$  par récurrence sur  $n$ . Le symbole  $b$  est donc dans  $S^{-\infty}$ . La proposition 6.4 est démontrée.

Dans le chapitre suivant, nous introduisons l'outil qui permettra de construire l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels associé à l'algèbre des symboles. Nous aurions d'ores et déjà tous les outils qui permettraient de la définir formellement, mais nous choisissons d'introduire la loi de composition grâce à la composition des opérateurs associés. Les symboles de  $S_{1,0}^m(X \times \mathbb{R}^d)$  sont les symboles qui ressemblent le plus aux polynômes en  $\xi$  à coefficients  $C^\infty$  en  $x \in X$ , qui sont les symboles associés aux opérateurs différentiels. Nous noterons désormais  $S_{1,0}^m(X \times \mathbb{R}^d)$  en omettant l'indice  $(1, 0)$ , soit  $S^m(X \times \mathbb{R}^d)$ <sup>1</sup>.

### 6.3 Le problème modèle de Friedlander

Dans cette section, nous commençons l'étude d'un problème qui nous servira de fil conducteur dans cette approche de l'analyse microlocale ; il s'agit du problème modèle de Friedlander. Inspiré de l'article de 1977 [41], il permet une étude, dans un cas simple, d'un problème de rayon tangent à un bord, dont le traitement formel ressemble à celui de la caustique introduite dans le chapitre 10. Les notations introduites ici seront donc suivies tout au long de l'étude, en particulier dans les chapitres 7,8, 10. L'introduction de l'opérateur défini ci-dessous dans (6.3.6) est quelque peu arbitraire, nous verrons dans la section 11.4 quelle en est la justification. Nous l'introduisons dans ce chapitre pour montrer que certains problèmes simples d'équations aux dérivées partielles font intervenir de manière naturelle des symboles qui ne sont pas usuels, essentiellement des symboles de  $S_{1/3,2/3}^0$ .

On se donne l'opérateur sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$

$$Pu(x, y_1, y_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1+x) \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}. \quad (6.3.6)$$

On introduit, pour  $\theta_1 \in \mathbb{C}$ ,  $\Im \theta_1 < 0$ , et  $\theta_2 \in \mathbb{R}$ , les réels  $\lambda$ ,  $Z$ ,  $Z_0$ ,  $\xi$ ,  $\xi_0$  par

$$\theta_1 = |\theta_1| e^{i(\frac{3\pi}{2} + \lambda)}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$$

ainsi

$$\theta_1^{\frac{2}{3}} = -|\theta_1|^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2i}{3}\lambda}, \quad \theta_1^{-\frac{4}{3}} = |\theta_1|^{-\frac{4}{3}} e^{-\frac{4i}{3}\lambda}.$$

On introduit

$$\begin{aligned} \xi &= \theta_1^{-\frac{4}{3}} \theta_2^2 - (1+x) \theta_1^{\frac{2}{3}} \\ \xi_0 &= \theta_1^{-\frac{4}{3}} \theta_2^2 - \theta_1^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

On note désormais

$$\begin{aligned} |\theta| &= (\theta_1^2 + \theta_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ Z &= |\theta_1|^{\frac{2}{3}} - (1+x) \theta_2^2 |\theta_1|^{-\frac{4}{3}} \\ Z_0 &= |\theta_1|^{\frac{2}{3}} - \theta_2^2 |\theta_1|^{-\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

On résout

<sup>1</sup>Ce n'est pas la notation usuelle, on réserve souvent la notation sans indice aux symboles classiques

$$\begin{aligned}
Pu &= 0, u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2) \\
u(0, y) &= f(y), f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2) \\
u(x, y_1, y_2) &= 0, y_1 < 0.
\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

1) Démontrer que la solution de (6.3.7) s'écrit, pour  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$u(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{K}_x(\theta_1, \theta_2) \hat{f}(\theta_1, \theta_2) e^{iy_1\theta_1 + iy_2\theta_2} d\theta_1 d\theta_2$$

au sens des intégrales de Fourier, où  $K_x$ , solution de

$$\begin{aligned}
PK_x &= 0 \\
K_0(y) &= \delta_{y=0} \\
K_x(y_1, y_2) &= 0, y_1 < 0.
\end{aligned} \tag{6.3.8}$$

est supposée admettre une transformée de Fourier, égale dans  $\Im\theta_1 < 0$  à<sup>2</sup>

$$\hat{K}_x(\theta_1, \theta_2) = \frac{Ai(\xi)}{Ai(\xi_0)}.$$

2) a) Démontrer que la fonction  $\Phi$  définie par l'égalité

$$u^{\frac{1}{4}} Ai(u) \exp\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) = u^{\frac{1}{4}} \Phi(u)$$

admet, ainsi que son inverse, un développement asymptotique pour  $u \in \mathbb{R}_+$  grand, en puissances inverses de  $u^{\frac{3}{2}}$ , développement valable uniformément dans  $\arg u \in [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$ .

b) Soit  $G$  une fonction donnée de classe  $C^\infty$ . Démontrer par récurrence l'existence de fonctions  $C^\infty Q_j^{k,\alpha}(x, \theta)$ , homogènes en  $\theta$  de degré d'homogénéité  $\frac{2}{3}(j+k) - |\alpha|$ , telles que

$$\partial_{x^k}^k \partial_{\theta^\alpha}^\alpha [G(Z)] = \sum_{j=0}^{j=|\alpha|} G^{(k+j)}(Z) Q_j^{k,\alpha}(x, \theta)$$

3) On considère la fonction  $C^\infty$ , notée  $\sigma_0$ , nulle pour  $t \leq 1$ , identiquement égale à 1 pour  $t \geq 2$ . On introduit  $\sigma_2(t) = \sigma_0(\delta_2 t)$ ,  $0 < \delta_2 < 1/2$ . On introduit

$$a_2(x, \theta_1, \theta_2) = \sigma_0(|\theta|) \sigma_2(Z_0) \frac{\Phi(\xi)}{\Phi(\xi_0)}.$$

a) Démontrer que  $\sigma_2(Z_0) \in S_{1/3,0}^0(\mathbb{R}^2)$ .

b) Utilisant l'inclusion  $S_{1/3,0}^0 \subset S_{1/3,2/3}^0$ , démontrer que  $a_2 \in S_{1/3,2/3}^0$ .

4) a) Démontrer que

$$(1 - \sigma_0(|\theta|)) \frac{Ai(\xi)}{Ai(\xi_0)} \in S^{-\infty}.$$

Soit  $\sigma_1$  la fonction paire, nulle sur  $[1 - \delta_1, +\infty[$ , égale à 1 sur  $[0, 1 - 2\delta_1]$ , par exemple  $\sigma_1(u) = 1 - \sigma_0(\delta_1|u| + 1 - 3\delta_1)$ . Soit  $h$  la fonction égale à  $(s^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(s^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$  sur  $[1, (1+x)^{\frac{1}{2}}]$ , égale à  $(s^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}[(s^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - (s^2 - 1 - x)^{\frac{3}{2}}]$  sur  $[(1+x)^{\frac{1}{2}}, +\infty[$ . Elle est minorée par une fonction  $\gamma(x)$ , que l'on pourra exprimer, pour  $s \geq (1 - \delta_1)^{-1}$ .

b) Démontrer que

$$|\sigma_0(|\theta|) \sigma_1\left(\frac{\theta_1}{|\theta_2|}\right) \exp\left(-\frac{2}{3}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}})\right)| \leq \exp\left(-\frac{2}{3}\gamma(x)|\theta|\right).$$

c) Démontrer, quel que soit  $n$ , l'existence de  $C_n$  telle que

<sup>2</sup>La dernière inégalité de (6.3.7) montre que  $y_1$  joue le rôle du temps, et que l'on étudie la réflexion d'une onde sur le bord  $x = 0$ , ce qui est relié par la notion de solution supportée dans  $y_1 \geq 0$  à l'extension  $\Im\theta_1 < 0$  par le théorème de Paley-Wiener-Schwarz.

$$|\partial_{x^n}(\sigma_0(|\theta|)\sigma_1(\frac{\theta_1}{|\theta_2|})\frac{Ai(\xi)}{Ai(\xi_0)})| \leq C_n \exp(-\frac{1}{3}\gamma(x)|\theta|).$$

d) En conclure sur l'appartenance de  $a_1(x, \theta) = \sigma_0(|\theta|)\sigma_1(\frac{\theta_1}{|\theta_2|})\frac{Ai(\xi)}{Ai(\xi_0)}$  à un espace de symboles.

5) On note

$$a_3(x, \theta) = [\hat{K}_x(\theta) - (1 - \sigma_0(|\theta|))\frac{Ai(\xi)}{Ai(\xi_0)} - \sigma_0(|\theta|)\sigma_1(\frac{\theta_1}{|\theta_2|})\frac{Ai(\xi)}{Ai(\xi_0)} - a_2(x, \theta)\exp(-\frac{2}{3}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}}))] \exp(\frac{2i}{3}Z^{\frac{3}{2}}\text{sign}\theta_1)1_{x>\delta}$$

a) Démontrer que le support  $S$  de  $a_3$  est donné par les inégalités

$$|\theta| \geq 1, |\theta_2| \leq (1 - 2\delta_1)^{-1}|\theta_1|, Z_0 \leq 2\delta_2.$$

b) Déterminer le plus petit cône contenant  $S$ .

c) Démontrer que  $Z$  a un minorant strictement positif sur  $\{(x, \theta), x > \delta, |\theta_1| \geq (1 - 2\delta_1)|\theta_2|\}$ .

d) Démontrer que  $a_3 \in S_{1/3, 2/3}^0$ .

**Résolution.** 1) On suppose donc que  $K_x(y)$ , solution fondamentale de  $P$  à support dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , qui est, grâce à l'hypoellipticité partielle en  $x$  de l'opérateur  $P$ , dans  $C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2))$ , admet une transformée de Fourier  $\hat{K}_x(\theta)$ . Cette transformée de Fourier est solution de

$$\partial_{x^2}^2 \hat{K}_x(\theta) + [(1+x)\theta_1^2 - \theta_2^2] \hat{K}_x(\theta) = 0$$

avec  $\hat{K}_0(\theta) = 1$ . Nous écrivons le changement de variable  $X = a_1(\theta)x + a_2(\theta)$  pour nous ramener à l'équation caractéristique de la fonction d'Airy. Nous avons alors

$$a_1^2 \partial_{X^2}^2 \hat{K}_x - [\theta_2^2 - a_1^{-1}\theta_1^2(X - a_2)] \hat{K}_x = 0$$

On choisit  $a_2 = -\theta_2^2 \theta_1^{-2} a_1$  et  $a_1^3 = -\theta_1^2$ . L'équation s'écrit

$$\partial_{X^2}^2 \hat{K}_x(\theta) - X \hat{K}_x(\theta) = 0. \quad (6.3.9)$$

On sait que  $K_x = 0$  pour  $y_1 < 0$ . Comme

$$\hat{K}_x(\theta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-iy_1\theta_1 - iy_2\theta_2} K_x(y) dy$$

la fonction  $\hat{K}_x(\theta)$  se prolonge analytiquement en  $\theta_1$  dans  $\Im\theta_1 < 0$  et reste majorée. On peut alors déterminer les racines  $\theta_1^{\frac{2}{3}}$  par la représentation indiquée dans le texte, et on a

$$X = \theta_2^2 \theta_1^{-\frac{4}{3}} - (1+x)\theta_1^{\frac{2}{3}}.$$

De (6.3.9), on déduit qu'il existe deux fonctions  $C_1(\theta)$  et  $C_2(\theta)$  telles que

$$\hat{K}_x(\theta) = C_1(\theta)Ai(X) + C_2(\theta)Bi(X).$$

Lorsque  $\Im\theta_1 < 0$ , la solution  $Bi(X)$  est exponentiellement croissante et n'est pas dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , ce qui donne  $C_2(\theta) = 0$  et  $C_1(\theta) = (Ai(\theta_2^2 \theta_1^{-\frac{4}{3}} - \theta_1^{\frac{2}{3}}))^{-1}$ . Il suffit alors de noter  $\xi = \theta_2^2 \theta_1^{-\frac{4}{3}} - (1+x)\theta_1^{\frac{2}{3}}$  et  $\xi_0 = \theta_2^2 \theta_1^{-\frac{4}{3}} - \theta_1^{\frac{2}{3}}$ .

2) a) Ce développement asymptotique a été fait dans l'exercice 1 du chapitre 4. Pour obtenir celui de  $(u^{\frac{1}{4}}\Phi(u))^{-1}$ , on inverse la série de Taylor en  $u^{-\frac{3}{2}}$  correspondante.

b) La méthode employée est la même que dans l'exercice 6 de ce chapitre. On démontre par récurrence l'existence de fonctions homogènes  $Q_j^\alpha(x, \theta)$  telles que

$$\partial_{\theta}^{\alpha}(G(Z)) = \sum_{j=1}^{|\alpha|} Q_j^{\alpha}(x, \theta) G^{(j)}(Z).$$

Pour  $\alpha = (1, 0)$  ou  $(0, 1)$ , on trouve :

$$Q_1^{(1,0)}(x, \theta) = \frac{2}{3} |\theta_1|^{-\frac{1}{3}} \text{sign}(\theta_1) [1 - 2(1+x) \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2}], \quad Q_1^{(0,1)}(x, \theta) = -2 |\theta_1|^{\frac{2}{3}} (1+x) \frac{\theta_2}{\theta_1^2},$$

et pour  $|\alpha| \geq 1$ , nous avons les relations de récurrence

$$Q_1^{\alpha+\alpha_1}(x, \theta) = \partial_{\theta}^{\alpha_1} Q_1^{\alpha}(x, \theta)$$

$$Q_{|\alpha+\alpha_1|}^{\alpha+\alpha_1}(x, \theta) = Q_1^{\alpha_1}(x, \theta) Q_{|\alpha|}^{\alpha}(x, \theta)$$

$$Q_j^{\alpha+\alpha_1}(x, \theta) = \partial_{\theta}^{\alpha_1} Q_j^{\alpha}(x, \theta) + Q_1^{\alpha_1}(x, \theta) Q_{j-1}^{\alpha}(x, \theta), \quad 2 \leq j \leq |\alpha|.$$

Le symbole  $Q_1^{\alpha_1}$  est homogène de degré  $-\frac{1}{3}$ . On effectue un raisonnement par récurrence pour obtenir le degré d'homogénéité de  $Q_j^{\alpha}$ . On suppose que  $d^0 Q_j^{\alpha} = \frac{2}{3} j - |\alpha|$ , alors

$$d^0 Q_1^{\alpha+\alpha_1} = d^0 Q_1^{\alpha} - 1 = \frac{2}{3} - |\alpha| - 1$$

$$d^0 Q_{|\alpha+1|}^{\alpha+\alpha_1} = d^0 Q_{|\alpha|}^{\alpha} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} |\alpha| - \frac{1}{3}$$

$$d^0 Q_j^{\alpha+\alpha_1} = \frac{2}{3} j - |\alpha| - 1$$

puisque, pour le dernier item, les deux termes ont le même degré d'homogénéité  $\frac{2}{3} j - |\alpha| - 1 = \frac{2}{3}(j-1) - |\alpha| - \frac{1}{3}$ . Ensuite, on vérifie que

$$\partial_x^k \partial_{\theta}^{\alpha} G(Z) = \partial_{\theta}^{\alpha} [(\partial_x Z)^k G^{(k)}(Z)].$$

L'application de la formule de Leibniz prouve que

$$\partial_x^k \partial_{\theta}^{\alpha} G(Z) = \partial_{\theta}^{\alpha} [(-1)^k \theta_1^{\frac{2k}{3}} G^{(k)}(Z)] = (-1)^k \sum_{\alpha'} C_{\alpha'}^{\alpha} \partial_{\theta}^{\alpha'} (G^{(k)}(Z)) su \partial_{\theta}^{\alpha-\alpha'} (\theta_1^{\frac{2k}{3}}).$$

3 a) On applique 2 b) à la fonction  $G^{(k)}$  pour trouver la décomposition cherchée, où

$$Q_j^{k,\alpha} = (-1)^k C_{\alpha'}^{\alpha} Q_j^{\alpha'} \partial_{\theta}^{\alpha-\alpha'} (\theta_1^{\frac{2k}{3}}), \quad j \geq 1$$

$$Q_0^{k,\alpha} = (-1)^k \partial_{\theta}^{\alpha} (\theta_1^{\frac{2k}{3}}).$$

On vérifie aisément que l'ordre de  $Q_j^{k,\alpha}$  est  $\frac{2k}{3} - (|\alpha| - |\alpha'|) + \frac{2j}{3} - |\alpha'|$ , ce qui est le résultat recherché.

3 a) On obtient de même que, pour  $k = 0$  et  $x = 0$ , on a

$$\partial_{\theta}^{\alpha} (\sigma_2(Z_0)) = \sum_{j=0}^{j=|\alpha|} Q_j^{0,\alpha}(0, \theta) \sigma_2^{(j)}(Z_0)$$

Le caractère borné de  $\sigma_2$  et de toutes ses dérivées (sa première dérivée est dans  $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ ) implique que l'ordre maximum de puissance de  $\theta$  dans la dérivée est  $-\frac{1}{3}|\alpha|$ . On conclut comme dans l'exercice 6 du présent chapitre puisque  $\sigma_2 \in S_{0,0}^0$ .

b) On vérifie que  $\xi = Z e^{i \frac{2}{3} \text{sign}(\theta_1)}$ . La fonction  $\psi$

$$u \rightarrow \frac{\sigma_2(u)}{\Phi(ue^{i\frac{\pi}{3}\text{sign}(\theta_1)})} = \frac{\sigma_2}{\Phi^*}(u)$$

est dans  $C^\infty$ . On vérifie alors que

$$\partial_x^k \partial_\theta^\alpha a_2(x, \theta) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha} C_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \partial_\theta^{\alpha_1} \sigma_0(|\theta|) \partial_\theta^{\alpha_2} (\psi(Z_0)) \partial_{x^k}^k \partial_{\theta_3}^{\alpha_3} (\Phi^*).$$

Cette égalité conduit à un majorant de chaque terme obtenu en développant chaque dérivée en

$$(1 + |\theta|)^{-\frac{1}{3}|\alpha_2| - \frac{1}{3}|\alpha_3| + \frac{2}{3}k},$$

d'où le résultat. On aurait pu aussi écrire

$$\sigma_0(|\theta|) \in S_{0,0}^0(\mathbb{R}^2) \subset S_{0,0}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \subset S_{1/3,2/3}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$$

$$\psi \in S_{1/3,0}^0(\mathbb{R}^2) \subset S_{1/3,0}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \subset S_{1/3,2/3}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$$

et, grâce au b), on sait que

$$\Phi^* \in S_{1/3,2/3}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$$

donc  $a_2 \in S_{1/3,2/3}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ .

4) a) Ce symbole est à support compact, donc on utilise l'exercice 1 du présent chapitre.

On a  $a_0(x, \theta) = (1 - \sigma_0(|\theta|)) \frac{Ai(\xi)}{Ai(\xi_0)} \in S^{-\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ .

b) La relation

$$(s^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} ((s^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - (s^2 - 1 - x)^{\frac{3}{2}}) = x \cdot \frac{2s^2 - 2 - x + (s^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(s^2 - 1 - x)^{\frac{1}{2}}}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}((s^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + (s^2 - 1 - x)^{\frac{1}{2}})}$$

permet de voir que, pour  $x > 0$  et  $s \geq (1 + x)^{\frac{1}{2}}$ , cette expression est strictement positive, et minorée par  $x\alpha(x)$ ,  $\alpha(x) > 0$  lorsque  $x > 0$ . Comme de plus la fonction  $(s^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(s^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$  est strictement croissante sur  $[1, (1 + x)^{\frac{1}{2}}]$ , elle est minorée par sa valeur en  $(1 - \delta_1)^{-1}$  pour  $s \geq (1 - \delta_1)^{-1}$ . Notant alors  $\gamma(x) = \min(x\alpha(x), h((1 + x)^{\frac{1}{2}}), h((1 - \delta_1)^{-1}))$ ,  $\gamma(x) > 0$  pour  $x > 0$ .

On vérifie que

$$|\theta_1| \leq \frac{|\theta_2|}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow \text{Re}(-\frac{2}{3}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}})) = -\frac{2}{3}[(-Z)^{\frac{3}{2}} - (-Z_0)^{\frac{3}{2}}]$$

$$\frac{|\theta_2|}{\sqrt{1+x}} \leq |\theta_1| \Rightarrow \text{Re}(-\frac{2}{3}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}})) = \frac{2}{3}(-Z_0)^{\frac{3}{2}}$$

$$|\theta_2| \leq |\theta_1| \Rightarrow \text{Re}(-\frac{2}{3}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}})) = 0.$$

On voit alors que  $|\theta_1| = |\theta|(1 + \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2})^{-\frac{1}{2}}$ . On vérifie que  $\sigma_1(\frac{\theta_1}{|\theta_1|}) \neq 0 \Rightarrow |\frac{\theta_1}{\theta_2}| \leq 1 - \delta_1$ . Ceci implique alors

$$|\frac{\theta_2}{\theta_1}| \geq (1 - \delta_1)^{-1}.$$

On vérifie que

$$\frac{2}{3}\text{Re}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3}|\theta|h(\frac{\theta_2}{\theta_1}), |\theta_2| \geq |\theta_1|.$$

On déduit des inégalités sur  $h$  que

$$|\exp(-\frac{2}{3}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}}))| \leq e^{-\frac{2}{3}\gamma(x)|\theta|}.$$



c) Nous vérifions d'abord que, uniformément dans  $|\arg \xi| \leq \pi - \varepsilon$ ,

$$C_1 \leq (1 + |\xi|^{\frac{1}{4}}) |Ai(\xi) \exp(\frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}})| \leq C_2$$

Comme  $\xi$  et  $\xi_0$  sont d'argument  $\pm \frac{\pi}{3}$ , l'inégalité est bien vérifiée et on a

$$\left| \frac{\Phi(\xi)}{\Phi(\xi_0)} \right| \leq \frac{C_2}{C_1} \frac{1 + |Z_0|^{\frac{1}{4}}}{1 + |Z|^{\frac{1}{4}}}.$$

On écrit le second membre comme

$$f(s) = \frac{1 + |\theta_1|^{\frac{1}{6}} |1 - s^2|^{\frac{1}{4}}}{1 + |\theta_1|^{\frac{1}{6}} |1 + x - s^2|^{\frac{1}{4}}}.$$

On vérifie que, dans cette égalité,  $s = \frac{\theta_2}{\theta_1}$  et est, en valeur absolue, plus grand que  $(1 - \delta_1)^{-1} > 1$ .

Lorsque  $s^2 \geq 1 + x$ ,  $s \geq 0$ , la fonction est décroissante, donc majorée par sa valeur en  $s^2 = 1 + x$ . Lorsque  $s^2 \leq 1 + x$ , on constate qu'elle est aussi majorée par cette valeur. On a

$$\left| \frac{\Phi(\xi)}{\Phi(\xi_0)} \right| \leq \frac{C_2}{C_1} (1 + x^{\frac{1}{4}} |\theta_1|^{\frac{1}{6}}).$$

De plus, la dérivée par rapport à  $x$  d'ordre  $k$  de la fonction  $Ai(\xi)$  fait intervenir la dérivée de  $Ai$  à l'ordre  $k$ , qui s'écrit  $P_k(\xi)Ai(\xi) + Q_k(\xi)Ai'(\xi)$ . Nous vérifions que nous avons des estimées et un développement asymptotique semblable pour  $Ai'$ . De plus, le degré de  $P_{2m}$  et de  $Q_{2m+1}$  est  $m$ , celui de  $P_{2m+1}$  et de  $Q_{2m+2}$  est  $m + 1$ .

On a alors

$$\partial_{x^k}^k (Ai(\xi)) = (-|\theta_1|^{\frac{2}{3}})k(P_k(\xi)Ai(\xi) + Q_k(\xi)Ai'(\xi)).$$

Il existe alors une constante  $C(k)$  et un exposant  $n(k)$  tels que

$$|\exp(\frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}}) \partial_{x^k}^k (Ai(\xi))| \leq C(k) |\theta|^{n(k)}$$

On en déduit, en considérant  $D_k$  le majorant pour  $|\theta| \geq 1$  de  $|\theta|^{n(k)} e^{-\frac{1}{6}\gamma(x)|\theta|}$ , que

$$|\partial_{x^k}^k (\sigma_0(|\theta|) \sigma_1(\frac{\theta_1}{|\theta_2|}) \frac{Ai(\xi)}{Ai(\xi_0)})| \leq C(k) D_k \exp(-\frac{1}{2}\gamma(x)|\theta|). \quad (6.3.10)$$

d) Lorsque nous réalisons toutes les dérivées en  $\theta$  de ce symbole, nous ne changeons pas le comportement. La décroissance exponentielle de  $a_1(x, \theta)$  implique la décroissance plus rapide que tout polynôme, d'où  $a_1 \in S^{-\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ .

5) a) Introduisons

$$\psi_3(\theta) = 1 - (1 - \sigma_0(|\theta|)) - \sigma_0(|\theta|) \sigma_1(\frac{\theta_1}{|\theta_2|}) - \sigma_0(|\theta|) \sigma_2(Z_0).$$

Alors  $\psi_3(\theta) = \sigma_0(|\theta|) [1 - \sigma_1(\frac{\theta_1}{|\theta_2|}) - \sigma_2(Z_0)]$ . Lorsque  $\frac{\theta_1^2}{\theta_2^2} \geq (1 - \delta_1)^2$ , on voit que  $\sigma_1$  est nul.

Comme, pour  $Z_0 \geq \delta_2$ , on trouve  $\frac{\theta_2^2}{\theta_1^2} \geq 1 + \delta_2 \frac{|\theta_1|^{\frac{4}{3}}}{\theta_2^2} \geq 1$ . On en conclut que

$$(1 - \sigma_1(\frac{\theta_1}{|\theta_2|})) \sigma_2(Z_0) = \sigma_2(Z_0)$$

donc

$$\phi_3(\theta) = \sigma_0(|\theta|) (1 - \sigma_1(\frac{\theta_1}{|\theta_2|})) (1 - \sigma_2(Z_0)).$$

Le support de  $\phi_3$  a bien la forme indiquée, connaissant les supports de  $\sigma_0$ ,  $1 - \sigma_1$  et de  $1 - \sigma_2$ .

b) La relation  $Z_0 \leq 2\delta_2$  s'écrit, notant  $\theta_1 = u_1|\theta|$ ,  $\theta_2 = u_2|\theta|$  :

$$u_1^2 + u_2^2 = 1, |u_1|^{\frac{2}{3}} - u_2^2|u_1|^{-\frac{4}{3}} \leq 2\delta_2|\theta|^{-\frac{2}{3}} \leq 2\delta_2$$

On en conclut que la frontière de l'intersection de la boule unité de de  $Z_0 \leq 2\delta_2$  est donnée par

$$u_1^2 + u_2^2 = 1, u_1^2 - u_2^2 = 2\delta_2 u_1^{\frac{4}{3}}.$$

La solution positive de ce système étant notée  $(\gamma, (1-\gamma^2)^{\frac{1}{2}})$ , les inégalités ci-dessus impliquent que  $|u_1| \leq \gamma$ , d'où  $|\theta_1| \leq \frac{\gamma}{(1-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}|\theta_2|$ . On note ainsi  $\kappa(\delta_2) = \frac{\gamma}{(1-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}} - 1$ , qui tend vers 0 lorsque

$\delta_2$  tend vers 0, puisque l'équation de degré 3 en  $u_1^{\frac{2}{3}}$  admet une seule racine réelle, qui est 1 lorsque  $\delta_2 = 0$ .

On voit donc que

$$S \subset C = \{\theta, (1-2\delta_1)|\theta_2| \leq |\theta_1| \leq \frac{\gamma}{(1-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}|\theta_2|\}$$

avec égalité en au moins un point de chaque génératrice du cône.

c) On écrit

$$Z|\theta_2|^{-\frac{2}{3}} = (1+x)\left(\frac{|\theta_1|}{|\theta_2|}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{|\theta_1|}{|\theta_2|}\right)^{-\frac{4}{3}}.$$

Alors, comme le second membre est une fonction croissante de la variable  $\frac{|\theta_1|}{|\theta_2|}$ , on trouve

$$Z|\theta_2|^{-\frac{2}{3}} \geq (1+x)(1-2\delta_1)^{\frac{2}{3}} - (1-2\delta_1)^{-\frac{4}{3}}.$$

On se donne  $\delta > 0$ . Alors, si on a  $(1+\delta)(1-2\delta_1)^2 > 1$ , c'est-à-dire  $\delta_1 < \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\delta}})$ , alors pour  $x > \delta$ ,  $Z|\theta_2|^{-\frac{2}{3}} \geq \Delta > 0$ , où  $\Delta = (1-2\delta_1)^{-\frac{4}{3}}[(1+\delta)(1-2\delta_1)^2 - 1]$ .

Sur le support de  $\phi_3$ ,  $|\theta_2| \geq (1-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}|\theta|$ . Donc, sur  $\{(x, \theta), x > \delta, |\theta_1| \geq (1-2\delta_1)|\theta_2|\}$ , on trouve  $Z \geq D|\theta|^{\frac{2}{3}}$ . Nous sommes toujours hors de  $|\theta| \leq 1$ , donc  $Z$  admet un minorant strictement positif.

## 6.4 Exercices du chapitre 6

**Exercice 1 : le symbole à support compact** Soit  $a \in C_0^\infty(X \times \mathbb{R}^d)$ . Montrer que  $a \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^d)$ . Remarquons que ceci implique que, pour  $\chi$  fonction  $C_0^\infty(X \times \mathbb{R}^d)$ , et pour  $a \in S_{\rho, \delta}^m(X \times \mathbb{R}^d)$ ,  $a - a(1-\chi) \in S^{-\infty}$ .

**Exercice 2 : le symbole générique d'ordre  $m$**  Soit  $a$  une fonction positivement homogène d'ordre  $m$  dans la région  $|\theta| \geq 1$ . Montrer que  $a \in S_{1,0}^m$ .

**Exercice 3 : Un symbole de  $S_{1/2,1/2}^0$**  Montrer que si  $f$  est une fonction positive sur  $X \times \mathbb{R}^N$ , homogène de degré 1 en  $\xi$ , alors

$$e^{-f} \in S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0.$$

**Exercice 4 : Un symbole de  $S_{0,1}^0$**  Démontrer que la fonction, sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ , égale à  $e^{ix\xi}$ , est dans  $S_{0,1}^0$ .

**Exercice 5 : Un symbole de  $S_{2/3,1/3}^0$  rattaché à la fonction d'Airy** Soit  $m(x, \tau) = e^{-\tau^{\frac{1}{3}}x}$ , où  $\tau^{\frac{1}{3}}$  est la fonction réciproque de  $y^3$  sur  $\mathbb{R}$ . Démontrer que c'est un symbole de  $S_{1/3,2/3}^0$ . On montrera que, pour  $d \geq 1$ , il existe un polynôme tel que

$$\partial_\tau^d m = \left(-\frac{1}{3}\tau^{-\frac{2}{3}}\right)^d x P_d(x, \tau^{-\frac{1}{3}}) m.$$

**Exercice 6 : Un symbole de  $S_{\frac{1}{3},0}^0$  et de  $S_{1,0}^{\frac{2m}{3}}$ .** On se donne une fonction  $r(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$ , On construit, sur  $\Gamma = \{|\eta| \leq c_0|\xi|\}$ , la fonction  $a(\xi, \eta) = r(|\xi|^{-\frac{1}{3}}\eta)$ .

Montrer que  $r \in S_{0,0}^0(\mathbb{R}) \Rightarrow a \in S_{\frac{1}{3},0}^0(\Gamma)$  et que  $r \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}) \Rightarrow a \in S_{1,0}^{\frac{2m}{3}}(\Gamma)$ .

Exercices 2 et 3 :

On s'appuie sur l'inégalité

$$|\theta|^{-\frac{1}{2}} |\nabla_x f(x, \theta)| + |\theta|^{\frac{1}{2}} |\nabla_\theta f(x, \theta)| \leq C_K |f(x, \theta)|^{\frac{1}{2}}.$$

Cette inégalité se démontre en remarquant que

$$|\nabla_x f(x, \theta)| = |\theta| |\nabla_x f(x, \frac{\theta}{|\theta|})|$$

et

$$|\nabla_\theta f(x, \theta)| = |\nabla_x f(x, \frac{\theta}{|\theta|})|.$$

Pour une fonction  $F$  de classe  $C^2$ , en supposant  $F > 0$  et en se plaçant dans un compact inclus dans  $\Omega$ , on voit que, pour  $|y|$  assez petit

$$F(\alpha + y) = F(\alpha) + yF'(\alpha) + C(y)|y|^2 \geq 0.$$

On vérifie que, si  $y = -rF'(\alpha)$ , avec  $C(y)r \leq \frac{1}{2}$ , on obtient

$$(F'(\alpha))^2 \leq \frac{F(\alpha)}{r - C(y)r^2},$$

ce qui donne l'inégalité, valable dans un compact tel que  $F(\alpha) > 0$  :

$$|F'(\alpha)| \leq C(F(\alpha))^{\frac{1}{2}}.$$

On a alors la majoration, valable en  $x$  dans un compact  $K$ , puisque

$$|\nabla_x f(x, \frac{\theta}{|\theta|})| \leq C_{S,K} |f(x, \frac{\theta}{|\theta|})|^{\frac{1}{2}},$$

la constante  $C_{S,K}$  correspondant à la sphère unité en  $|\frac{\theta}{|\theta|}| = 1$ .

Par l'homogénéité de  $f$ , on voit alors que

$$|f(x, \frac{\theta}{|\theta|})|^{\frac{1}{2}} = |\theta|^{-\frac{1}{2}} |f(x, \theta)|.$$

De même, pour  $f'_\theta$ , on prend directement la majoration avec la dérivée en  $\theta$  pour  $\frac{\theta}{|\theta|}$ , qui appartient à un compact où  $f$  est non nulle.

Donc

$$|\nabla_\theta f(x, \frac{\theta}{|\theta|})| \leq C_{K,S}^1 |\nabla f(x, \frac{\theta}{|\theta|})|,$$

ce qui donne immédiatement, avec les homogénéités recherchées

$$|\nabla_\theta f(x, \theta)| \leq C_{K,S}^1 |\theta|^{-\frac{1}{2}} |f(x, \theta)|^{\frac{1}{2}}.$$

On a ainsi prouvé la majoration en prenant la constante  $C_K$  égale au sup de  $C_{S,K}$  et de  $C_{K,S}^1$ .

Donc, pour  $\theta$  de module plus grand que 1

$$|\nabla_x f(x, \theta)|^k |\nabla_\theta f(x, \theta)| e^{-f(x, \theta)} \leq C^{k+l} (1 + |\theta|)^{k/2 - l/2} |f(x, \theta)|^{k/2 + l/2} e^{-f(x, \theta)}.$$

On constate alors que  $x^n e^{-x}$  est majoré par  $n^n e^{-n}$ , donc on obtient :

$$|\nabla_x f(x, \theta)|^k |\nabla_\theta f(x, \theta)| e^{-f(x, \theta)} \leq C^{k+l} (1 + |\theta|)^{k/2-l/2} \left(\frac{k+l}{2}\right)^{k/2+l/2} e^{-\frac{k+l}{2}}.$$

On démontre ensuite par récurrence que

$$\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta (e^{-f}) = \sum_{\alpha', \beta'} a_{\alpha', \beta'} (\partial_x f)^{\alpha'} (\partial_\theta f)^{\beta'} e^{-f}$$

où le symbole  $a_{\alpha', \beta'}$  est dans  $S_{1,0}^{\frac{|\alpha|-|\alpha'|-|\beta|+|\beta'|}{2}}$ . En effet, on suppose cette appartenance vraie pour le développement du symbole  $\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta (e^{-f})$ . Alors on a

$$\begin{aligned} e^f \partial_{x_j} [a_{\alpha', \beta'} (\partial_x f)^{\alpha'} (\partial_\theta f)^{\beta'} e^{-f}] &= \partial_{x_j} [a_{\alpha', \beta'}] (\partial_x f)^{\alpha'} (\partial_\theta f)^{\beta'} \\ &\quad - a_{\alpha', \beta'} (\partial_x f)^{\alpha'+\delta_j} (\partial_\theta f)^{\beta'} \\ &\quad + \sum_{k, \alpha_k \geq 1} a_{\alpha', \beta'} \partial_{x_j x_k}^2 f (\partial_x f)^{\alpha-\delta_k} (\partial_\theta f)^{\beta'} \\ &\quad + \sum_{l, \beta_l \geq 1} \partial_{\theta_l x_j}^2 (\partial_x f)^\alpha (\partial_\theta f)^{\beta-\delta_l} \end{aligned}$$

On note que  $\partial_{x_j x_k}^2 f \in S_{1,0}^1$  et que  $\partial_{x_j \theta_l}^2 f \in S_{1,0}^0$ , car  $f$  est homogène.

Nous avons

$$b_{\alpha', \beta'}^j = \partial_{x_j} (a_{\alpha', \beta'}) \in S_{1,0}^{\frac{|\alpha|-|\alpha'|-|\beta|+|\beta'|}{2}} \subset S_{1,0}^{\frac{|\alpha+\delta_j|-|\alpha'|-|\beta|+|\beta'|}{2}},$$

$$b_{\alpha'+\delta_j, \beta'}^j = -a_{\alpha', \beta'} \in S_{1,0}^{\frac{|\alpha|-|\alpha'|-|\beta|+|\beta'|}{2}} = S_{1,0}^{\frac{|\alpha+\delta_j|-|\alpha'+\delta_j|-|\beta|+|\beta'|}{2}}$$

$$b_{\alpha'-\delta_k, \beta'}^j = \alpha'_k a_{\alpha', \beta'} \partial_{x_j x_k}^2 f \in S_{1,0}^{\frac{|\alpha|-|\alpha'|-|\beta|+|\beta'|}{2}+1} = S_{1,0}^{\frac{|\alpha+\delta_j|-|\alpha'-\delta_k|-|\beta|+|\beta'|}{2}}$$

et

$$b_{\alpha', \beta'-\delta_l}^j = \beta'_l a_{\alpha', \beta'} \partial_{x_j \theta_l}^2 f \in S_{1,0}^{\frac{|\alpha|-|\alpha'|-|\beta|+|\beta'|}{2}-1} = S_{1,0}^{\frac{|\alpha+\delta_j|-|\alpha'|-|\beta|+|\beta'-\delta_l|}{2}},$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} &\partial_{x_j} (\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta e^{-f}) \\ &= \\ &\sum_{\alpha', \beta', k, l} [b_{\alpha', \beta'}^j (\partial_x f)^{\alpha'} (\partial_\theta f)^{\beta'} + b_{\alpha'+\delta_j, \beta'}^j (\partial_x f)^{\alpha'+\delta_j} (\partial_\theta f)^{\beta'} \\ &\quad + b_{\alpha'-\delta_k, \beta'}^j (\partial_x f)^{\alpha'-\delta_k} (\partial_\theta f)^{\beta'} + b_{\alpha', \beta'-\delta_l}^j (\partial_x f)^{\alpha'} (\partial_\theta f)^{\beta'-\delta_l}] e^{-f}. \end{aligned}$$

Pour cette décomposition, on retrouve le même comportement des  $b^j$  en fonction de  $|\alpha|, |\alpha'|, |\beta|, |\beta'|$ .

Pour une dérivation en  $\theta$ , on utilise le fait que  $\partial_{\theta_j \theta_k}^2 f$  est un symbole d'ordre  $-1$ , et on obtient les mêmes égalités pour les symboles  $c_{\alpha', \beta'}^k, c_{\alpha', \beta'+\delta_k}^k, c_{\alpha'-\delta_l, \beta'}^k, c_{\alpha', \beta'-\delta_j}^k$ . Ceci est laissé au lecteur.

Ceci achève la démonstration de la récurrence.

On vérifie que, pour  $\beta_i = (\delta_{ij})_j$  ou  $\alpha_i = (\delta_{ij})_i$ , le résultat est vrai. Il est donc vrai par récurrence.

On combine alors l'information sur le symbole  $a_{\alpha', \beta'}$  avec la majoration obtenue, pour vérifier que la dérivée

$$\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta (e^{-f})$$

est majorée par des termes de la forme

$$(1 + |\theta|)^{\frac{|\alpha|-|\alpha'|-|\beta|+|\beta'|}{2} + \frac{|\alpha'|-|\beta'|}{2}},$$

c'est-à-dire une majoration de la forme

$$(1 + |\theta|)^{\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}}$$

On a prouvé l'appartenance de  $e^{-f}$  à  $S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0$ .

Exercice 4. On remarque que

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (e^{ix \cdot \xi}) = i^{|\alpha|} \partial_\xi^\beta (\xi^\alpha e^{ix \cdot \xi}) = \left[ \sum_{\beta', |\beta'| \leq |\beta|} i^{|\alpha|+|\beta'|} a(\beta, \beta') \partial_\xi^{\beta-\beta'} (\xi^\alpha) (x^{\beta'}) \right] e^{ix \cdot \xi}$$

ce qui donne tout de suite la majoration de cette expression, sur un compact  $K$  en  $x$ , par

$$C_K(\alpha, \beta)(1 + |\xi|)^{|\alpha|}.$$

L'exercice 4 est résolu.

Enfin, pour l'exercice 5, nous vérifions que

$$\partial_\tau m(x, \tau) = -\frac{1}{3} \tau^{-\frac{2}{3}} x m(x, \tau)$$

Le raisonnement par récurrence conduit à

$$\begin{aligned} \partial_\tau^{d+1} m(x, \tau) = \\ \left(-\frac{1}{3} \tau^{-\frac{2}{3}}\right)^{d+1} x^2 P_d(x, \tau^{-\frac{1}{3}}) m - \frac{1}{3} \tau^{-\frac{4}{3}} \left(-\frac{1}{3} \tau^{-\frac{2}{3}}\right)^d \partial_\lambda P_d(x, \tau^{-\frac{1}{3}}) m + 2\tau^{-\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{3} \tau^{-\frac{2}{3}}\right)^{d+1} P_d(x, \tau^{-\frac{1}{3}}) \tau^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

On note

$$P_{d+1}(x, \lambda) = x P_d(x, \lambda) + \lambda^2 \partial_\lambda P_d(x, \lambda) + 2\lambda P_d(x, \lambda).$$

Cette égalité par récurrence définit une suite de polynômes, donc le résultat intermédiaire est démontré.

Ensuite, on a

$$\partial_x^\alpha \partial_\tau^d m = \partial_\tau^d ((-\tau^{\frac{1}{3}})^\alpha m) = \sum_{j=1}^{j=d} C_d^j \left(-\frac{1}{3} \tau^{-\frac{2}{3}}\right)^j x P_j(x, \tau^{-\frac{1}{3}}) m \partial_\tau^{d-j} (-\tau^{\frac{1}{3}})^\alpha + \partial_\tau^d ((-\tau^{\frac{1}{3}})^\alpha) m.$$

Exercice 6. Nous utilisons une méthode directe dans le cas où  $r \in S_{1,0}^m(\mathbb{R})$ . Nous vérifions que

$$|r(|\xi|^{-\frac{1}{3}} \eta)| \leq C_{0,0}(1 + ||\xi|^{-\frac{1}{3}} \eta|)^m$$

ce qui donne

$$|r(|\xi|^{-\frac{1}{3}} \eta)| \leq C_{0,0} (|\xi|^{\frac{1}{3}} + |\eta|)^m |\xi|^{-\frac{m}{3}} \leq C_{0,0} (1 + |\xi| + |\eta|)^{\frac{2m}{3}}.$$

Ceci donne déjà l'idée de l'exposant  $\frac{2m}{3}$ .

Nous avons de plus :

$$\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta (r(|\xi|^{-\frac{1}{3}} \eta)) = \partial_\xi^\alpha [|\xi|^{-\frac{|\beta|}{3}} (\partial_s^\beta r)(|\xi|^{-\frac{1}{3}} \eta)].$$

Nous vérifions que, pour  $|\xi| \geq 1$  et  $(\xi, \eta) \in \Gamma$

$$|\xi|^{-\frac{1}{3}} \leq (1 + c_0)^{-\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}} (1 + |\xi| + |\eta|)^{-\frac{1}{3}}. \quad (6.4.11)$$

On démontre aisément ainsi, grâce à l'égalité

$$|\xi| = \left( \sum_{j=1}^{dim X} \xi_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

que le symbole  $|\xi|^{-|\beta|}$  est un symbole de  $S_{1,0}^{-\frac{|\beta|}{3}}(\Gamma)$ .

Le symbole  $r$  est dans  $S_{1,0}^m(X)$ , donc on a l'inégalité

$$|\partial_s^\beta r(s)| \leq C_{0,\beta} (1 + |s|)^{m-|\beta|}.$$

Ensemble avec l'inégalité (6.4.11) pour  $\{\xi \geq 1\} \cap \Gamma$ , on voit que

$$|\partial_s^\beta r(|\xi|^{-\frac{1}{3}} \eta)| \leq C_{0,\beta} \sup(1, \left(\frac{2}{1+c_0}\right)^{\frac{1}{3}(|\beta|-m)}) (1 + |\xi| + |\eta|)^{\frac{2}{3}(m-|\beta|)}.$$

Il reste donc, pour  $(\xi, \eta) \in \{\xi \geq 1\} \cap \Gamma$ ,

$$| [|\xi|^{-|\beta|} (\partial_s^\beta r)(|\xi|^{-\frac{1}{3}} \eta)] | \leq C_{0,\beta} \sup(1, \left(\frac{2}{1+c_0}\right)^{\frac{1}{3}(|\beta|-m)}) (1 + |\xi| + |\eta|)^{\frac{2m}{3} - \frac{1}{3}|\beta|}.$$

Nous remarquons alors que

$$\partial_{\xi_j} l(|\xi|^{-\frac{1}{3}}) = -\frac{1}{3} |\xi|^{-\frac{1}{3}} [\partial_{\xi_j} l(|\xi|^{-\frac{1}{3}})] \frac{\xi_j}{|\xi|},$$

ce qui permet d'écrire, par récurrence, toute dérivée en  $\xi$  de

$$|\xi|^{-\frac{|\beta|}{3}} (\partial_s^\beta r)(|\xi|^{-\frac{1}{3}} \eta)$$

comme une somme de dérivées d'ordre  $\alpha'$  de  $\partial_s^\beta r$ , les coefficients étant dans la sphère unité, pondérés par des termes en  $|\xi|^{-\frac{|\alpha'|}{3}}$ . On a donc finalement le résultat, puisque un majorant de  $|\xi|^{-\frac{|\alpha'|}{3}}$  est  $\sup(1, (\frac{2}{1+c_0})^{\frac{1}{3}} |\alpha'|) (1 + |\xi| + |\eta|)^{-|\alpha'|}$ . On conclut par récurrence la démonstration de l'exercice.

La deuxième méthode se rapproche de la méthode utilisée dans l'exercice 3. On démontre par récurrence l'existence d'une suite de fonctions  $S_j^\alpha(\xi, \eta)$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^2 - \{(0, 0)\}$ ,  $1 \leq j \leq |\alpha|$  telle que

$$\partial_{\xi, \eta}^\alpha a(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{|\alpha|} S_j^\alpha(\xi, \eta) r^{(j)}(|\xi|^{-\frac{1}{3}} \eta)$$

avec, de plus,  $S_j^\alpha$  homogène de degré  $\frac{2}{3}j - |\alpha|$ .

On voit ainsi que

$$\partial_\xi(g(|\xi|^{-\frac{1}{3}} \eta)) = -\frac{1}{3} |\xi|^{-\frac{1}{3}} \frac{\xi}{|\xi|} \frac{\eta}{|\xi|} g'(|\xi|^{-\frac{1}{3}} \eta).$$

$$\partial_\eta(g(|\xi|^{-\frac{1}{3}} \eta)) = |\xi|^{-\frac{1}{3}} g'(|\xi|^{-\frac{1}{3}} \eta).$$

Ceci permet de conclure que

$$S_1^{(1,0)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{3} |\xi|^{-\frac{1}{3}} \frac{\xi}{|\xi|} \frac{\eta}{|\xi|}$$

$$S_1^{(0,1)}(\xi, \eta) = |\xi|^{-\frac{1}{3}},$$

qui sont deux polynômes homogènes de degré  $\frac{2}{3} - 1$ .

Notons  $\alpha_1 \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ . On vérifie que

$$S_1^{\alpha+\alpha_1} = \partial^{\alpha_1} S_1^{\alpha_1}$$

$$S_{|\alpha+\alpha_1|}^{\alpha+\alpha_1} = S_{|\alpha|}^{\alpha} S_1^{\alpha_1}$$

$$2 \leq j \leq |\alpha|, S_j^{\alpha+\alpha_1} = \partial^{\alpha_1} S_j^{\alpha} + S_{j-1}^{\alpha} S_1^{\alpha_1}.$$

En supposant que  $S_j^\alpha$  est un polynôme homogène de degré  $\frac{2}{3}j - |\alpha|$ , on vérifie que  $S_1^{\alpha+\alpha_1}$  est homogène de degré  $\frac{2}{3} - 1 - 1$ ,  $S_{|\alpha|+1}^{\alpha+\alpha_1}$  est homogène de degré  $\frac{2}{3}|\alpha| - |\alpha| - \frac{1}{3}$ , et que  $S_j^{\alpha+\alpha_1}$  est homogène de degré  $\frac{2}{3}j - |\alpha| - 1$  pour  $2 \leq j \leq |\alpha|$ . Ceci permet de conclure sur l'homogénéité lorsque l'ordre de dérivation est  $|\alpha| + 1$ .

Dans le cas où toutes les dérivées de  $r$  sont bornées, c'est-à-dire  $r \in S_{0,0}^0$ , on vérifie donc que  $\partial^\alpha a$  est la somme, avec des pondérations bornées, de symboles homogènes d'ordre  $\frac{2}{3}j - |\alpha|$  pour  $1 \leq j \leq |\alpha|$ . L'ordre dominant est obtenu lorsque  $j = |\alpha|$ , ce qui donne donc la majoration

$$|\partial^\alpha a| \leq C(r^{(|\alpha|)}, S_j^\alpha, c_0) (1 + |\xi| + |\eta|)^{-\frac{|\alpha|}{3}}$$

ce qui démontre le premier item. Enfin, on peut vérifier, lorsque  $r \in S_{1,0}^m(\mathbb{R})$ , l'inégalité sur  $\Gamma$

$$|r^{(j)}(|\xi|^{-\frac{1}{3}} \eta)| \leq C_{\alpha,0} |\xi|^{-\frac{m-j}{3}} (1 + |\xi| + |\eta|)^{m-j},$$

qui permet de conclure que tous les termes de la somme sont d'ordre  $2m/3 - 2j/3 + 2j/3 - |\alpha| = 2m/3 - |\alpha|$ . La deuxième partie est prouvée.

# Chapitre 7

## Intégrales oscillantes

Nous avons introduit, dans le chapitre 6, les symboles comme généralisation des opérateurs différentiels, décrits par (6.0.1). Dans la représentation de la solution  $u(x, y_1, y_2)$  du problème (6.3.7), les deux termes  $u_x^0$  et  $u_x^1$  s'expriment sous la forme recherchée (6.0.1),  $a_0$  étant un symbole de  $S^{-\infty}$  et  $a_1$  étant un symbole de  $S^{-\infty}$ . En revanche, on constate que

$$u_x^2(y_1, y_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{iy\theta - \frac{2}{3}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}})} a_2(x, \theta) \hat{f}(\theta) d\theta$$

$$u_x^3(y_1, y_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{iy\theta - \frac{2i}{3}Z^{\frac{3}{2}} \text{sign}(\theta_1)} a_3(x, \theta) \hat{f}(\theta) d\theta.$$

On utilise alors l'égalité  $\hat{f}(\theta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-iz \cdot \theta} f(z) dz$  et on remplace cette égalité dans  $u_x^2$  et  $u_x^3$ , en obtenant des intégrales formelles de la forme (6.0.2) avec respectivement  $\phi_2(y, z, \theta) = (y - z)\theta + \frac{2}{3}i(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}})$  et  $\phi_3(y, z, \theta) = (y - z)\theta - \frac{2}{3}Z^{\frac{3}{2}} \text{sign}(\theta_1)$ . Ces opérateurs sont appelés (Taylor [93] p 222) opérateurs de Fourier-Airy. Ce sont des cas particuliers d'opérateurs plus généraux appelés opérateurs intégraux de Fourier, avec  $a_2, a_3 \in S_{1/3, 2/3}^0(\mathbb{R}^3)$ . Nous étudions maintenant de tels opérateurs dans un cadre général, en utilisant le théorème de la phase stationnaire. Nous aurons ainsi à définir ces intégrales de manière non formelle.

Notons que, sur  $\text{supp} a_2$ , on a  $|\theta| \geq 1$  et  $|\theta_1|^{\frac{2}{3}} - \theta_2^2 |\theta_1|^{-\frac{4}{3}} \geq \delta_2$ . Ceci permet de vérifier que  $Z_0 > 0$  et donc  $\xi_0^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}iZ_0^{\frac{3}{2}} \text{sign}(\theta_1)$  sur le support de  $a_2$ . On constate que, pour  $\lambda > 0$ ,

$$(\xi(\lambda\theta_1, \lambda\theta_2, x))^{\frac{3}{2}} = (|\lambda\theta_1|^{\frac{2}{3}} - (1+x)(\lambda\theta_2)^2 |\lambda\theta_1|^{-\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} = \lambda(\xi(\theta_1, \theta_2, x))^{\frac{3}{2}}.$$

Les fonctions  $\xi^{\frac{3}{2}}$  et  $\xi_0^{\frac{3}{2}}$  sont des fonctions homogènes de degré 1 en  $\theta$ , donc la fonction

$$\phi_x(y, z, \theta) = (y - z)\theta - \frac{2}{3}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}})$$

est homogène de degré 1 en  $\theta$ . C'est une des propriétés que nous exigeons de la phase généralisant l'expression (6.0.2).

Dans ce chapitre, nous définissons, pour  $a$  symbole quelconque, les intégrales de la forme (6.0.2), en utilisant les méthodes du chapitre 4 sur la phase stationnaire. La présentation de ce chapitre s'appuie essentiellement sur l'article fondateur de L. Hörmander [46], qui introduit l'analyse microlocale par l'intermédiaire des intégrales oscillantes, qui ne sont pas a priori définies mais que l'on va rendre convergentes. Nous présentons cette étude ici pour  $a \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^d)$ , mais cela est aisément généralisable à  $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^d)$ , pour  $\delta < 1$  et  $\rho > 0$  afin d'assurer les convergences après intégrations par parties multiples.

## 7.1 Définition des opérateurs intégraux de Fourier

On se place sur  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Nous donnons le résultat principal qui permet de définir un opérateur intégral de Fourier :

**Lemme 7.1** *Soit  $\phi(x, \theta)$  une phase, homogène de degré 1 en  $\theta$ , pour  $(x, \theta) \in X \times \mathbb{R}^N$ . On suppose qu'elle n'admet pas de point critique sur  $X \times \mathbb{R}^N - \{\theta = 0\}$ . Alors,*

(i) *pour  $v \in C_0^\infty(X)$ ,*

$$I_\phi(av) = \int_{X \times \mathbb{R}^N} e^{i\phi(x, \theta)} a(x, \theta) v(x) dx d\theta \quad (7.1.1)$$

*est définie pour tout symbole  $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^N)$ ,  $m < -N$ .*

(ii) *Pour tout  $m$ , l'application  $a \rightarrow I_\phi(av)$  se prolonge en une application continue sur  $S^m(X \times \mathbb{R}^N)$ .*

(iii) *Lorsque  $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^N)$ , l'application  $v \rightarrow I_\phi(av)$  est une distribution  $A(a, \phi)$  d'ordre  $\leq k$  pour  $m - k < -N$ .*

Commençons par un commentaire. Il est clair que lorsque  $a$  est un symbole d'ordre  $m \geq 1$ , par exemple  $a(x, \theta) = (1 + |\theta|^2)^{\frac{1}{2}}$ , l'intégrale sur  $x \times \mathbb{R}^N$  n'est pas normalement convergente, puisque  $(1 + |\theta|^2)^{\frac{1}{2}}$  n'est pas intégrable. Ainsi l'expression du ii) n'est pas celle d'une intégrale convergente dans  $L^1$ . En fait, cette convergence est le même type de convergence que celle de l'intégrale de la fonction *sincx* (sinus cardinal). L'objet de ce chapitre et des suivants est de donner un sens à ces intégrales qui ne sont définies que grâce à leur phase.

Le lemme 7.1.1 est dû à Hörmander [46]. Nous utilisons le fait qu'une application linéaire de  $C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$  dans un espace de Fréchet continue pour la topologie induite par  $S^m(X \times \mathbb{R}^N)$  admet une extension unique (Corollary 1.1.12 de [46]).

**Preuve** Soit  $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^N)$ ,  $m < -N$ . Comme, pour  $\phi$  réelle,

$$|e^{i\phi(x, \theta)} a(x, \theta) v(x)| \leq 1_{\text{Supp}v} \|v\|_\infty N_{0,0}^{\text{Supp}v}(a) (1 + |\theta|)^m,$$

l'intégrale (7.1.1) est bien définie car  $m < -N$  et  $\text{Supp}v$  compact. Pour définir, dans tous les cas sur  $m$ , une intégrale équivalente à  $I_\phi(av)$ , il faut donner une manière de calculer  $I_\phi(av)$  pour  $m \geq -N$ . Il s'agit d'étendre la définition de cette intégrale. Pour ce faire, nous utilisons la même méthode que dans la démonstration du théorème de la phase non stationnaire, énoncé dans le chapitre 4 sous la forme du lemme 4.3. Nous modifions légèrement l'argument en introduisant une fonction nous permettant d'éliminer le voisinage de 0, où les fonctions homogènes d'ordre négatif ne sont pas définies. Nous introduisons la fonction homogène en  $\theta$  de degré  $-2$

$$\psi(x, \theta) = [|\theta|^2 (\nabla_\theta \phi)^2 + (\nabla_x \phi)^2]^{-1}.$$

Soit  $\chi(\theta) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ , nulle au voisinage de  $\theta = 0$ . L'opérateur

$$M = -i(1 - \chi(\theta))\psi(x, \theta) \left[ \sum_j |\theta|^2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_p \frac{\partial \phi}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial x_p} \right] + \chi(\theta)$$

et son adjoint  $L$  qui s'écrit :

$$L = i(1 - \chi(\theta))\psi(x, \theta) \left[ \sum_j |\theta|^2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_p \frac{\partial \phi}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial x_p} \right] + \chi(\theta) - d(x, \theta)$$

( $d(x, \theta)$  construit avec tous les coefficients de  $M$ ) sont de la forme  $\sum a_j \partial_{\theta_j} + \sum b_p \partial_{x_p} + c$ , où les  $a_j$  sont des symboles d'ordre 0, les  $b_p$  et  $c$  sont d'ordre -1, et  $M e^{i\phi} = e^{i\phi}$ .

On a alors la relation, valable pour  $a \in S^m(x \times \mathbb{R}^N)$ ,  $m < -N$  :



$$I_\phi(av) = I_\phi(L^k(av))$$

pour tout  $k$ . On vérifie que  $a \rightarrow L^k(av)$  est continue de  $S^m(X \times \mathbb{R}^N) \rightarrow S^{m-k}(X \times \mathbb{R}^N)$ . Comme l'intégrale  $\int_{|\theta| \geq 1, \theta \in \mathbb{R}^N} (1+|\theta|)^{-N-\varepsilon} d\theta$  converge lorsque  $\varepsilon > 0$ , l'intégrale  $\int e^{i\phi(x,\theta)} b(x,\theta) d\theta$  est bien définie pour  $b$  d'ordre au plus  $-N$ .

Soit  $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^N)$  (et cette fois nous n'avons aucune hypothèse sur  $m$ ). Pour tout  $k$  tel que  $m - k < -N$ , c'est-à-dire pour  $k > m + N$ ,  $L^k(av) \in S^{m-k}(X \times \mathbb{R}^N)$ , donc  $I_\phi(L^k(av))$  existe. De plus, pour tous  $k, k' > m + N$ ,

$$I_\phi(L^{k'}(av)) = I_\phi(L^k(av)).$$

Ce nombre est donc indépendant de  $k > m + N$ . **Par définition**, on dit que

$$I_\phi(av) = I_\phi(L^k(av)), k > m + N.$$

C'est une intégrale convergente et continue en fonction de  $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^N)$ . L'intégrale  $I_\phi(av)$ , qui n'est pas définie de manière classique lorsque  $a$  n'est pas à support compact en  $\theta$ , est donc définie en utilisant les symboles et la relation d'intégrations par parties de la méthode de la phase non stationnaire.

Nous définissons ainsi une distribution :

**Définition 7.1** Pour  $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^N)$ , on définit l'application de  $C_0^\infty(X)$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$I_\phi(av) = I_\phi(L^k(av))$$

pour tout  $k$  vérifiant  $m - k < -N$ , l'intégrale de droite étant alors absolument convergente. Ceci est l'extension de la définition de (7.1.1) pour  $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^N)$ ,  $m < -N$ .

Les applications ainsi définies s'appellent les opérateurs intégraux de Fourier.

## 7.2 Front d'onde des opérateurs intégraux de Fourier

Dans la représentation

$$I_\phi(av) = \int \int e^{i\phi(x,\theta)} a(x,\theta) v(x) dx d\theta,$$

on peut considérer  $x$  comme la variable d'intégration. On définit

$$X_\phi = \{x, \forall \theta \in \mathbb{R}^N - \{0\}, \nabla_\theta \phi(x, \theta) \neq 0\}.$$

Pour tout  $x_0 \in X_\phi$ , le théorème de la phase stationnaire 4.3 permet de définir

$$\int e^{i\phi(x_0,\theta)} a(x_0,\theta) d\theta.$$

Il s'agit en effet d'une intégrale oscillante. On introduit à cet effet l'opérateur différentiel

$$M_{x_0} = i(1 - \chi(\theta)) |\nabla_\theta \phi(x_0, \theta)|^{-2} \sum_{j=1}^{j=N} \frac{\partial \phi}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \chi(\theta)$$

la fonction  $\chi$  ayant été introduite précédemment. L'adjoint de  $M_{x_0}$  pour le produit scalaire dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  est noté  $L_{x_0}$ ; il s'agit d'un opérateur différentiel d'ordre 1. La formule d'intégration par parties usuelle montre que

$$\int e^{i\phi(x,\theta)} L_x^k(a(x,\theta)) d\theta$$

est absolument convergente pour  $m - k < -N$ . Elle définit donc une distribution, notée formellement

$$A(x) = \int a(x, \theta) e^{i\phi(x, \theta)} d\theta$$

pour chaque  $x$  dans  $X_\phi$ .

On vérifie (exercice 7.1) que

$$e^{-i\phi(x, \theta)} \partial_{x^j}^j [L_x^k(a(x, \theta)) e^{i\phi(x, \theta)}]$$

est un symbole de  $S^{m-k+j}(X \times \mathbb{R}^N)$ . Lorsque  $k$  est choisi de sorte que  $m - k + p < -N$ , la fonction  $A(x)$  est de classe  $C^p$  sur tout compact inclus dans  $X_\phi$ . Comme le raisonnement est valable pour tout  $p$ , puisque pour  $k > m + N$  la définition de  $\int e^{i\phi} a d\theta$  ne change pas, on trouve que  $A(x)$  est  $C^\infty$  sur  $X_\phi$ . Rappelons que le support singulier d'une distribution  $A$ , noté  $SS(A)$ , est le complémentaire du plus grand ouvert  $O(A)$  où  $A$  est une fonction  $C^\infty$ . Nous avons la

**Proposition 7.1** *Soit  $A$  la distribution définie par*

$$\langle A, u \rangle = I_\phi(au).$$

1) *Le support singulier de  $A$  est contenu dans le complémentaire de  $X_\phi$ , c'est-à-dire*

$$\{x \in X, \exists \theta \in \mathbb{R}^N - \{0\}, \nabla_\theta \phi(x, \theta) = 0\}.$$

2) *Si  $a$  s'annule dans un voisinage conique de*

$$C = \{(x, \theta) \in X \times (\mathbb{R}^N - \{0\}), \nabla_\theta \phi(x, \theta) = 0\}$$

*alors  $A$  est une fonction de classe  $C^\infty$ .*

**Preuve** La distribution  $A$  est  $C^\infty$  sur  $X_\phi$ , donc  $X_\phi \subset O(A)$ . Ainsi  $SS(A)$ , complémentaire de  $O(A)$ , est contenu dans le complémentaire de  $X_\phi$ .

De plus, pour  $a$  nulle dans un voisinage conique de  $C$ , pour tout  $x$  dans la projection du support de  $a$ ,  $(x, \theta) \notin C$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}^N - \{0\}$ . Donc, si  $x$  est dans  $\pi(\text{supp}(a))$ ,  $x \in X_\phi$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  dans  $X$  pour lequel  $(y, \theta) \notin C$  pour tout  $y$  dans  $V$  et pour tout  $\theta \neq 0$ . Donc  $A$  est de classe  $C^\infty$  sur  $V(x)$ .

Soit  $x$  hors de  $\pi(\text{supp}(a))$ . Alors, si  $V_1$  est un voisinage de  $x$  tel que  $V_1 \times (\mathbb{R}^N - \{0\})$  est inclus dans le complémentaire du support de  $a$ , et que, par définition pour  $k$  tel que  $m - k < -N$

$$\int \int e^{i\phi(x, \theta)} a(x, \theta) u(x) dx d\theta = \int \int e^{i\phi(x, \theta)} L^k(a(x, \theta) u(x)) dx d\theta,$$

l'intégrale de droite est identiquement nulle puisque  $a$  est identiquement nulle sur  $V_1 \times \mathbb{R}^N - \{0\}$ . La distribution  $A$  est alors nulle sur le complémentaire de  $\pi(\text{supp}(a))$ .

En résumé,  $A$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $X$ . On l'appelle aussi opérateur de Fourier intégral.

On définit le front d'onde  $C^\infty$  d'une distribution  $A$  sur  $X \subset \mathbb{R}^N$ , que l'on note  $WF(A)$ , inclus dans  $X \times \mathbb{R}^N$  :

**Définition 7.2** *On dit que  $(x_0, \xi_0) \in X \times \mathbb{R}^N$  n'est pas dans le front d'onde de  $A$  si il existe une fonction  $\chi$ ,  $C^\infty$  à support compact, identiquement égale à un dans un voisinage de  $x_0$ , et un voisinage conique  $\Gamma$  de  $\xi_0$  dans  $\mathbb{R}^N$  telle que la transformée de Fourier de la distribution  $\chi A$  soit à décroissance rapide dans  $\Gamma$ .*

*En d'autres termes*

$$\forall p, \exists C_p, \forall \xi \in \Gamma, |\langle A(x), e^{-ix \cdot \xi} \chi(x) \rangle| \leq C_p (1 + |\xi|)^{-p}.$$

On a la

**Proposition 7.2** *Supposons que  $a$  soit nul près de  $\theta = 0$ . Alors le front d'onde de  $A(a, \phi)$  est inclus dans*

$$\{(x, \nabla_x \phi(x, \theta)), (x, \theta) \in \text{supp}(a), \nabla_\theta \phi(x, \theta) = 0\}$$

**Preuve** Pour prouver la Proposition 7.2, il faut montrer qu'un point du complémentaire de

$$\{(x, \nabla_x \phi(x, \theta)), (x, \theta) \in \text{supp}(a), \nabla_\theta \phi(x, \theta) = 0\}$$

n'est pas dans le front d'onde de  $A(a, \phi)$ . On considère donc en premier le cas où  $x$  vérifie  $\forall \theta, \nabla_\theta \phi(x, \theta) \neq 0$ . La Proposition 7.1 implique que la fonction  $A(x)$  est de classe  $C^\infty$  au voisinage de ce point. On se place donc dans le cas où il existe une solution à  $\nabla_\theta \phi(x, \theta) = 0$ . On suppose que  $\chi$  est une fonction de classe  $C^\infty$  à support compact localisée au voisinage d'un  $x$  de cette forme. On introduit  $\Gamma = \{\theta, \exists x \in \text{supp} \chi, \nabla_\theta \phi(x, \theta) = 0\}$  qui est donc un ensemble cône de  $\mathbb{R}^N$ . On considère  $K_1 = \{\nabla_x \phi(x, \theta), \theta \in \Gamma\}$  et  $K_2$  disjoint de  $K_1$ .

On trouve

$$\mathcal{F}(\chi A)(\xi) = \int \int e^{i\phi(x, \theta) - ix \cdot \xi} a(x, \theta) \chi(x) dx d\theta.$$

On considère ici  $\xi$  comme un paramètre. Alors le gradient de la phase en  $x$  est

$$\nabla_x \phi(x, \theta) - \xi.$$

Comme  $\theta \in \Gamma$  et  $\xi \in K_2$ ,  $K_1$  et  $K_2$  étant disjoints et  $\nabla_x \phi(x, \theta)$  est homogène en  $\theta$ , il existe  $C(K_1, K_2) > 0$  telle que

$$|\nabla_x \phi(x, \theta) - \xi| \geq C(K_1, K_2)(|\theta| + |\xi|).$$

On modifie le théorème de la phase stationnaire précédent en ne considérant que les variables  $x$ .

Il existe  $L$  opérateur différentiel en  $x$  tel que  ${}^t L(e^{i(\phi(x, \theta) - \xi \cdot x)}) = e^{i(\phi(x, \theta) - \xi \cdot x)}$ . On réécrit alors l'intégrale  $\mathcal{F}(\chi A)$  comme  $\mathcal{F}(L^k(\chi A))$  (notation condensée pour l'opérateur intégral de Fourier de même phase et de symbole  $L^k(\chi A)$ ). On vérifie que l'intégrand est alors majoré par

$$C(a)C(K_1, K_2)(|\xi| + |\theta|)^{-k}(1 + |\theta|)^m.$$

Lorsque  $k_0$  est fixé tel que  $m - k_0 < -N - 1$ , on vérifie que

$$\mathcal{F}(\chi A)(\xi) \leq c_1(k_0, K_1, K_2, a)|\xi|^{k_0 - k},$$

et la transformée de Fourier de  $\chi A$  est alors à décroissance rapide dans  $K_2$ . Ceci prouve qu'un point qui est à l'extérieur du cône fermé (ensemble des points  $(x, \nabla_x \phi(x, \theta))$ ) n'est pas dans le front d'onde de  $A$ . Les points du front d'onde sont, soit de la forme  $(x, \xi)$  où  $x$  n'est pas dans le support singulier de  $A$  (remarque au début), soit de la forme  $(x, \nabla_x \phi(x, \theta))$  et  $\nabla_\theta \phi(x, \theta) = 0$ .

Ceci termine notre preuve de la Proposition 7.2.

En donnant une forme particulière à la phase  $\phi$ , définie désormais pour  $X = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  et  $N = d$ , on définit un opérateur intégral de Fourier de symbole  $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^d)$  et de phase  $\phi(x, y, \theta) \in S^1(X \times X \times \mathbb{R}^d)$  par

**Définition 7.3** *Soit  $\phi(x, y, \theta)$  une phase telle que  $\nabla_{(x, \theta)} \phi \neq 0$  (pour  $\theta \neq 0$ ) et  $\phi$  homogène de degré 1 en  $\theta$ . Soit  $a(x, y, \theta) \in S^m(X \times X \times \mathbb{R}^d)$ . On appelle opérateur intégral de Fourier, de symbole  $a(x, y, \theta)$  et de phase  $\phi(x, y, \theta)$  l'opérateur de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}'$  défini par son action sur les fonctions  $u \in C_0^\infty(X)$  par*

$$\langle Au, \psi \rangle = I_\phi(a u \otimes \psi) = \int_{X \times X \times \mathbb{R}^d} e^{i\phi(x, y, \theta)} a(x, y, \theta) \psi(x) u(y) dy d\theta dx.$$

Un cas particulier de la définition précédente est obtenu lorsque  $\phi(x, y, \theta) = s(x, \theta) - y \cdot \theta$  et  $a(x, y, \theta) = \tilde{a}(x, \theta)$ ,  $X \subset \mathbb{R}^d$  :

**Définition 7.4** ( $X \subset \mathbb{R}^d$ )

Soit  $s(x, \theta)$  une phase telle que  $\nabla_x s(x, \theta) \neq 0$ , et  $a(x, \theta) \in S^m(X \times \mathbb{R}^d)$ . On introduit la phase  $\phi(x, y, \theta) = s(x, \theta) - y \cdot \theta$ .

On appelle opérateur de Fourier intégral de symbole  $a(x, \theta)$  et de phase  $s(x, \theta)$  l'opérateur de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}'$

$$u \rightarrow Au$$

défini par son action sur les fonctions de  $C_0^\infty$  par

$$\langle Au, \psi \rangle = \int \int e^{is(x, \theta)} a(x, \theta) \psi(x) \hat{u}(\theta) dx d\theta.$$

On vérifie que

$$\langle Au, \psi \rangle = I_\phi(a u \otimes \psi),$$

intégrale oscillante sur  $X \times X \times \mathbb{R}^N$ . On peut aussi écrire  $\langle Au, \psi \rangle = I_s((a\hat{u})\psi)$  utilisant la définition 7.1.

On a le résultat suivant sur l'opérateur de la définition 7.4 :

**Théorème 7.1** Soit  $A$  un opérateur intégral de Fourier associé à la phase  $\phi(x, y, \theta) = s(x, \theta) - y \cdot \theta$ . Alors  $(x, \xi) \in WF(Au)$ ,  $\xi \neq 0 \Rightarrow \exists \theta \neq 0$  tel que  $\xi = \nabla_x s(x, \theta)$  et  $(\nabla_\theta s(x, \theta), \theta) \in WF(u)$ .

Plus généralement, pour  $A$  opérateur intégral de Fourier suivant la définition 7.3,

$$WF(Au) \subset \{(x, \nabla_x \phi(x, y, \theta)), \nabla_\theta \phi(x, y, \theta) = 0\}.$$

Ce théorème est la version front d'onde d'opérateur de la Proposition 7.2 (Proposition 2.5.7 de [46]).

Prouvons ce Théorème. On se donne un point  $(x_0, \xi_0)$  de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d - \{\xi = 0\}$  et on définit l'ensemble fermé  $G$  des  $\theta \neq 0$  tels que  $\xi_0 = \nabla_x s(x_0, \theta)$ . Supposons que pour tout  $\theta$  de la sorte,  $(\nabla_\theta s(x_0, \theta), \theta)$  n'est pas dans  $WF(u)$ . Il existe alors deux voisinages coniques de  $G$ ,  $\Gamma \subset \Gamma'$ , et un voisinage conique  $W$  de  $\xi_0$  tels que, pour  $x - x_0$  suffisamment petit,  $\theta \notin \Gamma$ ,  $\xi \in W$ ,  $|\nabla_x s(x, \theta) - \xi| \geq C(|\theta| + |\xi|)$ , et  $(\nabla_\theta \phi(x, \theta), \theta) \notin WF(u)$  pour  $x - x_0$  assez petit et  $\theta \in \Gamma'$ ,  $a(x, \theta) \neq 0$  sur  $\Gamma'$ .

On représente  $J(\xi) = \mathcal{F}(\chi_1 Au)(\xi) = \int \int \int e^{i(s(x, \theta) - x \cdot \xi - y \cdot \theta)} a(x, \theta) u(y) \chi_1(x) dx dy d\theta$  et on prouve la décroissance rapide en  $\xi$  de  $J(\xi)$ .

Le seul cas intéressant est au voisinage des points  $\mathcal{F}(u)(\theta)$  pour  $u$  localisée au voisinage de  $y$  et  $\nabla_\theta s(x, \theta) - y \neq 0$ . Alors on applique une version du théorème de la phase stationnaire en intégrant par parties en  $\theta$ . Le théorème est démontré.

Nous verrons dans le chapitre 9 que le front d'onde de l'opérateur  $A$  définit la classe des opérateurs intégraux de Fourier de même type que  $A$ , associés à la même phase. La phase sera liée à ce que l'on nommera relation canonique  $\mathcal{C}$  de  $A$ , et on notera  $A \in I(X \times X, \mathcal{C}')$ . On démontrera en particulier que tout opérateur intégral de Fourier associé à une phase  $\phi(x, y, \theta)$  peut se mettre, dans un système de coordonnées adéquat, sous la forme d'un opérateur intégral de Fourier associé à une phase  $s(x, \theta) - y \cdot \theta$ .

# Chapitre 8

## Les opérateurs pseudo-différentiels

### 8.1 Définition et propriétés élémentaires

Les notions de ce chapitre sont classiques. Beaucoup d'auteurs ont présenté la théorie des opérateurs pseudo-différentiels, parmi lesquels J. Sjostrand et A. Grigis [42], S. Alinhac et P. Gérard [3], L. Boutet de Monvel [16]), L. Hörmander [47], M. Taylor [93], J.J. Kohn et L. Nirenberg [54]... Nous supposons que  $X \subset \mathbb{R}^d$  est l'espace sur lequel nous travaillons. Nous visons à construire un **calcul symbolique** sur l'espace de symboles  $S^m(X \times X \times \mathbb{R}^d)$ , généralisant ainsi la composition des opérateurs différentiels et autorisant l'inversion d'un certain nombre d'opérateurs différentiels.

Les opérateurs pseudo-différentiels sont construits, comme le fait Hörmander, comme un cas particulier des opérateurs intégraux de Fourier. Cette présentation ne reflète pas l'historique, dans laquelle les opérateurs pseudo-différentiels ont été introduits en premier par l'intermédiaire de leur symbole et du calcul symbolique. Nous déduisons ici le calcul symbolique du théorème de la phase stationnaire et non de la généralisation du calcul de la composée pour deux opérateurs différentiels.

Nous introduisons donc une phase particulière dans les opérateurs intégraux de Fourier définis précédemment. La phase est alors définie pour  $(x, y, \xi) \in X \times X \times \mathbb{R}^d$  par :

$$\phi(x, y, \xi) = (x - y) \cdot \xi = \sum_j (x_j - y_j) \xi_j.$$

Alors on a la définition :

**Définition 8.1** *A tout symbole  $a \in S^m(X \times X \times \mathbb{R}^d)$  est associé un opérateur intégral de Fourier particulier, appelé opérateur pseudo-différentiel associé à  $a$ , noté  $A$  ou  $Op(a)$ , défini par*

$$Op(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi,$$

*défini pour  $u \in C_0^\infty(X)$ . L'ensemble de ces opérateurs pseudo-différentiels est noté  $L^m(X)$ . A l'ordre  $m$  du symbole correspond l'ordre  $m$  de l'opérateur.*

**Définition 8.2** *On dit qu'un opérateur  $A : C_0^\infty(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$  linéaire continu, qui admet un noyau de distribution  $K_A(x, y) \in \mathcal{D}'(X \times X)$  est régularisant lorsque  $K_A(x, y) \in C_0^\infty(X \times X)$ .*

**Lemme 8.1** *A est régularisant est équivalent à A se prolonge en un opérateur de  $\mathcal{E}'(X)$  sur  $C^\infty(X)$ .*

On en déduit que les opérateurs régularisants sont, à peu de chose près, les opérateurs pseudo-différentiels dont le symbole est dans  $S^{-\infty}$  :

**Proposition 8.1** *Si  $A$  est un opérateur régularisant, alors il existe un symbole  $a(x, y, \theta)$  de  $S^{-\infty}(X \times X \times \mathbb{R}^d)$  tel que*

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int e^{i(x-y)\cdot\theta} a(x, y, \theta) u(y) dy d\theta.$$

**Preuve** On sait que, pour  $u \in C_0^\infty$ ,

$$Au(x) = \int K_A(x, y) u(y) dy.$$

(que l'on écrit aussi  $\langle Au, \phi \rangle = \langle K_A, u \otimes \phi \rangle$ ). Ainsi, si  $u$  est régularisant, il n'y a aucun problème pour définir sous la forme intégrale la fonction  $C^\infty$   $Au$ .

On introduit une fonction  $\chi(\theta)$ , de classe  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , d'intégrale égale à  $(2\pi)^n$ . On construit alors

$$a(x, y, \theta) = K_A(x, y) e^{-i(x-y)\cdot\theta} \chi(\theta).$$

Ce symbole est dans  $S^{-\infty}(X \times X \times \mathbb{R}^d)$ , car la fonction est à support compact en  $\theta$  et il est clair que

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int e^{i(x-y)\cdot\theta} a(x, y, \theta) u(y) dy d\theta.$$

Soit  $A$  un opérateur pseudo-différentiel, comme dans la définition 8.1. Alors la distribution  $Au$  est définie par son action sur une fonction test  $\psi$  par

$$\langle Au, \psi \rangle = I_\phi(a\psi \otimes u)$$

où  $a(x, y, \xi) \in S^m(X \times X \times \mathbb{R}^d)$  et  $\psi \otimes u \in C_0^\infty(X \times X)$ , définie par  $(\psi \otimes u)(x, y) = \psi(x)u(y)$ . Les propriétés de la phase  $(x - y)\cdot\xi$  donnent immédiatement :

**Lemme 8.2** 1. *Soit  $P$  un opérateur différentiel à coefficients variables*

$$P = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq m} i^{-|\alpha|} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha.$$

*L'opérateur pseudo-différentiel de symbole*

$$p(x, \xi) = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

*est égal à  $P$ .*

2. *Les espaces  $X_\phi$  et  $C$  introduits dans la Proposition 7.1 sont respectivement*

$$X_\phi = \{(x, y), x \neq y \in X \times X\} \quad C = \{(x, x, \xi), x \in X, \xi \in \mathbb{R}^d - \{0\}\}.$$

3. *Comme  $\nabla_{(x, \xi)}((x - y)\cdot\xi) \neq 0$  sur  $X \times (\mathbb{R}^d - \{0\})$  pour tout  $y \in X$ , la distribution*

$$A(y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, y, \xi) dx d\xi$$

*est bien définie comme intégrale oscillante.*

4. *De même,  $\nabla_{(y, \xi)}((x - y)\cdot\xi) \neq 0$  implique que l'application*

$$u \rightarrow I_\phi(au)$$

*est continue de  $C_0^\infty(X)$  dans  $C^\infty(X)$ .*

Nous prouvons le premier alinéa, en notant que le symbole 1 est associé à l'opérateur identité, grâce à la formule d'inversion de Fourier

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \int e^{i(x-y) \cdot \xi} u(y) dy d\xi.$$

Appliquant alors  $P$  à cette égalité, on peut intervertir, pour  $\hat{u} \in \mathcal{S}$ , l'intégration en  $\xi$  et la dérivation en  $x$ , donc

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ix \cdot \xi} \sum_{\alpha, |\alpha| \leq m} i^{-|\alpha|} (i\xi)^\alpha a_\alpha(x) \hat{u}(\xi) d\xi,$$

ce qui donne le résultat. Un argument de densité permet de conclure. La démonstration des autres alinea est une simple application de la proposition 7.1.

## 8.2 Composition de deux opérateurs pseudo-différentiels

On introduit, dans un premier temps, une notion d'opérateur proprement supporté, pour que l'on puisse composer deux opérateurs pseudo-différentiels. En effet, si  $u \in C_0^\infty(X)$ , alors  $Bu \in \mathcal{D}'(X)$ , et on ne peut pas en principe appliquer, pour  $A$  opérateur pseudo-différentiel quelconque,  $A$  à  $Bu$ , car  $Bu$  n'est pas à support compact. Il est donc nécessaire d'étendre au moins certains opérateurs pseudo-différentiels sur  $C^\infty(X)$ . La notion suffisante pour cela est donnée ci-dessous.

### 8.2.1 Opérateurs proprement supportés.

On remarque que, pour  $u \in C_0^\infty(X)$ , on peut écrire

$$Au(x) = \int K_A(x, y) u(y) dy$$

avec l'égalité formelle définissant la distribution  $K_A(x, y) \in \mathcal{D}'(X \times X)$

$$K_A(x, y) = \int e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, y, \xi) d\xi.$$

La distribution  $K_A$  s'appelle le noyau distribution de  $A$ . Il a été défini précédemment.

On souhaite d'abord étendre la définition de l'opérateur de Fourier intégral pour ne plus se restreindre à  $u \in C_0^\infty$ . Pour cela, on considère  $l \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  et on vérifie que l'on peut définir sans problème  ${}^tAl(y) = \int K_A(x, y) l(x) dx$ . Il s'agit d'une fonction de classe  $C^\infty$  par le lemme 8.2. On peut alors définir, pour  $u \in \mathcal{E}'$ ,  $\langle u, {}^tAl \rangle$ . Par définition on dit, pour  $u \in \mathcal{E}'$ , que  $Au$  est la distribution donnée par

$$\langle Au, l \rangle = \langle u, {}^tAl \rangle.$$

**Lemme 8.3** 1) *Le support singulier de  $K_A$  est contenu dans la diagonale de  $X \times X$ .*

2) *Le support singulier de  $Au$  est inclus dans le support singulier de  $u$ .*

**Preuve** L'application de la proposition 7.1 permet de vérifier le premier alinéa. Pour le second alinéa, soit  $x_0 \notin SS(u)$ , on peut trouver  $\phi$  identiquement égale à 1 près de  $x_0$  et  $\psi$  identiquement égale à 1 près de  $SS(u)$ , de supports disjoints.

Comme  $(1 - \psi)u$  est une fonction  $C^\infty$ , la fonction  $A((1 - \psi)u)$  est  $C^\infty$ , donc  $Au - A\psi u \in C^\infty(X)$ .

On vérifie aussi que  $\phi A\psi$  a pour noyau de distribution  $\phi(x)K_A(x, y)\psi(y)$ , et comme les supports de  $\phi$  et de  $\psi$  sont disjoints, il n'y a aucun point du support singulier de  $K_A$  dans le support de  $\phi \otimes \psi$ . Le noyau  $\phi(x)K_A(x, y)\psi(y)$  est donc  $C^\infty$ , donc

$$\phi(x)A(\psi u)(x) \in C^\infty(X)$$

et donc

$$\phi(x)Au(x) \in C^\infty(X).$$

On en déduit immédiatement que  $x_0 \notin SS(Au)$ . Ceci achève la démonstration du lemme 8.3.

Pour chaque  $y \in X$ , on définit  $C(y) = \{x \in X, (x, y) \in \text{Supp}(K_A)\}$  et, pour  $x \in X$ ,  $C^{-1}(x) = \{y \in X, (x, y) \in \text{Supp}(K_A)\}$ . On définit de manière similaire  $C(K)$  et  $C^{-1}(K)$  lorsque  $K$  est un ensemble.

**Définition 8.3** *L'opérateur pseudo-différentiel  $A$  est proprement supporté si et seulement si, pour tout compact  $K$  de  $X$ ,  $C(K)$  et  $C^{-1}(K)$  sont compacts.*

De cette définition, on déduit les propriétés agréables suivantes :

**Lemme 8.4** *Soit  $A$  proprement supporté*

1. *On a l'inclusion*

$$\text{Supp}(Au) \subset C(\text{supp}(u)).$$

2.  $C^{-1}(x_0) \cap \text{supp}(u) = \emptyset \Rightarrow Au = 0$  dans un voisinage de  $x_0$ .

3.  $A$  est continu de  $C_0^\infty(X)$  dans lui-même. Il se prolonge, comme cela a été fait plus haut pour l'extension d'un opérateur pseudo-différentiel quelconque, en un opérateur continu de  $C^\infty(X)$  dans  $C^\infty(X)$ , de  $\mathcal{E}'$  dans  $\mathcal{E}'$ , de  $\mathcal{D}'$  dans  $\mathcal{D}'$ .

En d'autres termes, l'action de  $A$  n'étend pas trop le support, ce qui lui permet de ressembler plus à un opérateur différentiel. Ceci est relatif : en effet la taille du support de  $Au$  peut être "bien plus grande" (par exemple pour une métrique sur  $\mathbb{R}^d$ ) que celle du support de  $u$ , mais le support de  $Au$  reste compact. Le deuxième alinéa du lemme indique que si le support de  $u$  est loin de  $x_0$ , alors  $Au$  est nulle près de  $x_0$ . Tout opérateur pseudo-différentiel est, à peu de chose près, proprement supporté. Ceci s'exprime dans la :

**Proposition 8.2** *Pour tout  $A \in L^m(X)$ , il existe  $A' \in L^m(X)$ , proprement supporté, et  $A'' \in L^{-\infty}(X)$  tels que  $A = A' + A''$ .*

L'idée est bien sûr d'écrire  $A = A\psi + A(1 - \psi)$ , où  $\psi$  aura des propriétés de localisation. On cherche de plus à construire  $1 - \psi$  nulle dans un voisinage de la diagonale. De plus, il suffit que le support de  $\psi$  définisse une relation, dans le sens où  $C(K)$  et  $C^{-1}(K)$  sont compacts.

Nous reprenons une construction classique, telle que celle présentée par J. Sjostrand dans le cours de DEA [42]. Soit une partition de l'unité de  $X$  localement finie (finie sur tout compact), c'est-à-dire

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j(x) \Rightarrow 1 = \sum_{j,k} \chi_j(x)\chi_k(y).$$

Si  $C$  est construit à partir de cette partition de l'unité localement finie dans  $X \times X$ , alors ceci assure que  $C(K)$  est compact, puisqu'il existe un nombre fini de  $\chi_j$  non nulles sur  $K$ .

On veut que  $1 - \psi$  soit nulle sur la diagonale, donc on impose pour  $1 - \psi$  que les termes restants vérifient  $\text{supp}\chi_j \cap \text{supp}\chi_k = \emptyset$ . Il est clair que l'on prend

$$\psi(x, y) = \sum_{j,k, \text{supp}(\chi_j) \cap \text{supp}(\chi_k) \neq \emptyset} \chi_j(x)\chi_k(y).$$

L'opérateur  $\psi A$  est proprement supporté puisque  $C(K)$  et  $C^{-1}(K)$  sont compacts (somme localement finie). Il reste à montrer pour achever la construction que  $(1 - \psi)A \in L^{-\infty}$ . Il s'agit d'une conséquence du premier alinéa du lemme 8.3, car  $SS(K_{(1-\psi)A}) = \emptyset$ .



**Remarque** Notons que des opérateurs dont le symbole est dans  $S^{-\infty}$  peuvent cependant être des opérateurs régularisants : en effet par exemple, le symbole  $(1 - \chi(x, y))\xi^m$  est dans  $S^m(X \times X \times \mathbb{R}^n)$  (et pas dans  $S^{m-1}$ , donc pas dans  $S^{-\infty}$ ). En revanche, l'opérateur pseudo-différentiel associé s'écrit

$$Pu(x) = \int dy(1 - \chi(x, y))u(y) \frac{1}{(2\pi)^n} \int \xi^m e^{i(x-y)\cdot\xi} d\xi,$$

ce qui donne

$$Pu(x) = \langle i^m \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \delta_{x-y}, (1 - \chi(x, y))u(y) \rangle.$$

Comme  $\chi$  a été construite comme étant identiquement égale à 1 dans un voisinage de la diagonale,  $P$  est l'opérateur nul, donc est régularisant. Donc, lorsque  $A$  est régularisant, il existe un symbole  $a \in S^{-\infty}$  tel que  $A$  soit l'opérateur de symbole  $a$ , mais cela ne veut pas dire que tout symbole  $a$  représentant  $A$  soit dans  $S^{-\infty}$ . Cette remarque prouve aussi qu'il n'est pas nécessaire que le symbole soit nul pour que l'opérateur pseudo-différentiel soit nul.

### 8.2.2 Réduction des opérateurs pseudo-différentiels

Les opérateurs pseudo-différentiels peuvent être représentés par des symboles ne dépendant que de  $x$  et de  $\xi$ , comme le montre le résultat suivant :

**Proposition 8.3** *Soit  $P$  l'opérateur pseudo-différentiel proprement supporté de symbole  $p(x, y, \xi)$  dépendant des variables  $(x, y, \xi)$  d'ordre  $m$  sur  $X \times X \times \mathbb{R}^d$ . La dimension locale de  $X$  est  $d$ , soit par exemple  $X \subset \mathbb{R}^d$ .*

1) *Il existe un symbole  $q(x, \xi)$ , d'ordre  $m$  sur  $X \times \mathbb{R}^d$  tel que  $P - Op(q)$  soit un opérateur dans  $L^{-\infty}(X)$ .*

2) *Ce symbole  $q(x, \xi)$  est donné par la relation*

$$q(x, \xi) = e^{-ix\cdot\xi} P(e^{i(\cdot)\cdot\xi})$$

*puisque  $P$  est proprement supporté*

3) *Le symbole  $q$  admet comme développement asymptotique*

$$q(x, \xi) \simeq \sum_{|\alpha| \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha \partial_y^\alpha p(x, y, \xi))|_{y=x}.$$

Ce lemme permet de définir le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel proprement supporté :

**Définition 8.4** *Soit  $P$  l'opérateur pseudo-différentiel proprement supporté de symbole  $p(x, y, \xi)$ . On appelle symbole de  $P$ , et on note  $\sigma(P)$ , le symbole de  $S^m(X \times \mathbb{R}^d)$  égal à  $q(x, \xi)$ . Ce symbole de  $P$  est défini de manière unique dans l'espace quotient  $S^m(X \times \mathbb{R}^d)/S^{-\infty}$ .*

**Preuve** La preuve de ce résultat est par exemple dans [42]. Nous proposons dans l'exercice 1 une preuve formelle s'appuyant sur le théorème de la phase stationnaire. Ce calcul formel est une application directe des méthodes du chapitre précédent. La démonstration proposée dans [42] est la suivante :

On se restreint à un opérateur proprement supporté sur le support en  $(x, y)$  de  $p$ . L'opérateur  $P$  s'étend aux fonctions de  $C^\infty$ , donc l'intégrale définissant l'action de  $P$  sur  $e^{i(\cdot)\cdot\xi}$  est bien définie. Finalement

$$e^{-ix\cdot\xi} P(e^{i(\cdot)\cdot\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \int p(x, y, \eta) e^{i(x-y)\cdot(\eta-\xi)} dy d\eta.$$

Le seul point critique en  $(y, \eta)$  de cette phase est  $(x, \xi)$ . On tronque donc au voisinage de  $\eta - \xi$  de l'ordre de  $\xi$ . Pour cela, J. Sjostrand introduit la fonction  $L$  sur  $\mathbb{R}_+$ , identiquement égale

à 0 pour  $x \geq 0.5$ , identiquement égale à 1 pour  $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ . On vérifie comme dans la preuve de la proposition 7.2 que, grâce au théorème de la phase non stationnaire (avec l'opérateur  $\mathcal{L} = \frac{1}{|\eta-\xi|} \sum_{j=1}^{j=d} (\xi_j - \eta_j) \frac{\partial}{\partial y_j}$ )

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int \int (1 - L(\frac{|\eta-\xi|}{|\xi|})) p(x, y, \eta) e^{i(x-y) \cdot (\eta-\xi)} dy d\eta.$$

est un symbole de  $S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^d)$ . Ceci est proposé en exercice dans le chapitre 6.

Nous nous sommes alors ramenés, par changement de variable évident, à l'étude de

$$I(x, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \int p(x, x+s, \xi+\sigma) L(\frac{|\sigma|}{|\xi|}) e^{-is\sigma} ds d\sigma.$$

Sur cette intégrale, le calcul de la phase stationnaire fait en exercice est valide, et nous avons donc le développement asymptotique en  $\lambda$  de l'intégrale obtenue lorsque  $\xi = \lambda\omega$ ,  $|\omega| = 1$  et  $\sigma = \lambda\tau$ . Il suffit de vérifier que cela définit bien un développement asymptotique en écrivant

$$I(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq N-1} \lambda^{-|\alpha|} i^{-|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \partial_s^\alpha \partial_\sigma^\alpha (p(x, x+s, \lambda(\omega+\tau)) L(|\tau|))|_{s=\tau=0} + S_N(\lambda).$$

On majore  $\lambda^N S_N(\lambda)$  par toutes les dérivées de  $p(x, x+s, \lambda(\omega+\tau)) L(|\tau|)$  jusqu'à l'ordre  $2N+1$  inclus.

Le résultat est aussi vrai pour toutes les dérivées de  $I$ . Ceci achève le calcul puisque le symbole  $e^{-ix\xi} P(e^{i(\cdot)\xi})$  est donc équivalent, modulo  $S^{-\infty}$ , à  $I(x, \xi)$ .

**Une autre preuve** Nous proposons ici une autre démonstration du lemme 8.3, s'appuyant sur les propriétés des symboles, extraite de Hörmander [46]. L'idée s'appuie aussi sur le calcul de transformée de Fourier précédent. On écrit

$$u(y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\eta) e^{iy \cdot \eta} d\eta.$$

Ainsi

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\eta) \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{iy \cdot \eta} e^{i(x-y) \cdot \theta} p(x, y, \theta) dy d\theta.$$

Comme le symbole  $p$  est proprement supporté, on peut calculer son action sur la fonction exponentielle. On peut aussi, sans diminuer la généralité, supposer le support de  $p$  en  $(x, y)$  compact inclus dans  $\|x-y\| \leq 2$ . Ainsi, le symbole de  $P$  est

$$\sigma(P)(x, \eta) = e^{-ix \cdot \eta} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{iy \cdot \eta} e^{i(x-y) \cdot \theta} p(x, y, \theta) dy d\theta.$$

Si on note  $u = x - y$ ,  $\xi = \theta - \eta$ , alors

$$\sigma(P)(x, \eta) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} p(x, x+u, \xi+\eta) e^{-iu \cdot \xi} dy d\theta.$$

On voit apparaître la transformée de Fourier de la fonction  $q(x, u, \zeta) = p(x, x+u, \zeta)$ . Cette transformée de Fourier est  $\hat{q}(x, \theta, \zeta)$ . Le symbole  $p \in S^m$ , ainsi

$$\partial_x^\alpha [(\theta)^\beta \partial_\zeta^\gamma \hat{q}(x, \theta, \zeta)] = \int \partial_\zeta^\gamma \partial_x^\alpha [p(x, x+u, \zeta)] \theta^\beta e^{-iu \cdot \theta} du.$$

Le terme  $\theta^\beta e^{-iu \cdot \theta}$  se transforme, en supposant  $p$  localisée pour  $\|x-y\| \leq 2$  (ceci a déjà été fait) en utilisant des intégrations par parties en  $u$ . Ainsi, comme  $p \in S^m$ , le support de  $p$  en variable  $(x, y)$  étant compact, on vérifie qu'il existe une constante  $C_{\alpha, \beta, \gamma}$  telle que

$$\left| \int \partial_\zeta^\gamma \partial_x^\alpha [p(x, x+u, \zeta)] \theta^\beta e^{-iu \cdot \theta} du \right| \leq C_{\alpha, \beta, \gamma} (1 + |\zeta|)^{m-|\gamma|}.$$

Cette majoration est vraie pour tout  $\beta$ , donc il existe, pour tout  $p, \gamma, \alpha$  une constante  $C_{p, \gamma, \alpha}$  telle que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\zeta^\gamma \hat{q}(x, \theta, \zeta)| \leq C_{p, \alpha, \gamma} (1 + |\zeta|)^{m-|\gamma|} (1 + |\theta|)^{-p}.$$

On écrit alors un développement de Taylor de  $\hat{q}(x, \theta, \zeta)$  au voisinage de  $\zeta = \eta$ . Il vient

$$|\hat{q}(x, \theta, \tilde{\theta} + \eta) - \sum_{|\alpha| < N} \partial_\eta^\alpha \hat{q}(x, \theta, \eta) \frac{\tilde{\theta}^\alpha}{\alpha!}| \leq C_M |\tilde{\theta}|^N \int_0^1 dt (1 + |\eta + t\tilde{\theta}|)^{m-N} (1 + |\theta|)^{-M}.$$

On choisit dans cette inégalité  $\tilde{\theta} = \theta$ , et on coupe le majorant en deux, en différenciant la zone  $|\theta| < \frac{|\eta|}{2}$  et son complémentaire, choisissant  $M = N$  dans la première, et  $M$  assez grand dans la deuxième. Ainsi, intégrant par rapport à  $\theta$  cette inégalité, on trouve

$$|\sigma(P)(x, \eta) - (2\pi)^n \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\eta^\alpha \int d\eta \hat{q}(x, \theta, \eta) \theta^\alpha d\theta| \leq C(1 + |\eta|)^{m+n-N}.$$

On effectue le calcul dans l'intégrand, la puissance de  $\theta$  se transforme en une dérivée en  $y$  utilisant la formule d'inversion de Fourier

$$i^{-|\alpha|} \partial_y^\alpha q(x, y, \eta)|_{y=x} = (2\pi)^n \int_{\mathbf{R}^n} e^{iy \cdot \theta} \theta^\alpha \hat{q}(x, \theta, \eta) d\theta.$$

On a construit une suite  $a_j$  (en isolant la somme correspondant aux  $|\alpha| = j$ ) de symboles de  $S^{m-j}$  telle que

$$\begin{aligned} |a - \sum_{j < N} a_j| &\leq C(1 + |\eta|)^{\mu-j} \\ |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta a| &\leq C(1 + |\eta|)^\mu. \end{aligned}$$

Nous sommes dans le cadre d'application de la proposition 6.4, ce qui implique le résultat :

**Lemme 8.5** *Soit  $p$  un symbole de  $S^m(X \times X \times \mathbf{R}^n)$ , proprement supporté. Le développement asymptotique de sa transformée de Fourier est donné par*

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} p(x, y, \eta) e^{i(x-y) \cdot \eta} dy d\eta \simeq \sum_\alpha \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} \partial_{\eta^\alpha}^2 p|_{y=x}.$$

On peut vérifier que le résultat formel est une conséquence du théorème de la phase stationnaire, mais dans ce cas, où la phase est sympathique, on utilise uniquement l'analyse de Fourier pour calculer le développement.

### 8.2.3 Produit de composition des symboles

Nous définissons un calcul dans l'algèbre des symboles, où le symbole de la composée de  $A$  et de  $B$  n'est pas défini par un produit usuel, mais par un calcul symbolique adapté, noté par le symbole  $\sharp$  :

$$\sigma(A \circ B) = \sigma(A) \sharp \sigma(B)$$

et défini par l'intermédiaire de la proposition qui suit

**Proposition 8.4** *Soit  $A \in L^m(X)$ ,  $B \in L^p(X)$ . On suppose que l'un au moins des deux est proprement supporté. Alors*

$$A \circ B \in L^{m+p}(X)$$

$$\sigma(A \circ B)(x, \xi) \simeq \sum_\alpha \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma(A)(x, \xi) \partial_x^\alpha \sigma(B)(x, \xi) \quad (8.2.1)$$

Alors, par définition, dans l'espace quotient  $S^{m+p}(X \times \mathbb{R}^d)/S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^d)$ ,

$$\begin{aligned}\sigma(A)\sharp\sigma(B) &= \sigma(A \circ B) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \sigma(A)(x, \xi) \partial_x^{\alpha} \sigma(B)(x, \xi).\end{aligned}$$

**Preuve** On suppose que, pour  $u \in C_0^{\infty}(X)$ ,  $B$  est proprement supporté, soit

$$Bu(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ix \cdot \xi} b(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \in C^{\infty}(X).$$

Comme  $Bu \in C_0^{\infty}$ , alors  $A(Bu)$  existe quel que soit  $A$ . Si on suppose maintenant que  $A$  est proprement supporté, il s'étend continument sur  $C^{\infty}(X)$ , en particulier il peut agir sur  $Bu$  quel que soit  $B$  et quel que soit  $u \in C_0^{\infty}(X)$ .

On écrit, comme dans la preuve de la proposition 8.2, si  $A$  est propre

$$A = A' + A''$$

où  $A'$  est proprement supporté et  $A'' \in L^{-\infty}(X)$ . Alors  $A \circ B \simeq A' \circ B$  puisque  $B$  est proprement supporté. De même, si  $A$  est propre, on écrit  $B = B' + B''$ ,  $B''$  est régularisant donc  $A \circ B''$  est régularisant.

Pour être plus précis, on a à évaluer  $\int K_{A'}(x, z) K_B(z, y) dz$  lorsque  $A'$  est proprement supporté et  $B$  est régularisant, et à montrer que cette intégrale est  $C^{\infty}(X \times X)$ . Si  $x$  est dans un compact, alors  $K_{A'}(x, z)$  est non nul uniquement sur un compact  $C_0$  en  $z$ , l'intégrale est au moins  $C^{\infty}$  dans la variable  $y$ . Comme  $A$  est un opérateur pseudo-différentiel qui a un symbole dans  $S^m$ ,  $A'$ , construit ci-dessus, est aussi un opérateur pseudo-différentiel dont un symbole est dans  $S^m$ , et comme  $z$  est dans  $C_0$  compact, l'intégrale  $\int K_{A'}(x, z) K_B(z, y) dz$  se calcule comme l'action de l'opérateur pseudo-différentiel  $A'$  sur la fonction de  $C_0^{\infty}$  en  $z$   $K_B(z, y)$ . Le résultat est dans  $C_0^{\infty}$ , donc on a montré que  $\int K_{A'}(x, z) K_B(z, y) dz$  est dans  $C^{\infty}$ .

Ainsi

$$(A' \circ B)(u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{3d}} e^{i(x-y) \cdot \xi} e^{iy \cdot \eta} \sigma(B)(y, \eta) \hat{u}(\eta) d\eta \sigma(A)(x, \xi) dy d\xi.$$

Comme on conserve le  $\hat{u}(\eta)$ , il est naturel de conserver la variable  $\eta$  et d'éliminer les variables  $(y, \xi)$ . Un calcul de point critique prouve que le point critique de la phase dans cette intégrale est pour  $y = x$ ,  $\xi = \eta$  et que la valeur critique est  $x \cdot \eta$ . Il vient ainsi

$$(A' \circ B)(u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \eta} \hat{u}(\eta) d\eta \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-y) \cdot (\xi-\eta)} \sigma(B)(y, \eta) \sigma(A)(x, \xi) dy d\xi.$$

On introduit  $u$  et  $\theta$  tels que  $y = x + u$ ,  $\theta = \xi - \eta$ . Il reste

$$\sigma(A' \circ B)(x, \eta) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-iu\theta} \sigma(B)(x + u, \eta) \sigma(A)(x, \eta + \theta) du d\theta.$$

Le symbole  $p(x, u, \eta, \theta) = \sigma(B)(x + u, \eta) \sigma(A)(x, \eta + \theta)$  est un symbole vérifiant  $p \in S^m(X^2 \times \mathbb{R}^{2d})$ . Nous sommes donc dans le cadre d'application du lemme 8.5. On a ainsi

$$\sigma(A' \circ B) \simeq \sigma(A \circ B) \simeq \sum_{\alpha} \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} \partial_u^{\alpha} \partial_{\theta}^{\alpha} p(x, 0, \eta, \eta) \simeq \sum_{\alpha} \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \sigma(A)(x, \eta) \partial_y^{\alpha} \sigma(B)(x, \eta).$$

## 8.2.4 front d'onde des opérateurs pseudo-différentiels

**Définition 8.5** Soit  $A$  un opérateur pseudo-différentiel de  $L^m(X)$ , dont le symbole principal est  $\sigma_A$ . Le front d'onde de  $A$ , noté  $WF(A)$ , est le plus petit cône  $\Gamma \subset T^*X - 0$  tel que  $\sigma_A|_{CT} \in S^{-\infty}(CT)$

**Définition 8.6** Soit  $K$  un noyau intégral de  $\mathcal{D}'(Y, X)$ . Il lui est associé un opérateur de  $C^\infty(X)$  dans  $\mathcal{D}'(Y)$ . On introduit

$$WF'(K) = \{(x, \xi; y, -\eta) \in T^*(X \times Y) - 0, (x, \xi; y, \eta) \in WF(K)\}$$

$$WF'_X(K) = \{(x, \xi) \in T^*X - 0, (x, \xi; y, 0) \in WF'(K)\}$$

$$WF'_Y(K) = \{(y, \eta) \in T^*Y - 0, (x, 0; y, \eta) \in WF'(K)\}$$

On peut alors énoncer une remarque :

Si  $u \in \mathcal{E}'(Y)$ ,  $WF(u) \cap WF'_Y(K) = \emptyset$ , alors  $Ku$  peut être défini, et  $WF(Ku) \subset WF'(K)(WF(u)) \cup WF'_X(K)$ .

Cette remarque sera utilisée lors de la démonstration du théorème de propagation des singularités.

## 8.3 Les opérateurs pseudo-différentiels elliptiques

### 8.3.1 Définition

Définissons un opérateur elliptique d'ordre  $m$  :

**Définition 8.7** • On dit que  $Op(p) \in L^m(X)$  est un opérateur elliptique au voisinage de  $x_0$  si il existe un compact  $K$  contenant  $x_0$  et une constante  $c > 0$  tels que le symbole  $p(x, \xi) \in S^m(X \times \mathbb{R}^N)$  vérifie, pour  $|\xi| \geq R \gg 1$

$$\forall x \in K, \forall \xi \in \mathbb{R}^N - \{0\}, |p(x, \xi)| \geq c|\xi|^m. \quad (8.3.2)$$

• On dit que  $Op(p)$  est un opérateur elliptique microlocalement au voisinage de  $(x_0, \xi_0) \in X \times \mathbb{R}^N$  si il existe un voisinage conique  $V$  de  $(x_0, \xi_0)$  tel que, sur  $V$ , on ait (8.3.2).

### 8.3.2 Inversion d'un opérateur elliptique

On démontre la proposition fondamentale du calcul pseudo-différentiel

**Proposition 8.5** 1. Soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel elliptique proprement supporté, de symbole  $p(x, \xi) \in S^m(X \times \mathbb{R}^d)$ . Il admet un inverse à droite et un inverse à gauche, égaux modulo  $L^{-\infty}$ .

2. Soit  $P$  un opérateur elliptique au voisinage de  $(x_0, \xi_0)$ . Il existe un voisinage conique  $V_1$  de  $(x_0, \xi_0)$ , un opérateur  $B$  dont le support essentiel ne rencontre pas  $V_1$  et un opérateur  $Q$  tels que

$$Q \circ P = Id + B$$

Notons que  $Q$  est appelé **parametrix** de l'opérateur  $P$ .

**Preuve** Tout d'abord, vérifions que  $Q_1 \circ P = Id + R_1$  et  $P \circ Q_2 = Id + R_2$  implique  $Q_1 \circ P \circ Q_2 = Q_2 + R_1 \circ Q_2 = Q_1 + Q_1 \circ R_2$ . Si  $Q_1$  et  $Q_2$  sont proprement supportés,  $Q_1 \circ R_2 \in L^{-\infty}$  et  $R_1 \circ Q_2 \in L^{-\infty}$ , donc  $Q_1$  est égal à  $Q_2$  modulo  $L^{-\infty}$ .

Par analogie avec l'inverse d'une série, nous commençons par démontrer le résultat pour  $p$  symbole classique. On suppose que  $Q$  est un opérateur pseudo-différentiel associé à un symbole classique  $q$ . Lorsque  $P$  n'est pas associé à un symbole classique, on utilisera  $\frac{1}{p} \# p = 1 + \sum_{\alpha} \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} \partial_\xi^\alpha (\frac{1}{p}) \partial_x^\alpha p$ . Soit  $q(x, \xi) \simeq \sum q_j(x, \xi)$ ,  $q_j(x, \xi) \in S^{-m-j}(X \times \mathbb{R}^N)$ . L'égalité  $Q \circ P = Id + R_1$  se traduit par les égalités

$$q_0 p = 1$$

$$\sum_{|\alpha|+l=n} \frac{1}{\alpha! i^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha q_l \partial_x^\alpha p = 0, n \geq 1$$

On a donc  $q_0(x, \xi) = (p(x, \xi))^{-1}$ , qui est dans  $S^{-m}(X \times \mathbb{R}^N)$ . Alors on trouve

$$q_1(x, \xi) = -\frac{1}{p} \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{i\alpha!} \partial_\xi^\alpha ((p(x, \xi))^{-1}) \partial_x^\alpha p(x, \xi) = \frac{1}{i} \frac{1}{(p(x, \xi))^3} \sum_j \partial_{\xi_j} p(x, \xi) \partial_{x_j} p(x, \xi)$$

donc  $q_1 \in S^{-m-1}(X \times \mathbb{R}^N)$ . On poursuit le raisonnement par récurrence. En effet, le symbole  $\partial_x^\alpha p$  est un symbole de  $S^m(X \times \mathbb{R}^N)$ , le symbole  $\partial_\xi^\alpha(q_l)$  est, pour  $l < n$ , un symbole de  $S^{-m-l-|\alpha|}(X \times \mathbb{R}^N) = S^{-m-n}(X \times \mathbb{R}^N)$ . On trouve alors que  $q_n$  est un symbole de  $S^{-m-n+m-m}(X \times \mathbb{R}^N)$  et la démonstration par récurrence s'en déduit. La somme des  $q_j$  est un symbole par la proposition de complétude asymptotique (Proposition 6.4).

Le cas général s'en déduit : en effet on a trouvé  $Op(\frac{1}{p}) \circ P = Id + R$ , où  $R$  est un opérateur d'ordre  $-1$  de symbole  $r \in S^{-1}$ . Plus précisément lorsque le symbole est dans  $S_{\rho, \delta}^m$  on trouve que  $r$  est dans  $S^{-\rho+\delta}$ . On s'est ramené à l'inversion de  $Id + R$ . On peut vérifier que

$$(1-r)\sharp(1+r) = 1 - r^2 - \sum_{|\alpha| \geq 1} \partial_\xi^\alpha r \partial_x^\alpha r = 1 - r_2$$

où  $r_2$  est d'ordre  $-2$ . L'inverse supposé est la série de Neumann pour la loi  $\sharp$ .

Soit

$$r_p = 1 - r + r\sharp r - r\sharp r\sharp r + \dots + (-1)^p r\sharp r\sharp \dots \sharp r.$$

On a

$$r_p\sharp(1+r) = 1 + (r_{p+1} - r_p)$$

(l'opérateur  $R_{p+1} - R_p$  est, à  $(-1)^{p+1}$  près, la composée de  $p+1$  termes  $R$ , il est dans  $L^{-p}$ , son symbole  $r_{p+1} - r_p$  est dans  $S^{-p}$ . On utilise alors le résultat de complétude asymptotique.

Démontrons l'alinéa 2 dans le cas où  $p$  est, modulo  $S^{-\infty}$ , homogène de degré  $m$ . On se place sur le voisinage conique  $V$  de l'hypothèse de la définition 8.7. Le symbole  $p$  est évidemment non nul sur le bord de  $V \cap X \times S^{N-1}$  des éléments de  $V$  dont la norme de  $\xi$  vaut 1. Notons  $\pi$  la projection canonique sur  $X$ . On peut alors prolonger  $p$  en une fonction, dont toutes les dérivées sont bornées qui est  $C^\infty(\pi(V)) \times S^{N-1}$ . On étend le symbole ainsi obtenu à  $\pi(V) \times (\mathbb{R}^N - \{0\})$  par homogénéité de degré  $m$ , utilisant les constantes permettant de borner  $p$  sur le bord. On note  $p_1$  le symbole ainsi étendu. C'est le symbole d'un opérateur elliptique  $Op(p_1)$ .

Par l'alinéa 1,  $Op(p_1)$  admet un inverse  $q$  proprement supporté tel que

$$Op(q) \circ Op(p_1) = Id + r$$

ce qui donne

$$Op(q) \circ Op(p) = Id + r + Op(q) \circ Op(p - p_1).$$

On choisit  $V_1$  tel que  $V_1 \subset V$ . Alors le support essentiel de  $p - p_1$  étant contenu dans le complémentaire de  $V$ , et  $Op(q)$  étant proprement supporté, l'opérateur  $r + Op(q) \circ Op(p - p_1)$  a son support essentiel distinct de  $V$ . Ceci achève la démonstration de la proposition 8.5.

### 8.3.3 Régularité elliptique

Nous cherchons dans cette section à quantifier la relation entre le front d'onde de  $u$  et le front d'onde de  $Pu$  pour un opérateur pseudo-différentiel elliptique  $P$ . Nous rappelons d'abord une caractérisation du front d'onde :

**Lemme 8.6** *Pour  $u \in \mathcal{D}'(X)$ , on a*

$$WF(u) = \cap \{ \text{Car}(p), p \in S^0(X \times \mathbb{R}^N), Op(p)u \in C^\infty(X) \},$$

$\text{Car}(p)$  désignant l'ensemble des points  $(x, \xi) \in X \times \mathbb{R}^N$  tels que  $p(x, \xi) = 0$ . On appelle cet ensemble la variété caractéristique de  $p$ .

On note que ce résultat s'écrit aussi

$$WF(u) = \cap \{ \text{Car}(\sigma(P)), P \in L^0(X), Pu \in C^\infty(X) \}.$$

**Preuve** Soit  $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ . Il existe  $\chi$ , égale à 1 dans un voisinage de  $x_0$  et  $\Gamma$  voisinage conique de  $\xi_0$  tel que  $\mathcal{F}(\chi u)$  soit à décroissance rapide. On désigne par

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int \psi(\xi) \mathcal{F}(\chi u)(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

où  $\psi$  est homogène de degré 0 hors d'un compact,  $\psi \equiv 1$  sur  $\Gamma' \cap \{|\xi| > R\}$ ,  $\Gamma'$  voisinage conique de  $\xi_0$ . Alors  $Pu \in C^\infty$  et on vérifie que  $p(x, y, \xi) = \psi(\xi)\chi(y)$  est un élément de  $S^0(X \times X \times \mathbb{R}^N)$ . Il vient alors  $\sigma(p)(x, \xi) \simeq \psi(\xi)\chi(x) + r(x, \xi)$ ,  $r \in S^{-1}(X \times \mathbb{R}^N)$ , et le symbole principal de  $p$  est donc non nul au voisinage de  $(x_0, \xi_0)$ . On a démontré

$$\cap \{ \text{Car}(p), Op(p) \in L^0(X), Op(p)u \in C^\infty(X) \} \subset WF(u).$$

Réciproquement, soit  $(x_0, \xi_0)$  tel qu'il existe  $p \in S^0(X \times \mathbb{R}^N)$  tel que  $Op(p)u \in C^\infty$  et  $p(x_0, \xi_0) \neq 0$ . Alors  $p$  est elliptique dans un voisinage de  $(x_0, \xi_0)$  et on note  $q$  et  $B$  comme dans la proposition 8.5. Alors

$$Op(q) \circ Op(p)u = u + ru \in C^\infty.$$

On a  $u = -ru + Op(q)[Op(p)u] + Op(q) \circ Op(p - p_1)u$ . Modulo  $C^\infty(X)$ ,  $u = Op(q) \circ Op(p - p_1)u$ . On utilise l'inclusion (démontrée ci-dessous en utilisant des arguments différents)  $WF(Av) \subset WF(v) \cap \text{Supp}(A)$ . Il vient donc  $WF(Op(q) \circ Op(p - p_1)u) \subset \text{Supp}(q) \cap \text{Supp}(p - p_1)$ . Comme  $(x_0, \xi_0) \notin \text{Supp}(p - p_1)$ , on en déduit  $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ . Le lemme est démontré. On généralise en la

**Proposition 8.6** *Soit  $P$  un opérateur d'ordre 0, de symbole  $p$ . Soit  $u$  une distribution telle que il existe  $U$ , ensemble cône contenant  $\text{Supp}(P)$ , avec  $U \cap WF(u) = \emptyset$ . Alors  $Pu \in C^\infty$ .*

**Démonstration de la proposition.** On se donne  $P$  un opérateur d'ordre 0 de symbole  $p$  et on suppose  $WF(u)$  disjoint d'un ensemble cône  $U$  qui contienne le support essentiel de  $P$   $\text{Supp}(P)$ .

On considère  $\chi \in S^0$  telle que  $\text{supp}\chi \cap WF(u) = \emptyset$ ,  $\chi \equiv 1$  près de  $\text{Supp}P$ . L'égalité

$$Pu = P\chi u + P(1 - \chi)u$$

où  $P\chi u$  est dans  $C^\infty$  et où  $P \circ (1 - \chi)$  est d'ordre  $-\infty$  par calcul symbolique entraîne  $Pu \in C^\infty$ .

**Autre démonstration** On peut, suivant Taylor [93], construire  $\chi$  en utilisant une partition microlocale de l'unité.

- Comme le front d'onde est le complémentaire de l'intersection des ensembles caractéristiques de  $P$  tels que  $Pu$  soit  $C^\infty$ , pour tout  $(x, \xi)$  dans  $\text{Supp}(p)$  il existe  $Q$  tel que  $Qu \in C^\infty$  et  $(x, \xi)$  non caractéristique pour  $Q$ . On utilise l'homogénéité du symbole, et on se restreint à un compact  $K$  en  $x$ , et à un compact  $\mathcal{K}$  sur la sphère unité. Ensuite, on construit, pour tout point  $(x, \xi)$  de  $\text{Supp}(P)$ , l'opérateur  $Q$  comme précédemment. On vérifie donc que, pour tout point  $(x, \xi) \in K \times \mathcal{K}$ , il existe un voisinage  $V_{(x, \xi)}$  tel que l'opérateur  $\tilde{Q}$  que l'on peut choisir en tout point de ce voisinage soit  $Q$ . On recouvre alors le compact  $K \times \mathcal{K}$  par les  $V_{(x, \xi)}$ . De ce recouvrement, on peut extraire un sous-recouvrement fini, et donc des opérateurs  $Q_j$ . En considérant  $Q = \sum Q_j^* Q_j$ ,  $Qu \in C^\infty$  et  $\text{Car}(Q) \cap \text{Supp}(P) = \emptyset$ .
- On prend alors  $Q_1$  un opérateur elliptique coïncidant avec  $Q$  sur un voisinage  $W$  de  $\text{Supp}(P)$ . On peut le construire en utilisant une fonction localisante, car il suffit que  $Q_1$  soit non nul sur le complémentaire du voisinage  $W$  et égal à  $Q$ , elliptique sur le voisinage  $W$ . Une parametrix de  $Q_1$  existe (car  $Q_1$  est elliptique). On note  $A = PQ_1^{-1}$ . On vérifie qu'il existe  $R_3 \in L^{-\infty}$  tel que

$$AQ = PQ_1^{-1}(Q_1 + (Q - Q_1)) = P + R_3 + PQ_1^{-1}(Q - Q_1)$$

Comme le support essentiel d'un produit d'opérateurs est contenu dans l'intersection des supports essentiels, et  $Q - Q_1 = 0$  sur le support de  $P$ , on voit que  $\text{Supp}(Q - Q_1) \cap \text{Supp}(P) = \emptyset$ . Cet opérateur est donc dans  $L^{-\infty}$ . Lui ajoutant  $R_3$ , on trouve un opérateur  $R_4$  de  $L^{-\infty}$ , ce qui donne

$$AQ = P + R_4,$$

et donc  $Pu = AQu - R_4u$ , ce qui donne  $Pu \in C^\infty$ .

On veut prouver la

- Proposition 8.7** 1.  $WF(Pu) \subset WF(u) \cap \text{Supp}(P)$   
 2. Si  $P$  est elliptique,  $WF(Pu) = WF(u)$

La deuxième égalité du théorème provient de la première et de l'existence d'une **parametrix** d'un opérateur elliptique. En effet, soit  $E$  une telle parametrix. Alors  $WF(EPu) = WF((Id + R)u) = WF(u)$  donc

$$WF(EPu) \subset WF(Pu) \Rightarrow WF(u) \subset WF(Pu) \subset WF(u).$$

Prouvons, pour un opérateur général, les deux inclusions.

Pour prouver  $WF(Pu) \subset \text{Supp}(P)$ , on prend un point  $(x_0, \xi_0) \notin \text{Supp}(P)$ . Il existe un voisinage conique  $V$  de  $(x_0, \xi_0)$  et un opérateur  $q$ , identiquement égal à 1 sur  $V$ , tel que  $\text{Supp}(Q) \cap \text{Supp}(P) = \emptyset$ . Alors  $QP \in L^{-\infty}$  (car  $\text{Supp}(QP) \subset \text{Supp}(P) \cap \text{Supp}(Q)$ ) et  $QPu \in C^\infty$ . En utilisant la première définition du front d'onde de  $v$ , on voit que le front d'onde de  $Pu$  est dans l'ensemble caractéristique de  $Q$ , qui ne contient pas  $(x_0, \xi_0)$ . On a ainsi démontré la première inclusion.

Pour prouver  $WF(Pu) \subset WF(u)$ , on se donne un voisinage conique  $\Gamma$  de  $WF(u)$ . On écrit  $P = P_1 + P_2$  tels que  $\text{Supp}(P_1) \subset \Gamma$  et  $\text{Supp}(P_2) \cap WF(u) = \emptyset$ . Alors  $P_2u \in C^\infty$  et  $WF(Pu) = WF(P_1u)$ . On vient de voir  $WF(P_1u) \subset \text{Supp}(P_1)$  donc  $WF(P_1u) \subset \Gamma$ . Ceci est vrai pour tout voisinage cône de  $WF(u)$  donc  $WF(Pu) \subset WF(u)$ . On achève ainsi la preuve de la proposition 8.7.

### 8.3.4 Résolubilité locale d'un opérateur elliptique

Nous démontrons la

**Proposition 8.8** Soit  $A$  un opérateur différentiel elliptique d'ordre  $m$  à coefficients  $C^\infty$  sur l'ouvert  $X \subset \mathbb{R}^n$  et soit  $x_0 \in X$ . Il existe un voisinage ouvert  $V \subset X$  de  $x_0$  tel que, pour tout  $v \in \mathcal{D}'(V)$  et tout  $W \subset V$ , il existe  $u \in \mathcal{D}'(V)$  tel que  $Au = v$  dans  $W$



Ceci se démontre comme dans le cas du problème hyperbolique par la méthode des estimées a priori. En effet, on vérifie que, comme  $A$  est d'ordre  $m$ , pour toute  $u$  distribution à support compact  $K \subset X$ ,  $u \in H^{s+m}(K)$ , on a

$$\|u\|_{H^{s+m}(K)} \leq C_{K,s}(\|A^*u\|_{H^s(\tilde{K})} + \|u\|_{H^s(\tilde{K})}).$$

Ceci se démontre en utilisant une parametrix  $B \in L^{-m}$  proprement supportée de  $A^*$  et le fait que, pour  $R \in L^{-\infty}$ ,  $R$  proprement supporté est continu de  $H^s(\tilde{K})$  dans  $H^{s+m}(\tilde{K})$ . L'égalité  $u = B \circ A^*u + Ru$  donne alors le résultat.

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $r(\varepsilon, m)$  tel que, si le diamètre du support de  $u$  est plus petit que  $r(\varepsilon, m)$  alors la norme  $L^2$  de  $u$  est majorée par  $\varepsilon\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$ .

On considère  $u \in H^m(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(V_1)$ ,  $V_1$  voisinage de  $x_0$  de diamètre inférieur à  $r(\varepsilon, m)$ . Alors, utilisant l'inégalité pour  $s = 0$  et  $K \subset V_1$

$$\|u\|_{H^m(K)} \leq C_{K,0}\|A^*u\|_{L^2(\tilde{K})} + C_{K,0}\varepsilon\|u\|_{H^m(K)}.$$

Il suffit de prendre  $\varepsilon_0$ , de déterminer  $K$  par l'intermédiaire de  $V_1$ , puis de choisir  $\varepsilon = \min(\frac{1}{2C_{K,0}}, \varepsilon_0)$  pour obtenir

$$\|u\|_{H^m(K)} \leq 2C_{K,0}\|A^*u\|_{L^2(\tilde{K})}. \quad (8.3.3)$$

On considère maintenant une parametrix  $C$  de  $A$ , proprement supportée dans  $V$ . Ainsi, pour tout  $v \in \mathcal{D}'(V)$ ,  $ACv = v + Tv$ ,  $Tv \in C^\infty(X)$ . Soit  $u = Cv$ , ainsi  $Au = v + Tv$ . Si on trouve  $w$  telle que  $Aw = Tv$ , alors  $u - w$  est solution de  $A(u - w) = v$  et répond au problème de trouver  $U$  tel que  $AU = v$ .

On s'est ainsi ramené au problème de résoudre  $Aw = Tv \in C^\infty$ . Le problème variationnel associé s'écrit

$$\forall \phi \in C_0^\infty(K), (Tv, \phi) = (Aw, \phi) = (w, A^*\phi).$$

On rappelle que, par définition de la norme duale sur  $H^{-m}$ ,

$$|(Tv, \phi)| \leq D_K\|Tv\|_{H^{-m}(W)}\|\phi\|_{H^m(W)}$$

L'inégalité de Poincaré (8.3.3) appliquée à  $\phi$  implique

$$|(Tv, \phi)| \leq 2D_K C_{K,0}\|Tv\|_{H^{-m}(W)}\|A^*\phi\|_{L^2(W)}.$$

L'application  $\phi \rightarrow (Tv, \phi)$  est alors une forme linéaire continue par rapport à  $A^*\phi \in L^2(\tilde{K})$  pour  $\phi \in H^m(K)$ . On peut alors lui associer une extension continue pour  $A^*\phi \in L^2(\tilde{K})$  par le théorème de Hahn-Banach. Il existe alors  $w \in L^2(\tilde{K})$  telle que  $(Tv, \phi) = (w, A^*\phi)$ , pour  $\phi \in H^m(K)$ . Cette distribution est notée  $(A)(Tv)$ . La solution de  $Au = v$  est alors  $u = Cv - (A)(Tv)$ . C'est une égalité locale puisque l'inversion a été faite pour  $\phi \in H^m(K)$ . La proposition est démontrée.

## 8.4 Changement de variable dans les opérateurs pseudo-différentiels.

Nous considérons désormais un symbole  $a(x, D)$ . Nous démontrons que la notion d'opérateur pseudo-différentiel est invariante par changement de variable en  $x$ . Nous supposons  $a(x, \xi) \in S^m(X \times \mathbb{R}^d)$ .

Soit  $\chi^{-1}$  un difféomorphisme de  $K$  sur  $K'$ ,  $K$  compact inclus dans  $X$ . Soit  $b(y, D)$  l'opérateur défini par l'égalité

$$b(y, D)u(\chi(y)) = (a(x, D)u)(\chi(y)).$$

Nous utilisons la Proposition suivante, qui fait le lien entre les développements asymptotiques et les opérateurs pseudo-différentiels (on la trouve en particulier dans le livre de S. Alinhac et P. Gérard [3]) :

**Proposition 8.9** *Soit  $\psi$  une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , telle que  $d\psi \neq 0$ .*

*Soit  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  et  $a \in S^m(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ .*

*Alors  $e^{-ik\psi(x)}a(x, D)(u(x)e^{ik\psi(x)}) = I(x, k)$  admet le développement asymptotique suivant en  $k$ , localement uniformément en  $x$*

$$I(x, k) \simeq \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{y^\alpha}^\alpha [e^{ik(\psi(y)-\psi(x)-d\psi(x)(y-x))} u(y)]_{y=x} D_{\xi^\alpha}^\alpha a(x, kd\psi(x)).$$

**Démonstration** On écrit

$$I(x, k) = \int \int e^{i(x-y)\eta + ik(\psi(y)-\psi(x))} a(x, \eta) u(y) dy d\eta.$$

Le point critique  $(y_c, \eta_c)$  dans les variables  $(y, \eta)$  de la phase de cette intégrale oscillante vérifie les égalités  $x - y_c = 0, kd\psi(y_c) - \eta_c = 0$ , soit  $y_c = x, \eta_c = kd\psi(x)$ . On effectue le changement de variable  $(y, \eta) \rightarrow (z, \xi)$  donné par  $y = x + z, \eta = \xi + kd\psi(x)$ . L'intégrale oscillante se réécrit

$$I(x, k) = \int \int e^{-iz\xi + ik(\psi(y)-\psi(x)-d\psi(x)(y-x))} a(x, \xi + kd\psi(x)) u(y) dz d\xi.$$

On note alors  $t(y, k) = e^{ik(\psi(y)-\psi(x)-d\psi(x)(y-x))}$ . L'intégrale se met sous la forme

$$I(x, k) = \int \int e^{-iz\xi} t(x+z, k) a(x, \xi + kd\psi(x)) u(y) dz d\xi.$$

La phase  $z.\xi$  est quadratique car  $z.\xi = \frac{1}{4}((\xi+z)^2 - (\xi-z)^2)$ . Le Laplacien associé au sens de la définition ?? est  $\partial_{z_j \xi_j}^2$  pour le point critique  $z = 0, \xi = 0$ .

Il est aisé de généraliser le théorème de la phase stationnaire au cas où le symbole est  $at$ , même si ce n'est pas un symbole asymptotique en  $k$  classique. Cette méthode est correcte car les termes que l'on ajoute dans la phase sont d'ordre supérieur ou égal à 2, donc ne contribueront pas par des termes en puissances positives de  $k$ . On le voit ci-dessous en remarquant que

$$\partial_{y^\alpha}^\alpha [t(y, k)u(y)] = \sum_{\alpha} \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\beta} \partial_{y^\beta}^\beta u. (\partial_{y^{\alpha-\beta}}^{\alpha-\beta} t(y, k)) \partial_{\eta^\alpha}^\alpha a.$$

Dans ce développement, les termes non nuls en  $z = 0$  provenant de  $(\partial_{y^{\alpha-\beta}}^{\alpha-\beta} t(y, k))$  sont d'ordre  $\frac{|\alpha-\beta|}{2}$  au plus puisque la phase est quadratique. Ainsi, combinés avec le terme  $\partial_{\eta^\alpha}^\alpha a$ , on trouve que l'ordre en  $k$  est  $k^{m-|\alpha| + \frac{|\alpha-\beta|}{2}}$  soit  $k^{m - \frac{|\alpha+\beta|}{2}}$ . On a donc bien une somme asymptotique.

On en déduit que le symbole  $I(x, k)$  s'écrit :

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha! i^{|\alpha|}} \partial_{y^\alpha}^{|\alpha|} [t(y, k)u(y)]|_{y=x} \partial_{\eta^\alpha}^{|\alpha|} a(x, \eta)|_{\eta=kd\psi},$$

qui est le résultat attendu, puisque  $D_\xi = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi}$ . Le lecteur intéressé par des estimations plus précises des termes de ce symbole se reportera à [3], p 57, Section 8.3, où les majorations sont faites in extenso.

**Autre démonstration.** Reprenons le calcul en  $y_c = x$ ,  $\eta_c = kd\psi(y_c)$ . La matrice jacobienne de la phase en ce point critique est alors

$$\begin{pmatrix} \text{Hess}\psi & -Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous vérifions qu'elle est non dégénérée car son inverse est

$$\begin{pmatrix} 0 & -Id \\ -Id & -\text{Hess}\psi \end{pmatrix}$$

L'opérateur qui intervient dans le développement de la phase stationnaire, le demi Laplacien métrique, est alors

$$-\sum_j \partial_{y_j \eta_j}^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_j \partial y_k} \partial_{\xi_j \xi_k}^2,$$

La formule asymptotique s'en déduit, par application de la section 4.3.

Ceci nous permet d'obtenir la

**Proposition 8.10** *Soit  $\chi$  un  $C^\infty$  difféomorphisme de  $\Omega$  sur  $\Omega'$ , ouverts de  $\mathbb{R}^d$  et soit  $a$  un symbole de  $S^m(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ . On suppose que le noyau intégral de l'opérateur associé à  $a$  est à support compact.*

*On définit la fonction sur  $\Omega' \times \mathbb{R}^d$ ,  $b(y, \eta)$ , par l'égalité*

$$b(\chi(x), \eta) = e^{-i\chi(x)\eta} a(x, D)[e^{i\chi(x)\eta}]. \quad (8.4.4)$$

- 1) *Il s'agit d'un symbole de  $S^m(\Omega' \times \mathbb{R}^d)$ .*
- 2) *Le noyau associé à  $b$  est à support compact dans  $\Omega' \times \mathbb{R}^d$ .*
- 3) *Si  $u \in \mathcal{S}'(\Omega')$ , alors*

$$a(x, D)(u \circ \chi) = (b(y, D)u) \circ \chi. \quad (8.4.5)$$

On a imposé que le noyau de l'opérateur associé à  $a$  soit à support compact pour être à même de définir  $a(x, D)(u \circ \chi)$ .

On vérifie tout d'abord que

$$a(x, D)e^{ix \cdot \xi} = e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi).$$

En effet, on vérifie que, pour  $\hat{u}$  à support compact,

$$a(x, D)[u(\varepsilon x)e^{ix \cdot \xi}](x, \varepsilon, \xi) = (2\pi)^{-d} \int \int e^{i(x-y) \cdot \eta} a(x, \xi) e^{iy \cdot \xi} u(\varepsilon y) dy d\eta.$$

(noter la différence entre la variable  $\eta$  d'intégration et le paramètre  $\xi$  du symbole). Comme

$$\begin{aligned} \int \int e^{i(x-y) \cdot \eta} a(x, \xi) e^{iy \cdot \xi} u(\varepsilon y) dy d\eta &= (2\pi)^{-n} \int d\eta e^{ix \cdot \eta} \int dy u(\varepsilon y) e^{iy(\xi - \eta)} \\ &= \int d\eta e^{ix \cdot \eta} \varepsilon^{-n} \hat{u}\left(\frac{-\xi + \eta}{\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

cette dernière intégrale étant à support compact pour  $\varepsilon > 0$ , on trouve, en notant  $\tau = \frac{-\xi + \eta}{\varepsilon}$ ,  $\eta = \xi + \varepsilon\tau$ , donc

$$a(x, D)[u(\varepsilon x)e^{ix \cdot \xi}](x, \varepsilon, \xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix(\xi + \varepsilon\tau)} \hat{u}(\tau) d\tau.$$

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, le terme de droite tend dans  $\mathcal{S}'$  vers  $e^{ix \cdot \xi} (2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\tau) d\tau = u(0)e^{ix \cdot \xi}$ . Le terme de source  $u(\varepsilon x)e^{ix \cdot \xi}$  tend au sens de  $\mathcal{S}'$  vers  $u(0)e^{ix \cdot \xi}$ . On utilise alors le fait qu'un opérateur pseudo-différentiel s'étend en un opérateur continu de  $\mathcal{S}'$  dans  $\mathcal{D}'$ , continu, donc on

a le résultat en passant à la limite. On introduit le symbole  $b(\chi(x), \eta) = e^{-i\chi(x)\eta} a(x, D) e^{i\chi(x)\eta}$  associé à un opérateur pseudo-différentiel. On a

$$a(x, D)[e^{i\chi(x)\cdot\xi}] = e^{i\chi(x)\cdot\xi} b(\chi(x), \xi).$$

Soit  $f_\xi$  la fonction  $x \rightarrow e^{ix\cdot\xi}$ , on a

$$a(x, D)[f_\xi \circ \chi] = [e^{iy\cdot\xi} b(y, \xi)](y = \chi(x)).$$

Nous vérifions donc que (8.4.4) implique

$$a(x, D)[f_\xi \circ \chi] = [b(\cdot, D) f_\xi] \circ \chi.$$

Comme l'espace engendré par les  $f_\xi$  est dense dans  $\mathcal{S}'$ , cette égalité implique

$$a(x, D)[u \circ \chi] = [b(y, D)u] \circ \chi,$$

ce qu'il fallait démontrer. On a ainsi montré l'existence de  $b$ , qui est un symbole. On l'évalue désormais avec la proposition 8.9. On régularise  $e^{i\chi(x)\eta}$  par une fonction à support compact (que l'on omet). On écrit alors

$$b(\chi(x), \eta) = e^{-i\chi(x)\cdot\eta} \int e^{i(x-y)\cdot\xi + i\chi(y)\cdot\eta} a(x, \xi) d\xi d\eta.$$

On peut considérer cette intégrale comme une intégrale asymptotique en  $|\eta|$  pour  $\eta \neq 0$ , utilisant la proposition 8.9. La première méthode permet de vérifier que la phase étudiée est  $\psi(y) = \chi(y)\cdot\eta = \sum_j \chi_j(y)\eta_j$ . On vérifie que

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_k} = \sum_j \partial_{y_k} \chi_j \cdot \eta_j = \sum_j \chi'_{jk} \eta_j = \sum_j {}^t \chi'_{jk} \eta_j.$$

On tire de la proposition 8.9 le calcul de  $b(\chi(x), \eta)$ . En effet, la valeur critique de la phase est  $\chi(x)\eta$ . Elle se compense avec le  $e^{-\chi(x)\cdot\eta}$  qui est en coefficient du symbole, et on trouve

$$b(\chi(x), \eta) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_y^\alpha [e^{i\chi(x)\cdot\eta - i\chi(y)\cdot\eta - ({}^t \chi'(x)\eta)\cdot(y-x)}] D_\xi^\alpha a(x, {}^t \chi'(x)\eta).$$

Enfin, si on calcule directement le point critique en  $(y, \xi)$  de la phase  $\psi(x, y, \xi, \eta) = (x - y)\cdot\xi + \chi(y)\cdot\eta - \chi(x)\cdot\eta$ , on trouve les égalités  $-\xi_j^c + \sum_k \partial_{y_j} \chi_k(y^c) \eta_k = 0$ ,  $x_j - y_j^c = 0$ , dont on déduit le changement  $y = x + z$ ,  $\xi_j = \sum_k \partial_{y_j} \chi_k(x) \eta_k + \beta_j$ . On obtient ainsi la relation (8.4.5) en notant que  $\xi^c = {}^t \chi'(x)\eta$ .

## 8.5 Exercices du chapitre 8

**Exercice 8.1 : Réduction des opérateurs** Retrouver formellement, en utilisant le théorème de la phase stationnaire sur la phase  $(x-y)\cdot\xi$  dans  $X \times X \times \mathbb{R}^{\dim T_{x_0} X}$ , les actions des symboles  $p(x, y, \xi)$  et  $q(x, \xi)$  sur une fonction  $u \in C^\infty$  à support compact comme dans le lemme 8.3. Le calcul est-il plus que formel ?

**Exercice 8.2 :** Calculer le symbole de l'adjoint d'un opérateur pseudo-différentiel  $A$ .

**Exercice 8.3 : Changement de variable par l'astuce de Kuranishi** On se place dans les conditions de la proposition 8.10. Démontrer le résultat en utilisant l'existence d'une fonction  $\Sigma(y, t, \xi)$  de  $X \times X \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$  qui permette, pour tout difféomorphisme  $\chi$  de  $X$  dans  $X$ , d'écrire au voisinage de  $y = t$

$$(\chi(y) - \chi(t))\cdot\xi = (y - t)\cdot\Sigma(y, t, \xi).$$

**Exercice 8.4 : Inversion d'un opérateur intégral de Fourier** Soit  $A$  un opérateur intégral de Fourier, défini par sa phase  $(x - y) \cdot \xi + s(x, \xi)$  et son symbole classique  $a(x, \xi) \in S^0(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ , elliptique. Soit  $B$  l'opérateur défini par la phase  $(x - y) \cdot \xi - s(y, \xi)$  et par le symbole  $b(y, \xi)$ .

1) Démontrer qu'il existe un symbole classique  $b \in S^0(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  tel que  $A \circ B = Id + R$ ,  $R \in L^{-\infty}$ .

2) En déduire que, pour tout opérateur pseudo-différentiel classique  $P \in L^m(\mathbb{R}^d)$ , de symbole classique  $p \in S^m(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ , l'opérateur  $Q = A \circ P \circ B$  est un opérateur pseudo-différentiel classique de  $\mathbb{R}^d$ , et que l'on a l'égalité entre les symboles principaux :

$$q_m(y, \Sigma) = p_m(x + \nabla_{\theta} s(x, \theta(x, x, \Sigma)), \theta(x, x, \Sigma))$$

où  $\theta(x, y, \Sigma)$  est solution au voisinage de  $x = y$  de  $\Sigma \cdot (x - y) = \theta \cdot (x - y) + s(x, \theta) - s(y, \theta)$ .

**Solution de l'exercice 8.1** La phase dans l'intégrale

$$Pu(x) = \int \int e^{i(x-y)\xi} p(x, y, \xi) u(y) dy d\xi$$

pourrait sembler être une phase linéaire. En réalité, il s'agit d'une phase quadratique de signature  $(d, d)$ . Ceci est vérifié grâce à l'égalité :

$$(x - y) \cdot \xi = \frac{1}{4} \sum_j (x_j - y_j + \xi_j)^2 - \frac{1}{4} \sum_j (x_j - y_j - \xi_j)^2. \quad (8.5.6)$$

Nous introduisons le difféomorphisme de  $\mathbb{R}^{2d}$  dans lui-même défini par

$$(y, \xi) \rightarrow (z_1, z_2) = (\xi - y + x, \xi + y + x).$$

On voit que  $dy d\xi = \frac{1}{2^d} dz_1 dz_2$  par un simple calcul de jacobien. On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-y)\xi} p(x, y, \xi) u(y) dy d\xi &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\frac{1}{4}z_1^2 - i\frac{1}{4}z_2^2} p(x, x - \frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_1 - z_2}{2}) u(x - \frac{z_1 + z_2}{2}) \frac{dz_1 dz_2}{2^d}. \\ \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-y)\xi} q(x, \xi) u(y) dy \wedge d\xi &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\frac{1}{4}z_1^2 - i\frac{1}{4}z_2^2} q(x, \frac{z_1 - z_2}{2}) u(x - \frac{z_1 + z_2}{2}) \frac{dz_1 dz_2}{2^d}. \end{aligned}$$

L'application du théorème de la phase stationnaire à l'une et à l'autre des intégrales est possible. On applique donc successivement le théorème de la phase stationnaire, sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\frac{1}{4}z_1^2 - i\frac{1}{4}z_2^2} q(x, \frac{z_1 - z_2}{2}) u(x - \frac{z_1 + z_2}{2}) \frac{dz_1 dz_2}{2^d} =$$

$$\frac{1}{2^d} \int_{\mathbb{R}^d} dz_1 e^{i\frac{(z_1/\sqrt{2})^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} dz_2 e^{-i\frac{(z_2/\sqrt{2})^2}{2}} q(x, \frac{1}{2}(z_1 - z_2)) u(x - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)) dz_1 dz_2.$$

Nous vérifions que  $\Delta_{z/\sqrt{2}} = 2\Delta_z$ . Appliquons alors le deuxième alinéa de la proposition 4.3. L'opérateur permettant de connaître le développement du symbole dans les coordonnées  $z_2$  est

$$\sum_l \frac{1}{l!} (i)^{-l} (-1)^l \left( \frac{\Delta_{z_2/\sqrt{2}}}{2} \right)^l$$

et celui dans les coordonnées  $z_1$  est

$$\sum_l \frac{1}{l!} (i)^{-l} \left( \frac{\Delta_{z_1\sqrt{2}}}{2} \right)^l.$$

On obtient ainsi

$$Pu(x) \simeq \sum \left(\frac{1}{i}\right)^l (l!)^{-1} \partial_{y\xi}^{2l} (p(x, y, \xi) u(y))|_{y=x, \xi=0}$$

$$Op(q)u(x) \simeq \sum \left(\frac{1}{i}\right)^l (l!)^{-1} \partial_{y\xi}^{2l} (q(x, \xi) u(y))|_{y=x}.$$

**Calcul des deux premiers termes** Ils sont obtenus grâce à

$$(1 + i^{-1}\Delta_{z_1})(1 - i^{-i}\Delta_{z_2})$$

Il reste ainsi

$$u(x - \frac{1}{2}(z_1 + z_2))p(x, \frac{1}{2}(z_1 - z_2))|_{z_1=z_2=0} + \frac{1}{2}i^{-1}(\Delta_{z_1} - \Delta_{z_2})[u(x - \frac{1}{2}(z_1 + z_2))q(x, \frac{1}{2}(z_1 - z_2))].$$

En étudiant coordonnée par coordonnée, on trouve facilement

$$q(x, 0)u(x) + \sum_j \partial_{x_j} u(x) i^{-1} \partial_{\xi_j} q(x, 0).$$

Ceci correspond au développement asymptotique associé à l'opérateur  $q$ . Si, par exemple,  $q$  est un opérateur différentiel d'ordre 1, alors  $q$  est un polynôme homogène de degré 1, égal à  $\sum_j a_j(x)\xi_j$ , qui vaut 0 pour  $\xi = 0$ . On voit alors que le terme que l'on vient de calculer est

$$\sum_j \partial_{x_j} u(x) i^{-1} a_j(x).$$

Ceci achève l'analyse. Pour le cas général, on utilise la formule de Leibniz, et on obtient

$$\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} (\partial_{\xi^{\alpha_1} y^{\alpha_1}}^{|\alpha_1| + |\alpha_1|} p)(x, x, 0) \partial_{x^{\alpha_2}}^{|\alpha_2|} u(x)$$

On en déduit donc la formule de dérivation en sommant sur les  $\alpha_1$  :

$$P(u) \simeq \sum_{\beta} i^{-|\beta|} (\beta!)^{-1} \partial_{y^{\beta}}^{|\beta|} u(x) \sum_{\alpha, \alpha_1 / \beta = \alpha - \alpha_1} i^{-|\alpha_1|} (\alpha_1!)^{-1} \partial_{\xi^{\beta}}^{|\beta|} (\partial_{\xi^{\alpha_1} y^{\alpha_1}}^{2|\alpha_1|} p)(x, x, 0).$$

Nous considérons alors le symbole

$$q_1(x, \xi) = \sum_{\alpha_1} i^{-|\alpha_1|} (\alpha_1!)^{-1} \frac{\partial^{2\alpha_1} p}{\partial \xi^{\alpha_1} y^{\alpha_1}}(x, x, \xi).$$

Comme  $p$  est un symbole de  $S^m$ , le symbole associé à  $\partial_{y^{\alpha_1} \xi^{\alpha_1}}^{2\alpha_1} p(x, x, \xi)$  est un symbole de  $S^{m-|\alpha_1|}$ . Nous appliquons le théorème de complétude asymptotique (Proposition 6.3), pour voir que cette somme asymptotique définit un symbole de  $S^m$ .

On vérifie que  $Pu \simeq Op(q_1)u$ . Il suffit alors de prendre  $q - q_1 \in S^{-\infty}$ , en particulier  $q = q_1$  pour obtenir l'égalité du lemme de réduction.

**Solution de l'exercice 8.2** On considère, sur  $L^2(X)$ , le produit scalaire canonique  $(u, v) = \int u \bar{v} dx$ . L'adjoint d'un opérateur (pseudo-différentiel)  $A$  continu de  $C_0^\infty(X)$  dans  $\mathcal{D}'(X)$  est l'opérateur défini par  $(Au, v) = (u, A^*v)$  pour  $u, v$  dans  $C_0^\infty(X)$ . Lorsque  $A$  est un opérateur pseudo-différentiel, il admet un noyau  $K_A(x, y)$ , et  $A^*$  a pour noyau la conjuguée de  $K_A(y, x)$ . On suppose que  $A$  est un opérateur pseudo-différentiel dont un symbole est  $a(x, y, \theta)$ . Alors la représentation par une intégrale oscillante du noyau distribution de  $A$  est donnée par

$$K_A(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int a(x, y, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\theta,$$

ce qui donne

$$K_{A^*}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \bar{a}(y, x, \theta) e^{i(x-y)\theta} d\theta$$

(dans cette dernière ligne, il y a à la fois l'échange de  $x$  et de  $y$  et la conjugaison pour obtenir la même phase) ; Ainsi, l'opérateur  $A^*$  est un opérateur pseudo-différentiel, dont un symbole est  $\bar{a}(y, x, \theta)$ .

Pour obtenir le symbole principal associé, on commence par prendre pour  $a(x, y, \theta)$  le symbole  $\sigma_A(x, \theta)$ , symbole principal de  $A$ . On constate alors que  $\bar{a}(y, x, \theta) = \bar{\sigma}_A(y, \theta)$ , et on applique l'alinéa 3) de la proposition 8.3 pour obtenir le symbole

$$\sigma^*(x, \theta) \simeq \sum \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^\alpha \bar{\sigma}_A(x, \theta).$$

### Solution de l'exercice 8.3

**Calcul de  $b$  par l'utilisation de l'astuce de Kuranishi** Nous présentons ici une méthode s'appuyant sur le comportement de phases de la forme  $\phi(x, y, \xi)$  telles que  $\phi(x, x, \xi) = 0$ . Elles se factorisent sous la forme  $(x - y)g(x, y, \xi)$ . L'exemple que nous abordons ici pour l'étude du changement de variable est  $\phi(x, y, \xi) = (\chi(x) - \chi(y))\xi$ . Nous vérifions en effet que

$$(a(x, D)u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \int e^{i(x-z)\xi} a(x, \xi) u(z) dy d\xi,$$

qui se réécrit

$$(a(x, D)u)(\chi(y)) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \int e^{i(\chi(y)-z)\xi} a(\chi(y), \xi) u(z) dz d\xi.$$

Cette égalité se transforme en

$$(a(x, D)u)(\chi(y)) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \int e^{i(\chi(y)-\chi(t))\xi} a(\chi(y), \xi) u(\chi(t)) (d\chi(t)) dt d\xi. \quad (8.5.7)$$

La phase oscillante considérée est donc

$$\phi(y, \xi, t) = (\chi(y) - \chi(t)) \cdot \xi.$$

Du théorème des fonctions implicites on déduit le lemme suivant.

**Lemme 8.7** *Si une phase  $\phi(y, t, \xi)$  s'annule pour  $y = t$ , et si  $\nabla_y \phi(y_0, y_0, \xi_0) \neq 0$  ou  $\nabla_t \phi(y_0, y_0, \xi_0) \neq 0$ , il existe une fonction  $\Sigma \in C^\infty(K' \times K' \times \mathbb{R}^d)$  telle que, pour  $y - t$  dans un voisinage de 0 et  $\xi$  dans un voisinage de  $\xi_0$  on ait*

$$\phi(y, \xi, t) = (y - t) \cdot \Sigma(y, t, \xi).$$

On vérifie que  $\Sigma(y, y, \xi) = \nabla_t \phi(y, \xi, y)$  dans ce voisinage. L'application de  $X \times \mathbb{R}^d \times X$  dans lui-même, qui à  $(y, \xi, t)$  fait correspondre  $(y, \Sigma(y, \xi, t), t)$ , est un difféomorphisme local au voisinage de  $(y_0, \xi_0, y_0)$ .

La formule d'intégration prouve que

$$\chi_j(y) - \chi_j(t) = \sum_k (y_k - t_k) \int_0^1 \partial_{y_k} \chi_j(st + (1-s)y) ds$$

ce qui donne

$$\Sigma_k(y, t, \xi) = \sum_j \xi_j \int_0^1 \partial_{y_k} \chi_j(st + (1-s)y) ds = \sum_k (y_k - t_k) \int_0^1 \xi_j \partial_{y_k} \chi_j(st + (1-s)y) ds.$$

La relation  $d\chi_j = \sum_k \partial_{y_k} \chi_j dy_k = \sum_k \chi'_{jk} dy_k$  donne alors  $\chi'_{jk} = \partial_{y_k} \chi_j$ , et comme

$$\Sigma_k(y, y, \xi) = \sum_j \xi_j \partial_{y_k} \chi_j = \sum_j \xi_j \chi'_{jk} = \sum_j ({}^t \chi')_{kj} \xi_j$$

on trouve la relation

$$\Sigma(y, y, \xi) = ({}^t \chi'(y)) \cdot \xi.$$

Cette notation est cohérente car  $\chi'$  est une matrice, et on l'applique à un élément  $\xi$  de  $\mathbb{R}^d$ . L'application  $\chi$  est un difféomorphisme, donc  $\chi'$  est une matrice inversible. Localement, au voisinage de la diagonale on peut retrouver  $\xi$  en fonction de  $\Sigma$  et de  $y$ . On peut alors considérer le système d'équations  $\Sigma(y, t, \xi) = \Sigma$ , et il existe une solution  $\xi = \Theta(y, t, \Sigma)$ . On calcule alors l'intégrale (8.5.7) par

$$(a(x, D)u)(\chi(y)) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \int e^{i(y-t)\Sigma} a(\chi(y), \Theta(y, t, \Sigma)) u(\chi(t)) \det(\chi'(t)) dt d\Sigma d\Theta(y, t, \Sigma).$$

Si  $d(y, t, \Sigma)$  est le symbole  $a(\chi(y), \Theta(y, t, \Sigma)) \det(\chi'(t)) d\Sigma \Theta(y, t, \Sigma)$ , une application du lemme 8.3 de réduction permet alors d'obtenir

$$(a(x, D)u)(\chi(y)) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \int e^{i(y-t)\Sigma} b(y, \Sigma) d\Sigma dt,$$

Le terme dominant de  $b_0$  est égal à

$$b_0(y, \Sigma) = a_0(\chi(y), ({}^t\chi')^{-1}(\Sigma)).$$

**Solution de l'exercice 8.4** Nous ferons ici un usage constant du lemme 8.7 démontré dans l'exercice 8.2. En effet, une phase de la forme  $(x-y).\xi + \psi(y) - \psi(x)$  vérifie l'hypothèse dès que  $\xi_0 \neq \nabla\psi(y_0)$ .

1) On peut vérifier que, au sens des intégrales oscillantes

$$A \circ B(u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int \int \int \int e^{i(x-z)\xi + is(x,\xi) + i(z-y).\theta - is(y,\theta)} a(x, \xi) b(y, \theta) u(y) dy d\theta dz d\xi.$$

Nous appliquons la méthode du col (Théorème 4.3) à la phase totale de cet opérateur dans les variables  $z$  et  $\xi$ , qui est

$$\phi_1^{x,y,\theta}(z, \xi) = (x-z).\xi + (z-y).\theta + s(x, \xi) - s(y, \theta).$$

Le point critique est

$$\begin{cases} \xi_c = \theta \\ z_c = x + \partial_\xi s(x, \xi_c) \end{cases}$$

et la matrice jacobienne est

$$\begin{pmatrix} 0 & -Id \\ -Id & \text{Hess}_\xi s(x, \xi) \end{pmatrix}$$

qui est inversible (air désormais connu). La valeur critique de la phase est

$$(x-y)\theta + s(x, \theta) - s(y, \theta)$$

Le théorème de la phase stationnaire avec paramètre affirme l'existence d'un symbole  $L(a, b)(x, y, \theta)$  tel que

$$(A \circ B)(u)(x) = \int e^{i((x-y)\theta + s(x, \theta) - s(y, \theta))} L(a, b)(x, y, \theta) u(y) dy d\theta.$$

De plus, on vérifie, puisque les symboles et la phase ne dépendent pas de  $t$  dans l'égalité qui suit, que

$$L(a, b)(x, y, \theta) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_t^\alpha D_\beta^\alpha [a(x, \theta + \beta) b(y, \theta) e^{i[(x-y).\theta + s(x, \theta) - s(y, \theta)] + i[s(x, \theta + \beta) - s(x, \theta) - \beta \partial_\theta s(x, \theta)]}]|_{t=0, \beta=0}.$$

Il existe  $r \in S^{-1}(X \times Y \times \mathbb{R}^d)$  tel que

$$L(a, b)(x, y, \theta) = [a(x, \theta) b(y, \theta) + r(x, y, \theta)] e^{i(x-y).\theta + i(s(x, \theta) - s(y, \theta))}.$$

Nous appliquons l'**astuce de Kuranishi** (Lemme 8.7). On vérifie que, dans un voisinage de  $x$ , l'égalité  $\theta + V(x, y, \theta) = \Sigma$  est inversible, et on peut trouver  $\theta = \theta(x, y, \Sigma)$ . On voit alors que

$$(A \circ B)(u)(x) = \int e^{i(x-y)\Sigma} L(a, b)(x, y, \theta(x, y, \Sigma)) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \Sigma} (x, y, \Sigma) \right| dy \wedge d\Sigma.$$

Le lemme de réduction 8.3 implique l'existence de  $c(x, \Sigma)$  tel que  $A \circ B = Op(c)$ ,  $c$  étant un symbole dont l'ordre est la somme des ordres de  $a$  et de  $b$ . On trouve

$$c(x, \theta) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_\Sigma^\alpha \partial_y^\alpha a(x, \theta(x, y, \Sigma)) b(y, \theta(x, y, \Sigma))|_{y=x}.$$



Egaler le symbole principal à 1 et tous les autres à 0 se fait de proche en proche ; ici on identifie  $b_0$  en fonction de  $(a_0)^{-1}$ , qui est bien défini puisque  $a_0$  est le symbole principal d'un opérateur elliptique. On procède de proche en proche pour identifier  $b_j$ . De cette façon, on construit un symbole  $b$  tel que le symbole de  $A \circ B$  soit  $\simeq 1 \pmod{S^{-\infty}}$ . Ceci achève la preuve du résultat de l'exercice 8.3. Ceci est la même démarche que celle employée dans la démonstration de la proposition 8.5.

2) On applique la même méthode de calcul pour évaluer le symbole principal de l'opérateur  $A \circ P \circ B$ , où on connaît le symbole principal de  $P$ . Le symbole principal obtenu après l'application du théorème de la phase stationnaire est

$$a(x, \theta)b(y, \theta)p(x + \nabla_{\theta}s(x, \theta), \theta)$$

et la phase que nous considérons est

$$(x - y)\theta + s(x, \theta) - s(y, \theta)$$

L'astuce de Kuranishi conduit au changement de variable

$$\Sigma = \theta + \nabla_x s(x, \theta).$$

Le symbole principal obtenu pour l'opérateur  $A \circ P \circ B$  est donc

$$q(x, \Sigma) = p(x + \nabla_{\theta}s(x, \theta), \theta), \Sigma = \theta + \nabla_x s(x, \theta).$$

Nous reviendrons sur ce résultat dans la partie consacrée à la géométrie.



## Chapitre 9

# Opérateurs et géométrie symplectique

Dans ce chapitre, nous étudions certains objets reliés aux opérateurs pseudo-différentiels : l'ensemble caractéristique, le flot bicaractéristique. Nous montrons que le cadre naturel dans lequel ceci est possible s'appelle la géométrie symplectique (essentiellement grâce à la proposition 8.10 qui montre qu'un changement de variable en  $y$  induit un changement de variable en  $\xi$ ). Nous en déduisons des résultats sur les opérateurs intégraux de Fourier, en particulier nous introduisons la relation canonique associée à un opérateur intégral de Fourier. Cette partie est très importante pour l'analyse générale d'une équation aux dérivées partielles, puisque toute propriété du symbole de l'opérateur sera vraie pour tout opérateur semblable (obtenu par conjugaison par un opérateur inversible). En particulier, le flot bicaractéristique est la généralisation des rayons de l'optique géométrique étudiés au chapitre 3.

La conjugaison d'un opérateur pseudodifférentiel par un opérateur intégral de Fourier conduit à un nouvel opérateur pseudodifférentiel, et les objets géométriques cités ci-dessus (qui sont définis sur un espace de variables de dimension  $2d$ ) de l'ancien opérateur et du nouvel opérateur se déduisent les uns des autres par une transformation adaptée à la géométrie symplectique qui est la relation canonique.

### 9.1 Solutions d'une équation pseudo-différentielle

On considère un opérateur pseudo-différentiel  $P$ , proprement supporté sur  $\mathbb{R}^d$  d'ordre  $m$  de symbole  $p(x, \xi) = \sum_{j=-N}^m p_j(x, \xi) \in S^m(\mathbb{R}^{2d})$ , chaque  $p_j$  est homogène de degré  $j$ . La proposition suivante permet de calculer l'action de  $P$  sur un développement asymptotique oscillant  $u(x, k)$ .

**Proposition 9.1** *Soit  $u(x, k) = a(x, k)e^{ik\phi(x)}$ , telle qu'il existe des fonctions  $(a_j)_{0 \leq j}$  de classe  $C^\infty$  en  $x$  telles que*

$$a(x, k) \simeq \sum_{j \geq 0} a_j(x)(ik)^{-j}.$$

*Il existe des fonctions  $b_j(x)$ , de classe  $C^\infty$  en  $x$ , telles que*

$$e^{-ik\phi(x)}(ik)^{-m}P(u)(x, k) \simeq \sum_{j \geq 0} b_j(x)(ik)^{-j}.$$

**Preuve** On emploie pour cela la représentation en opérateur intégral de Fourier triviale de l'opérateur pseudo-différentiel  $P$ . On évalue

$$\int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{i(x-y)\xi + ik\phi(y)} p(x, \xi) a(y, k) dy d\xi.$$

Le changement de variable  $\xi = k\eta$  donne

$$\int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{i(x-y)\xi + ik\phi(y)} p(x, \xi) a(y, k) dy d\xi = k^{m+d} \int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{ik((x-y)\cdot\eta + \phi(y))} p(x, \eta, k) a(y, k) dy d\eta,$$

où  $p(x, \eta, k) = \sum_{-N \leq l \leq m} p_l(x, \eta) k^{-l}$ . On évalue cette intégrale par la méthode de la phase stationnaire. Le gradient de la phase en  $(y, \eta)$  est

$$(-\xi + \nabla_y \phi(y), x - y).$$

Considérons dans un premier temps un cas particulier.

**Une phase linéaire** On choisit  $\phi(y) = y \cdot \eta_0$ ,  $\eta_0 \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ ,  $p(y, \eta) = \eta^\alpha$ ,  $a(y, k) = 1$ . On trouve

$$\int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{ik((x-y)\eta + y \cdot \eta_0)} \eta^\alpha dy d\eta = e^{ikx \cdot \eta_0} \int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{ik(x-y)(\eta - \eta_0)} \eta^\alpha dy d\eta.$$

Notons  $u = y - x$  et  $\xi = \eta - \eta_0$ . on trouve

$$\int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{ik((x-y)\eta + y \cdot \eta_0)} \eta^\alpha dy d\eta = e^{ikx \cdot \eta_0} \int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{-iku\xi} (\eta_0 + \xi)^\alpha dud\xi.$$

On remarque alors que, lorsque  $\beta \neq 0$ ,  $\int_{\mathbf{R}^{2d}} \xi^\beta e^{-iku\xi} dud\xi = 0$ . En effet, soit  $\beta_j \neq 0$ . Par séparation des variables, on intègre par rapport à la coordonnée  $u_j$ . Au sens des distributions, on trouve  $\int_{\mathbf{R}} du_j e^{-iku_j \xi_j} = \hat{1}(k\xi_j)$ . Comme la transformée de Fourier de la fonction égale à 1 est la distribution  $\delta_0$ , et que  $\beta_j > 0$ , on obtient  $\langle \hat{1}(k\xi_j), \xi_j^{\beta_j} \rangle = 0$ .

Ainsi  $\int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{-iku\xi} (\eta_0 + \xi)^\alpha dud\xi = \eta_0^\alpha \int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{-iku\xi} dud\xi = (2\pi)^d \eta_0^\alpha$ , car on ne conserve que le terme d'ordre 0 en  $\xi$ .

On en déduit

$$\int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{ik((x-y)\eta + y \cdot \eta_0)} \eta^\alpha dy d\eta = (2\pi)^d e^{ikx \cdot \eta_0} \eta_0^\alpha.$$

On généralise ce résultat. Pour appliquer la méthode de la phase stationnaire, on se ramène aux points critiques sur un ensemble compact. Plus précisément, il suffit de se ramener à un compact en  $y$  et à un voisinage conique en  $\eta$ . Ceci est fait dans l'exercice 9.0.

Le Jacobien de la phase est

$$\begin{pmatrix} -\text{Hess}\phi(y) & -\text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}$$

inversible grâce à la formule

$$\begin{pmatrix} -\text{Hess}\phi(y) & -\text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ -\text{Id} & \text{Hess}\phi(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la Jacobienne est égal à  $(-1)^d$ . Nous sommes dans les conditions d'application du théorème de la phase stationnaire, au voisinage du point critique  $(x, \nabla_x \phi(x))$  dans  $\mathbf{R}_y^d \times \mathbf{R}_\xi^d$ . La valeur de la phase critique est  $\phi(x)$ , et l'intégrale admet un développement en  $(y, \eta)$  dont le premier terme est  $p_m(x, \nabla_x \phi) \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{2d}{2}} a_0(x)$ . Nous proposons ici une méthode s'appuyant sur le lemme 8.5 pour calculer les fonctions  $b_j$  résultant du développement de phase stationnaire. Nous utilisons le changement de variable classique au voisinage du point critique  $y = x$ ,  $\xi = \nabla_y \phi(x)$ . En effet, il sera plus facile d'exprimer l'opérateur de développement de phase stationnaire au voisinage du point  $(0, 0)$ . On écrit

$$y = x + u, \xi = \nabla_x \phi(x) + \theta.$$

Alors il existe (développement de Taylor avec reste intégral) une matrice  $A(x, y)$  telle que

$$\phi(y) - \phi(x) - (y - x) \cdot \nabla_x \phi(x) = (y - x)A(x, y)(y - x).$$

L'intégrale calculée est

$$k^{m+d} \int_{\mathbf{R}^{2d}} dud\theta e^{ik[(-u)(\nabla_x \phi(x) + \theta) + \phi(x) + u \nabla_x \phi(x) + uA(x, x+u)u]} a(x+u, k) p(x, \nabla_x \phi(x) + \theta, k),$$

ou encore

$$k^{m+d} e^{ik\phi(x)} \int_{\mathbf{R}^{2d}} dud\theta e^{-iku\theta} e^{ikuA(x, x+u)u} a(x+u, k) p(x, \nabla_x \phi(x) + \theta, k).$$

Nous avons déjà évalué au lemme 8.5 cette intégrale oscillante, où le symbole est  $a(x, u, \theta) = p(x, \nabla_x \phi + \theta, k) a(x+u, k) e^{ikuA(x, x+u)u}$ . Il vient

$$k^m e^{ik\phi(x)} \sum_{l \geq 0} \frac{1}{l! (ik)^l} \sum_{|\alpha|=l} \partial_{u^\alpha} [e^{ikuA(x, x+u)u} a(x+u, k)]|_{u=0} \partial_{\xi^\alpha} p(x, \nabla_x \phi(x), k).$$

Nous avons donc explicitement tous les termes du développement asymptotique. En évaluant les dérivées en  $u$  de  $e^{ikuA(x, x+u)u}$ , on montre que le terme comportant  $|\alpha|$  dérivées est d'ordre  $k^{m+d-\frac{|\alpha|}{2}}$ . La somme de ces termes définit alors une série asymptotique (comme dans la preuve de la proposition 8.10). De cette proposition, on déduit, en annulant le terme de plus haut degré en  $k$  dans l'expression de  $I$

**Lemme 9.1**  *$u$  est solution asymptotique non triviale de  $P$ , i.e.  $P(u) \simeq 0 \Rightarrow \{(x, \nabla_x \phi(x)) \in \text{Car}(p) \cap (\text{supp} a_0 \times \mathbf{R}^d)$ .*

On a généralisé pour un opérateur pseudo-différentiel la notion d'équation eikonale. On peut donner une généralisation supplémentaire, et faire agir un opérateur pseudo-différentiel sur un opérateur intégral de Fourier (ce qui revient à composer des opérateurs intégraux de Fourier, voir [46]). Cette généralisation est utilisée dans le chapitre 10 qui étudie les caustiques.

**Proposition 9.2** *Soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m$  et soit  $A$  un opérateur de Fourier intégral (selon la définition 7.4) de phase  $s(x, \theta)$  et de symbole  $a(x, \theta) \in S^p$ . Alors*

$$P(A(u))$$

*définit un opérateur de Fourier intégral de même phase et de symbole  $b(x, \theta) \in S^{m+p}$ , chaque terme  $b_j$  étant calculé avec les termes de  $P$  et de  $a$  dont la somme des ordres est  $\leq j$ .*

Cette proposition est une conséquence de l'exercice 8.3. Il est énoncé dans l'article de Duistermaat et de Hörmander [31] dans le théorème 4.2.2.<sup>1</sup>

**Preuve** Nous détaillons cette preuve pour montrer une fois de plus une application formelle<sup>2</sup> du théorème de la phase stationnaire. Pour cela, on introduit

$$Pv(x) = \int e^{i(x-z)\xi} p(x, \xi) v(z) dz d\xi \quad (9.1.1)$$

<sup>1</sup>Nous verrons plus loin que si  $A$  a pour relation canonique  $\mathcal{C}$ , alors  $PA$  a aussi pour relation canonique  $\mathcal{C}$ .

<sup>2</sup>le mot formelle est dû au fait que l'on n'étudie pas ici le comportement en  $k$  de chaque terme du développement formel obtenu, mais ce développement peut être justifié.

On écrit alors la composée

$$P(Au)(x) = \int \int e^{i(x-z)\xi + s(z,\theta) - y\theta} p(x, \xi) a(z, \theta) u(y) dz d\theta dy d\xi. \quad (9.1.2)$$

La phase associée est  $\phi(x, y, z, \xi, \theta) = (x-z)\xi - y\theta + s(z, \theta)$ . Pour se ramener à un opérateur intégral de Fourier, dont la phase ne dépend que de  $(x, \theta, y)$ , on applique la méthode du col dans les variables  $(z, \xi)$ . Le point critique  $(z_c, \xi_c)$  est solution de

$$\begin{cases} -\xi_c + \partial_z(z_c, \theta) = 0 \\ z_c = x \end{cases}$$

et le Hessien de la phase est

$$\begin{pmatrix} \text{Hess } s_z(z, \theta) & -Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix}$$

Cette phase est non dégénérée, de valeur critique  $s(x, \theta) - y\theta$ . Ainsi, utilisant le théorème de la phase stationnaire (Proposition 4.3) et introduisant le laplacien associé à la phase, on a

$$\Delta_s a(z, \xi) = \text{Tr} \left( \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ -Id & \text{Hess}_z s(z, \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{z\xi}^2 & \partial_{z\xi}^2 \\ \partial_{z\xi}^2 & \partial_{\xi^2}^2 \end{pmatrix} \right) a = -2\partial_{z\xi}^2 a + \text{Hess}_z s(z, \theta) \partial_{\xi^2}^2 a.$$

L'opérateur utilisé dans le théorème de la phase stationnaire est ainsi

$$(i)^{-1} [-\partial_{z\xi}^2 + \frac{1}{2} \text{Hess}_z s(z, \theta) \partial_{\xi^2}^2].$$

L'intégrale (9.1.2) se met sous la forme

$$P(Au)(x) = \int e^{is(x,\theta) - y\theta} B(x, y, \theta) u(y) dy d\theta$$

où le symbole  $B$  vaut

$$B(x, y, \theta) = \sum_l (l!)^{-1} (i)^{-l} [-\partial_{z\xi}^2 + \frac{1}{2} \text{Hess}_z s(z, \theta) \partial_{\xi^2}^2]^l (p(x, \xi) a(z, \theta))|_{z_c=x, \xi_c=\nabla_z s(z_c, \theta)}.$$

Ce symbole est de la forme  $b(x, \theta)$ . Il ne dépend pas de  $y$  (ce qui n'est pas toujours le cas dans l'application du théorème de la phase stationnaire).

**Remarque** Des relations  $\partial_{\xi_j \xi_k}^2 (p(x, \xi) a(z, \theta)) = (\partial_{\xi_j \xi_k}^2 (p(x, \xi)) a(z, \theta))$  et  $\partial_{z_j \xi_j}^2 p(x, \xi) a(z, \theta) = \partial_{\xi_j} p(x, \xi) \partial_{z_j} a(z, \theta)$ , on déduit le terme d'ordre  $-1$ , égal à

$$b_1(x, \theta) = \left[ \sum_j \partial_{\xi_j} p(x, \xi) \partial_{z_j} a(z, \theta) - \frac{1}{2} \left( \sum_{j,k} \partial_{\xi_j \xi_k}^2 p(x, \xi) \partial_{z_j z_k}^2 s(z, \theta) a(z, \theta) \right) \right].$$

C'est un opérateur d'ordre 1 sur  $a$  dont les coefficients sont ceux de l'opérateur de transport usuel  $\nabla_{\xi} p \cdot \nabla_z$ . Dans cet opérateur apparait  $\text{Hess}_z p \cdot \text{Hess}_z s$  qui correspond au terme  $\Delta \phi a_0$  dans l'équation de transport pour l'équation de Helmholtz. Nous continuons le calcul de (9.1.2). Dans la phase  $\phi$ , le changement de variable

$$(z, \xi) = (x + u, \nabla_z s(x, \theta) + \eta)$$

conduit à la phase

$$-u \cdot \eta + [s(x + u, \theta) - u \nabla_z s(x, \theta)] - y \cdot \theta.$$

Soit

$$\tilde{p}(x, \theta; u, \eta) = p(x, \nabla_z s(x, \theta) + \eta) a(x + u, \theta) e^{i([s(x+u, \theta) - u \nabla_z s(x, \theta)] - y \cdot \theta)}. \quad (9.1.3)$$

C'est un symbole de  $S_{1,0}^m((u, \eta) \in \mathbb{R}^{2d})$ , les points  $x$  et  $\theta$  étant fixés, puisque les dérivées en  $u$  ne font pas intervenir de puissances supplémentaires de  $\eta$ . Le développement asymptotique de l'intégrale  $\int e^{-iu \cdot \eta} \tilde{p}(x, \theta; u, \eta) du d\eta$  existe par le lemme 8.5. Il faut pour achever cette preuve contrôler le symbole obtenu en variable  $\theta$ . En effet, une dérivation en  $u$  du symbole  $\tilde{p}$  conduit à des puissances de  $\theta$  supplémentaires. Le résultat est vrai par une méthode analogue à celle employée dans la preuve de la proposition 8.9.

On a

$$A_1 = \partial_{\eta u}^2 \tilde{p}(x, \theta; u, \eta) = \sum_j \frac{\partial p}{\partial \xi_j}(x, \nabla_z s(x, \theta) + \eta) \left[ \frac{\partial a}{\partial x_j}(x + u, \theta) + ia(x + u, \theta) \left( \frac{\partial s}{\partial x_j}(x + u, \theta) - \frac{\partial s}{\partial x_j}(x, \theta) \right) \right] \times e^{i([s(x+u, \theta) - u \nabla_z s(x, \theta)] - y \cdot \theta)}. \quad (9.1.4)$$

Le symbole intervenant dans (9.1.4) se met sous la forme

$$r(x, u, \theta, \eta) = \sum_j \frac{\partial p}{\partial \xi_j}(x, \nabla_z s(x, \theta) + \eta) a(x, u, \theta) e^{i([s(x+u, \theta) - u \nabla_z s(x, \theta)] - y \cdot \theta)}.$$

De l'égalité

$$r(x, 0, \theta, 0) = \sum_j \frac{\partial p}{\partial \xi_j}(x, \nabla_z s(x, \theta)) \frac{\partial a}{\partial x_j}(x, \theta) e^{-iy \cdot \theta},$$

on déduit que dans le terme  $A_1$  il n'y a aucun terme induit par la phase  $s$ . On vérifie que  $A_1$  est d'ordre  $m - 1$  car la dérivée d'un symbole homogène d'ordre  $m$  est d'ordre  $m - 1$ .

La phase  $s$  apparaît en revanche dans les termes suivants du développement de phase stationnaire. En effet, introduisons

$$A_2 = \sum_l \frac{\partial^2}{\partial \eta_l \partial u_l} \left[ \sum_j \frac{\partial p}{\partial \xi_j}(x, \nabla_z s(x, \theta) + \eta) [a(x, u, \theta) e^{i([s(x+u, \theta) - u \nabla_z s(x, \theta)] - y \cdot \theta)}] = \sum_{j,l} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi_j \partial \xi_l}(x, \nabla_z s(x, \theta) + \eta) \left[ \frac{\partial a_{1,j}}{\partial u_l}(x, u, \theta) + a_{1,j}(x, u, \theta) \left( \frac{\partial s}{\partial x_l}(x + u, \theta) - \frac{\partial s}{\partial x_l}(x, \theta) \right) \right] e^{i([s(x+u, \theta) - u \nabla_z s(x, \theta)] - y \cdot \theta)}.$$

On trouve

$$\frac{\partial a}{\partial u_l}(x, u, \theta) = \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_l}(x + u, \theta) + a(x + u, \theta) \frac{\partial^2 s}{\partial x_j \partial x_l}(x + u, \theta).$$

Dans ce terme, apparaît la dérivée seconde de  $s$  en  $u$ , qui est d'ordre 1 car  $s$  est homogène d'ordre 1 en  $\theta$ . Il vient ainsi comme terme dans le symbole un terme d'ordre  $m - 2 + 1 = m - 1$  (le  $m - 2$  provient de la dérivée seconde du symbole  $p$ ). Le terme  $A_2$  est donc un terme d'homogénéité  $m - 1$ .

On rappelle les expressions

$$A_1(x, \theta) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha a(x, \theta) \partial_\theta^\alpha p(x, \theta),$$

$$A_2(x, \theta) = \sum_{|\alpha|=2} \left[ \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha a(x, \theta) + a(x, \theta) \partial_z^\alpha s(x, \theta) \right] \partial^\alpha p(x, \theta).$$

Nous démontrons dans ce qui suit que le terme  $A_j$  du développement de phase stationnaire est d'ordre d'homogénéité  $\leq m - [\frac{j+1}{2}]$  dans la variable  $\theta$ . La somme asymptotique existe par le théorème de complétude asymptotique (Proposition 6.3). Ceci prouve la proposition 9.2.

**Traitement du terme  $A_j$**  Dans le cas général, on a  $A_j = \sum_{|\alpha|=j} D_\alpha$ , avec

$$D_\alpha(x, \theta) = \frac{1}{\alpha!} \partial_u^\alpha \partial_\eta^\alpha [p(x, \nabla_z s(x, \theta) + \eta) a(x + u, \theta) e^{i(s(x+u, \theta) - u \nabla_z s(x, \theta))}] \\ = \sum_{\alpha' + \alpha'' = \alpha} \frac{1}{\alpha'! \alpha''!} \partial_\eta^\alpha p(x, \nabla_z s(x, \theta)) \partial_x^{\alpha''} a(x, k) \partial_u^{\alpha'} [e^{i(s(x+u, \theta) - u \nabla_z s(x, \theta))}].$$

On utilise l'égalité

$$\partial_{u_j} [e^{i(s(x+u,\theta)-u\nabla_z s(x,\theta))}] = i\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}(x+u,\theta) - \frac{\partial s}{\partial x_j}(x,\theta)\right)[e^{i(s(x+u,\theta)-u\nabla_z s(x,\theta))}]$$

dont on déduit, notant  $t(u, x, \theta) = e^{i(s(x+u,\theta)-u\nabla_z s(x,\theta))}$ , l'identité

$$\partial_{u_j} t = iu_j w(u, x, \theta)t(u, x, \theta).$$

Ainsi, pour  $|\alpha'| \geq 2$ , on trouve, si  $\alpha'$  ne comprend que des dérivées d'ordre 1,  $\partial_{u^{\alpha'}} t(0, x, \theta) = 0$ , et si  $\alpha'$  comprend une dérivée d'ordre 2, on trouve

$$\partial_{u^{\alpha'}} t(0, x, \theta) = \sum_{\text{dérivées d'ordre 2}} b_j \frac{\partial^2 s}{\partial u_j^2}.$$

Le calcul successif de tous les termes est très technique. On applique le lemme 8.5.

## 9.2 Changement de variable et objets géométriques

Nous définissons un premier objet géométrique : les bicaractéristiques. Elles sont définies dans l'espace des positions impulsions associé à l'espace des symboles. il s'agit de la généralisation des rayons de l'optique géométrique introduits au chapitre 3, dans le sens où les bicaractéristiques associées à l'opérateur  $\xi^2 - k^2$  sont les courbes dont les premières coordonnées sont les rayons et où les deuxièmes coordonnées sont les vecteurs  $\vec{p}$  de module  $k$  donnant la direction des rayons. L'impulsion est alors  $\vec{p}$  par analogie avec le Hamiltonien  $|\vec{p}|^2 - k^2$ .

### 9.2.1 Les bicaractéristiques

Commençons par un exemple provenant du résultat de la Section 3. Nous avons, dans cette section, calculé la solution asymptotique formelle de  $(\Delta + k^2)u(x, k) = 0$  sous la condition (que nous avons nommée condition initiale)  $u(x, k) = A(x, k)e^{ik\phi_0}$ ,  $x \in \Sigma_0$ . Il s'agissait donc d'une phase constante sur la variété  $\Sigma_0$  de codimension 1. Nous supposons  $A(x, k) \simeq \sum_j A_j(x)(ik)^{-j}$ . Pour nous fixer les idées, considérons un point  $x_0 \in \Sigma_0$ . Alors, pour tout  $x \in \Sigma_0 \cap B(x_0, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon$  assez petit, on peut définir un système de coordonnées locales  $(y_1, y_2)$  sur  $\Sigma_0$  telles que  $x = x(y)$ . Pour  $u$  assez petit (de sorte que la matrice  $\det(Id + uW(x))$  soit inversible pour  $x \in \Sigma_0 \cap B(x_0, \varepsilon)$ ,  $W$  désignant, on le rappelle, la matrice des courbures ou matrice de Weingarten de la phase  $\phi$  solution de  $|\nabla\phi| = 1$ ,  $\phi|_{\Sigma_0} = \phi_0$  sur l'isophasse  $\Sigma_0$ ), on peut définir un difféomorphisme d'un voisinage de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^3$  par la relation

$$x(y, u) = x(y) + uN(x(y)). \quad (9.2.5)$$

On sait ainsi que

$$a_0(x(y, u)) = A_0(x(y))(\det(Id + uW(x(y))))^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$\phi(x(y, u)) = \phi_0 + u.$$

Notons  $u_0(x(y, u), k) = a_0(x(y, u))e^{ik(\phi_0 + u)}$ . Il s'agit du terme principal de la solution asymptotique formelle. Comme (9.2.5) définit un difféomorphisme, la fonction  $\phi$  telle que  $\phi_0 + u = \phi(x(y, u))$  est une fonction bien définie. Soit

$$u_0(x, k) = a_0(x)e^{ik\phi(x)}. \quad (9.2.6)$$

La transformée de Fourier inverse en  $k$  de (9.2.6) est la distribution (notation formelle)

$$v_0(x, t) = a_0(x) \int_{\mathbf{R}} e^{ik\phi(x) + ikt} dk = a_0(x)\delta(t - \phi(x)).$$



Rappelons que le front d'onde d'une distribution est le complémentaire de l'ensemble des points  $(x_0, t_0, \xi_0, \tau_0)$  tels qu'il existe  $\chi$  localisant au voisinage de  $(x_0, t_0)$  telle que  $\mathcal{F}(\chi v_0)$  soit à décroissance rapide dans un voisinage de  $(\xi_0, \tau_0)$ . On suppose que  $a_0(x_0) \neq 0$ . Il existe un voisinage  $B(x_0, \varepsilon)$  tel que  $|a_0(x)| \geq \frac{1}{2}|a_0(x_0)|$  sur ce voisinage (et donc est non nul). On choisit  $\chi$  de sorte qu'elle ait son support contenu dans ce voisinage. Lorsque  $t_0 \neq \phi(x_0)$ , on peut choisir  $\chi$  pour que  $\chi v_0$  soit identiquement nulle, donc les points  $(x_0, t_0, \xi_0, \tau_0), t_0 \neq \phi(x_0)$  ne sont pas dans le front d'onde de  $v_0$ . La transformée de Fourier de  $\chi v_0$  est (avec des abus de notation clairs)

$$I(\xi, \tau) = \int_{\mathbf{R}^3} a_0(x) e^{-i\xi \cdot x} \int_{\mathbf{R}} \delta(t - \phi(x)) e^{-it\tau} dt dx = \int_{\mathbf{R}^3} a_0(x) e^{-ix \cdot \xi - i\tau \phi(x)} dx.$$

Le difféomorphisme (9.2.5) conduit à

$$\int_{\mathbf{R}^3} dud\sigma_{\Sigma_0}(y) \det(Id + uW(x(y))) a_0(x(y, u)) e^{ix(y) \cdot \xi + iuN(x(y)) \cdot \xi + i\tau \phi_0 + i\tau u}.$$

Cette phase stationne pour  $\xi$  normal à  $\Sigma_0$  et pour  $N(x(y)) \cdot \xi + \tau = 0$ . Il vient ainsi  $\xi = \lambda N(x(y))$  et  $\tau = -\lambda$ . Les points où la phase ne stationne pas correspondent aux points  $(x(y, u), \phi_0 + u, \xi, \tau)$  qui ne sont pas dans le front d'onde de  $v_0$ . Le front d'onde de  $v_0$  satisfait donc à

$$WF(v_0) \cap B(x_0, \varepsilon) = \{(x(y) + uN(x(y)), \phi_0 + u, -\tau N(x(y)), \tau)\} \cap B(x_0, \varepsilon). \quad (9.2.7)$$

On donne la définition des courbes bicaractéristiques :

**Définition 9.1** *Les courbes bicaractéristiques de l'opérateur  $P$  différentiel (ou du symbole  $p$  homogène, symbole principal de  $P$ ) sont les courbes intégrales du champ de vecteur hamiltonien  $H_p \in T(T^*\mathbf{R}^d)$  associé au symbole  $p$  sur  $T^*\mathbf{R}^d$  :*

$$H_p = \sum_{j=1}^{j=d} \frac{\partial p}{\partial \xi_j}(x, \xi) \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j}(x, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad (9.2.8)$$

encore noté

$$H_p = \left( \frac{\partial p}{\partial \xi}, -\frac{\partial p}{\partial x} \right).$$

Elles satisfont

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}((x(s), \xi(s)) = H_p((x(s), \xi(s))) \\ (x(0), \xi(0)) = (x_0, \xi_0). \end{cases} \quad (9.2.9)$$

Cette définition sera précisée d'un point de vue géométrique dans la section 9.3 consacrée à la géométrie symplectique. Dans l'exemple simple de l'opérateur des ondes dans l'espace usuel  $\Delta - \partial_t^2$ , son symbole est  $p(t, x, \tau, \xi) = \tau^2 - \xi^2$ . Le hamiltonien associé est le champ

$$H_p = (2\tau, -2\xi, 0, 0).$$

Les courbes intégrales de  $H_p$  vérifient  $\tau = \tau_0, \xi = \xi_0$ . On a bien sûr  $\tau^2 - \xi^2 = \tau_0^2 - \xi_0^2 = 0$ . Alors  $t(s) = t_0 + 2\tau_0 s, x(s) = x_0 - 2s\xi_0$ .

On en déduit aisément que :

- le symbole principal est invariant sur les bicaractéristiques,
- la phase solution de l'équation eikonale peut être calculée sur les bicaractéristiques de l'opérateur de d'Alembert. En effet, la phase de la solution de l'équation de Helmholtz obtenue après transformation de Fourier en temps de l'équation des ondes est  $\phi(s') = \phi_0 + s'$  et  $x(s') = x_0 + s' \nabla \phi(x_0)$ , avec  $|\nabla \phi(x_0)| = 1$ . On prend  $s' = -2s \frac{\xi_0}{\tau_0}$  pour vérifier que la projection sur l'espace physique des bicaractéristiques de l'opérateur de d'Alembert est confondue avec les caractéristiques et que la phase associée au d'Alembertien, égale à  $\psi(x, t) = \phi_0 + s - t$ , est calculée le long des bicaractéristiques.

### 9.2.2 Changement de variable et transformation du front d'onde, des bicaractéristiques et de la phase eikonale

Nous utilisons dans cette section le lemme de changement de variable 8.10 qui donne la relation entre le changement de variable dans  $X \subset \mathbb{R}^d$  et le changement de variable induit dans  $X \times \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{2d}$ . Nous avons la

**Proposition 9.3** *Soit  $\chi$  un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ , tel que  $\chi(x_0) = y_0$ . On définit un difféomorphisme  $h_\chi$  de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  par*

$$h_\chi(x, \xi) = (\chi(x), {}^t\chi'(x)^{-1}\xi).$$

Alors

1) *Invariance du front d'onde :*

$$WF(u \circ \chi^{-1}) = h_\chi(WF(u))$$

2) *Invariance des bicaractéristiques et de la phase solution de l'équation eikonale :*

*Soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel classique de symbole principal  $p_m(x, \xi)$  homogène de degré  $m$ . On définit l'opérateur pseudo-différentiel classique  $Q$  (en vertu de la proposition 8.10) par*

$$Q(v) \circ \chi^{-1} = P(v \circ \chi^{-1}),$$

*de symbole principal  $q_m(y, \eta)$ , où  $y = \chi(x)$ ,  $\eta = {}^t\chi'(x)^{-1}\xi$ .*

a) *Si  $(x(s), \xi(s))$  est une courbe intégrale du champ hamiltonien  $H_{p_m}$ , alors  $h_\chi(x(s), \xi(s))$  est la courbe intégrale du champ hamiltonien  $H_{q_m}$  passant par  $h_\chi(x(0), \xi(0))$ .*

b) *Si  $\phi(x)$  est une solution de l'équation eikonale pour  $p_m$ , alors  $\phi \circ \chi^{-1}$  est une solution de l'équation eikonale pour  $q_m$ .*

La preuve fait l'objet de l'exercice 1 de cette section. Notons que ce résultat peut être écrit localement, modulo quelques précautions.

Dans la suite de ce chapitre, nous généralisons l'approche déjà exploitée dans la section exprimant des solutions asymptotiques de l'équation de Helmholtz (Section 1.4), puis lorsque nous avons exprimé dans le chapitre 2 la solution d'un problème hyperbolique matriciel d'ordre 1 en introduisant une équation eikonale (2.2.4). Nous utilisons ici le résultat démontré dans la Section 9.1, en particulier l'alinéa 2) b) de la proposition 9.3. Nous généralisons la notion d'équation eikonale. En effet, nous avons démontré que, pour l'équation de Helmholtz comme pour un problème hyperbolique matriciel à coefficients variables, il existe une équation scalaire, dont une fonction  $\phi$  pouvait être solution, fonction que nous avons appelé **fonction phase** et équation que nous avons appelé **équation eikonale**. Nous avons vu dans le lemme 9.1 que l'on pouvait aussi introduire une équation eikonale pour un opérateur pseudo-différentiel usuel grâce aux opérateurs de Fourier intégraux. Enfin, la proposition 9.3 montre que l'ensemble des points  $(x, \nabla_x \phi)$  où  $\phi$  est une solution de l'équation eikonale associée à l'opérateur pseudo-différentiel de symbole principal  $p_m$  se transforme de la même façon que les courbes bicaractéristiques lorsque l'on considère l'opérateur  $Q$  tel que  $Q(u \circ \chi^{-1}) = (Pu) \circ \chi^{-1}$ . Ces considérations intrinsèques nous amènent à étudier non pas la phase  $\phi$  elle-même, mais les ensembles  $\{(x, \nabla_x \phi)\}$ , puis les généraliser. De tels ensembles constituent des variétés **lagrangiennes**, qui sont des **solutions lagrangiennes** de l'équation caractéristique  $p_m(x, \xi) = 0$ .

Nous introduisons le cadre géométrique dans lequel ces ensembles sont bien définis, il s'agit de la géométrie symplectique. En particulier, nous aboutirons à une définition rigoureuse et intrinsèque de l'objet introduit dans la Définition 9.1 par la relation (9.2.8). Nous nous appuyons ici sur le cours de J. Sjostrand [42]. Le lecteur intéressé peut se reporter au traité de Stenberg [91].

## 9.3 Géométrie symplectique

Nous choisissons dans cet ouvrage d'introduire le fibré cotangent comme l'espace de jets sur une variété. Il est aussi naturel de définir en premier le fibré tangent.

### 9.3.1 Définition géométrique du fibré cotangent

On se donne  $X$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $d$ .

**Définition 9.2** *Le fibré cotangent de  $X$  en  $x_0$ , noté  $T_{x_0}^*(X)$ , est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation d'équivalence  $f \sim g \Leftrightarrow f - g = o(|x - x_0|)$  dans l'ensemble des fonctions s'annulant en  $x_0$ , et l'élément associé à  $f \in C^1(X, \mathbb{R})$  est noté  $df$ .*

$$T_{x_0}^*(X) = \{f \in C^1(X, \mathbb{R}), f(x_0) = 0\} / \sim$$

L'élément  $df$  est alors le germe d'ordre 1 de  $f$ . Cette définition est évidemment abstraite; elle a pour mérite d'être intrinsèque du point de vue géométrique.

Pour la rendre plus explicite, plaçons nous dans un système de coordonnées locales. Pour chaque point  $x_0$  de  $X$ , il existe un voisinage  $W$  de ce point et un (bien sûr non unique) système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_d)$ . La base naturelle de  $T_{x_0}^*(X)$  associée à ce système de coordonnées locales est alors  $(dx_1, \dots, dx_d)$ . En effet, soit  $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ . Il existe donc un difféomorphisme  $\chi$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}^d$  tel qu'un point  $u$  de  $X \cap W$  s'écrive  $\chi(u) = (x_1, \dots, x_d)$ . Alors, par la formule de Taylor, la fonction de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$  égale à  $f \circ \chi^{-1}$  vérifie

$$(f \circ \chi^{-1})(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{j=d} \frac{\partial}{\partial x_j} (f \circ \chi^{-1})(\chi(x_0))(x_j - (\chi(x_0))_j) + o(|x - \chi(x_0)|). \quad (9.3.10)$$

En remarquant que  $x_j - (\chi(x_0))_j$  est associé à  $dx_j$ , on a la décomposition de  $f$  dans  $T_{x_0}^*(X)$ . Le fibré cotangent est

$$T^*X = \cup_{x_0 \in X} T_{x_0}^*(X).$$

La projection naturelle  $\pi$ , de  $T^*X$  dans  $X$  est définie par

$$l \in T^*X \Rightarrow \exists x = \pi(l), l \in T_x^*(X).$$

Lorsque  $X$  est muni d'un système de coordonnées locales, alors tout point  $\rho$  d'une section  $T_x^*X$  du fibré cotangent peut être caractérisé par ses coordonnées dans la base  $dx_1, dx_2, \dots, dx_d$ . Ainsi, un point  $\rho$  de  $T^*X$  est déterminé par  $(x, \xi)$  où  $x = \pi(\rho)$ ,  $\pi$  étant la projection naturelle de  $T^*X$  sur  $X$ . Dans  $T_{\pi(\rho)}^*(X)$ , on a

$$\rho = \sum_{j=1}^{j=d} \xi_j dx_j.$$

Ceci prouve qu'il existe une application de  $T^*(X) \cap \pi^{-1}(W)$  dans  $\chi(W) \times \mathbb{R}^d$  définie par  $\rho \rightarrow (x, \xi)$ ,  $\rho = \sum \xi_j dx_j$ . Cette application est  $C^\infty$ . Soient  $x^1$  et  $x^2$  deux points de  $X$  distincts. Comme  $\pi^{-1}(x^1)$  et  $\pi^{-1}(x^2)$  ont la même dimension et sont disjoints dans  $T^*X$ , on en déduit que  $T^*(X)$  est un fibré vectoriel  $C^\infty$ .

### 9.3.2 Changement de système de coordonnées locales

On utilise la relation (9.3.10) pour identifier la représentation de  $\rho$  dans la base  $dx_j$ . On voit que

$$\xi_j = \frac{\partial}{\partial x_j} (f \circ \chi^{-1})(\chi(x_0)). \quad (9.3.11)$$

Nous supposons que, dans  $W$ ,  $X$  est représenté par un deuxième système de coordonnées locales  $(y_1, \dots, y_d)$ . Alors on introduit le difféomorphisme  $\psi$  qui à un point de  $X \cap W$  fait correspondre  $(y_1, \dots, y_d) \in \psi(X \cap W)$ . Au point  $x_0$  est associé l'élément  $\eta$  dont les coordonnées dans la base  $dy_1, \dots, dy_d$  sont

$$\eta_j = \frac{\partial}{\partial y_j}(f \circ \psi^{-1})(\psi(x_0)). \quad (9.3.12)$$

Soit  $\phi = \chi \circ \psi^{-1}$ . C'est l'application permettant de passer des coordonnées  $y$  vers les coordonnées  $x$ . Comme  $\psi^{-1} = \chi^{-1} \circ \phi$ , on déduit de (9.3.12) et de (9.3.11) les égalités

$$\begin{aligned} \eta_j &= \frac{\partial}{\partial y_j}((f \circ \chi^{-1}) \circ \phi)(\psi(x_0)) \\ &= \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(f \circ \chi^{-1}) \frac{\partial \phi_k}{\partial y_j} \\ &= \sum_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y_j} \xi_k \\ &= ({}^t \frac{\partial x}{\partial y}) \xi_j \end{aligned}$$

où  $\frac{\partial x}{\partial y}$  est la matrice  $(\frac{\partial \phi_j}{\partial y_k})$ , matrice Jacobienne de l'application de passage  $y \rightarrow x$ . Nous synthétisons ainsi la relation de changement de variable.

**Lemme 9.2** *Soit  $x_0$  un point de  $X$ . Au voisinage de  $x_0$ , on peut définir un système de coordonnées locales  $(x)$ , ce qui permet de définir une base canonique de  $T_{x_0}^*(X)$ . Cette construction peut être faite pour tout point dans un voisinage  $W$  de  $x_0$ . La variété  $T^*(X)$  est donc une variété fibrée  $C^\infty$ . Lorsque  $(x)$  et  $(y)$  sont deux systèmes de coordonnées locales,  $(x, \xi)$  et  $(y, \eta)$  décrivent un même point  $\rho$  de  $T^*(X)$  lorsque  $x$  et  $y$  décrivent le même point de  $X$  et*

$$\xi = ({}^t \frac{\partial x}{\partial y})^{-1}(\eta).$$

Nous remarquons que nous retrouvons ici, en projection sur  $\mathbb{R}^d$ , le difféomorphisme  $h_\chi$  défini dans l'alinéa 1 de la proposition 9.3. En particulier, ceci prouve que le front d'onde  $WF$  d'une distribution sur une variété  $X$  s'identifie à un fermé conique du fibré cotangent  $T^*X$ .

### 9.3.3 Fibré tangent

On définit l'espace tangent à  $X$  en  $x_0$  comme le dual de  $T_{x_0}^*(X)$  dans la dualité canonique de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ . On notera la base duale associée à  $(dx_1, \dots, dx_d)$  par  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d})$ . Pour le moment, il s'agit de notations. Nous définissons aussi  $TX = \cup_{x_0} T_{x_0}(X)$ . Alors, par dualité,  $TX$  est aussi un fibré vectoriel et  $(x, t)$  et  $(y, s)$  décrivent le même point de  $TX$  lorsque  $x$  et  $y$  décrivent le même point de  $X$  et lorsque  $t = (\frac{\partial x}{\partial y})s$ .

Supposons donnée une section du fibré  $TX$ , c'est-à-dire une application locale de  $X$  dans  $TX$  telle que sa composée avec la projection  $\pi$  soit l'identité. On appelle de tels éléments des **champs de vecteurs**. Ils peuvent s'écrire, dans un système de coordonnées locales

$$V(\chi^{-1}x) = \sum_{j=1}^{j=d} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Comme, dans ce système

$$df = \sum_{j=1}^{j=d} \frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ \chi^{-1}) dx_j$$

la relation de dualité donne

$$\langle V, df \rangle = \sum_{j=1}^{j=d} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ \chi^{-1}).$$

On identifie alors un champ de vecteurs avec un opérateur différentiel d'ordre 1, et on dit, par dualité, que  $df$  est une forme différentielle, et plus précisément, comme  $f$  est une fonction,  $df$  est une 1-forme différentielle.

### 9.3.4 Les formes canoniques et le champ hamiltonien

Ces définitions sont techniques, mais elles permettent de réduire les démonstrations de la proposition 9.3 de manière considérable.

On considère un système de coordonnées locales  $(x)$  sur  $X$ . Le fibré  $T^*X$  est identifié à  $\pi(W) \times \mathbb{R}^d$  grâce au système de coordonnées locales et à la projection naturelle.

Pour  $\rho \in T^*X$ , on peut alors définir l'espace  $T_\rho^*(T^*X)$ , puisque  $T^*X$  est une variété  $C^\infty$ . Un élément de  $T_\rho^*(T^*X)$  est une classe d'équivalence pour  $\sim$  dans  $T^*X$  au voisinage de  $\rho$ . On définit, par le schéma commutatif

$$\begin{array}{ccc} T^*X & \leftarrow & T_\rho^*(T^*X) \\ \pi \downarrow & & \uparrow \pi^* \\ X & \leftarrow & T_{\pi(\rho)}^*X \end{array}$$

le relèvement dual  $\pi^*$ .

On applique ce relèvement dual  $\pi^*$  à l'élément  $\rho \in T_{\pi(\rho)}^*(X)$ , et on définit ainsi la **1-forme canonique** par

$$\omega_\rho = \pi^*(\rho).$$

Il s'agit d'un élément de  $T_\rho^*(T^*X)$ . Autrement dit,  $\rho \rightarrow \omega_\rho$  est une forme différentielle sur  $T^*X$ . Les coordonnées canoniques sur  $T^*X$  sont  $(x, \xi)$ , la base canonique associée est  $(dx_1, \dots, dx_d, d\xi_1, \dots, d\xi_d)$ , et on a

$$\omega_\rho = \sum_{j=1}^{j=d} \xi_j dx_j + \sum_{j=0}^{j=d} 0 d\xi_j.$$

Rappelons ensuite que on peut définir une dualité entre  $(T^*X)^2$  et  $(TX)^2$  par

$$\langle \rho_1 \wedge \rho_2, t_1 \wedge t_2 \rangle = \langle \rho_1, t_1 \rangle \langle \rho_2, t_2 \rangle - \langle \rho_1, t_2 \rangle \langle \rho_2, t_1 \rangle. \quad (9.3.13)$$

Pour  $v \in T^*(T^*X)$ , on écrit

$$v = \sum_{j=1}^{j=d} v_{j,0}(x, \xi) dx_j + \sum_{j=1}^{j=d} v_{j,1}(x, \xi) d\xi_j$$

et on définit

$$dv = \sum_{j=1}^{j=d} dv_{j,0}(x, \xi) \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{j=d} dv_{j,1}(x, \xi) \wedge d\xi_j,$$

l'élément  $dv_{j,0}$  ou  $dv_{j,1}$  étant dans  $T^*X$ , et le  $\wedge$  étant la notation employée pour l'élément de  $(T^*X)^2$  défini par la dualité (9.3.13).

On introduit ainsi la **2-forme canonique**  $\sigma = d\omega$ . Sa définition est intrinsèque, ne dépend pas du système de coordonnées.

On vérifie que, pour  $\omega$  la forme différentielle sur  $T^*X$  définie ci-dessus, les fonctions  $v_{j,0}(x, \xi)$  et  $v_{j,1}(x, \xi)$  sont connues, respectivement égales à  $\xi_j$  et 0. Donc on a

$$dv_{j,0}(x, \xi) = \sum_{k=1}^{k=d} 0 dx_k + \sum_{k=1}^{k=d} \delta_{kj} d\xi_k,$$

ce qui implique

$$\sigma = d\omega = \sum_{j=1}^{j=d} d\xi_j \wedge dx_j. \quad (9.3.14)$$

Par les définitions employées précédemment,  $\sigma$  est une forme bilinéaire sur  $(T_\rho T^*X)^2$ , donnée par

$$\sigma_\rho(t_1, t_2) = \langle \sigma_\rho, t_1 \wedge t_2 \rangle .$$

Lorsque, dans un système de coordonnées,  $t_1 = (s_1, \tau_1)$  et  $t_2 = (s_2, \tau_2)$ , on vérifie que

$$\begin{aligned} \langle \sigma, t_1 \wedge t_2 \rangle &= \sum_{j=1}^{j=d} \langle d\xi_j \wedge dx_j, t_1 \wedge t_2 \rangle \\ &= \sum_{j,k,l} \langle d\xi_j \wedge dx_j, (s_{1,k} dx_k + \tau_{1,k} d\xi_k) \wedge (s_{2,l} dx_l + \tau_{2,l} d\xi_l) \rangle \end{aligned}$$

On remarque que  $d\xi_j \wedge dx_j = -dx_j \wedge d\xi_j$  et que  $\langle d\xi_j \wedge dx_j, dx_p \wedge dx_q \rangle = \langle d\xi_j \wedge dx_j, d\xi_p \wedge d\xi_q \rangle = 0$ , puis que  $\langle d\xi_j \wedge dx_j, dx_p \wedge d\xi_q \rangle = -\delta_{jq} \delta_{ip}$ . De l'égalité

$$\langle t_1 \wedge t_2 \rangle = \sum_{j,l} s_{1j} s_{2l} dx_j \wedge dx_l + \sum_{j,l} (s_{1j} \tau_{2l} - s_{2j} \tau_{1l}) dx_j \wedge d\xi_l + \sum_{j,l} \tau_{1j} \tau_{2l} d\xi_j \wedge d\xi_l,$$

on déduit la relation

$$\langle \sigma, t_1 \wedge t_2 \rangle = \langle \tau_2, s_1 \rangle - \langle \tau_1, s_2 \rangle .$$

Il existe alors une bijection  $H$  entre  $T_\rho^*(T^*X)$  et son dual  $T_\rho(T^*X)$  donnée par

$$\sigma(s, Hu) = \langle s, u \rangle ,$$

pour  $u \in T_\rho^*(T^*X)$ . En coordonnées canoniques, si  $u = u_x dx + u_\xi d\xi$ ,  $Hu = u_\xi \frac{\partial}{\partial x} - u_x \frac{\partial}{\partial \xi}$ . On introduit alors le champ hamiltonien de  $f(x, \xi)$  de classe  $C^1$  sur un ouvert de  $T^*X$  par la relation  $H_f = H(df) \in T(T^*X)$ . Par définition

$$\sigma(s, H(df)) = \langle s, df \rangle .$$

Il vient, en coordonnées canoniques (et on retrouve ainsi la définition 9.1) :

$$H_f = \sum_{j=1}^{j=d} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} .$$

Le caractère intrinsèque de ces notions nous permet de donner une preuve directe de la proposition 9.3. En effet, les courbes intégrales du champ hamiltonien sont des courbes sur  $T^*X$ . Le champ hamiltonien est intrinsèque, donc transporté par le difféomorphisme  $h_\chi$  (associé au difféomorphisme  $\chi$  et défini à l'alinéa 1 de la proposition 9.3), qui est la manière d'identifier les points du fibré cotangent. Ses courbes intégrales sont donc transportées de la même façon. Enfin, le symbole d'un opérateur est, lui aussi défini sur le fibré cotangent de manière naturelle. Ceci est une conséquence de la proposition 8.10. En effet, un changement de variable dans le symbole  $a(x, \xi)$  associé à l'opérateur  $a(x, D)$  transforme cet opérateur selon la relation  $a(x, D)(u \circ \chi) = (b(y, D)(u)) \circ \chi$  et le symbole selon la relation  $b(\chi(x), \eta) = a(x, {}^t \chi'(x) \cdot \eta)$ , ce qui est équivalent à  $b(h_\chi(x, \xi)) = a(x, \xi)$ . En d'autres termes, l'invariance du symbole par  $h_\chi$  et le fait que le point  $(x, \xi)$  et le point  $h_\chi(x, \xi)$  représentent le même élément de  $T^*\mathbb{R}^d$  impliquent que le symbole est bien défini sur  $T^*\mathbb{R}^d$ .

### 9.3.5 Quelques remarques

On vérifie l'égalité

$$[H_f, H_g] = H_{\{f, g\}}. \quad (9.3.15)$$

En effet, on sait que les termes d'ordre 2 disparaissent dans le commutateur, donc on ne conserve dans ce qui suit que les termes d'ordre 1 ou zéro. Comme

$$H_f H_g = \left( \sum_j \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \left( \sum_k \frac{\partial g}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \right),$$

le coefficient de  $\frac{\partial}{\partial x_k}$  dans le commutateur est

$$\sum_j \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial \xi_k} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right) - \left( \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial \xi_k} + \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right).$$

D'autre part, on vérifie que

$$\{f, g\} = H_f g = \sum_j \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j}.$$

On en déduit

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \{f, g\} = \sum_j \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j \partial \xi_k} + \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_k \partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial \xi_k} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_j \partial \xi_k}.$$

En comparant, on aboutit au résultat. On vérifie ensuite que, pour  $p \in C^\infty(T^*X)$ ,  $H_p p = 0$ , ce qui induit que

$H_p$  est tangent à l'hypersurface  $\{p = 0\}$ .

En effet, pour  $(V, W) \in T_{(x_0, \xi_0)}(\{p = 0\})$ ,  $p(x_0, \xi_0) = 0$ , il existe une courbe  $\{(x(t), \xi(t))\} \subset \{p = 0\}$  telle que  $x(0) = x_0$ ,  $\xi(0) = \xi_0$ ,  $\dot{x}(0) = V$ ,  $\dot{\xi}(0) = W$ . L'égalité  $p(x(t), \xi(t)) = 0$  aboutit alors, en dérivant par rapport à  $t$  et en calculant en  $t = 0$ , à prouver que  $(V, W)$  dans l'hyperplan d'équation  $\partial_x p(x_0, \xi_0)V + \partial_\xi p(x_0, \xi_0)W = 0$ . Ainsi  $T_{(x_0, \xi_0)}(\{p = 0\}) = \ker H_p$ . Le vecteur  $H_p$  est alors dans cet espace tangent.

Le lemme suivant, dû à Darboux, est un lemme essentiel du point de vue géométrie pour se ramener à des systèmes de coordonnées symplectiques plus simples. On le trouve par exemple dans le cours de Carathéodory [20].

**Lemme 9.3** Soit  $(p_j)_{j \in J}$ ,  $(q_k)_{k \in K}$  une famille de fonctions sur  $M$ , variété symplectique (par exemple  $T^*X$ ), telles que

$$\{p_j, p_k\} = 0, \{p_j, q_k\} = \delta_{jk}, \{q_j, q_k\} = 0.$$

et  $(dp_j, dq_k)$  linéairement indépendantes.

Alors on peut compléter cette famille en une famille de coordonnées symplectiques.

Ce lemme s'appuie sur la relation (9.3.15).

**Preuve** On peut, sans restreindre la généralité, supposer que  $p_j(\rho_0) = 0 \forall j \in J$ ,  $q_k(\rho_0) = 0 \forall k \in K$ . On notera aussi  $J$  et  $K$  les cardinaux respectifs de  $J$  et de  $K$ . Les champs  $H_{p_j}$ ,  $H_{q_k}$  commutent entre eux, car

$$\begin{aligned} [H_{p_j}, H_{p_{j'}}] &= H_{\{p_j, p_{j'}\}} = H_0 = 0 \\ [H_{q_k}, H_{q_l}] &= 0 \\ [H_{p_j}, H_{q_k}] &= H_{\delta_{jk}} = 0. \end{aligned}$$

Considérons une sous-variété  $G$  de  $T^*X$ , de dimension  $2n - J - K$ , transverse en  $\rho_0$  à l'espace vectoriel  $H = \text{Vect}(H_{p_j}, H_{q_k})$ . L'idée de cette preuve est de construire le transport

de  $G$  par tous les champs  $H_{p_j}, H_{q_k}$ . A partir d'un paramétrage de  $G$ , on ajoute une variable transverse en propageant la direction de  $H_{p_1}$  :

On construit

$$H_{p_1}(G) = \left\{ \rho(x_1, z) \in T^*X, z \in G, \rho(0, z) = z, \frac{d}{dx_1}(\rho(x_1, z)) = H_{p_1}\rho(x_1, z) \right\}.$$

C'est une variété de dimension  $\dim G + 1$ . On poursuit la construction en considérant  $H_{p_2}(H_{p_1}G) \dots$ . On a ainsi obtenu un système de coordonnées locales  $(x, y, z)$  sur  $T^*X$ . En effet, les champs  $dp_j, dq_k$  sont linéairement indépendants, donc la dimension de  $T_{\rho_0}((H_{q_k})_{k \in K} \circ (H_{p_j})_{j \in J}G)$  est égale à  $2n - J - K + J + K = 2n$ .

Les champs commutent donc on a bien le droit de parler de coordonnées (en d'autres termes  $H_{p_{j_2}}(H_{p_{j_1}}(z)(x_1))(x_2) = H_{p_{j_1}}(H_{p_{j_2}}(z)(x_2))(x_1)$ , c'est-à-dire l'ordre d'application des opérateurs  $H_p, H_q$  n'est pas important). On montre aussi que  $\frac{\partial}{\partial x_1} = H_{p_1}$ , et on note que  $G = \{x = y = 0\}$ .

Il faut alors compléter la famille  $p_j, q_k$ , ce qui est l'objectif de notre lemme. Nous avons déjà des paires de coordonnées symplectiques données par  $(p_j, q_j)$ ,  $j \in J \cap K$  si ce dernier est non vide. En fait, on va compléter la famille dans un premier temps pour tous les éléments de  $J \cup K - J \cap K$ . Prenons donc, pour fixer les idées,  $j_0 \in J, j_0 \notin K$ . On recherche la solution de

$$\begin{cases} H_{p_j}q_{j_0} = \delta_{j_0j} \\ H_{q_k}q_{j_0} = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \partial_{x_j}q_{j_0} = \delta_{j_0j} \\ \partial_{y_k}q_{j_0} = 0 \end{cases}$$

On impose de plus  $q_{j_0}(0, 0, z) = q(z)$ , quelconque, telle que  $dq \neq 0$ . On peut alors construire  $q_{j_0}(x, y, z)$ . La famille  $(dp_j, dq_k, dq_{j_0})$  est une famille libre. Nous considérons donc cette nouvelle famille comme point de départ.

Nous procédons par itérations successives, remarquant que  $J$  et  $K$  jouent le même rôle. Nous avons donc obtenu un système de coordonnées

$$(p_j, q_j), j \in \{0, \dots, J\}$$

vérifiant  $(dp_j, dq_k)$  libre et  $\{p_j, q_k\} = \delta_{jk}, \{p_j, p_k\} = 0, \{q_j, q_k\} = 0$ . Par le même raisonnement que précédemment, nous avons construit un système de coordonnées locales sur  $T^*X$ , de la forme  $(x, y, z)$ , où  $x$  et  $y$  sont les  $2\dim(J \cup K)$  coordonnées indépendantes comportant les indices de  $J \cup K$ . On veut compléter le système de coordonnées  $(x, y, z)$ . On suppose  $d < n$  et on ordonne les coordonnées sous la forme  $(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d)$ . On note  $F = \{x = y = 0\}$ . On recherche une fonction  $q_{d+1}$  telle que  $H_{p_j}q_{d+1} = H_{q_j}q_{d+1} = 0$  pour  $1 \leq j \leq d$ , et  $dq_{d+1}|_F \neq 0$ . Ceci est possible car la dimension de  $T_{\rho_0}F$  est au moins 2. On choisit alors  $p_{d+1}$  la solution de

$$H_{q_{d+1}}p_{d+1} = 1, H_{q_j}p_{d+1} = 0, H_{p_j}p_{d+1} = 0, p_{d+1} = p(z), z \in F \cap \{q_{d+1} = 0\}$$

la fonction  $p$  étant donnée sur  $F \cap \{q_{d+1} = 0\}$ , qui est non vide et de dimension supérieure ou égale à 1. Ce processus est itéré jusqu'à épuisement de la dimension. Le système obtenu est  $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ .

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $C^\infty$  de  $T^*X$ , écrites sous la forme  $f(p, q)$  et  $g(p, q)$ , on a  $p = p(x, \xi), q = q(x, \xi)$ . On écrit  $f(p, q) = F(x, \xi)$  et  $g(p, q) = G(x, \xi)$ .

On vérifie alors

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial G}{\partial \xi_j} - \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial G}{\partial x_j} &= \sum_{j, j'} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial p_{j'}} \{p_j, p_{j'}\} + \sum_{k, k'} \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial q_{k'}} \{q_k, q_{k'}\} \\ &+ \sum_{j, k} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_k} \{p_j, q_k\} + \sum_{j, k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_j} \{q_k, p_j\}. \end{aligned}$$

Utilisant les relations sur les crochets des coordonnées nouvelles, on trouve



$$\{f, g\} = \{F, G\} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j}.$$

La relation  $\{f, g\} = H_f g$  conduit à  $H_f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j}$ . L'identification  $\sigma(H_f, H_g) = \{f, g\}$  donne alors

$$\sigma\left(\sum_j -\partial_{q_j} f dp_j + \partial_{p_j} f dq_j, \sum_j -\partial_{q_j} g dp_j + \partial_{p_j} g dq_j\right) = \sum_j \partial_{p_j} f \partial_{q_j} g - \partial_{q_j} f \partial_{p_j} g.$$

Il vient alors

$$\sigma\left(\sum_j a_j dp_j + b_j dq_j, \sum_j c_j dp_j + d_j dq_j\right) = \sum_j -b_j c_j + a_j d_j,$$

donc  $\sigma = \sum_1^n dp_j \wedge dq_j$ , et le système de coordonnées  $(p_j, q_j)$  est symplectique. Le lemme 9.3 est donc démontré.

## 9.4 Relations canoniques et opérateurs intégraux de Fourier

Dans cette section, nous énonçons le théorème de composition des opérateurs intégraux de Fourier, tel que nous pouvons le trouver dans [42]. Nous n'en présenterons pas la démonstration.

Il est nécessaire pour ce faire d'introduire une notion géométrique associée à un opérateur intégral de Fourier, sa **relation canonique**. La définition des relations canoniques est étroitement liée à des sous-variétés particulières de  $T^*X$ , associées à la structure symplectiques, les variétés lagrangiennes. Nous les introduisons ici pour la définition abstraite des classes d'opérateurs intégraux de Fourier. Nous les utiliserons à nouveau dans le chapitre 12.

### 9.4.1 Définition des relations canoniques et des transformations canoniques

Soit  $X$  une variété de dimension  $n$ .

**Définition 9.3** On appelle variété lagrangienne toute sous-variété  $\Lambda$  isotrope (c'est-à-dire vérifiant  $\sigma|_{\Lambda} = 0$ ) de dimension maximale  $n$  ( $\dim_{(x_0, \xi_0)} \Lambda = n$ ).

Cette définition provient des travaux de Maslov [72], on la retrouve dans L. Hörmander [46] et dans J.J. Duistermaat [29]. L'auteur a aussi rencontré (dans des notes de Chazarain, Rencontres scientifiques de Cargèse) l'appellation de lagrangienne maximale.

Un exemple naturel est la variété  $\{(x, d\phi(x)), x \in X\} = \Lambda_\phi$ . Cette variété s'appelle la variété lagrangienne associée à la phase  $\phi$ . L'hypothèse de maximalité est trivialement vérifiée, puisque  $x$  est un paramétrage de la variété. On vérifie, sur  $\Lambda_\phi$  que  $\xi_j = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)$ , puis que  $d\xi_j = \sum_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} dx_i$ , d'où

$$\sum d\xi_j \wedge dx_j = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j.$$

Les relations  $\partial_{x_i x_j}^2 \phi = \partial_{x_j x_i}^2 \phi$  pour  $\phi$  suffisamment régulière et  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$  montrent que la variété  $\Lambda_\phi$  est une variété lagrangienne.

**Définition 9.4** Une relation canonique  $\mathcal{C}$  de  $T^*(X \times Y)$  est un sous espace de  $T^*(X \times Y) \simeq T^*X \times T^*Y$  qui soit une variété lagrangienne pour la forme canonique  $\sigma_X - \sigma_Y = dx \wedge d\xi - dy \wedge d\eta$ . En d'autres termes

$$\mathcal{C} = \{(x, \xi; y, \eta) \in T^*X \times T^*Y\}$$

est une relation canonique si  $\Lambda_{\mathcal{C}} = \{(x, \xi; y, -\eta), (x, \xi; y, \eta) \in \mathcal{C}\}$  est une variété lagrangienne pour  $\sigma_{X \times Y} = dx \wedge d\xi + dy \wedge d\eta$ .

Soit  $\mathcal{H}$  une transformation canonique de  $X$  sur  $Y$ . Il s'agit d'une application de classe  $C^\infty$  de  $T^*Y$  sur  $T^*X$  qui préserve la structure symplectique (soit  $\mathcal{H}^*(dy \wedge d\eta) = dx \wedge d\xi$ ).

On vérifie que le graphe  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$  de la transformation canonique  $\mathcal{H}$ , sous ensemble de  $T^*X \times T^*Y$  des  $(\mathcal{H}(\rho), \rho)$ ,  $\rho \in T^*Y$ , est une relation canonique.

On suppose qu'il existe un point  $(x_0, \eta_0)$  tel que la projection canonique  $l$  de  $T^*(X \times Y)$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  qui à  $(x, \xi; y, \eta)$  fait correspondre  $(x, \eta)$  est un difféomorphisme en  $l^{-1}(x_0, \eta_0)$ . Alors il existe, par le théorème de représentation de Hörmander (Théorème 10.1, énoncé et démontré plus loin, dont la démonstration s'appuie sur le Lemme 10.2 de complétude d'une base canonique) une phase  $\phi(x, \eta)$  telle que, localement,  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$  est de la forme  $(x, \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \eta), \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(x, \eta), \eta)$ . En d'autres termes, la transformation canonique  $\mathcal{H}$  est localement de la forme

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(x, \eta), \eta\right) \rightarrow \left(x, \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \eta)\right).$$

Soit  $\mathcal{C}' = \{(x, \xi; y, \eta), (x, \xi; y, -\eta) \in \mathcal{C}\}$ . On vérifie que

$$dx \wedge d\xi + dy \wedge d\eta|_{\mathcal{C}'} = dx \wedge d(\partial_x \phi) - d(\partial_\eta \phi) \wedge d\eta.$$

On a les égalités  $d(\partial_{x_i} \phi) = \text{Hess}_{x_i x} \phi \cdot dx + \sum_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial \eta_j} d\eta_j$  et  $d(\partial_{\eta_j} \phi) = \sum_{j_i} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial \eta_j} dx_i + \text{Hess}_{\eta_j \eta} \phi \cdot \eta$ . Les matrices  $\text{Hess}_{x^2} \phi$  et  $\text{Hess}_{\eta^2} \phi$  étant symétriques, on trouve

$$dx \wedge d\xi + dy \wedge d\eta|_{\mathcal{C}'} = \sum_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial \eta_j} (dx_i \wedge d\eta_j - dx_i \wedge d\eta_j) = 0.$$

Ceci démontre que  $\mathcal{C}$  est une relation canonique.

Toute relation canonique de  $X \times Y$  a, modulo un changement de variable symplectique dans  $Y$ , une fonction génératrice  $\phi(x, \eta)$ . On trouve la démonstration dans [42] (Théorème 10.1). Ce résultat est un superbe résultat d'Egorov [33], et nous rappelons à la fin de cette section la démonstration originale en deux pages.

Soit  $A$  l'opérateur intégral de Fourier de  $C_0^\infty(Y)$  dans  $S'(X)$  donné par

$$Au(x) = \int \int e^{i(\phi(x, \eta) - y \cdot \eta)} a(x, y, \eta) u(y) dy d\eta. \quad (9.4.16)$$

On rappelle que c'est une notation formelle pour l'action d'une distribution de  $S'$ , on devrait écrire, pour  $\psi \in S'$ ,

$$\langle Au, \psi \rangle = \int \int e^{i(\phi(x, \eta) - y \cdot \eta)} a(x, y, \eta) u(y) \psi(x) dy d\eta dx.$$

On déduit de la proposition 7.2 que le front d'onde de l'opérateur  $A$  est contenu dans

$$WF(Au) \subset T^*X = \{(x, \partial_x(\phi(x, \eta) - y \cdot \eta)), \partial_\eta(\phi(x, \eta) - y \cdot \eta) = 0 / (y, \eta) \in WF(u)\}$$

ce qui s'écrit aussi

$$WF(Au) \subset \left\{ \left(x, \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \eta)\right), \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(x, \eta), \eta\right) \in WF(u) \right\}.$$

Étudions explicitement la relation canonique associée à un opérateur intégral de Fourier. La fonction  $\phi$  est la fonction génératrice de la relation canonique  $\mathcal{C} = \{(x, \partial_x \phi; \partial_\eta \phi, \eta), x \in$

$X, \eta \in \mathbb{R}^d$ . A cette relation canonique est associée la transformation canonique  $\mathcal{H}$ . On a aisément  $WF(Au) \subset \mathcal{H}(WF(u))$ .

**Remarque 1**

Si  $A$  est un opérateur pseudo-différentiel sur  $\mathbb{R}^d$

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^*\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\eta} a(x, y, \eta) u(y) dy d\eta.$$

La phase  $\phi_0(x, \eta)$  est donc  $\phi_0(x, \eta) = x\cdot\eta$ . L'application  $\mathcal{H}$  est alors l'identité de  $T^*\mathbb{R}^d$  et la relation canonique  $\mathcal{C}$  est

$$\mathcal{C} = \{(x, \eta; x, \eta), (x, \eta) \in T^*\mathbb{R}^d\}$$

associée à la variété lagrangienne  $\Lambda_{\phi_0} = \{(x, x, \eta, -\eta)\}$ .

**Remarque 2** On considère désormais l'application particulière  $\mathcal{H}_s$  de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  qui à  $(x, \theta)$  fait correspondre  $(y, \Sigma)$  tel que  $x = y + \nabla_{\theta} s(y, \theta)$ ,  $\theta + \nabla_y s(y, \theta) = \Sigma$ . L'opérateur intégral de Fourier (selon la définition 7.4) de phase  $\phi(y, \theta) = y\cdot\theta + s(y, \theta)$ , et de symbole  $m(y, z, \theta)$  s'écrit

$$T_s^m u(y) = \int e^{i(\phi(y, \theta) - z\cdot\theta)} m(y, z, \theta) u(z) dz d\theta = \int e^{i((y-z)\theta + s(y, \theta))} m(y, z, \theta) u(z) dz d\theta.$$

On écrit

$$dy \wedge d\Sigma = \sum_j dy_j \wedge [d\theta_j + \sum_k (\frac{\partial^2 s}{\partial y_j \partial y_k} dy_k + \frac{\partial^2 s}{\partial y_j \partial \theta_k} d\theta_k)].$$

De l'égalité  $\sum_{j,k} dy_j \wedge \frac{\partial^2 s}{\partial y_j \partial y_k} dy_k = 0$ , on déduit

$$dy \wedge d\Sigma = \sum_j dy_j \wedge d\theta_j + \sum_{j,k} \frac{\partial^2 s}{\partial y_j \partial \theta_k} dy_j \wedge d\theta_k.$$

De même, de  $dx_j = dy_j + \sum_k \frac{\partial^2 s}{\partial \theta_j \partial y_k} dy_k + \sum_k \frac{\partial^2 s}{\partial \theta_j \partial \theta_k} d\theta_k$  et de l'identité  $\sum_{j,k} d\theta_j \wedge \frac{\partial^2 s}{\partial \theta_j \partial \theta_k} d\theta_k = 0$  on déduit

$$\sum_j dx_j \wedge d\theta_j = \sum_j dy_j \wedge d\theta_j + \sum_{j,k} \frac{\partial^2 s}{\partial y_j \partial \theta_k} dy_j \wedge d\theta_k.$$

On a donc  $dy \wedge d\Sigma = dx \wedge d\theta$ . La transformation  $\mathcal{H}_s$  est un difféomorphisme de l'espace  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  laissant invariante la structure symplectique. C'est une transformation canonique sur  $T^*\mathbb{R}^d \times T^*\mathbb{R}^d$  associée à la relation canonique  $\mathcal{C}_s = \{(y, \theta + \nabla_y s(y, \theta); y + \nabla_{\theta} s(y, \theta), \theta)\}$ .

**Remarque 3 : Ordre des opérateurs intégraux de Fourier** Considérons l'opérateur intégral de Fourier  $A$ , dont la phase est  $\phi(x, y, \theta)$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n_X}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_Y}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^N$ , homogène en  $\theta$  de degré 1, et dont le symbole est  $a(x, y, \theta)$ , non encore précisé. On applique cet opérateur intégral de Fourier, défini par l'intégrale oscillante

$$Au(x) = \int e^{i\phi(x, y, \theta)} a(x, y, \theta) u(y) dy d\theta$$

à une fonction phase  $u(y) = \sigma(y, k) e^{ik\psi(y)}$ . On désigne alors par  $\tilde{\psi}(x, y)$  la valeur critique de  $\psi(y) + \phi(x, y, \theta)$  à un point critique  $\eta_c$  solution de

$$\partial_{\eta} \phi(x, y, \eta_c) = 0.$$

Le terme principal de  $Au(x, k)$  s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^{n_X}} a(x, y, \eta_c) \sigma(y, k) e^{ik\tilde{\psi}(x, y)} k^{\frac{N}{2}} (\det J(\phi + \psi))^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Ce résultat est indépendant du nombre de variables utilisées dans la phase  $\phi$  lorsque, à dimensions d'espace  $n_X$  et  $n_Y$  fixées,  $a$  est dans  $S^{m+l(n_X, n_Y) - \frac{N}{2}}$ .

Nous retrouvons les opérateurs pseudo-différentiels ordinaires lorsque  $n_X = n_Y = N$ , auquel cas il suffit de poser  $l(N, N) = -N/2$ .

Ensuite, lorsque l'on compose formellement deux opérateurs intégraux de Fourier, respectivement  $A_1$  dont le symbole  $a_1$  appartient à  $S^{m_1+l(n_X, n_Y)-\frac{N_1}{2}}$  et  $A_2$  de symbole  $a_2$  appartenant à  $S^{m_2+l(n_Y, n_Z)-\frac{N_2}{2}}$ ,  $A_1 \circ A_2$  est donné par

$$A_1 A_2 u(x) = \int \int \int \int e^{i\phi_1(x, y, \theta) + i\phi_2(y, z, \eta)} a_1(x, y, \theta) a_2(y, z, \eta) u(z) dy dz d\eta d\theta.$$

On veut obtenir un représentant de  $A_1 \circ A_2$  de symbole  $b(x, z, \omega) \in S^{m_1+m_2+l(n_X, n_Z)-\frac{n_\omega}{2}}$ . On pose formellement  $\omega = (y, \theta, \eta) \in \mathbb{R}^{N_1+N_2+n_Y}$  et on retrouve la représentation

$$A_1 A_2 u(x) = \int \int \int \int e^{i\psi(x, z, \omega)} b(x, z, \omega) u(z) dz d\omega$$

Pour identifier les ordres, on doit avoir  $b \in S^{m_1+m_2+l(n_X, n_Z)-\frac{N_1+N_2+n_Y}{2}}$ , ce qui donne l'égalité

$$l(n_X, n_Y) + l(n_Y, n_Z) = l(n_X, n_Z) - \frac{n_Y}{2}.$$

Considérant alors l'adjoint  $A^* = I_{\bar{a}, \psi}$  de l'opérateur  $A = I_{a, \phi}$  de phase  $\psi(y, x, \theta) = -\phi(x, y, \theta)$  et de symbole  $\bar{a}(y, x, \theta) = \bar{a}(x, y, \theta)$ , on trouve que  $l(n_X, n_Y) = l(n_Y, n_X)$ . Des deux égalités, on peut alors déduire que

$$l(n_X, n_Y) = -\frac{n_X + n_Y}{4}.$$

On définit alors l'espace des opérateurs intégraux de Fourier ayant la même relation canonique et le même poids  $m$ .

**Définition 9.5** Soit  $\phi(x, y, \theta)$  une phase définie sur  $\mathbb{R}^{n_X} \times \mathbb{R}^{n_Y} \times \mathbb{R}^N$ . Elle définit une relation canonique  $\mathcal{C}$  sur  $T^*(X \times Y)$ . L'espace  $I^m(X \times Y, \mathcal{C}')$  des opérateurs intégraux de Fourier de symbole  $a \in S^{m+\frac{n_X+n_Y-2N}{4}}(X \times Y \times \mathbb{R}^N)$  de relation canonique  $\mathcal{C}$  associée à la variété lagrangienne pour  $\sigma_X + \sigma_Y$  de  $\mathcal{C}' \subset T^*(X \times Y)$  est l'ensemble des intégrales oscillantes dans  $S'$  de la forme

$$Au(x) = \int_{\mathbb{R}^{n_Y} \times \mathbb{R}^N} a(x, y, \theta) e^{i\phi(x, y, \theta)} u(y) dy d\theta.$$

Cette définition ne dépend pas du nombre de variables  $\theta$  utilisées pour caractériser la relation canonique.

## 9.4.2 Inversion des opérateurs intégraux de Fourier

Nous résumons le résultat d'inversion d'opérateurs intégraux de Fourier et de conjugaison d'opérateurs pseudo-différentiels par des opérateurs intégraux de Fourier dans le

**Théorème 9.1** Soit  $\mathcal{C}$  une relation canonique homogène d'un voisinage conique de  $(y_0, \eta_0) \in T^*X$ ,  $X \subset \mathbb{R}^d$  sur un voisinage conique de  $(x_0, \xi_0) \in T^*Y$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^d$  associée à une fonction génératrice  $\phi(x, \eta)$ . Sa relation canonique inverse, notée  $\mathcal{C}^{-1}$  est la variété lagrangienne dans  $T^*(X \times Y)$  pour  $dy \wedge d\eta - dx \wedge d\theta$  des points  $\{(y, \eta, x, \theta), (x, \theta, y, \eta) \in \mathcal{C}\}$

On considère l'opérateur  $A \in I^0(X \times Y, \mathcal{C}')$ , de symbole  $a \in S^0(X \times Y \times \mathbb{R}^d)$  elliptique

$$Au(x) = \int_{T^*X} e^{i(\phi(y, \eta) - z\eta)} a(y, z, \eta) u(z) dz d\eta.$$

1. Il existe  $b \in S^0(Y \times X \times \mathbb{R}^d)$  tel que l'opérateur de Fourier intégral  $B \in I^0(Y \times X, (C^{-1})')$  donné par

$$Bv(x) = \int \int e^{i(x \cdot \xi - \phi(y, \xi))} b(x, y, \xi) v(y) dy d\xi$$

vérifie  $AB = Id + R_1 \in L^0(Y)$ ,  $BA = Id + R_2 \in L^0(X)$ ,  $R_1$  et  $R_2$  sont dans  $L^{-\infty}$ .

2. Soit  $P$  un opérateur pseudodifférentiel sur  $X$  d'ordre  $m$  des symboles principal  $p_m$ . L'opérateur  $Q = A \circ P \circ B$  est un opérateur pseudodifférentiel sur  $Y$  d'ordre  $m$ , dont le symbole principal  $q_m$  est l'image du symbole principal  $p_m$  de  $P$  par la transformation canonique. On a de plus  $(x_0, \xi_0, y_0, \eta_0) \notin WF(PA - AQ)$ .

Notons qu'un opérateur pseudo-différentiel sur  $X$  est associé à la relation canonique identité sur  $T^*(X \times X)$  et à la phase  $x \cdot \eta$ . Comme nous l'avons vu en Remarque 3, la dimension d'espace est égale à la dimension en  $\eta$ , donc  $I^0$  correspond aux symboles de  $S^0$ .

D'autre part, lorsque la relation canonique est générée par la phase  $\phi(x, \eta)$ , on a la relation  $p_m(x, \nabla_x \phi) = q_m(\nabla_\eta \phi, \eta)$ , généralisation de la relation entre les symboles après changement de variable symplectique de l'exercice 8.3.

Ce théorème est une conséquence directe des définitions ci-dessus et de l'exercice 8.3. C'est le théorème 10.1 de [42], démontré par Egorov [33] et qui sert de base aux transformations canoniques d'opérateurs pseudo-différentiels afin de se ramener à des opérateurs simples.

Egorov part d'une fonction phase  $S(x, \xi)$  vérifiant  $\det(\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \xi_j}(x, \xi)) \neq 0$ . Il introduit la transformation canonique homogène  $(x, \xi) \rightarrow (x', \xi')$  avec  $x'_j = \partial_{\xi_j} S(x, \xi)$ ,  $\xi_j = \partial_{x_j} S(x, \xi)$ . Alors pour tout opérateur pseudo-différentiel  $P$  et toute fonction  $h$ , il existe  $Q$  tel que

$$Ph\Phi u = \Phi hQu + Tu$$

où  $\Phi$  est l'opérateur intégral de Fourier

$$\Phi v(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(\xi) e^{iS(x, \xi)} d\xi$$

et où  $T \in L^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ . La relation canonique de  $P\Phi$  est ainsi égale à celle de  $\Phi$ , ce qui correspond à la remarque 1 précédente.

### 9.4.3 Composition des opérateurs intégraux de Fourier

Dans ce dernier paragraphe, nous énonçons le théorème de composition des opérateurs intégraux de Fourier par l'intermédiaire de leurs relations canoniques. Nous renvoyons le lecteur intéressé au chapitre 11 de [42] pour la preuve détaillée de ce théorème.

On se donne  $X, Y, Z$  trois variétés de dimension  $n_X, n_Y$  et  $n_Z$  et un opérateur intégral de Fourier  $A_1$  de  $X$  dans  $Y$ , de relation canonique  $C_1 \subset T^*(X \times Y)$ , un opérateur intégral de Fourier  $A_2$  de  $Y$  dans  $Z$ , de relation canonique  $C_2$ . On suppose

$$A_1 \in I^{m_1}(X \times Y, C_1), A_2 \in I^{m_2}(X \times Y, C_2).$$

On suppose que  $C_1 \times C_2$  et  $T^*X \times \{(\rho, \rho), \rho \in T^*Y\} \times T^*Z$  ont une intersection transverse, et que la projection naturelle  $C_1 \circ C_2$  de cette intersection vers  $T^*(X \times Z)$  est propre. Nous vérifions que

$$(\rho_1, \rho_2) \in T^*X \times T^*Z \in C_1 \circ C_2 \Leftrightarrow \exists \rho \in T^*Y, (\rho_1, \rho) \in C_1, (\rho, \rho_2) \in C_2.$$

Dire que  $A_1$  est de relation canonique  $C_1$  équivaut à dire que, microlocalement au voisinage d'un point de  $C_1$ , on peut représenter  $C_1$  par une phase  $\phi_1(x, \theta)$  sous la forme  $C_1 = \{(x, \partial_x \phi(x, \theta); (\partial_\theta \phi(x, \theta), \theta))\}$ . De même, dire que  $A_2$  est de relation canonique  $C_2$  équivaut à dire que, microlocalement au voisinage d'un point de  $C_2$ , on peut représenter  $C_2$  par une phase  $\phi_2(y, w)$  sous la forme  $C_2 = \{(y, \partial_y \phi(y, w); \partial_w \phi(y, w), w)\}$ .

**Théorème 9.2** *Sous les hypothèses précédentes, l'opérateur  $A_1 \circ A_2$  est un opérateur intégral de Fourier, de relation canonique  $C_1 \circ C_2$ , d'ordre la somme des ordres des symboles de  $A_1$  et de  $A_2$ .*

**Preuve** Des égalités

$$\begin{aligned} A_1 v(y) &= \int_{T^*X} e^{i\phi_1(y,\theta)-x.\theta} a_1(y,\theta) v(x) dx d\theta \\ A_2 u(z) &= \int_{T^*Y} e^{i\phi_2(z,w)-y.w} a_2(z,w) u(y) dw dy \end{aligned}$$

on déduit

$$A_2 A_1 u(z) = \int_{T^*X \times T^*Y} e^{i(\phi_1(y,\theta)-x.\theta+\phi_2(z,w)-y.w)} a_1(y,\theta) a_2(z,w) u(x) dx dw dy d\theta.$$

Nous calculons la valeur de  $A_2 A_1 u$  au point  $z$ , en fonction de la valeur de  $u$  au point  $x$ . Ainsi, dans les variables d'espace, nous choisissons d'éliminer la variable  $y$ . Comme, par analogie avec l'analyse de Fourier, il faut éliminer conjointement une variable duale, on a le choix entre  $\theta$  et  $w$ . Le choix est indifférent. Nous appliquons formellement le théorème de la phase stationnaire de paramètre  $(x, z, \theta)$  dans les variables  $(y, w)$ . Alors le point critique  $(y_c, w_c)$  est solution de

$$\partial_y \phi_1(y_c, \theta) = w_c, \partial_w \phi_2(z, w_c) = y_c.$$

Identifions les points de  $C_1$  et de  $C_2$ . Le point courant de  $C_1$  est  $(y, \partial_y \phi_1(y, \theta); \partial_\theta \phi_1(y, \theta), \theta)$ . Pour  $y = y_c$ , on obtient  $(y_c, w_c; \partial_\theta \phi_1(y_c, \theta), \theta)$ . De même, le point courant de  $C_2$  associée à la phase  $\phi_2$  est  $(z, \partial_z \phi_2(z, w); \partial_w \phi_2(z, w), w)$ . Pour  $w = w_c$ , on obtient le point  $(z, \partial_z \phi_2(z, w_c); y_c, w_c)$ . La valeur critique de la phase est  $\phi_1(y_c, \theta) + \phi_2(z, w_c) - y_c.w_c - x\theta$ , et  $y_c$  et  $w_c$  ne dépendent que de  $z$  et de  $\theta$ . On note alors

$$\tilde{\phi}(z, \theta) = \phi_1(y_c, \theta) + \phi_2(z, w_c) - y_c.w_c.$$

Il en découle que

$$\partial_\theta \tilde{\phi}(z, \theta) = \partial_\theta \phi_1(z, \theta) + \partial_\theta y_c [\partial_y \phi_1(y_c, \theta) - w_c] + \partial_\theta w_c [\partial_w \phi_2(z, w_c) - y_c] = \partial_\theta \phi_1(y_c, \theta).$$

De même  $\partial_z \tilde{\phi}(z, \theta) = \partial_z \phi_2(z, w_c)$ . Les deux points de  $C_1$  et de  $C_2$  sont respectivement

$$(y_c, w_c; \partial_\theta \tilde{\phi}(z, \theta), \theta) \quad \text{et} \quad (z, \partial_z \tilde{\phi}(z, \theta); y_c, w_c).$$

On reconnaît ainsi le point de  $T^*(X \times Z)$  égal à  $((\partial_\theta \tilde{\phi}(z, \theta), \theta); (z, \partial_z \tilde{\phi}(z, \theta)))$ . Il est alors élément de la relation canonique  $C_1 \circ C_2$ .

La condition de transversalité est équivalente à la non dégénérescence du point critique. Le calcul de phase stationnaire conduit à un symbole, dont l'ordre est la somme des ordres, et qui est le produit des symboles. Nous avons ainsi esquissé la preuve du théorème 9.2, qui est le théorème 4.2.2 de [47], repris dans le théorème 11.12 de [42].

## 9.5 Exercices du chapitre 9

**Exercice 9.0** Montrer que seul un voisinage compact en  $y$ , conique en  $\eta$  des points critiques de la phase  $(x - y).\eta + \phi(y)$  contribue à l'intégrale de la proposition 9.1. Montrer aussi que cette analyse est vraie pour le calcul de  $P(A(u))$  dans la Proposition 9.2

**Exercice 9.1 :** Prouver la proposition 9.3 par des méthodes directes.

**Exercice 9.2 : suite du problème sur l'opérateur modèle de Friedlander de la section 6.3** 6) On se donne un point  $\rho_0 = (0, 0, 0, \xi^0, \eta_1^0, \eta_2^0) \in T^*(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2) \cap \text{Car}(p)$ . Déterminer la bicaractéristique de l'opérateur  $P$  défini par (6.3.6) passant par  $\rho_0$ . Pour cela, on définira

$$q(x, \eta_1, \eta_2) = (1 + x)\eta_1^2 - \eta_2^2$$

et on exprimera ces courbes à l'aide de

$$S(x, \eta_1, \eta_2) = \int_0^x (q(u, \eta_1, \eta_2))^{\frac{1}{2}} du.$$

7) On introduit la fonction, définie sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , par

$$\phi(x, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = y_1\theta_1 + y_2\theta_2 - S(x, \theta_1, \theta_2)\text{sign}(\theta_1).$$

Démontrer que les bicaractéristiques issues de l'origine dans  $y_1 > 0$  forment l'ensemble

$$\Sigma = \left\{ (x, y, \xi, \eta) \in T^*(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2), x > 0, |\theta_1| \geq |\theta_2|, \begin{array}{l} \xi = \partial_x \phi(x, y, \theta) \\ \eta = \nabla_y \phi(x, y, \theta) \\ \nabla_\theta \phi(x, y, \theta) = 0 \end{array} \right\}$$

8) Démontrer que le support singulier de l'opérateur de Fourier intégral  $K^{(2)}$  de symbole  $a_2(x, \theta)$  et de phase  $l(x, y, Y, \theta) = (y - Y)\theta - \frac{2}{3}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}})$  est inclus dans la réunion des bicaractéristiques issues de l'origine dans  $y_1 > 0$ .

**Preuve de l'exercice 9.0** On fixe un compact  $K$  dans la variable  $x$ , et on considère  $\psi \in C_0^\infty(K)$ . On introduit aussi  $\tilde{\phi}(y)$  égale à 1 sur le compact  $B(K, 1) = \{z, d(z, K) \leq 1\}$ , de support inclus dans  $B(K, 2)$ . On calcule la distribution

$$A(x, k) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{ik((x-y)\eta + \phi(y))} a(y, k) p(x, \eta, k) dy d\eta$$

en considérant son action sur la fonction test  $\psi$ . On considère, de plus, une fonction test  $\chi$  sur  $\mathbb{R}$  qui localise au voisinage de 0. On tronque l'intégrale en  $\eta$  en supprimant un voisinage de  $\eta = 0$ . La distribution obtenue est notée  $A_t$ .

Soit

$$I = \langle A_t, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{3d}} e^{ik((x-y)\eta + \phi(y))} \tilde{\phi}(y) a(y, k) p(x, \eta, k) \psi(x) (1 - \chi(|\eta|)) dx dy d\eta + \int_{\mathbb{R}^{3d}} e^{ik((x-y)\eta + \phi(y))} (1 - \tilde{\phi}(y)) a(y, k) p(x, \eta, k) \psi(x) (1 - \chi(|\eta|)) dx dy d\eta$$

Le premier terme de cette somme est noté  $I_1$  et le deuxième terme est noté  $I_2$ .

Étudions d'abord le deuxième terme. Comme  $A_t$  est une intégrale en  $\eta$  ne contenant pas un voisinage de 0, on peut écrire le deuxième terme après intégrations par parties en  $x$ . Il n'y aura pas de termes de bord car la fonction  $\psi$  est à support compact. Ainsi on introduit l'opérateur  $L$  égal à

$$L = \sum_j \frac{\eta_j}{|\eta|^2} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

qui vérifie  $L(e^{ik\eta(x-y)}) = ik e^{ik\eta(x-y)}$ . Ainsi, son opérateur transposé étant noté  ${}^tL$ , et c'est aussi un opérateur différentiel, on trouve

$$I_2 = (ik)^{-M} \int_{\mathbb{R}^{3d}} e^{ik((x-y)\eta + \phi(y))} (1 - \tilde{\phi}(y)) a(y, k) ({}^tL)^M [p(x, \eta, k) \psi(x)] (1 - \chi(|\eta|)) dx dy d\eta.$$

Cette intégrale est absolument convergente en  $\eta$  dès que  $M > m + d + 1$ , après avoir supposé  $a$  intégrable. On sépare l'intégrale en  $\eta$  en deux termes, notés  $I_2^R$  et  $I_3$ , avec

$$I_3 = (ik)^{-M} \int_{|\eta| \geq R} e^{ik((x-y)\eta + \phi(y))} (1 - \tilde{\phi}(y)) a(y, k) ({}^tL)^M [p(x, \eta, k) \psi(x)] (1 - \chi(|\eta|)) dx dy d\eta.$$

L'inégalité  $M > m + d + 1$  suffit pour affirmer qu'il existe une constante  $C$  indépendante de  $R$  telle que  $I_3 \leq \frac{C}{R}$ .

On introduit l'opérateur  $D$  dont l'opérateur transposé en  $\eta$  est

$${}^t D = \sum_j \frac{x_j - y_j}{|x - y|^2} \frac{\partial}{\partial \eta_j}.$$

Cet opérateur est régulier sur le support de  $(1 - \tilde{\phi}(y))\psi(x)$ , puisque  $x \in K$  et  $y \in C(B(K, 1))$ , ainsi  $|x - y| \geq 1$ . Des intégrations par parties successives dans  $I_2^R$  conduisent à des termes de bord en  $O(\frac{1}{R})$ , et à un terme intégral dans lequel on peut réaliser autant d'intégrations par parties que l'on souhaite. Finalement

“Pour tout  $N > 0$ , il existe deux constantes  $C_N$  et  $D_N$  telles que

$$I_2 \leq \frac{C_N}{k^N} + \frac{D_N}{R}$$

et donc le terme  $I_2$  est négligeable dans le calcul de phase stationnaire”.

Enfin, on supprime un voisinage en  $\eta$  du complémentaire de  $\{\nabla_y \phi(y), y \in B(K, 2)\}$ . On a le droit de le faire car ces points ne contribuent pas à la phase. On s'est ainsi ramené à un voisinage compact en  $y$  et conique en  $\eta$  des points critiques. La méthode est identique lorsque la phase est  $(x - y) \cdot \theta + s(y, \eta)$ . Cette démonstration est une conséquence du résultat abstrait suivant :

**Lemme 9.4** (Corollary 1.1.12 de Hörmander [46]) Soit  $L$  une application linéaire des fonctions de  $C^\infty(X \times \mathbb{R}^n)$ , s'annulant pour  $|\theta|$  grand, sur un espace de Fréchet  $F$ . On suppose que  $L$  est continue pour la topologie de  $S^m(X \times \mathbb{R}^n)$ . Alors  $L$  admet une unique extension continue sur  $S^m(X \times \mathbb{R}^n)$

On peut rendre le support compact en  $\theta$  grâce au résultat de convergence de la proposition 6.1, où on a prouvé que si  $a \in S_{\rho, \delta}^m$ , alors  $a(x, \theta)\chi(\frac{\theta}{j})$  converge vers  $a$  dans la topologie de  $S_{\rho, \delta}^{m'}$  pour  $m' > m$ . On applique ensuite le lemme pour définir l'extension une fois le calcul asymptotique fait avec le symbole tronqué.

**Preuve de l'exercice 9.1** Pour le premier alinéa, on sait que  $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$  lorsqu'il existe un opérateur pseudo-différentiel  $Op(a)$  d'ordre 0, tel que  $a_0(x_0, \xi_0) \neq 0$ , vérifiant  $Op(a)u \in C^\infty$ .

On vérifie alors que  $y \rightarrow Op(a)u \circ \chi^{-1}(y)$  est une fonction  $C^\infty$ , et comme

$$(Op(a)u) \circ \chi^{-1} = Op(a')(u \circ \chi^{-1})$$

avec  $a'(\chi(x), \eta)$  calculé par la proposition 8.10, on vérifie que le symbole principal de  $a'$  est

$$a'_0(\chi(x), \eta) = a_0(x, \chi'(x)\eta)$$

ce qui entraîne que  $a'$  est un symbole d'ordre 0, et que  $a'_0(\chi(x_0), (\chi'(x_0))^{-1}\xi_0) = a_0(x_0, \xi_0) \neq 0$ .

Il existe un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0,  $Op(a')$ , dont le symbole est non nul en  $h_\chi(x_0, \xi_0)$ , tel que  $Op(a')(u \circ \chi^{-1}) \in C^\infty$ . Donc  $h_\chi(x_0, \xi_0) \notin WF(u \circ \chi^{-1})$ .

Réciproquement, comme  $h_{\chi^{-1}} = (h_\chi)^{-1}$ ,

$$h_\chi(x_0, \xi_0) \notin WF(u \circ \chi^{-1}) \Rightarrow (x_0, \xi_0) = h_{\chi^{-1}}(h_\chi(x_0, \xi_0) \notin WF((u \circ \chi^{-1}) \circ \chi) = WF(u).$$

On a prouvé l'égalité

$$h_\chi(WF(u)) = WF(u \circ \chi^{-1}).$$

L'égalité  $\sum_j \chi'_{kj}(x) dx_j = d(\chi_k(x))$  permet d'obtenir  $\chi'_{kj}(x) = \partial_{x_j} \chi_k(x)$ .

Supposons  $(x(s), \xi(s))$  solution du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \partial_\xi p_m(x(s), \xi(s)) \\ \frac{d\xi}{ds} = -\partial_x p_m(x(s), \xi(s)). \end{cases}$$

On introduit  $y(s) = \chi(x(s))$  et  $\eta(s) = ({}^t \chi')^{-1}(x(s))\xi(s)$ .

On a donc

$$\xi(s) = {}^t \chi'(x(s))\eta(s),$$

donc, utilisant  $\chi'_{kj}(x) = \partial_{x_j} \chi_k$ ,



$$\frac{d\xi_j}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \sum_k \partial_{x_j} \chi_k(x(s)) \eta_k(s) \right) = \sum_{k,l} \partial_{x_j x_l}^2 \chi_k(x(s)) \eta_k(s) \frac{dx_l}{ds} + \sum_k \partial_{x_j} \chi_k(x(s)) \frac{d\eta_k}{ds},$$

et donc

$$-\partial_{x_j} p_m(x(s), \xi(s)) = \sum_{k,l} \partial_{x_j x_l}^2 \chi_k(x(s)) \eta_k(s) \partial_{\xi_l} p_m(x(s), \xi(s)) + \sum_k \partial_{x_j} \chi_k(x(s)) \frac{d\eta_k}{ds}.$$

Ceci se réécrit

$$-\sum_k \partial_{x_j} \chi_k(x(s)) \frac{d\eta_k}{ds} = \partial_{x_j} p_m(x(s), \xi(s)) + \sum_{k,l} \eta_k(s) \partial_{x_j x_l}^2 \chi_k(x(s)) \partial_{\xi_l} p_m(x(s), \xi(s)).$$

La matrice inverse de  ${}^t \chi'$ , notée  $A(x)$ , est caractérisée  $A_{jk}(x)$  telle que

$$\sum_j A_{pj}(x) \chi'_{jk}(x) = \delta_{pk}.$$

On obtient

$$-\sum_j \sum_k A_{pj} \chi'_{kj} \frac{d\eta_k}{ds} = \sum_j A_{pj} \partial_{x_j} p_m + \sum_{j,k,l} A_{pj} \partial_{x_j x_l}^2 \chi_k(s) \chi_k \partial_{\xi_l} p_m.$$

On a donc

$$-\frac{d\eta_p}{ds} = \sum_j A_{pj}(x(s)) \partial_{x_j} p(x(s), \xi(s)) + \sum_{j,k,l} ({}^t \chi')_{pj}^{-1}(\chi^{-1}(y(s))) \partial_{x_j x_l}^2 \chi_k \eta_k(s) \partial_{\xi_l} p_m.$$

Comme on a la relation

$$q_m(y, \eta) = p_m(\chi^{-1}(y), {}^t \chi'(\chi^{-1}(y))\eta),$$

on vérifie que

$$\partial_{y_p} q_m(y, \eta) = \sum_j \partial_{y_p} (\chi^{-1})_j(y) \partial_{x_j} p_m + \sum_{j,k,l} \partial_{x_j x_l}^2 \chi_k(\chi^{-1}(y)) \eta_k \partial_{\xi_l} p_m \partial_{x_j} (\chi^{-1}(y)).$$

En comparant, on obtient le résultat

$$\frac{d\eta_p(s)}{ds} = -\partial_{y_p} q_m(y(s), \eta(s)). \quad (9.5.17)$$

Le résultat sur  $\frac{dy_p}{ds}$  s'obtient en notant que

$$\frac{dy_p}{ds} = \sum_j \partial_{y_j} (\chi^{-1})_j \frac{dx_j}{ds} = \sum_j \partial_{y_j} (\chi^{-1})_j \partial_{\xi_j} p_m(x(s), \xi(s)) = \partial_{\eta_p} q_m(y(s), \eta(s)). \quad (9.5.18)$$

On a donc montré que  $(y(s), \eta(s))$  est la bicaractéristique de  $q_m$  issue du point  $(y_0, \eta_0)$ .

Le résultat pour la phase solution de l'équation eikonale est plus simple encore; il provient de l'égalité du gradient

$$\nabla_y (\phi \circ \chi^{-1}) = (\chi')^{-1}(\chi^{-1}(y)) (\nabla_x \phi)(\chi^{-1}(y)).$$

Choissant  $y = \chi(x)$  dans cette égalité, on obtient

$$q_m(y, \nabla_y (\phi \circ \chi^{-1})) = q_m(\chi(x), (\chi')^{-1}(x) \nabla_x \phi(x)) = p_m(x, \nabla_x \phi(x)) = 0. \quad (9.5.19)$$

Ces égalités impliquent que le front d'onde, les bicaractéristiques, et la variété des  $\{(x, \nabla_x \phi)\}$  pour  $\phi$  solution de l'équation eikonale sont transportés par  $h_\chi$  dans le changement de variable sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  induit par le changement de variable sur  $\mathbb{R}^d$  donné par  $\chi$ . C'est un changement de variable symplectique. Montrons qu'il laisse invariant la forme symplectique  $dy \wedge d\eta$ . De l'égalité

$$dy \wedge d\eta = d(\chi(x)) \wedge d({}^t(\chi')^{-1}(x)\eta) = \left( \sum_{j,k} \chi'_{kj} dx_j \right) \wedge \left( \sum_{j,k} \partial_{x_j} ({}^t(\chi')^{-1})_k \eta_k dx_j + \sum_{j,k} ({}^t(\chi')^{-1})_{jk} d\eta_k \right)$$

utilisant la commutation des dérivées en  $x$  dans les dérivées secondes de  $\chi$ , il ne reste pas de terme en  $dx_j \wedge dx_k$ . Quant aux termes en  $dx_j \wedge d\eta_k$ , leur coefficient est  $\sum_l \chi'_{lj} ({}^t(\chi')^{-1})_{lk} = \delta_{jk}$ . On a vérifié

$$dy \wedge d\eta = dx \wedge d\xi. \quad (9.5.20)$$

On dit que  $h_\chi$  est un changement de variable symplectique sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , et on identifie dans ce cas  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  à  $T^*(\mathbb{R}^d)$ , espace muni de la forme symplectique  $d(\xi dx)$  qui est invariant en géométrie par les transformations  $h_\chi$ .

Plus généralement, un changement de variable symplectique est associé à un difféomorphisme  $(x, \xi) \rightarrow (h_1(x, \xi), h_2(x, \xi))$  tel que

$$\left( \sum_j \partial_{x_j} h_1 dx_j + \sum_j \partial_{\xi_j} h_1 d\xi_j \right) \wedge \left( \sum_j \partial_{x_j} h_2 dx_j + \sum_j \partial_{\xi_j} h_2 d\xi_j \right) = \sum_k dx_k \wedge d\xi_k.$$

Ceci donne les conditions nécessaires et suffisantes :

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} h_1 \partial_{x_k} h_2 - \partial_{x_k} h_1 \partial_{x_i} h_2 &= 0 \\ \partial_{\xi_i} h_1 \partial_{\xi_k} h_2 - \partial_{\xi_k} h_1 \partial_{\xi_i} h_2 &= 0 \\ \partial_{x_i} h_1 \partial_{\xi_k} h_2 - \partial_{\xi_k} h_1 \partial_{x_i} h_2 &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

qui traduisent que les crochets de Poisson des  $h$  soient nuls.

**Solution de l'exercice 9.2** 6) Le symbole principal de l'opérateur de Friedlander (6.3.6) est

$$p(x, \xi, y_1, y_2, \eta_1, \eta_2) = -\xi^2 + (1+x)\eta_1^2 - \eta_2^2 = q(x, \eta_1, \eta_2) - \xi^2.$$

Les bicaractéristiques sont définies par le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\xi \\ \dot{\xi} = -\eta_1^2 \\ \dot{y}_1 = 2(1+x)\eta_1 \\ \dot{y}_2 = -2\eta_2 \\ \dot{\eta}_1 = 0 \\ \dot{\eta}_2 = 0. \end{cases}$$

Le symbole est nul sur la bicaractéristique, donc

$$(\xi(s))^2 = q(x(s), \eta(s))$$

En particulier, pour  $s = 0$ , on trouve  $\eta_1^2 \geq \eta_2^2$  puisque  $\xi^0$  est défini. De plus,  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont constants sur les bicaractéristiques. Il existe donc  $\varepsilon = \pm 1$  tel que

$$\xi(s) = \varepsilon q(x(s), \eta).$$

Comme l'opérateur est défini pour  $x \geq 0$ , on a, grâce à l'égalité  $\dot{x} = -2\xi$ , directement  $s \leq 0$  et  $\varepsilon = +1$  ou  $s \geq 0$  et  $\varepsilon = -1$ .

On a de plus  $q(x(s), \eta) \geq q(0, \eta) \geq 0$ . Pour  $x(s) > 0$ , ce qui se produit lorsque  $\xi(0) < 0$ ,  $q > 0$ . Il est impossible, puisque  $(\xi^0, \eta_1^0, \eta_2^0) \neq (0, 0, 0)$  que  $q$  soit nul partout. Donc  $q > 0$  hors du point origine même si il est nul au point origine. On vérifie que  $\xi$  est donc non nul, donc  $\dot{x}$  est non nul, et  $x$  peut être choisi comme nouvelle variable. On se place dans un premier temps pour  $\eta_1^2 > \eta_2^2$ , et ensuite, par continuité dans les expressions, on peut étendre les résultats à  $\eta_1^2 = \eta_2^2$ . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= -\varepsilon(1+x)\eta_1(q(x, \eta))^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{dy_2}{dx} &= \varepsilon\eta_2(q(x, \eta))^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ce système est exactement  $\frac{dy_j}{dx} = -\frac{1}{2}\varepsilon(q(x, \eta))^{-\frac{1}{2}}\partial_{\eta_j} q(x, \eta)$ , qui se réécrit  $\frac{dy_j}{dx} = -\varepsilon\partial_{\eta_j}(q(x, \eta))^{\frac{1}{2}}$ .

Utilisant la fonction  $S$ , on trouve  $\frac{dy_j}{dx} = \frac{d}{dx}\varepsilon\partial_{\eta_j} S(x, \eta)$ . On en déduit l'égalité

$$y_j(x) = -\varepsilon \frac{\partial S}{\partial \eta_j}(x, \eta).$$

La fonction  $S$  est explicite. Il s'agit de calculer

$$\int_0^x ((1+u)\eta_1^2 - \eta_2^2)^{\frac{1}{2}} du = \left[ \frac{2}{3\eta_1^2} ((1+u)\eta_2^2 - \eta_1^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^x = \frac{2}{3\eta_1^2} [((1+x)\eta_2^2 - \eta_1^2)^{\frac{3}{2}} - (\eta_2^2 - \eta_1^2)^{\frac{3}{2}}].$$

Comme de plus le signe de  $\frac{dy_1}{dx}$  est celui de  $-\varepsilon\eta_1$  et que l'on n'est concerné que par les bicaractéristiques dans  $x > 0$  qui vérifient  $y_1 > 0$ , on sait que  $\varepsilon$  est le signe de  $-\eta_1$ . Ceci permet de justifier l'introduction de la fonction  $\phi(x, y, \theta)$ .

7) On vérifie que la relation  $\nabla_\theta \phi(x, y, \theta) = 0$  implique

$$y_j = \text{sign}(\theta_1) \nabla_{\theta_j} S(x, \theta)$$

On vérifie de plus que l'expression  $\eta = \nabla_y \phi$  implique que  $\eta = \theta$ , et la relation  $\xi = \nabla_x \phi$  implique  $\xi = -\text{sign}(\theta_1)(q(x, \theta))^{\frac{1}{2}}$ . Toutes ces relations conduisent à

$$\theta = \eta, y(x) = \text{sign}(\eta_1) \partial_\eta S(x, \eta), \xi = -\text{sign}(\eta_1)(q(x, \eta))^{\frac{1}{2}}.$$

Le point de  $\Sigma$  considéré est alors le point sur la bicaractéristique issue de  $(0, 0, 0, -\text{sign}(\eta_1)(\eta_1^2 - \eta_2^2)^{\frac{1}{2}}, \eta_1, \eta_2)$  d'abscisse  $x$ . Réciproquement, un point d'une bicaractéristique issue de l'origine est dans  $\Sigma$ .

8) Cette démonstration est une adaptation facile de la démonstration de la proposition 7.2. On se donne une fonction  $\chi$  à support compact dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ . On écrit

$$(K^{(2)}, \chi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^2} \int a_2(x, y, \theta) \sigma_\varepsilon(\theta) \exp\left(-\frac{2}{3}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}})\right) \chi(x, y) e^{iy \cdot \theta} dx dy d\theta.$$

On définit le cône contenu dans  $\Sigma$  :

$$\Gamma_1 = \{(\xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^3, \xi = \partial_x \phi, \eta = \nabla_y \phi = \theta, (x, y) \in \text{supp} \chi, \eta_1^2 \geq \eta_2^2 > 0\}.$$

On vérifie tout d'abord que

$$\frac{2}{3}(Z^{\frac{3}{2}} - Z_0^{\frac{3}{2}}) = S(x, \theta_1, \theta_2)$$

(ce sont les quantités  $Z$  et  $Z_0$  introduits dans le 1) de la section 6.3. On rappelle aussi que sur le support de  $a_2$ ,

$$-\frac{2}{3}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}}) = -\frac{2}{3}i \text{sign}(\theta_1)(Z^{\frac{3}{2}} - Z_0^{\frac{3}{2}}).$$

Il reste donc, au sens des distributions et à une troncature près

$$\begin{aligned} (K^{(2)}, \chi) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int a_2(x, y, \theta) \chi(x, y) e^{iy \cdot \theta - i \text{sign}(\theta_1) S(x, \theta)} dx dy d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int a_2(x, y, \theta) \chi(x, y) e^{i\phi(x, y, \theta)} dx dy d\theta \end{aligned}$$

Nous calculons  $\xi - \partial_x \phi$ . Nous trouvons ainsi

$$\xi - \frac{2}{3\theta_1^2} \frac{3\theta_1^2}{2} ((1+x)\theta_1^2 - \theta_2^2)^{\frac{1}{2}} = \xi - ((1+x)\theta_1^2 - \theta_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

De même,  $\partial_y \phi = \theta$ . On suppose  $(\xi, \eta) \in \Gamma_2$  tel que  $\Gamma_2 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ . Il existe  $C > 0$  tel que

$$\text{mod}(x, y, \xi, \eta) = (\xi - \partial_x \phi)^2 + |\eta - \nabla_y \phi|^2 \geq C(|\theta| + |\xi| + |\eta|)^2.$$

L'opérateur  $M$  dont l'adjoint est

$${}^t M = (\text{mod}(x, y, \xi, \eta))^{-1} \left[ (\xi - \partial_x \phi) \frac{\partial}{\partial x} + (\eta - \nabla_y \phi) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

est alors un opérateur adéquat pour le théorème de la phase non stationnaire, et on a  $e^{i(\phi(x, y, \theta) - x\xi - y \cdot \eta)} = {}^t M e^{i(\phi(x, y, \theta) - x\xi - y \cdot \eta)}$ .

On vérifie ainsi que l'intégrand dans  $(K^{(2)}, \chi)$  peut être remplacé, pour tout  $p$  par  $M^k(a_2 \chi)$ . On utilise le résultat de régularité sur le symbole  $a_2 \in S_{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}}^0$  pour conclure que cette intégrale est décroissante aussi rapidement que toute puissance de  $(|\xi| + |\eta|)^{-1}$ .

Il vient donc que

$$\Gamma_2 \cap \Gamma_1 = \emptyset \Rightarrow \text{supp} \chi \cap WF(K^{(2)}) = \emptyset.$$

Nous avons achevé la preuve de cet exercice.



# Chapitre 10

## Solutions lagrangiennes de l'équation caractéristique

### 10.1 Définition des solutions lagrangiennes

La variété lagrangienne  $\Lambda_\phi$  introduite dans la section 9.4.1 a une propriété importante et contraignante : la projection canonique de  $T^*X$  sur  $X$  est inversible. Relaxer cette hypothèse nous permettra de tenir compte des caustiques. En effet, en un point voisin de la caustique, la variété sera représentée grâce à plusieurs phases, ce qui équivaut à l'existence de plusieurs rayons passant par ce point. Les bicaractéristiques correspondantes, quant à elles, ne s'intersectent pas.

On considère maintenant un opérateur  $P$  sur  $C^\infty(X)$ , de symbole principal  $p(x, \xi)$ . Si  $P$  est un opérateur différentiel, une phase  $\phi$  est solution de l'équation eikonale associée à  $P$  lorsque  $p(x, d\phi(x)) = 0$ . En d'autres termes,  $\Lambda_\phi \subset \text{Car}(P)$ .

Une généralisation de ce résultat a été démontrée dans le chapitre précédent (lemme 9.1) pour les opérateurs pseudo-différentiels.

Dans ce chapitre, nous étudions les variétés lagrangiennes associées à un opérateur différentiel ou pseudo-différentiel. On les appelle des **solutions lagrangiennes de l'équation caractéristique** de l'opérateur  $P$ . La variété caractéristique (ou équation caractéristique) est définie par  $p(x, \xi) = 0$ ,  $p$  étant le symbole principal de l'opérateur pseudo-différentiel  $P$ . Ces variétés lagrangiennes sont la généralisation des variétés  $\Lambda_\phi$  où  $\phi$  est solution de l'équation eikonale  $p(x, \nabla_x \phi) = 0$ .

**Définition 10.1** Une solution lagrangienne  $\Lambda$  de  $p = 0$  est une variété

- maximale ( $\dim T_{(x_0, \xi_0)} \Lambda = \dim T_{x_0}(X)$ ),
- isotrope ( $\sigma|_\Lambda = 0$ ),
- solution ( $p|_\Lambda = 0$ ). On omettra parfois  $p = 0$  pour n'écrire que  $p$ .

Nous avons remarqué que le symbole principal est invariant sur les courbes intégrales du chap hamiltonien. On en déduit le premier alinéa de la proposition 10.1 :

- Proposition 10.1**
1. Si une courbe bicaractéristique rencontre la variété caractéristique, elle est contenue dans la variété caractéristique,
  2. Si une courbe bicaractéristique de  $p$  rencontre en un point une solution lagrangienne  $\Lambda$  de  $p$ , alors elle est contenue dans  $\Lambda$ .

Une version plus faible du deuxième alinéa de la proposition 10.1 est :

**Proposition 10.2** Soit  $\phi$  une solution de l'équation eikonale. Si une courbe bicaractéristique rencontre  $\Lambda_\phi$ , elle est contenue dans  $\Lambda_\phi$ .

**Preuve de la proposition 10.2** Nous considérons un symbole polynôme homogène d'ordre 2,  $p(x, \xi) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j$ . On suppose que les données de Cauchy des équations de Hamilton (9.2.9),  $(x_0, \xi_0)$ , vérifient  $\nabla\phi(x_0) = \xi_0$  où  $\phi$  est solution de  $p(x, \nabla_x\phi(x)) = 0$ . On note

$$\exp(sH_p(x_0, \xi_0)) = (x(s), \nabla\phi(x(s)))$$

la solution de (9.2.9), notation utilisée car  $\exp(sH_p(x_0, \xi_0))$  est la solution de l'équation de Cauchy<sup>1</sup>  $\frac{d}{ds}(\rho(s)) = H_p(\rho(s))$ ,  $\rho(0) = \rho_0$ . L'équation satisfaite par  $\phi$  est :

$$p(x, \nabla\phi(x)) = 0 \quad (10.1.1)$$

En la dérivant par rapport à chaque variable, on trouve

$$(\partial_{x_i}p + \sum_j \partial_{x_i x_j}^2 \phi \partial_{\xi_j} p)|_{\Lambda\phi} = 0. \quad (10.1.2)$$

Soit  $\omega_i(s) = \xi_i(s) - \partial_{x_i}\phi(x(s))$ . On remarque que  $\omega(0) = 0$ . Démontrons que  $\omega$  est solution d'un système d'équations différentielles ordinaires. On vérifie que

$$-\frac{d\omega_i}{ds} = \partial_{x_i}p(x(s), \xi(s)) - \sum_j \partial_{x_j x_i}^2 \phi(x(s)) \partial_{\xi_j} p(x(s), \xi(s)).$$

Exprimant la relation (10.1.1) au point  $x(s)$ , et retranchant l'égalité obtenue à l'équation donnant  $\frac{d\omega_i}{ds}$ , on obtient :

$$-\frac{d\omega_i}{ds} = -\sum_j \partial_{x_j x_i}^2 \phi(x(s)) [\partial_{\xi_j} p(x(s), \xi(s)) - \partial_{\xi_j} p(x(s), \nabla\phi(x(s)))] + \partial_{x_i}p(x(s), \xi(s)) - \partial_{x_i}p(x(s), \nabla\phi(x(s))).$$

Utilisant  $\xi_i \xi_j - \eta_i \eta_j = \eta_j(\xi_i - \eta_i) + (\xi_i - \eta_i)(\xi_j - \eta_j) + \eta_i(\xi_j - \eta_j)$ , on trouve :

$$-\frac{d\omega_i}{ds} = \sum_{j,k} \partial_{x_i} a_{j,k}(x(s)) \omega_j(s) \omega_k(s) + \sum_{j,k} \partial_{x_i} a_{j,k}(x(s)) (\xi_j(s) \omega_i(s) + \xi_i(s) \omega_j(s)) - 2 \sum_{j,k} \partial_{x_j x_i}^2 \phi(x(s)) a_{j,k}(x(s)) \omega_k(s).$$

qui se met sous la forme condensée  $\frac{d\omega}{ds} = A(s)\omega(s) - B(s)(\omega(s), \omega(s))$ . Comme  $\omega(0) = 0$ , le théorème de Cauchy-Lipschitz donne  $\omega(s) = 0$ . On note pour compléter la preuve que les fonctions employées sont bien définies pour  $s \in [0, T^*]$ . On se place alors à  $T < T^*$ , et on vérifie que le problème de Cauchy admet une solution pour  $s < s_0$  dont le temps d'existence  $s_0$  dépend des solutions sur  $[0, T]$ . Il ne dépend donc pas du point initial. On peut alors reproduire l'argument précédent avec pour données initiales  $(x(s_0), \xi(s_0))$ . On conclut à l'égalité  $\xi(s) = \nabla\phi(x(s))$  pour  $0 \leq s \leq 2s_0$ . On peut continuer l'argument jusqu'à  $[0, T]$ , puisque l'intervalle où l'égalité est vraie a été prolongé d'une quantité fixe.

Dans le cas où le symbole n'est plus polynômial, par utilisation d'une formule de Taylor avec reste intégral, on trouve que  $\partial_{x_i}p(x(s), \xi(s)) - \partial_{x_i}p(x(s), \nabla\phi(x(s))) = G_i(x(s), \xi(s), \nabla\phi(x(s)))\omega(s)$  et  $\partial_{\xi_j}p(x(s), \xi(s)) - \partial_{\xi_j}p(x(s), \nabla\phi(x(s))) = R_j(x(s), \xi(s), \nabla\phi(x(s)))\omega(s)$  et le système s'écrit  $\dot{\omega} = H(s)\omega(s)$ ,  $H$  étant connu à l'aide des fonctions explicites  $x(s), \xi(s)$  et  $\phi(x)$ , donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique encore.

**Preuve de la proposition 10.1** L'alinéa 2 de la proposition 10.1 se démontre en utilisant la maximalité de la variété isotrope en  $(x_0, \xi_0)$ . Il existe donc un système de coordonnées  $y = (y_1, \dots, y_n)$  tel que  $\Lambda$  s'écrive, au voisinage de  $(x_0, \xi_0)$ ,  $\{(x(y), \xi(y)), y \in \mathbb{R}^n \cap V\}$ . Nous utilisons les deux relations

$$\begin{cases} p(x(y), \xi(y)) = 0 \\ \omega|_{\Lambda} = 0 \end{cases}$$

<sup>1</sup>Cette notation est facile à comprendre ; lorsque  $H_p$  est une fonction scalaire  $H_p(\rho(s)) = a(\rho(s))$ , le problème de Cauchy ci-dessus a pour solution  $a(\rho(s)) = a(\rho_0)e^s$ .

L'égalité  $\omega|_{\Lambda} = 0$  s'écrit

$$\sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial y_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} - \sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial y_k} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = 0 \quad (10.1.3)$$

(ceci est l'équivalent, lorsque  $x(y) = y$ , de  $\nabla \wedge \xi(x) = 0$ , d'où  $\xi(x) = \nabla \psi(x)$ .) La variété est lagrangienne maximale. La différence avec les expressions précédentes est que la relation  $x(y)$  n'est pas forcément inversible (la projection canonique dans ce cas ci n'est pas surjective). Cependant, comme la variété est maximale, il existe un sous-ensemble de  $(x(y), \xi(y))$ , noté  $(x'(y), \xi''(y))$ , où  $x'$  comporte  $p$  coordonnées en  $\xi''$  comporte  $q$  coordonnées telles que  $p + q = n$ . On a  $\det(\text{Jac}(x'(y), \xi''(y))) \neq 0$  en  $y = 0$ . On définit alors  $\mathcal{J}^{-1}$  l'application telle que  $y = \mathcal{J}^{-1}(x'(y), \xi''(y))$ .

Notons que ce choix n'est pas le seul possible. On fixe ainsi un choix de variables  $x$  et de variables  $\xi$  qui soit bijectif. On appelle, pour ce choix,  $J_1$  l'ensemble des indices correspondant aux coordonnées de  $x'(y)$  et  $J_2$  l'ensemble des indices correspondant aux coordonnées de  $\xi''(y)$ . Si  $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ , on passe directement à l'étude de la variété, sachant ainsi que  $J_1 \cup J_2 = \{1, \dots, n\}$ .

Si  $J_1 \cap J_2 = J \neq \emptyset$ , les coordonnées formant un système libre sont alors

$$[(x_j)_{j \in J_1 \setminus J}, (x_j)_{j \in J}, (\xi_j)_{j \in J}, (\xi_j)_{j \in J_2 \setminus J}].$$

On note (unions disjointes)

$$\{1, \dots, n\} = J_1 \cup K_1, \{1, \dots, n\} = (J_1 \setminus J) \cup J \cup (J_2 \setminus J) \cup K_2^+, K_2 = (J_1 \setminus J) \cup K_2^+.$$

Soit  $k \in K_1$ . Par le théorème d'inversion locale s'appuyant sur le fait que la famille  $(x', \xi'')$  est maximale, il existe une fonction  $X_k$  telle que

$$x_k(y) = X_k[(x_j)_{j \in J_1 \setminus J}, (x_j)_{j \in J}, (\xi_j)_{j \in J}, (\xi_j)_{j \in J_2 \setminus J}].$$

De même, pour  $l \in K_2$ , il existe une fonction  $\Xi_l$  telle que

$$\xi_l(y) = \Xi_l[(x_j)_{j \in J_1 \setminus J}, (x_j)_{j \in J}, (\xi_j)_{j \in J}, (\xi_j)_{j \in J_2 \setminus J}].$$

Soit  $p \in J$ . Alors, pour  $k \in K_1$ ,  $\{x_p, x_k\} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_p} = 0$ , et donc les fonctions  $X_k$  sont indépendantes des variables  $\xi_p, p \in J$ . Comme de plus,  $\{\xi_p, x_k\} = 0$  car  $J \cap K_1 = \emptyset$ , on trouve que  $X_k$  ne dépend pas des variables  $\xi_p, p \in J$ . Un raisonnement identique conduit à affirmer l'indépendance des variables  $\xi_l$  pour  $l \in K_2$  des  $(x_p, \xi_p), p \in J$ . On écrit

$$x_k(y) = Y_k[(x_j)_{j \in J_1 \setminus J}, (\xi_j)_{j \in J_2 \setminus J}].$$

$$\xi_l(y) = \Sigma_l[(x_j)_{j \in J_1 \setminus J}, (\xi_j)_{j \in J_2 \setminus J}].$$

La variété lagrangienne s'écrit donc (localement)

$$\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} [(x_j)_{J_1 \setminus J}, (x_j)_J, (Y_k[(x_j)_{J_1 \setminus J}, (\xi_j)_{J_2 \setminus J}])_{k \in K_1}, (\Sigma_l[(x_j)_{J_1 \setminus J}, (\xi_j)_{J_2 \setminus J}])_{l \in J_1 \setminus J} \\ , (\xi_p)_J, (\xi_l)_{J_2 \setminus J}, (\Sigma_l[(x_j)_{J_1 \setminus J}, (\xi_j)_{J_2 \setminus J}])_{l \in K_2^+} \end{array} \right\}.$$

Ainsi on remarque que localement  $\Lambda = \tilde{\Lambda} \times \mathbb{R}^{2 \dim J}$ , où  $\tilde{\Lambda}$  est une variété lagrangienne dans  $\mathbb{R}^{n - \dim J}$  (ne dépendant que des coordonnées  $(x_j)_{j \in J_1 \setminus J}, (\xi_j)_{j \in J_2 \setminus J}$ ). On s'est ramené au cas élémentaire où  $J_1 \setminus J \cap J_2 \setminus J = \emptyset$ , et où les coordonnées indépendantes sont de la forme  $(x', \xi'')$  (aucun indice commun). C'est celui que nous considérerons maintenant.

Soit  $(X(s), \Xi(s))$  la courbe bicaractéristique telle que  $(X(0), \Xi(0)) = (x_0, \xi_0) = (x(0), \xi(0))$ . La fonction  $y(s)$  définie par

$$(X'(s), \Xi''(s)) = (x(y(s)), \xi(y(s)))$$

existe au voisinage de  $y = 0$  donc de  $s = 0$  puisque dans ce voisinage, on a un difféomorphisme  $(y(s) = \mathcal{J}^{-1}(X'(s), \Xi''(s)))$ .

Notons  $(V(s), W(s))$  le vecteur  $(x(y(s)), \xi(y(s)) - (X(s), \Xi(s)))$ . Par construction, il a la moitié de ses composantes nulles.

On vérifie l'égalité :

$$\begin{aligned} & \sum_l \frac{\partial \xi_l}{\partial y_m}(y(s)) \frac{dV_l}{ds} - \sum_{l'} \frac{\partial x_{l'}}{\partial y_m}(y(s)) \frac{dW_{l'}}{ds} \\ &= \\ & \sum_{l,j} \frac{\partial \xi_l}{\partial y_m} \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \frac{dy_j}{ds} - \sum_l \frac{\partial \xi_l}{\partial y_m}(y(s)) \frac{\partial p}{\partial \xi_l}(X(s), \Xi(s)) \\ & \quad - \sum_{l',j} \frac{\partial x_{l'}}{\partial y_m}(y(s)) \frac{\partial \xi_{l'}}{\partial y_j}(y(s)) \frac{dy_j}{ds} - \sum_{l'} \frac{\partial x_{l'}}{\partial y_m}(y(s)) \frac{\partial p}{\partial x_{l'}}(X(s), \Xi(s)) \end{aligned} \quad (10.1.4)$$

En utilisant l'égalité (10.1.3), valable sur  $\Lambda$ , on échange les dérivées en  $m$  et  $j$  dans le premier terme du membre de droite. On en déduit l'égalité  $\sum_{l,j} \frac{\partial \xi_l}{\partial y_m} \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \frac{dy_j}{ds} = \sum_{l',j} \frac{\partial x_{l'}}{\partial y_m}(y(s)) \frac{\partial \xi_{l'}}{\partial y_j}(y(s)) \frac{dy_j}{ds}$ . Pour les autres termes, on dérive par rapport à tout  $y_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , l'égalité  $p|_{\Lambda} = 0$ . Alors

$$\left[ \sum_j \frac{\partial p}{\partial x_j} p \frac{\partial x_j}{\partial y_m} + \sum_{n'} \frac{\partial p}{\xi_{n'}} p \frac{\partial \xi_{n'}}{\partial y_m} \right] |_{(x(y(s)), \xi(y(s)))} = 0.$$

On ajoute ces relations à l'égalité (10.1.4) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \sum_l \frac{\partial \xi_l}{\partial y_m}(y(s)) \frac{dV_l}{ds} - \sum_{l'} \frac{\partial x_{l'}}{\partial y_m}(y(s)) \frac{dW_{l'}}{ds} \\ &= \\ & \sum_l \frac{\partial \xi_l}{\partial y_m}(y(s)) \frac{\partial p}{\partial \xi_l}(x(y(s)), \xi(y(s))) - \sum_l \frac{\partial \xi_l}{\partial y_m}(y(s)) \frac{\partial p}{\partial \xi_l}(X(s), \Xi(s)) \\ & \quad + \sum_{l'} \frac{\partial x_{l'}}{\partial y_m}(y(s)) \frac{\partial p}{\partial x_{l'}}(x(y(s)), \xi(y(s))) - \sum_{l'} \frac{\partial x_{l'}}{\partial y_m}(y(s)) \frac{\partial p}{\partial x_{l'}}(X(s), \Xi(s)). \end{aligned}$$

On a donc  $n$  équations ( $1 \leq m \leq n$ ), et  $2n$  inconnues dont  $n$  sont nulles par hypothèse. L'hypothèse de maximalité entraînne que

$$\frac{\partial \xi''}{\partial y_m}(y(s)) \cdot \frac{dV''}{ds} - \frac{\partial x'}{\partial y_m}(y(s)) \frac{dW'}{ds} = T_m(s)$$

est un système inversible. On peut alors écrire les équations vérifiées par  $(V''(s), W'(s))$  sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(V''(s), W'(s)) &= C(s, V''(s), W'(s)) \cdot (V''(s), W'(s)) \\ V''(0) &= 0, W'(0) = 0 \end{aligned}$$

qui est à nouveau un problème de Cauchy. Son unique solution est  $(V''(s), W'(s)) = 0$ .

## 10.2 Représentation des solutions lagrangiennes par des phases

### 10.2.1 Solution lagrangienne maximale associée à une phase

Nous précisons ici la notion que nous avons évoquée dans le chapitre 3 lors du calcul du développement asymptotique de la solution des ondes avec condition donnée sur une hypersurface  $\Sigma_0$ . En fait, nous avons considéré sur  $\Sigma_0$  l'ensemble des points  $(y, \nabla \phi(y))$ ,  $y \in \Sigma_0$  (où il se trouvait que  $\Sigma_0$  était une courbe isovaleur de  $\phi$ ).

On considère un opérateur pseudo-différentiel  $p$  sur  $X$ , variété de dimension  $n$ . On se donne une hypersurface  $S$  dans  $X$  et une phase  $\phi_0$  (fonction régulière) définie sur  $S$ . On note  $l$  l'injection naturelle de  $T^*S$  dans  $T^*X$ . On note aussi  $\pi$  la projection naturelle de  $\{(x, \xi), x \in S, \xi \in T_x X\}$  vers  $T^*S$ , définie comme  $\pi(x, \xi) = (x, \zeta)$  où la forme linéaire  $\zeta$  sur  $T_x S$  est la restriction de  $\xi$  à  $T_x S$ . On suppose que  $\pi^{-1}\{(x, d\phi_0(x))\} \cap \text{Carp} \neq \emptyset$ . On suppose en outre que le champ hamiltonien  $H_p$  est transverse à  $l(\Lambda_{\phi_0}^S)$  en  $\rho_0 \in l(\Lambda_{\phi_0}^S) \cap \text{Carp}$ .

Alors la solution lagrangienne maximale associée à  $S$  et à  $\phi_0$  au voisinage de  $\rho_0$  est notée  $\Lambda(\phi_0)$ , et est l'union des courbes bicaractéristiques issues d'un point de  $\pi^{-1}(\Lambda_{\phi_0}^S)$ .



En effet,  $\Lambda(\phi_0)$  est maximale car  $H_p$  est transverse à  $l(\Lambda_{\phi_0}^S)$  en  $\rho_0$ , qui est de dimension  $n - 1$ , et la maximalité vient de  $T_{\rho_0}(\Lambda(\phi_0)) = T_{\rho_0}l(\Lambda_{\phi_0}^S) + H_p\mathbb{R}$ . Elle est solution par la proposition 10.1. Elle est lagrangienne car les courbes bicaractéristiques le sont, toujours par la proposition 10.1. Les courbes bicaractéristiques se projettent alors sur les caractéristiques, courbes  $x(\sigma)$  solutions de  $\frac{dx}{d\sigma} = \xi(x(\sigma))$  tant que  $\Lambda(\phi_0)$  est transverse en  $x(\sigma)$  à la fibre de la projection canonique  $\pi$  de  $T^*X$  sur  $X$ . Cette construction par l'intermédiaire des rayons échoue lorsque la propriété de transversalité n'est plus vérifiée. On dit alors que le point appartient à la caustique de la Lagrangienne.

### 10.2.2 Généralisation aux phases à paramètre

Il faut généraliser ce prolongement à des phases comportant un paramètre supplémentaire pour la solution de l'équation eikonale. En effet, si les solutions de l'équation eikonale sont uniquement sous la forme  $\phi(x)$ , alors la variété lagrangienne associée est  $\Lambda_\phi = \{(x, \nabla\phi(x))\}$ , qui se projette de manière propre sur l'espace ambiant. Or les points des caustiques sont les points où cette projection n'est plus propre, c'est-à-dire où on ne peut plus considérer une phase sans paramètre. On se donne une phase  $\phi(x, \theta)$  à  $N$  paramètres ( $\theta \in \mathbb{R}^N$ ), non dégénérée ( $\nabla_{x,\theta}\phi(x, \theta) \neq 0$ ) et on lui associe

$$\Lambda_\phi = \{(x, \nabla_x\phi(x, \theta)), \nabla_\theta\phi(x, \theta) = 0\}.$$

**Lemme 10.1** *La variété  $\Lambda_\phi$  est plongée dans une variété lagrangienne.*

**Preuve** On vérifie que l'application  $i_\phi$ , qui va de l'ensemble des points critiques de  $\phi$  en  $\alpha$   $C_\phi = \{(x, \theta), \nabla_\theta\phi(x, \theta) = 0\}$  vers  $T^*X$  :

$$i_\phi(x, \theta) = (x, \nabla_x\phi(x, \theta)) \in T^*X$$

est une immersion lagrangienne, et son image est  $\Lambda_\phi$ .

On vérifie que  $d\phi = \sum_j \partial_{x_j}\phi(x, \theta)dx_j + \sum_{p=1}^N \partial_{\theta_p}\phi(x, \theta)d\theta_p \in \Lambda^1(X \times \mathbb{R}^n)$  ce qui donne

$$d\phi|_{C_\phi} = \sum_j \partial_{x_j}\phi(x, \theta)dx_j$$

On en déduit  $i_\phi^*(\sum \xi_j dx_j) = d\phi|_{C_\phi}$ , ce qui donne, par commutation de l'opérateur de différentiation et de  $i_\phi$

$$i_\phi^*(d(\sum \xi_j dx_j)) = d^2\phi = 0$$

donc  $i_\phi^*(\sum_j d\xi_j \wedge dx_j) = 0$ . La variété est localement isotrope. Comme  $\phi$  est non dégénérée,  $C_\phi$  est une sous-variété de dimension  $n$  et on en déduit que  $\Lambda_\phi$ , image d'une sous-variété de dimension  $n$  par une immersion, est maximale. C'est localement une variété lagrangienne.

### 10.2.3 Le théorème de représentation de Hörmander

On a le résultat :

**Théorème 10.1** *Soit  $\Lambda$  une sous-variété lagrangienne de  $T^*X$  et soit  $\rho_0$  un point de cette lagrangienne.*

*Il existe un système de coordonnées symplectiques sur  $T^*X$ , noté  $(x, \xi)$  et une phase non dégénérée  $\phi(x, \xi)$  telle que,  $\mathcal{O}$  étant un voisinage de  $\rho_0$  dans  $T^*X$ ,*

$$\Lambda \cap \mathcal{O} = \{(x, \nabla_x\phi(x, \xi)), \nabla_\xi\phi(x, \xi) = 0\}.$$

Ce théorème est énoncé dans [47]. Il vient alors

**Corollaire 10.1** *Il existe un difféomorphisme  $\chi$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $X$ ,  $n$  étant la dimension de  $T_{\rho_0}X$ , tel que*

$$h_\chi(\Lambda_\psi \cap h_\chi^{-1}(\mathcal{O})) = \Lambda \cap \mathcal{O}$$

où  $\psi(y, \eta) = y \cdot \eta - H(\eta)$ . Ce difféomorphisme est construit avec le lemme de Darboux et la représentation de la lagrangienne au voisinage de  $\rho_0$  par

$$\Lambda \cap \mathcal{O} = \{(x(y), \xi(y)), y \in \mathbb{R}^n \cap \chi^{-1}(\mathcal{O})\}. \quad (10.2.5)$$

**Preuve** La démonstration du théorème s'appuie sur le lemme technique suivant, que nous démontrerons ultérieurement :

**Lemme 10.2** *Il existe un système de coordonnées de  $X$  au voisinage de  $x_0$  tel que, dans le système canonique associé de coordonnées symplectiques  $(x, \xi)$ , la lagrangienne soit définie par  $x = X(\xi)$ .*

Ce lemme étant supposé démontré, on sait que  $\sigma = \sum_j \xi_j dx_j$  est nulle sur  $\Lambda$ . Ceci donne

$$\sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial X_j}{\partial \xi_p}(\xi) = 0.$$

La relation  $d(\sum_{j=1}^{j=n} \xi_j x_j) = \sum_{j=1}^n \xi_j dx_j + \sum_{j=1}^n x_j d\xi_j$  donne, sur  $\Lambda$

$$d\left(\sum_{j=1}^{j=n} \xi_j X_j\right) = \sum_{j=1}^{j=n} X_j(\xi) d\xi_j.$$

Soit  $H(\xi) = \sum_{j=1}^{j=n} \xi_j X_j(\xi)$ . On vérifie que  $\partial_{\xi_p} H(\xi) = \sum_{j=1}^{j=n} \xi_j \frac{\partial X_j}{\partial \xi_p} + X_p(\xi) = X_p(\xi)$  et  $H$  est homogène de degré 1.

Si on introduit  $\phi(x, \xi) = x \cdot \xi - H(\xi)$ , on trouve  $\nabla_x \phi(x, \xi) = \xi$  et  $\nabla_{\xi_p} \phi(x, \xi) = x_p - X_p(\xi)$ . Donc la lagrangienne est localement représentée par la phase  $\phi$ , dans le sens où

$$\Lambda \cap \mathcal{O} = \{(x, \xi), x = X(\xi)\} = \{(x, \nabla_x \phi), \nabla_\xi \phi(x, \xi) = 0\} \cap \mathcal{O} = \Lambda_\phi \cap \mathcal{O}.$$

Nous avons démontré le théorème de représentation.

Démontrons maintenant le lemme 10.2. Pour cela, on utilise la représentation (10.2.5) de  $\Lambda$ . La famille  $dx_1(y), \dots, dx_n(y) d\xi_1(y), \dots, d\xi_n(y)$  définit un espace de dimension  $n$  au voisinage du point  $\rho_0$  considéré, puisque  $\Lambda$  est maximale, donc de dimension  $n$ . Désignons par  $J$  et  $K$  respectivement l'ensemble des coordonnées indépendantes de  $dx_1, \dots, dx_n$  et  $d\xi_1, \dots, d\xi_n$ . On note désormais  $(y, \eta)$  le système de coordonnées symplectiques sur  $\mathbb{R}^n$  associé à  $(y)$ , et on introduit l'injection naturelle  $j$  de  $C(\mathbb{R}^n)$  dans  $C(T^*\mathbb{R}^n)$  par  $j(f)(y, \eta) = f(y)$ . Le système de coordonnées  $(x, \xi)$  est symplectique, donc on a bien les relations

$$\{j(x_j)(y, \eta), j(x_{j'}) (y, \eta)\} = 0, \{j(\xi_k)(y, \eta), j(\xi_{k'}) (y, \eta)\} = 0, \{j(x_j)(y, \eta), j(\xi_k)(y, \eta)\} = \delta_{jk}.$$

On note  $p_j(y, \eta) = j(x_j)(y, \eta) = x_j(y)$  et  $q_k(y, \eta) = j(\xi_k)(y, \eta) = \xi_k(y)$ . Ces fonctions sur  $T^X \mathbb{R}^n$  vérifient les hypothèses du lemme 9.3.

On peut donc compléter cette famille en une famille de coordonnées symplectiques sur  $T^*X$ , notée  $p_1(y, \eta), p_n(y, \eta), q_1(y, \eta), \dots, q_n(y, \eta)$ .

Écrivons ce que nous donne le lemme de Darboux. On vérifie que la famille  $(dp_1, \dots, dp_n, dq_1, \dots, dq_n)$  est linéairement indépendante. En écrivant qu'il s'agit d'une application de  $T^*X$  dans  $T^*\mathbb{R}^n$  que l'on écrit sous forme matricielle, on trouve que sa matrice est

$$\begin{pmatrix} A_J & 0 \\ B_K & 0 \\ C_{n-J}^1 & C_{n-J}^2 \\ D_{n-K}^1 & D_{n-K}^2 \end{pmatrix}$$

où on a réordonné les coordonnées dans  $T^*X$  en  $j \in J, k \in K, j' \in \{1, \dots, n\} - J, k' \in \{1, \dots, n\} - K$ . Nous avons utilisé ici que  $(p_j)_{j \in J}$  et  $(q_k)_{k \in K}$  ne dépendent que de  $y$ . Les matrices  $A_J$  et  $B_K$  sont les matrices respectives  $Jn$  et  $Kn$  des  $(\partial_{y_l} p_j)_{j \in J, 1 \leq l \leq n}$  et  $(\partial_{y_m} q_k)_{k \in K, 1 \leq m \leq n}$ . Les matrices  $C_{n-J}^2$  et  $D_{n-K}^2$  sont les matrices

$$(\partial_{\eta_l} q_{k'})_{k' \in \{1, \dots, n\} - J, 1 \leq l \leq n}, (\partial_{\eta_l} p_{j'})_{j' \in \{1, \dots, n\} - K, 1 \leq l \leq n}.$$

Comme la famille est linéairement indépendante, on en déduit que les matrices  $nn$

$$\begin{pmatrix} A_J \\ B_K \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_{n-J}^2 \\ D_{n-K}^2 \end{pmatrix}$$

sont inversibles au voisinage de  $(y_0, \eta_0)$ , image de  $\rho_0$  par le difféomorphisme induit par le changement de coordonnées symplectiques.

On en déduit que le système où  $\eta$  est le paramètre

$$\begin{cases} x_{j'}(y) = p_{j'}(y, \eta), j' \in \{1, \dots, n\} - J \\ \xi_{k'}(y) = q_{k'}(y, \eta), k' \in \{1, \dots, n\} - K \end{cases}$$

admet, par le théorème des fonctions implicites, une seule solution  $\eta = Y(y)$ . Le résultat du lemme (en transformant les notations) provient du fait que  $(\eta, -y)$  est un système de coordonnées symplectiques sur  $T^*\mathbb{R}^n$ . La phase est alors connue, il suffit d'écrire  $\phi(y, \eta) = -\eta y - G(y)$ , avec  $G(y) = \sum_j y_j Y(y)$ .

Nous avons achevé la démonstration du lemme 10.2.

Les caustiques (points où le théorème de la phase stationnaire ne s'applique pas dans une intégrale oscillante définissant une solution) peuvent être étudiées par l'intermédiaire de solutions lagrangiennes.

### 10.3 Les caustiques

On se donne une phase  $\phi(x, \theta)$  à  $N$  paramètres, non dégénérée ( $\text{Hess}_\theta \phi(x, \theta) \neq 0$ ), telle que

$$\Lambda_\phi = \{(x, \nabla_x \phi(x, \theta)), \nabla_\theta \phi(x, \theta) = 0\}$$

soit une solution lagrangienne de  $P$  opérateur (pseudo)différentiel.

Nous définissons (utilisant en cela une notion identique à celle d'un opérateur intégral de Fourier) une fonction oscillante

$$u_{\phi, a}(x, k) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{ik\phi(x, \theta)} a(x, \theta, k) d\theta \quad (10.3.6)$$

l'amplitude  $a$  admettant un développement asymptotique comme défini dans la définition 1.1.

On donne la définition de deux phases équivalentes :

**Définition 10.2** Soient  $\phi_1(x, \alpha)$  et  $\phi_2(y, \beta)$  deux phases définies sur  $X \times \mathbb{R}^N$  ( $N$  est le nombre de paramètres de la phase).

Elles sont équivalentes respectivement en  $(x_0, \alpha_0)$  et  $(y_0, \beta_0)$  si il existe un difféomorphisme

$$X \times \mathbb{R}^N \rightarrow X \times \mathbb{R}^N$$

$$(x, \alpha) \rightarrow (A(x), \Phi(x, \alpha))$$

tel que  $A(x_0) = y_0$ ,  $\Phi(x_0, \alpha_0) = \beta_0$  et une fonction  $\psi(x)$ ,  $C^\infty$  au voisinage de  $x_0$ , telle que

$$\phi_1(x, \alpha) = \phi_2(A(x), \Phi(x, \alpha)) + \psi(x)$$

Deux lagrangiennes équivalentes (au voisinage d'un point, la terminologie classique est de parler de germe de lagrangiennes) sont, de manière analogue, définies par

**Définition 10.3** Deux lagrangiennes  $\Lambda_1$  (au voisinage de  $\lambda_1$ ) et  $\Lambda_2$  (au voisinage de  $\lambda_2$ ) sont équivalentes si et seulement si il existe un difféomorphisme symplectique  $\chi$  laissant invariant les fibres de la projection canonique  $\pi$  de  $T^*X$  sur  $X$  tel que  $\chi(\Lambda_1) = \Lambda_2$ .

Nous avons l'unicité (locale) de la représentation par les deux propositions suivantes

**Proposition 10.3** Soient  $\phi$  et  $\phi_1$  deux phases définies respectivement sur  $X \times \mathbb{R}^N$  et sur  $X \times \mathbb{R}^{n_1}$ . Pour  $x_0 \in X$ , les classes de fonctions oscillantes de la forme  $u_{\phi, a}$  et  $u_{\phi_1, a_1}$  coïncident si et seulement si

- il existe  $\theta_0 \in \mathbb{R}^N$ ,  $\theta_0^1 \in \mathbb{R}^{n_1}$  tels que  $i_\phi(x_0, \theta_0) = i_{\phi_1}(x_0, \theta_0^1)$ . On note ce point  $\lambda_0$ .
- on a  $\Lambda_\phi = \Lambda_{\phi_1}$  au voisinage du point  $\lambda_0$ .

**Proposition 10.4** Deux variétés lagrangiennes sont équivalentes si et seulement si il existe deux phases  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , équivalentes au sens de la Définition 10.2, telles que  $\Lambda_1 = \Lambda_{\phi_1}$  et  $\Lambda_2 = \Lambda_{\phi_2}$ .

Nous pouvons alors choisir les paramètres de la phase  $\phi$  associée à une variété lagrangienne au voisinage d'un point par la proposition

**Proposition 10.5** Soit  $\phi$  une phase non dégénérée définissant une carte locale de  $\Lambda$  au voisinage de  $\lambda_0 = (x_0, \nabla_\theta \phi(x_0, \theta_0))$ ,  $(x_0, \theta_0) \in C_\phi$ . Si  $N$  est le nombre de paramètres de la phase

$$N = \dim \text{Ker} T_{\lambda_0}(\pi_\Lambda) + \text{rg}(\text{Hess} \phi_\theta(x_0, \theta_0))$$

où  $(x_0, \theta_0) \in C_\phi$  et  $(x_0, \nabla_\theta \phi(x_0, \theta_0)) = \lambda_0$ .

De plus, il existe une phase  $\phi_0$  à  $N_0 = \dim \text{Ker}(T_{\lambda_0}(\pi_\Lambda))$  paramètres, non dégénérée qui représente localement  $\Lambda$ .

Nous démontrons ces résultats.

**Preuve de la proposition 10.4** On sait qu'il existe une phase  $\phi_1$  représentant  $\Lambda_1$  (Théorème 10.1). On suppose  $\Lambda_1 \simeq \Lambda_2$ , donc il existe un difféomorphisme symplectique  $g$ , de la forme  $g(x, \xi) = (f(x), G(x, \xi))$  (puisqu'il conserve les fibres de la projection canonique), qui transforme  $\Lambda_1$  en  $\Lambda_2$ . Nous utilisons le lemme suivant :

**Lemme 10.3** Un difféomorphisme symplectique conservant les fibres de la projection canonique est de la forme

$$(x, \xi) \rightarrow (\chi(x), (\partial_{x_i} \chi_j(x))^{-1}(\xi - \nabla_x \psi))$$

Nous reconnaissons la forme de  $h_\chi$  introduit dans la proposition 9.3, alinéa 1.

**Preuve** Le difféomorphisme est symplectique, donc

$$\sum_j dx_j \wedge d\xi_j = \sum_j d(f_j(x)) \wedge d(h_j(x, \xi))$$

Pour simplifier nos expressions, on note  $\mathcal{N}$  la matrice de coefficients

$$\mathcal{N}_{ij}(x) = \partial_{x_i}(f_j(x))$$

Alors

$$d(f_j(x)) = \sum_i \mathcal{N}_{ij}(x) dx_i$$

On écrit de même

$$d(h_j(x, \xi)) = \sum_i \partial_{x_i} h_j(x, \xi) dx_i + \sum_k \partial_{\xi_k} h_j(x, \xi) d\xi_k$$

et les égalités que doivent vérifier  $f, h$  deviennent alors

$$\begin{cases} \sum_j \mathcal{N}_{ij}(x) \partial_{x_k} h_j(x, \xi) = \sum_j \mathcal{N}_{kj}(x) \partial_{x_i} h_k(x, \xi), \forall j, k \\ \sum_j \mathcal{N}_{ij}(x) \partial_{\xi_k} h_j(x, \xi) = \delta_{jk}, \forall j, k \end{cases}$$

En considérant la matrice  $M(x, \xi)$  telle que  $M_{jk}(x, \xi) = \partial_{\xi_k} h_j(x, \xi)$ , on trouve

$$\mathcal{N}M = Id$$

ce qui nous donne deux résultats

- $M$  est indépendante de  $\xi$  (la partie duale du difféomorphisme symplectique est linéaire en  $\xi$ )
- La matrice  $M$  est l'inverse de  $\mathcal{N}$ , ce qui se traduit par  $\partial_{\xi_k} h_j(x, \xi) = (\mathcal{N}^{-1})_{jk}(x)$ . Il existe donc un champ de vecteurs  $X_j(x)$  tel que

$$h_j(x, \xi) = \sum_k (\mathcal{N}^{-1})_{jk}(x) (\xi_k - X_k(x))$$

ce dont on déduit

$$\partial_{x_k} h_j(x) = \sum_l \partial_{x_k} ((\mathcal{N}^{-1})_{jl})(\xi_l - X_l(x)) - \sum_l (\mathcal{N}^{-1})_{jl}(x) \partial_{x_k} (X_l)(x).$$

Les premières égalités du système ci-dessus définissant le difféomorphisme symplectique s'écrivent

$$\begin{aligned} \sum_j \mathcal{N}_{ij}(x) \sum_l \partial_{x_k} (\mathcal{N}^{-1})_{jl} (\xi_l - X_l(x)) + \sum_j \sum_l \mathcal{N}_{ij} (\mathcal{N}^{-1})_{jl} \partial_{x_k} X_l \\ = \\ \sum_j \mathcal{N}_{kj}(x) \sum_l \partial_{x_i} (\mathcal{N}^{-1})_{jl} (\xi_l - X_l(x)) + \sum_j \sum_l \mathcal{N}_{kj} (\mathcal{N}^{-1})_{jl} \partial_{x_i} X_l. \end{aligned}$$

Regroupant les termes en  $\xi_l - X_l(x)$ , on trouve

$$\frac{\sum_l (\xi_l - X_l(x)) \sum_j \mathcal{N}_{ij}(x) \partial_{x_k} (\mathcal{N}^{-1})_{jl} - \sum_j \mathcal{N}_{kj}(x) \partial_{x_i} (\mathcal{N}^{-1})_{jl}}{\frac{\partial X_k}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_k}} =$$

Le premier terme s'écrit

$$A = \partial_{x_k} \left( \sum_j \mathcal{N}_{ij}(x) (\mathcal{N}^{-1})_{jl}(x) \right) - \sum_j \partial_{x_k} \mathcal{N}_{ij}(x) (\mathcal{N}^{-1})_{jl}(x) - \partial_{x_i} \left( \sum_j \mathcal{N}_{kj}(x) (\mathcal{N}^{-1})_{jl}(x) \right) + \sum_j \partial_{x_j} \mathcal{N}_{kj}(x).$$

Comme  $\mathcal{N}_{ij}(x) = \partial_{x_i} f_j(x)$ , on trouve  $\sum_j \mathcal{N}_{ij}(\mathcal{N}^{-1})_{jl} = \delta_{il}$

$$\sum_j \partial_{x_i x_k}^2 f_j - \partial_{x_k x_i}^2 f_j = 0.$$

Il reste

$$\frac{\partial X_k}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = 0$$

qui prouve que  $X$  est le gradient d'une fonction  $\psi \in C^\infty$  en  $x_0$ . La réciproque (le difféomorphisme écrit dans le lemme est un difféomorphisme symplectique conservant les fibres de la projection canonique) s'obtient en reprenant ces égalités. La preuve du lemme est terminée.

Ce lemme étant prouvé,  $\Lambda_1 = \{(x, \nabla_x \phi_1(x, \alpha)), \nabla_\alpha \phi_1(x, \alpha) = 0\}$  car  $\phi_1$  représente localement  $\Lambda_1$ . On en déduit

$$\Lambda_2 = \{(f(x), (\nabla_x f)^{-1}(\nabla_x \phi_1(x, \alpha) - \nabla_x \phi(x))), \nabla_\alpha \phi_1(x, \alpha) = 0\}$$

La phase

$$\phi_2(y, \beta) = \phi_1(f^{-1}(y), \beta) - \psi(f^{-1}(y))$$

est bien définie puisque  $f$  est un difféomorphisme au voisinage de  $x_0$ . Alors

$$\begin{cases} \nabla_\beta \phi_2(y, \beta) = \nabla_\alpha \phi_1(f^{-1}(y), \beta) \\ \nabla_y \phi_2(y, \beta) = (\nabla_x f)^{-1}(\nabla_x \phi_1(f^{-1}(y), \beta) - \nabla_x \psi(f^{-1}(y))) \end{cases}$$

On a donc  $\Lambda_2$  par

$$\Lambda_2 = \{(y, \nabla_y \phi_2(y, \beta)) \in T^*X, \nabla_\beta \phi_2(y, \beta) = 0\}$$

Ceci démontre la première partie de l'équivalence.

Pour la deuxième partie de l'équivalence, on se donne deux phases équivalentes  $\phi_2(A(x), \Phi(x, \alpha)) = \phi_1(x, \alpha) - \psi(x)$ , et on vérifie que

$$\Lambda_{\phi_2} = \{(y, \nabla_y \phi_2), \nabla_\beta \phi_2(y, \beta) = 0\}$$

Les relations

$$\begin{cases} \nabla_\beta \phi_2(A(x), \Phi(x, \alpha)) \cdot \nabla_\alpha \Phi(x, \beta) = \nabla_\alpha \phi_1(x, \alpha) \\ \nabla_y \phi_2(A(x), \Phi(x, \alpha)) \cdot \nabla_x A = \nabla_x \phi_1(x, \alpha) - \nabla_x \psi \end{cases}$$

le fait que  $(x, \alpha) \rightarrow (A(x), \Phi(x, \alpha))$  soit un difféomorphisme et le fait que

$$(x, \xi) \rightarrow (A(x), (\nabla_x A)^{-1}(\xi - \nabla_x \psi))$$

soit un difféomorphisme symplectique achèvent la preuve de la réciproque.

**Preuve de la proposition 10.5** On se place au point  $(x_0, \alpha_0)$  qui caractérise un point de la variété lagrangienne  $\rho_0 = (x_0, \nabla_x \phi(x_0, \alpha_0))$ .

On suppose  $\text{rang Hess}_\alpha \phi(x_0, \alpha_0) = p < N$ . Il existe un changement linéaire orthogonal de variables (qui diagonalise  $\text{Hess}_\alpha \phi(x_0, \alpha_0)$ ) tel que  $\beta = \chi(\alpha)$  et si  $\psi(x, \beta) = \phi(x, \chi^{-1}(\beta))$

$$\text{Hess}_\beta \psi(x_0, \beta_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Hess}_{\beta''} \psi(x_0, \beta_0) \end{pmatrix}$$

où  $\beta'' \in \mathbb{R}^p$ . Localement, l'équation  $\nabla_{\beta''} \psi(x, \beta) = 0$  admet, par le théorème des fonctions implicites (que l'on peut appliquer ici car le Hessien en  $\beta''$  est non nul), une solution unique  $\beta'' = B(x, \beta')$  avec  $\beta''_0 = B(x_0, \beta'_0)$ . La phase

$$\psi_1(x, \beta') = \psi(x, \beta', B(x, \beta'))$$

a  $N - p$  paramètres et dont le Hessien est nul en  $\beta'_0$  représente donc localement  $\Lambda_\psi$ , puisque  $\nabla_{\beta'}\phi(x, \beta) = 0$  équivaut à  $\nabla_{\beta'}\psi(x, \beta) = 0$  et  $\nabla_{\beta''}\psi(x, \beta) = 0$  et que, d'autre part

$$\nabla_x\psi_1(x, \beta') = \nabla_x\psi(x, \beta', B(x, \beta')) + \nabla_{\beta''}\psi(x, \beta', B(x, \beta'))\nabla_x B(x, \beta')$$

qui entraîne l'égalité, comme  $\nabla_{\beta''}\psi(x, \beta', B(x, \beta')) = 0$  pour tout  $(x, \beta')$ , de  $\nabla_x\psi_1$  et  $\nabla_x\psi$ . Nous avons donc représenté  $\Lambda$  par une phase à  $N - p$  paramètres.

Localement,  $\Lambda = \{(x, \nabla_x\psi_1(x, \theta)), \nabla_\theta\psi_1(x, \theta)\}$  où  $\psi_1$  est une phase non dégénérée définie sur  $X \times R^{N-p}$  telle que  $\text{Hess}_\theta\psi_1(x_0, \theta_0) = 0$ . Au point  $(x_0, \xi_0) = (x_0, \nabla_x\psi_1(x_0, \theta_0))$ , les égalités de définition de  $\Lambda$  permettent d'écrire  $(u, \Sigma) \in T_{(x_0, \xi_0)}\Lambda$  sous la forme

$$\{(u, \text{Hess}_x\psi_1(x_0, \theta_0)u + \sum_j \partial_{\theta_j}\nabla_x\psi_1(x_0, \theta_0)\Sigma_j)\} \cap \{\nabla_x\partial_{\theta_j}\psi_1(x_0, \theta_0)u = 0\}$$

L'espace tangent en  $x_0$  à la projection canonique  $\pi_\Lambda$  de  $\Lambda \subset T^*X$  sur  $X$  est alors caractérisé par les équations indépendantes  $\forall j, \nabla_x\partial_{\theta_j}\psi_1(x_0, \theta_0)u = 0$ . Son noyau est donc de dimension le nombre d'équations correspondantes, soit  $N - p$ . On en déduit

$$\dim\text{Ker}T_{x_0}(\pi_\Lambda) = N - p$$

ce qui achève les deux parties de la preuve de la proposition 10.5. On a en effet construit la phase  $\psi_1$  à  $N - p$  paramètres représentant la Lagrangienne au voisinage du point  $(x_0, \xi_0)$ . Lorsque  $\dim\text{Ker}T_{x_0}(\pi_\Lambda) \neq 0$ , on dit que le point  $x_0$  est dans la caustique de  $\Lambda$ . La classification élémentaire des caustiques n'est pas notre objectif, nous n'étudions dans cet ouvrage que la caustique de type pli, mais nous rappelons les propriétés élémentaires des caustiques (que le lecteur pourra trouver dans l'article de Duistermaat ([29] Section 3).

**Définition 10.4** • *La caustique de la lagrangienne  $\Lambda$  est l'ensemble des projections sur  $X$  des points critiques de l'application projection canonique  $\pi_\Lambda$  de  $\Lambda$  dans  $X$ . Cette caustique est feuilletée par la dimension de  $\text{Ker}T_{x_0}\pi_\Lambda$ .*

*On suppose  $n \leq 4$ . Les sept catastrophes élémentaires au sens de Thom sont*

- *Les points dont la dimension du noyau de la projection canonique est 1 sont : le pli ( $n = 1$ ), la fronce ( $n = 2$ ), la queue d'aronde ( $n = 3$ ), le papillon ( $n = 4$ ).*
- *Les points dont la dimension du noyau de la projection est 2 sont les points de type ombilic ( $n = 3$ ).*
- *On dit qu'une singularité est de type pli si  $\dim\text{Ker}T_{x_0}(\pi_\Lambda) = 1$  et  $\dim\text{Ker}T_{x_0}(\pi_\Lambda) \cap T_{x_0}C_1 = 0$ .*

On obtient aisément un théorème de représentation :

**Théorème 10.2** *Soit  $u \in O(\Lambda)$ ,  $\Lambda$  variété lagrangienne maximale.*

1. *Si le point  $x_0$  n'est pas dans la projection de  $\Lambda$ ,  $u$  est à décroissance rapide en  $k$  dans un voisinage de  $x_0$ .*
2. *Si le point  $x_0$  est dans  $\pi(\Lambda)$  mais n'est pas dans la caustique de la lagrangienne,  $u$  admet un développement asymptotique classique en  $k^{-j}$  de premier terme  $k^{-N/2}$ .*
3. *Si le point  $x_0$  est dans la caustique de  $\Lambda$ ,  $u$  définit une représentation de la caustique au voisinage de  $x_0$ .*

**Preuve** Pour le premier item, il n'existe pas de  $\theta$  tel que  $\nabla_\theta\phi(x_0, \theta) = 0$  (si il en existait un, alors on construirait un point de la lagrangienne se projetant sur  $x_0$ ). On en conclut que l'on peut appliquer le théorème de la phase non stationnaire (Théorème 4.3) à l'intégrale définissant  $u$ . On a alors  $u \simeq 0$ .

Pour le deuxième item, nous considérons  $\theta_0$  tel que  $\nabla_\theta\phi(x_0, \theta_0) = 0$ . Nous souhaitons nous placer au voisinage de  $x_0$  et résoudre  $\nabla_\theta\phi(x, \theta) = 0$ . Comme  $x_0$  n'est pas dans la caustique, le point  $x_0$  n'est pas un point critique pour la projection lagrangienne  $\pi_\Lambda$ . On en déduit que

$\dim \text{Ker} T_{x_0} \pi_\Lambda = 0$ , et donc  $p = \text{rang Hess}_\alpha \phi(x_0, \alpha_0) = N$ . La matrice hessienne est inversible et on applique le théorème de la phase stationnaire (Proposition 4.3).

L'étude générale des caustiques s'appuie sur le résultat suivant. Nous ne démontrons ce résultat dans la section suivante que dans le cas d'une singularité de type pli pour la projection canonique. On peut faire intervenir dans le cas général une notion de stabilité ou de généralité de la phase, exprimée dans la

**Définition 10.5** *On dit que la phase  $\phi(x, \alpha)$  est stable si, pour toute fonction  $g(x, \alpha)$  "assez petite", on a l'équivalence de  $\phi(x, \alpha)$  et de  $\phi(x, \alpha) + g(x, \alpha)$ . Il est équivalent de dire que toute fonction  $f(x, \alpha)$  de classe  $C^\infty$  s'écrit sous la forme*

$$f(x, \alpha) = a(x) + \sum_l b_l(x) \partial_{x_l} \phi + \sum_k c_k(x, \alpha) \partial_{\alpha_k} \phi$$

tous les coefficients étant de classe  $C^\infty$ .

Duistermaat [29] démontre alors la

**Proposition 10.6** *Soit  $\phi(x, \alpha)$  une phase stable et soit  $g(\alpha) = \phi(x_0, \alpha)$ .*

*On désigne par  $g_1(\alpha), \dots, g_q(\alpha)$  une base de l'espace quotient  $C^\infty(\mathbb{R}^N) / \sum g_k(\alpha) \partial_{\alpha_k} g(\alpha)$ . Il existe une submersion  $x \rightarrow y(x)$  telle que*

$$\phi(x, \alpha) = \sum_{1 \leq l \leq q} y_l(x) g_l(\alpha) + g(\alpha)$$

Thom [94] a introduit, pour la dimension de l'espace quotient inférieure ou égale à 4, les 7 catastrophes élémentaires suivantes : le pli (fold), la fronce (cusp), la queue d'aronde (sparrowtail), le papillon, les ombilics elliptique, hyperbolique et parabolique. A chaque type de catastrophe est associée une phase génératrice et un nombre de paramètres nécessaires dans la phase de l'opérateur intégral de Fourier. Bien sûr, on peut toujours considérer (grâce au théorème de représentation 10.1) autant de paramètres que la dimension  $N$  de l'espace  $X$ , mais un lemme de Hörmander ([46], Lemma 3.2.3) qui est une généralisation du lemme de Morse avec paramètres, permet de montrer que tout germe  $f(\alpha)$  peut être représenté par  $f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_{k_0}) + Q(\alpha_{k_0+1}, \dots, \alpha_N)$ ,  $f_1$  étant un germe et  $Q$  une forme quadratique non dégénérée. La fonction  $f_1$  peut être évaluée dans les cas des catastrophes précitées. En particulier, pour le pli,  $f_1(\alpha_1) = \alpha_1^3$ , pour le cusp,  $f_1(\alpha_1) = \alpha_1^4$ , pour la queue d'aronde  $f_1(\alpha_1) = \alpha_1^5$ , pour le papillon,  $f_1(\alpha_1) = \alpha_1^6$ , et pour les ombilics, on a respectivement  $f_1(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_1^3$  (ombilic elliptique),  $f_1(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1^2 \alpha_2 - \alpha_1^3$  (ombilic hyperbolique) et  $f_1(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_1^4$  (ombilic parabolique). La base des germes est alors

- pour le pli,  $\alpha_1^3 + a(x)\alpha_1$ ,
- pour le cusp,  $\alpha_1^4 + a(x)\alpha_1 + b(x)\alpha_1^2$ ,
- pour la queue d'aronde  $\alpha_1^5 + a(x)\alpha_1 + b(x)\alpha_1^2 + c(x)\alpha_1^3$ ,
- pour le papillon  $\alpha_1^6 + a(x)\alpha_1 + b(x)\alpha_1^2 + c(x)\alpha_1^3 + d(x)\alpha_1^4$ ,
- pour les ombilics elliptique et hyperbolique respectivement  $\alpha_1^2 \alpha_2 \pm \alpha_2^3 + a(x)\alpha_1 + b(x)\alpha_2 + c(x)\alpha_2^2$ ,
- pour l'ombilic parabolique enfin  $\alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_2^4 + a(x)\alpha_1 + b(x)\alpha_2 + c(x)\alpha_2^2 + d(x)\alpha_2^3$ .

## 10.4 Caustique de type pli

Nous étudions dans cette section la représentation intrinsèque associée au germe de type pli. La première étude d'un tel germe a été faite par Ludwig [68]. La représentation intrinsèque fait intervenir la fonction déjà introduite, fonction d'Airy, que Airy [2] a introduite pour l'étude de l'arc en ciel. Cette singularité nous permettra, dans la section suivante, de calculer la solution uniforme au voisinage d'une caustique pour la propagation des ondes.

La singularité de type pli, nous l'avons vu, est caractérisée par les deux relations suivantes :



si  $C_1 = \{x, \dim \text{Ker} T_x \pi_\Lambda = 1\}$ , alors

- le point  $x_0$  est un pli lorsque  $x_0 \in C_1$
- $\text{Ker} T_{x_0} \pi_\Lambda$  est transverse à  $T_{x_0} C_1$ . On peut donc trouver une phase à 1 paramètre  $\phi(x, \alpha)$  telle que

$$\Lambda = \{(x, \nabla_x \phi(x, \alpha), \phi'(x, \alpha) = 0)\}.$$

Nous allons construire explicitement dans le cas du pli le changement de variable permettant de se ramener à la phase générique de la section précédente. On sait (puisque  $x_0$  est sur la caustique) que  $\phi''(x_0, \alpha_0) = 0$ . La caustique est l'ensemble des points  $x$  tels que il existe  $\alpha$  tel que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2}(x, \alpha) = 0.$$

L'espace tangent à cette caustique en  $(x, \alpha)$  est donné par

$$\{u, \exists \tau, \nabla_x \phi''_\alpha(x, \alpha)u + \phi'''_\alpha(x, \alpha)\tau = 0\}.$$

La singularité est de type pli si les équations définissant  $\text{Ker} T_{x_0} \pi_\Lambda$  et celles définissant  $T_{x_0} C_1$  n'ont qu'une solution triviale. C'est le cas si, en  $(x_0, \alpha_0)$ ,  $\phi'''(x_0, \alpha_0) \neq 0$ .

**Proposition 10.7** *La lagrangienne  $\Lambda$  définie par la phase  $\phi$  à un paramètre au voisinage du point  $x_0$  de la caustique  $C_1$  est de type pli en  $x_0$  si et seulement si il existe  $\alpha_0$  tel que*

$$\phi'_\alpha(x_0, \alpha_0) = 0, \phi''_\alpha(x_0, \alpha_0) = 0, \phi'''_\alpha(x_0, \alpha_0) \neq 0$$

*La phase est alors une déformation universelle de  $y_1 + \alpha y_2 - \frac{\alpha^3}{3}$ . Il existe deux fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  et un changement de variable  $\alpha \rightarrow t$  telles que la phase s'écrive*

$$\phi(x, \alpha) = f(x) + (x - x_0)g(x)t - \frac{t^3}{3}$$

### 10.4.1 Changement de variable explicite pour la phase (preuve)

L'existence de  $\alpha_0$  a été prouvée ci-dessus lors de l'hypothèse d'existence d'un point de caustique. On suppose que cette caustique est de type pli. Alors l'équation

$$\phi''_\alpha(x, \alpha) = 0$$

peut être résolue localement au voisinage de  $(x_0, \alpha_0)$  par l'application du théorème des fonctions implicites en  $\alpha$ . Il existe donc une fonction  $f(x)$  continue telle que  $f(x_0) = \alpha_0$  et  $\phi''_\alpha(x, f(x)) = 0$ .

**Recherche des points critiques** On peut alors écrire

$$\phi(x, \alpha) = \phi(x, f(x)) + \phi'_\alpha(x, f(x))(\alpha - f(x)) + \frac{1}{3}B(\alpha, x)(\alpha - f(x))^3.$$

Comme  $B(\alpha_0, x_0) \neq 0$ , il existe  $C(\alpha, x)$  tel que  $(C(\alpha, x))^3 = B(\alpha, x)$ , de même signe que  $B(\alpha_0, x_0)$  au voisinage de ce point. Les points critiques en  $\beta = \alpha - f(x)$  de la phase ci-dessus sont solution de

$$\phi'_\alpha(x, f(x)) + B(\beta + f(x), x)\beta^2 + \frac{1}{3}\beta^3 \partial_\alpha B(\beta + f(x), x) = 0$$

Au voisinage de  $\beta = 0$ , cette équation admet deux solutions. La phase  $\phi(x, \alpha)$  admet donc deux valeurs critiques  $\phi^+(x)$  et  $\phi^-(x)$ . Il existe alors deux fonctions, notées  $\rho$  et  $\gamma$ , telles que

$$\phi^\pm(x) = \phi(x, f(x)) + (\phi'_\alpha(x, f(x)))^2 \gamma(x) \pm \frac{2}{3}(\phi'_\alpha(x, f(x))\rho(x))^{\frac{3}{2}}.$$

En effet, si on écrit  $\beta = (\phi'(x, f(x)))^{\frac{1}{2}}t$  dans la zone où  $\phi'(x, f(x)) > 0$  (sachant qu'il est nul pour  $x = x_0$ ), on vérifie que l'équation en  $t$  admet deux solutions, puisque  $\phi'(x, f(x))$  est petit. Ces deux solutions sont de la forme (au voisinage de  $x_0$ ) :

$$t = \pm(-B(f(x), x))^{-\frac{1}{2}} + O((\phi'(x, f(x)))^{\frac{1}{2}})$$

ce qui conduit au fait que les fonctions  $\rho(x)$  et  $\gamma(x)$ , définies par les égalités

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{1}{2(\phi'(x, f(x)))^2}(\phi^+(x) + \phi^-(x) - 2\phi(x, f(x))) \\ \frac{4}{3}(\phi'(x, f(x))\rho(x))^{\frac{3}{2}} &= \phi^+(x) - \phi^-(x) \end{aligned}$$

sont bien des fonctions  $C^\infty$ . Elles sont déterminées grâce aux valeurs critiques.

**Premier changement de variable** On veut construire le changement de variable tel que

$$\phi(x, \alpha) = \frac{1}{2}(\phi^+(x) + \phi^-(x)) + (\phi'(x, f(x))\rho(x)z - \frac{z^3}{3}). \quad (10.4.7)$$

Tout d'abord, notons que cette égalité est cohérente puisque les valeurs critiques de la phase écrite en (10.4.7) sont celles de  $\phi$ .

On considère  $\psi(x, \alpha) = \phi'_\alpha(x, \alpha)$ . On constate que  $\psi''_{\alpha^2}(x, f(x)) \neq 0$  et  $\psi'_\alpha(x, f(x)) = 0$ . Par la formule de Taylor avec reste intégral, on peut écrire  $\psi(x, \alpha) = \psi(x, f(x)) + (\alpha - f(x))^2 \int_0^1 ds(1-s)\psi''_{\alpha^2}(f(x) + s(\alpha - f(x)))ds$ . En supposant  $\psi''_{\alpha^2}(x, f(x)) < 0$  on applique le lemme de Morse pour une phase stationnaire non dégénérée et on trouve

$$\psi(x, \alpha) = \phi'(x, f(x)) - \rho^{-1}(x)t^2,$$

où  $t = (\alpha - f(x))[-\rho(x) \int_0^1 ds(1-s)\psi''_{\alpha^2}(f(x) + s(\alpha - f(x)))ds]^{\frac{1}{2}}$  dans un voisinage de  $\alpha = f(x)$ . On note alors  $\omega(x, t) = \phi(x, \alpha(x, t)) - \frac{1}{2}(\phi^+(x) + \phi^-(x))$ . Les fonctions  $g_1(t, x)$  et  $g_2(t, x)$  égales respectivement à  $\frac{1}{2}(\omega(x, t) + \omega(x, -t))$  et  $\frac{1}{2}\frac{\omega(x, t) - \omega(x, -t)}{t}$  sont paires. On introduit la première variable annexe

$$\beta = \phi'(x, f(x))\rho(x).$$

Les points critiques de  $\omega(x, t)$  dans la variable  $t$  sont les solutions de  $t^2 = \beta$ , d'où les valeurs critiques sont égales à  $\pm\frac{2}{3}\beta^{\frac{3}{2}}$  (en effet  $\partial_t\omega(x, t) = \partial_t\alpha(x, t)\partial_\alpha\phi(x, \alpha(x, t))$ ). On trouve directement (par exemple par série de Taylor de fonctions paires et en supposant que la correspondance  $x \leftrightarrow \beta$  est un difféomorphisme local) que  $g_{1,2}(x, t) = A_{1,2}(t^2 - \beta, \beta)$ . Ainsi

$$\phi(x, \alpha(x, t)) = \frac{1}{2}(\phi^+(x) + \phi^-(x)) + tA_1(t^2 - \beta, \beta) + A_2(t^2 - \beta, \beta)$$

$A_1$  et  $A_2$  étant deux fonctions. De l'égalité  $\phi(x, \alpha(x, \pm\beta^{\frac{1}{2}})) = \frac{1}{2}(\phi^+(x) + \phi^-(x)) \pm \frac{2}{3}\beta^{\frac{3}{2}}$  on déduit

$$\pm\beta^{\frac{1}{2}}A_1(0, \beta) + A_2(0, \beta) = \pm\frac{2}{3}\beta^{\frac{3}{2}} \text{ et } 0 = \partial_\alpha t[A_1(0, \beta) + 2\beta\partial_1 A_1(0, \beta) \pm 2\beta^{\frac{1}{2}}\partial_1 A_2(0, \beta)]$$

ce qui donne  $A_1(0, \beta) = \frac{2}{3}\beta$ ,  $2\beta\partial_1 A_1(0, \beta) + A_1(0, \beta) = 0$ ,  $\partial_1 A_2(0, \beta) = 0$ ,  $A_2(0, \beta) = 0$ . On écrit alors les développements de Taylor de  $A_1$  et de  $A_2$  dans la première variable. Il vient  $A_2(u, \beta) = u^2 H_2(u, \beta)$  et  $A_1(u, \beta) = \frac{2}{3}\beta - \frac{1}{3}u + u^2 H_1(u, \beta)$ , soit  $A_1(t^2 - \beta, \beta) = \beta - \frac{1}{3}t^2 + H_1(t, \beta)(t^2 - \beta)^2$ . Soit  $H(t, \beta) = tH_1(t^2 - \beta, \beta) + H_2(t^2 - \beta, \beta)$ . On obtient

$$\phi(x, \alpha) = \frac{1}{2}(\phi^+(x) + \phi^-(x)) + (t^2 - \beta)^2 H(t, \beta) + \beta t - \frac{t^3}{3}.$$

On remarque que, pour  $z = t + (\beta - t^2)U$ ,  $\beta z - \frac{z^3}{3} = \beta t - \frac{t^3}{3} + (\beta - t^2)^2[U - tU^2 - \frac{\beta - t^2}{3}U^3]$ . Si  $U(\beta, t)$  est la solution unique au voisinage de  $t = 0$  de  $u - u^2 t - (\beta - t^2)u^3/3 = H(t, \beta)$ , on obtient l'égalité demandée :

$$\phi(x, \alpha) = \phi(x, f(x)) + \beta z - \frac{z^3}{3}.$$

### 10.4.2 Calcul de la représentation intégrale de la solution associée

La fonction représentant la caustique de type pli est la fonction d'Airy. Pour ce faire, un théorème de division de symboles de Boutet de Monvel (Lemme de préparation p 26 de [17]) prouve l'existence de trois fonctions  $\sigma_0(x, k)$ ,  $\sigma_1(x, k)$ ,  $h(x, z, k)$  tels que

$$\sigma(x, \alpha, k) \left| \frac{d\alpha}{dz} \right| = \sigma_0(x, k) + z\sigma_1(x, k) + (\partial_z h(x, z, k) + (z^2 + (x - x_0)g(x))ikh(x, z, k))$$

On en déduit la relation, qui permet d'écrire une représentation générale de la solution oscillante associée à une caustique de type pli, où on note  $s(x) = (x - x_0)g(x)$  :

$$\int e^{ik\phi(x, \alpha)} \sigma(x, \alpha, k) d\alpha = 2\pi k^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{i\pi}{3}} e^{ik\phi(x, f(x))} \left[ \begin{array}{l} \sigma_0(x, k) Ai(k^{\frac{2}{3}} e^{\frac{i\pi}{3}} s(x)) \\ + k^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{i\pi}{3}} \sigma_1(x, k) Ai'(k^{\frac{2}{3}} e^{\frac{i\pi}{3}} s(x)) \end{array} \right] + r$$

Comme les valeurs critiques de la phase

$$f(x) + (x - x_0)g(x)z - \frac{z^3}{3}$$

sont intrinsèques et égales à

$$f(x) \pm \frac{2}{3}(s(x))^{\frac{3}{2}} = f(x) \pm \frac{2}{3}((x - x_0)g(x))^{\frac{3}{2}} = \phi_{\pm}(x)$$

on achève la preuve du théorème 10.3, qui suit :

**Théorème 10.3** Une intégrale oscillante  $I$  de phase  $\phi$  (et de symbole  $\sigma(x, \alpha, k)$ ) admettant une singularité de type pli en  $(x_0, \alpha_0)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , est caractérisée par les fonctions

$$\phi_0(x) = \frac{1}{2}(\phi_+(x) + \phi_-(x)) \quad g(x)(x - x_0) = \left[ \left( \frac{3}{4}(\phi_-(x) - \phi_+(x)) \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2$$

et il existe deux symboles  $\sigma_0(x, k)$  et  $\sigma_1(x, k)$  tels que

$$I = k^{-\frac{1}{3}} e^{ik\phi_0(x)} \left[ \sigma_0(x, k) Ai(k^{\frac{2}{3}} e^{\frac{i\pi}{3}} g(x)(x - x_0)) + k^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{i\pi}{3}} \sigma_1(x, k) Ai'(k^{\frac{2}{3}} e^{\frac{i\pi}{3}} g(x)(x - x_0)) \right]$$

Si  $x \neq x_0$ , alors le théorème de la phase stationnaire, la représentation du théorème 10.3 permet de trouver

$$I(a, \phi) \simeq a_1(x, k) e^{ik\phi_+(x)} + a_2(x, k) e^{ik\phi_-(x)}.$$

Les points de la lagrangienne qui ne sont pas sur la caustique sont des points usuels de phase stationnaire.

On peut ainsi introduire la notion de **couche limite** associée à ce type de caustique. En effet, la fonction d'Airy étant décroissante lorsque le paramètre tend vers  $+\infty$ , la fonction ci-dessus reste finie lorsque  $|g(x)(x - x_0)| \leq Ck^{-\frac{2}{3}}$  pour tout  $C$ , la fonction d'Airy étant alors considérée dans un compact  $|u| \leq C$ . On vérifie que  $g(x_0)$  est lié à  $\phi'''(x_0, \alpha_0)$  et est donc non nul. Ceci implique que la représentation de la solution exhibée dans le théorème 10.3 est uniforme dans tout ouvert  $|x - x_0| \leq Dk^{-\frac{2}{3}}$ ,  $D$  (grande) constante positive donnée. Nous reprenons dans le paragraphe suivant les expressions obtenues pour la solution de l'équation des ondes pour retrouver la fonction d'Airy par une méthode de couche limite. Nous présentons ainsi la manière dont Ludwig a introduit la caustique. Ceci permet d'expliquer la notion de couche limite évoquée à la fin de la section précédente.

### 10.4.3 Ansatz de D.Ludwig pour la caustique.

On considère des solutions de l'équation de Helmholtz  $(\Delta + k^2)u(x, k) = 0$  de la forme

$$u(x, k) = e^{ik\theta(x)}[g_0(x, k^\alpha)V(k^\beta\rho(x)) + g_1(x, k^\alpha)V'(k^\beta\rho(x))].$$

On suppose que la fonction  $V$  vérifie l'égalité

$$V''(t) + tV(t) = 0$$

(et donc Ludwig suppose a priori la dépendance de la solution en fonction de la fonction d'Airy). On suppose que  $\theta$  n'est pas une solution de l'équation eikonale classique, donc  $\nabla\theta$  n'est pas de norme 1 sur un voisinage d'un point  $x_0$ .

On trouve qu'il existe deux symboles  $\sigma_0(x, k^\alpha, k^\beta)$  et  $\sigma_1(x, k^\alpha, k^\beta)$  tels que

$$\Delta u = -k^2 e^{ik\theta(x)}[\sigma_0(x, k^\alpha, k^\beta)V(k^\beta\rho(x)) + \sigma_1(x, k^\alpha, k^\beta)V'(k^\beta\rho(x))].$$

Un calcul, laissé au lecteur, montre que

$$\begin{aligned} \sigma_0(x, k^\alpha, k^\beta) &= [(\nabla\theta)^2 g_0 + \frac{1}{ik}(2\nabla\theta\nabla g_0 + \Delta\theta g_0) + \frac{1}{(ik)^2}\Delta g_0] \\ &\quad + k^{3\beta-2}\rho(\nabla\rho)^2 g_0 + 2ik^{2\beta-1}g_1\rho\nabla\rho\nabla\theta \\ &\quad + k^{2\beta-2}[2\rho\nabla\rho\nabla g_1 + g_1\rho\Delta\rho + g_1(\nabla\rho)^2] \\ \sigma_1(x, k^\alpha, k^\beta) &= [(\nabla\theta)^2 g_1 + \frac{1}{ik}(2\nabla\theta\nabla g_1 + \Delta\theta g_1) + \frac{1}{(ik)^2}\Delta g_1] \\ &\quad + k^{3\beta-2}\rho(\nabla\rho)^2 g_1 + \frac{2}{i}k^{\beta-1}g_0\nabla\rho\nabla\theta \\ &\quad - k^{\beta-2}[2\rho\nabla\rho\nabla g_0 + g_0\Delta\rho] \end{aligned}$$

Écrire  $(\Delta + k^2)u = 0$  implique que, asymptotiquement

$$\sigma_0 \simeq g_0, \sigma_1 \simeq g_1.$$

Nous supposons  $g_0$  d'ordre 0 et  $k$  et  $g_1$  en  $k^\gamma$ .

On compare les développements asymptotiques.

- Pour  $3\beta - 2 < 0$ ,
  - si  $2\beta - 1 + \gamma < 0$ , le terme dominant de  $\sigma_0$  conduit, soit à  $g_0 = 0$ , soit à l'équation eikonale classique  $(\nabla\theta)^2 = 1$ . Lorsque  $g_0 = 0$ , on examine le terme suivant. Comme  $3\beta - 2 < 0$ , il vient  $(\nabla\theta)^2 g_1 = g_1$ , d'où  $(\nabla\theta)^2 = 1$ ,
  - si  $2\beta - 1 + \gamma > 0$ , l'écriture du terme dominant pour  $\sigma_0$  donne  $g_1\rho\nabla\rho\nabla\theta = 0$ . En supposant  $\rho \neq 0$ , on voit que  $\sigma_1 \simeq g_1$  donne l'équation eikonale,
  - si  $2\beta - 1 + \gamma = 0$ , on trouve  $(\nabla\theta)^2 g_0 + 2i(k^{-\gamma}g_1)\rho\nabla\rho\nabla\theta \simeq g_0$  et, par  $\sigma_1$ , le terme  $g_0\nabla\rho\nabla\theta$  étant d'ordre inférieur, l'équation eikonale est obtenue.
- Pour  $3\beta - 2 > 0$ , on reprend le même genre de raisonnement, en comparant  $3\beta - 2$ ,  $2\beta - 1 + \gamma$  et  $\beta - 1 - \gamma$ . Si le troisième est supérieur au premier on trouve  $g_1\rho\nabla\rho\nabla\theta = 0$  et  $g_0\nabla\rho\nabla\theta = 0$ , puis  $\rho(\nabla\rho)^2 g_1 = 0$ ,  $\rho(\nabla\rho)^2 g_0 = 0$ , puis enfin après avoir éliminé les termes d'ordre trop élevé, l'équation eikonale  $(\nabla\theta)^2 = 1$ .

On doit donc avoir  $\beta = \frac{2}{3}$  pour pouvoir espérer trouver une expression différente des développements asymptotiques usuels. Dans ce cas, on trouve :

$$\begin{aligned} \sigma_0(x, k^\alpha, k^\beta) &= [(\nabla\theta)^2 + \rho(\nabla\rho)^2]g_0 + \frac{1}{ik}(2\nabla\theta\nabla g_0 + \Delta\theta g_0) + \frac{1}{(ik)^2}\Delta g_0 \\ &\quad + 2ik^{\frac{1}{3}}g_1\rho\nabla\rho\nabla\theta \\ &\quad + k^{-\frac{2}{3}}[2\rho\nabla\rho\nabla g_1 + g_1\rho\Delta\rho + g_1(\nabla\rho)^2] \\ \sigma_1(x, k^\alpha, k^\beta) &= [(\nabla\theta)^2 + \rho(\nabla\rho)^2]g_1 + \frac{1}{ik}(2\nabla\theta\nabla g_1 + \Delta\theta g_1) + \frac{1}{(ik)^2}\Delta g_1 \\ &\quad + \frac{2}{i}k^{-\frac{2}{3}}g_0\nabla\rho\nabla\theta \\ &\quad - k^{-\frac{1}{3}}[2\rho\nabla\rho\nabla g_0 + g_0\Delta\rho] \end{aligned}$$

Lorsque  $\gamma > -\frac{1}{3}$ , on déduit de la première égalité  $\sigma_0 \simeq g_0$  que  $\rho\nabla\rho\nabla\theta = 0$  et que  $(\nabla\theta)^2 + \rho(\nabla\rho)^2 = 1$ . La deuxième égalité est ainsi vérifiée pour son premier terme. On trouve alors que  $\nabla\rho\nabla\theta = 0$ .

Lorsque  $-\frac{2}{3} > \gamma$ , c'est de la deuxième égalité que l'on déduit de la deuxième égalité  $\sigma_1 \simeq g_1$  que  $\nabla\rho\nabla\theta = 0$ . Dans ce cas ci, on en déduit encore l'équation eikonale  $(\nabla\theta)^2 + \rho(\nabla\rho)^2 = 1$ .

Enfin, si  $-\frac{2}{3} < \gamma \leq -\frac{1}{3}$ , on trouve de la deuxième égalité l'équation eikonale  $(\nabla\theta)^2 + \rho(\nabla\rho)^2 = 1$ . Ainsi, en remplaçant dans la première égalité, on trouve encore  $\rho\nabla\rho\nabla\theta = 0$ . On a interdit dans un voisinage  $\rho = 0$  car dans ce voisinage on aurait l'équation eikonale sur  $\theta$ .

On a ainsi obtenu :

$$(\nabla\theta)^2 + \rho(\nabla\rho)^2 = 1, \quad \nabla\theta\nabla\rho = 0, \quad \beta = \frac{2}{3}.$$

Il reste  $\sigma_0(x, k^\alpha, k^\beta) = g_0 + \frac{1}{ik}(2\nabla\theta\nabla g_0 + \Delta\theta g_0) + \frac{1}{(ik)^2}\Delta g_0 + k^{-\frac{2}{3}}[2\rho\nabla\rho\nabla g_1 + g_1\rho\Delta\rho + g_1(\nabla\rho)^2]$  et  $\sigma_1(x, k^\alpha, k^\beta) = g_1 + \frac{1}{ik}(2\nabla\theta\nabla g_1 + \Delta\theta g_1) + \frac{1}{(ik)^2}\Delta g_1 - k^{-\frac{4}{3}}[2\rho\nabla\rho\nabla g_0 + g_0\Delta\rho]$ .

Pour plus de simplifications, on suppose que  $\gamma = -\frac{1}{3}$ . Le terme en  $k^{-1}$  de  $\sigma_0 \simeq g_0$  donne

$$(2\nabla\theta\nabla g_0 + \Delta\theta g_0) + \frac{1}{ik}\Delta g_0 + i[2\rho\nabla\rho\nabla(k^{\frac{1}{3}}g_1) + (k^{\frac{1}{3}}g_1)\rho\Delta\rho + (k^{\frac{1}{3}}g_1)(\nabla\rho)^2] = 0$$

alors que celui de  $\sigma_1 \simeq g_1$  aboutit à

$$(2\nabla\theta\nabla(k^{\frac{1}{3}}g_1) + \Delta\theta(k^{\frac{1}{3}}g_1)) + \frac{1}{ik}\Delta(k^{\frac{1}{3}}g_1) - i[2\rho\nabla\rho\nabla g_0 + g_0\Delta\rho]$$

On note  $\tilde{g}_1(x, k^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{ik^{\frac{1}{3}}}g_1(x, k^{\frac{1}{3}})$  pour obtenir le système d'équations couplées

$$\begin{cases} (2\nabla\theta\nabla g_0 + \Delta\theta g_0) + \frac{1}{ik}\Delta g_0 + [2\rho\nabla\rho\nabla\tilde{g}_1 + \tilde{g}_1\rho\Delta\rho + \tilde{g}_1(\nabla\rho)^2] = 0 \\ 2\nabla\theta\nabla\tilde{g}_1 + \Delta\theta\tilde{g}_1 + \frac{1}{ik}\Delta\tilde{g}_1 + [2\rho\nabla\rho\nabla g_0 + g_0\Delta\rho] = 0 \end{cases}$$

D'autre part, si  $\rho > 0$ , il vient  $(\nabla\theta \pm \sqrt{\rho}\nabla\rho)^2 = 1$ , qui fait apparaître deux solutions de l'équation eikonale qui coïncident pour  $\rho = 0$ . Ces deux solutions sont

$$\phi_{\pm}(x) = \theta(x) \pm \frac{2}{3}(\rho(x))^{\frac{3}{2}},$$

et bien sûr le système d'équations de transport ci-dessus correspond au système d'équations de transport classique associé à chacune de ces phases, en considérant les symboles  $G_{\pm}(x, k^{\frac{1}{3}}) = g_0(x, k^{\frac{1}{3}}) \pm \sqrt{\rho}\tilde{g}_1(x, k^{\frac{1}{3}})$ .

Ceci se retrouve aisément lorsque la fonction  $V$  (qui est la fonction d'Airy) est développée pour son argument grand.

On construit maintenant  $\theta$  et  $\phi$  au voisinage d'une caustique. Selon Ludwig, chaque point hors de la caustique vit sur un rayon qui a quitté la caustique aussi bien que sur un rayon qui va sur la caustique, cette courbe étant tangente au rayon. On paramètre, en dimension 2, la caustique par une abscisse sur la caustique  $\sigma$  et par la distance tangente à la caustique  $\tau$ . Alors, comme  $u$  est solution de l'équation de Helmholtz et que l'on a

$$u_P(x, k) = a_-(x, k)e^{ik\sigma_-(x) - ik\tau_-(x)} + a_+(x, k)e^{ik\sigma_+(x) + ik\tau_+(x)} = a_-(x, k)e^{ik\psi_-(x)} + a_+(x, k)e^{ik\psi_+(x)}$$

on vérifie que

$$(\nabla\psi_{\pm})^2 = 1$$

Ces phases doivent correspondre à  $\theta \pm \frac{2}{3}\rho^{\frac{3}{2}}$ , ce qui donne  $\theta = \frac{1}{2}(\psi_+ + \psi_-)$  et  $\rho = \frac{3}{4}(\psi_+ - \psi_-)^{\frac{2}{3}}$ . Alors  $\rho$  est constant si  $\tau_+ + \tau_- + \sigma_+ - \sigma_-$  est constant.

Nous avons terminé l'analyse de la caustique faite par Ludwig. Nous présentons maintenant ce qui se passe en relation avec le calcul usuel précédent. Nous représentons la caustique à partir des courbes intégrales sous la forme du théorème 10.3.

### 10.4.4 Calcul au voisinage de la caustique

Nous savons que, si  $\Sigma_0$  est donnée, surface sur laquelle  $\phi$ , solution de l'équation eikonale, est constante égale à  $\phi_0$ , alors on peut définir les courbes caractéristiques  $x(t) = x + t\vec{n}(x)$  pour  $x \in \Sigma_0$ . La variété lagrangienne de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_t$  associée est

$$\Lambda^* = \{(x + t\vec{n}(x), t, \vec{n}(x), -1), x \in \Sigma_0\}.$$

La projection canonique est propre si l'application  $(x, t) \rightarrow (x + t\vec{n}(x), t)$  est une bijection. Ceci impose que son gradient doit non dégénéré, donc que  $Id_{T\Sigma_0} + tW$  soit de déterminant non nul.

On voit ainsi que les points de la caustique tels que nous les avons défini ci-dessus sont des points qui correspondent à la définition de la caustique de ce présent chapitre. Nous supposons que les deux rayons de courbure de la matrice de Weingarten sont distincts. La variété lagrangienne  $\Lambda^*$  est une solution lagrangienne maximale au voisinage de tout point qui n'est pas sur la caustique. Il existe donc une solution lagrangienne maximale  $\Lambda$  telle que  $\Lambda^* \subset \Lambda$ . La singularité de la projection canonique  $\pi$  est de type pli, puisque 0 est, au temps  $t = -\kappa_1^{-1}$ , valeur propre simple. On peut donc appliquer le théorème de représentation 10.3, et il existe une phase  $\phi(x, \theta)$  égale à  $\theta_0(x) + \theta\alpha(x) - \frac{\theta^3}{3} - t$  représentant  $\Lambda$ . La variété  $\Lambda$  est alors

$$\Lambda = \{(x, t, \nabla\theta_0(x) + \nabla_x\alpha\theta), -1, \alpha(x) - \theta^2 = 0\}.$$

Les points de  $\Lambda$  qui ne sont pas propres sont les points où  $\theta = 0$ , c'est-à-dire  $\alpha(x) = 0$  (le Jacobien en  $\theta$  de la phase est  $2\theta$  qui est égal, au point critique, à  $2\sqrt{\alpha}$  lorsque  $\alpha(x) \geq 0$ ). Comme  $\Lambda = \Lambda^*$  au voisinage des points qui n'appartiennent pas à la caustique, on voit que les points de la forme  $(x, t, \nabla\theta_0(x) \pm \sqrt{\alpha(x)}\alpha(x), -1)$  sont des points de la partie lisse de  $\Lambda$ , donc dans  $\Lambda^*$ .

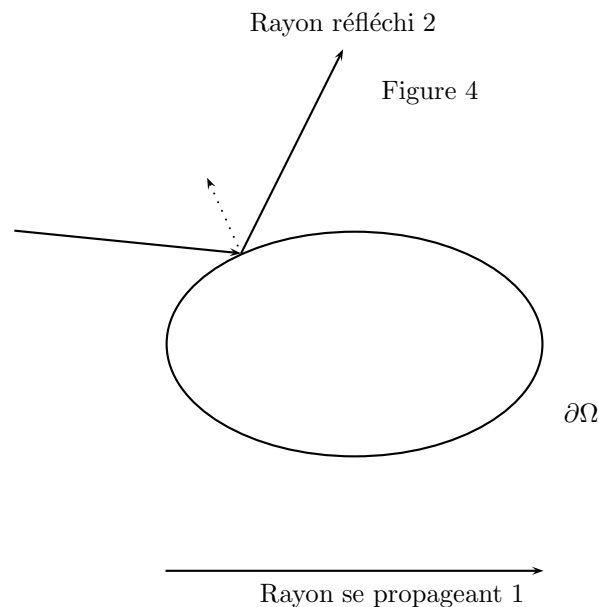
Ceci permet l'introduction de  $\theta$  et  $\rho$  de la section précédente, qui sont évidemment  $\theta_0$  et  $\alpha$ . L'interprétation géométrique est alors celle du paragraphe précédent.

Nous avons ainsi relié la définition intuitive de la caustique (points où le développement asymptotique classique explose) et la définition géométrique de ce chapitre.

# Chapitre 11

## Propagation et réflexion transverse des singularités.

Nous démontrons dans ce chapitre la généralisation des lois de l'optique géométrique, encore appelées lois de Snell-Descartes. Nous voulons comprendre la notion de propagation le long des rayons dans le cas des deux rayons dessinés ci-dessous ; le rayon 1 est le rayon qui se propage et le rayon 2 est le rayon qui se réfléchit.



Les deux résultats que nous généralisons sont les suivants : une onde lumineuse se propage le long de droites, appelées les rayons (exemple le rayon 1), et lorsqu'un rayon rencontre un bord réfléchissant, le rayon se réfléchit (exemple le rayon 2) et l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Le premier résultat fait l'objet du théorème 11.1, alors que le deuxième est démontré dans le théorème 11.2. Nous utilisons ici les opérateurs intégraux de Fourier pour démontrer ces résultats ; il existe d'autres preuves. L'avantage de la démarche employée ici, outre qu'elle permet de donner une autre application des opérateurs intégraux de Fourier et d'utiliser leurs propriétés géométriques, est qu'elle permet de construire une parametrix sortante pour les problèmes hyperboliques d'ordre 2 avec condition au bord. Nous pouvons

ainsi généraliser les lois de Descartes pour n'importe quelle onde incidente et tout bord régulier.

Dans une première partie, nous considérons la propagation d'une onde dans le vide (ou dans un matériau) hors de tout point de caustique. On peut alors démontrer que le problème type considéré est un problème de Cauchy strictement hyperbolique, c'est-à-dire que l'opérateur est non dégénéré sur la variété caractéristique. Notons que ceci n'empêche pas qu'il y ait une caustique; la caustique dépend de la forme de l'onde incidente et est un phénomène non microlocal. D'ailleurs il y a propagation le long des rayons même en présence d'une caustique, comme nous l'avons vu dans la section 4.8.

Nous démontrons le théorème de propagation des singularités (nom traditionnel donné à la propagation le long d'un rayon) dans le cas de l'opérateur de dérivation le long d'une coordonnée (Section 11.2). Nous utilisons ensuite le lemme de Darboux pour ramener tout problème d'ordre 1 à ce problème particulier, utilisant une transformation canonique dans le fibré cotangent (Section 11.3). Nous démontrons enfin le théorème 11.1. Nous utilisons les opérateurs intégraux de Fourier introduits dans le chapitre 9 pour calculer la phase d'une onde réfléchie et le coefficient de réflexion dans le cas de différentes conditions aux limites. L'obtention des coefficients est simplifiée par l'introduction des deux opérateurs intégraux de Fourier paramétrix sortantes du problème.

Nous généralisons ici le résultat obtenu pour l'équation des ondes à coefficients constants dans le chapitre 3, où nous avons calculé la solution de l'équation de Helmholtz connaissant sa valeur sur une surface  $\Sigma_0$ . Nous avons montré que la solution était connue sur des courbes particulières, appelées courbes caractéristiques de l'opérateur de Helmholtz.

Nous avons démontré dans la section 9.3 que les "bons" objets à considérer pour étudier les opérateurs pseudo-différentiels n'étaient pas les courbes caractéristiques mais les courbes bicaractéristiques, flot du champ de Hamilton-Jacobi associé au symbole de l'opérateur pseudo-différentiel. Nous avons vérifié que ces courbes se projetaient sur les courbes caractéristiques pour l'opérateur des ondes.

Nous voulons donc généraliser les résultats de propagation pour un opérateur pseudo-différentiel. Ces résultats de propagation sont vrais dans le cas où l'opérateur différentiel étudié est de Cauchy strictement hyperbolique, ce que nous allons définir. Les opérateurs étudiés dans ce chapitre sont dits de type principal réel :

**Définition 11.1** *On dit que  $p$  est de type principal réel si  $p(y, \eta) \in \mathbb{R}$  pour  $(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$  et  $dp$  et  $\eta dy$  sont deux formes linéaires indépendantes.*

## 11.1 Définition d'un opérateur hyperbolique

Nous avons défini, dans le chapitre 2, un opérateur hyperbolique matriciel dans la définition 2.1, que nous rappelons :

$$L = A_0 \partial_t + \sum_j A_j \partial_{x_j}$$

où les matrices  $A_j$  sont symétriques, et, en plus,  $A_0$  est définie positive.

Dans le cas  $d = 1$ , on trouve que  $L = a_0(x, t) \partial_t + a_1(x, t) \partial_x$ . Il est équivalent à  $\partial_t + \frac{a_1(x, t)}{a_0(x, t)} \partial_x$ , ainsi son symbole est  $l(x, t, \xi, \tau) = i\tau + \frac{a_1(x, t)}{a_0(x, t)} i\xi$ . On vérifie que  $l(x, t, \xi, \tau + \tau_0) = 0$  a uniquement comme racine en  $\tau_0$  le réel  $-\tau - \frac{a_1(x, t)}{a_0(x, t)} \xi$ .

Dans le cas  $d = 2$  à coefficients constants, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 + a_{1,11} \partial_{x_1} u_1 + a_{1,12} \partial_{x_1} u_2 + a_{2,11} \partial_{x_2} u_1 + a_{2,12} \partial_{x_2} u_2 &= 0 \\ \partial_t u_2 + a_{1,12} \partial_{x_1} u_1 + a_{1,22} \partial_{x_1} u_2 + a_{2,12} \partial_{x_2} u_1 + a_{2,22} \partial_{x_2} u_2 &= 0 \end{aligned}$$

Après inversion formelle de  $\partial_t + a_{1,11} \partial_{x_1} + a_{2,11} \partial_{x_2}$ , si besoin par la méthode des caractéristiques, on trouve



$$u_1 = -(\partial_t + a_{1,11}\partial_{x_1} + a_{2,11}\partial_{x_2})^{-1}(a_{1,12}\partial_{x_1}u_2 + a_{2,12}\partial_{x_2}u_2) \text{ d'où}$$

$$\partial_t u_2 - a_{1,12}\partial_{x_1}(\partial_t + a_{1,11}\partial_{x_1} + a_{2,11}\partial_{x_2})^{-1}(a_{1,12}\partial_{x_1}u_2 + a_{2,12}\partial_{x_2}u_2)$$

$$+ a_{1,22}\partial_{x_1}u_2 - a_{2,12}\partial_{x_2}(\partial_t + a_{1,11}\partial_{x_1} + a_{2,11}\partial_{x_2})^{-1}(a_{1,12}\partial_{x_1}u_2 + a_{2,12}\partial_{x_2}u_2) + a_{2,22}\partial_{x_2}u_2 = 0.$$

On obtient ainsi sur  $u_2$  :

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + (a_{1,11} + a_{1,22})\frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x_1} + (a_{2,11} + a_{2,22})\frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x_2} + (a_{1,11}a_{1,22} - (a_{1,12})^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (a_{2,11}a_{2,22} - (a_{2,12})^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$$

$$+ (a_{1,22}a_{2,11} - 2a_{1,12}a_{2,12} + a_{2,22}a_{1,11})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.$$

Le symbole de cet opérateur d'ordre 2 est alors (en changeant le signe)

$$p(\tau, \xi_1, \xi_2) = \tau^2 + (a_{1,11} + a_{1,22})\tau\xi_1 + (a_{2,11} + a_{2,22})\tau\xi_2 + (a_{1,11}a_{1,22} - (a_{1,12})^2)\xi_1^2$$

$$+ (a_{1,22}a_{2,11} - 2a_{1,12}a_{2,12} + a_{2,22}a_{1,11})\xi_1\xi_2 + (a_{2,11}a_{2,22} - (a_{2,12})^2)\xi_2^2.$$

Il s'écrit

$$p(\tau, \xi_1, \xi_2) = (\tau + a_{1,11}\xi_1 + a_{2,11}\xi_2)(\tau + a_{1,22}\xi_1 + a_{2,22}\xi_2)$$

$$- ((a_{1,12})^2\xi_1^2 + 2a_{1,12}a_{2,12}\xi_1\xi_2 + (a_{2,12})^2\xi_2^2)$$

$$= (\tau + a_{1,11}\xi_1 + a_{2,11}\xi_2)(\tau + a_{1,22}\xi_1 + a_{2,22}\xi_2) - (a_{1,12}\xi_1 + a_{2,12}\xi_2)^2.$$

On reconnait ainsi le déterminant de  $\tau Id + A_1\xi_1 + A_2\xi_2$ .

Ceci n'est pas suffisant pour étudier les racines de  $p(\tau + s, \xi_1, \xi_2)$ . Il faut différencier la forme quadratique en  $\tau$  et celle en  $\xi_1, \xi_2$  par exemple. On a donc

$$p(\tau, \xi_1, \xi_2) = \left(\tau + \frac{1}{2}(\text{Tr } A_1\xi_1 + \text{Tr } A_2\xi_2)\right)^2 + \det(\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2) - \frac{1}{4}(\text{Tr } A_1\xi_1 + \text{Tr } A_2\xi_2)^2.$$

La matrice  $\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2$  est symétrique donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont  $\lambda_1(\xi_1, \xi_2)$  et  $\lambda_2(\xi_1, \xi_2)$ . Il vient alors

$$p(\tau, \xi_1, \xi_2) = \left(\tau + \frac{1}{2}(\lambda_1(\xi_1, \xi_2) + \lambda_2(\xi_1, \xi_2))\right)^2 - \frac{1}{4}(\lambda_1(\xi_1, \xi_2) - \lambda_2(\xi_1, \xi_2))^2.$$

On vérifie alors que les racines de  $p(\tau + s, \xi_1, \xi_2) = 0$  sont de la forme

$$s = -\tau - \lambda_1(\xi_1, \xi_2), s = -\tau - \lambda_2(\xi_1, \xi_2).$$

On note qu'elles ne sont pas automatiquement simples, car on peut avoir par exemple  $A_1 = A_2 = Id$ , auquel cas  $\lambda_1 = \lambda_2 = \xi_1 + \xi_2$ . On remarque alors que dans ce cas, les problèmes sur  $u_1$  et sur  $u_2$  sont découplés.

En introduisant une nouvelle variable temps, qui suit en quelque sorte la partie diagonale de  $A_1$  et de  $A_2$ , soit

$$\tau' = \tau + \frac{1}{2}(\lambda_1(\xi_1, \xi_2) + \lambda_2(\xi_1, \xi_2))$$

l'opérateur associé se met sous la forme  $p(\tau', \xi_1, \xi_2) = (\tau')^2 - A(\xi_1, \xi_2)$ , où  $A(\xi_1, \xi_2)$  est le symbole d'un opérateur différentiel elliptique (les coefficients dépendent en effet de  $a_{i,jk}$  uniquement et c'est un polynôme; seule la positivité s'exprime plus facilement avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ) dans le sens où on a  $A(\xi_1, \xi_2) \geq C(\xi_1^2 + \xi_2^2)$ , avec  $C > 0$ .

Les valeurs propres de la matrice  $\tau Id + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2$  sont alors  $\tau + \lambda_1(\xi_1, \xi_2)$ ,  $\tau + \lambda_2(\xi_1, \xi_2)$ . L'hypothèse d'hyperbolicité de la définition 2.1 n'exclut pas les valeurs propres multiples. En revanche, on constate que Lax [58] impose que  $\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2$  a **deux valeurs propres distinctes réelles** (p 628).

La définition 2.1 d'un opérateur hyperbolique matriciel impliquait, dans le cas à coefficients constants, que l'opérateur  $P$  d'ordre  $m$  scalaire déduit de l'opérateur matriciel

$\tau A_0 + \sum_{j=1}^{j=m} \xi_j A_j$  vérifie  $\sigma(P)(x, t, \xi, \tau + s) = 0$  n'a que des solutions réelles. Si, de plus, le problème matriciel associé à  $\tau A_0 + \sum_{j=1}^{j=m} \xi_j A_j$  vérifie la condition restrictive supplémentaire de Lax, alors  $\sigma(P)(x, t, \xi, \tau + s) = 0$  n'a que des solutions réelles de multiplicité 1. Dans tous les cas ci-dessus, on dira que les opérateurs sont hyperboliques par rapport aux surfaces de type temps. Ceci implique deux définitions distinctes :

**Définition 11.2** *On dit que  $P$ , opérateur différentiel d'ordre  $m$  sur  $\mathbb{R}^d$ , est un opérateur hyperbolique par rapport à  $N \in T_x \mathbb{R}^d$  lorsque son symbole principal  $\sigma(P)$  vérifie*

$$\sigma(P)(x, \xi + sN) = 0 \text{ n'a que des racines réelles .}$$

Cette définition provient du chapitre 12.3 de [47]. En particulier un opérateur  $P(D)$  est hyperbolique selon Hörmander lorsque

$$P(\xi + i\tau N) \neq 0 \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^d \text{ et pour } \tau < \tau_0$$

Ceci est équivalent, pour un polynôme homogène, à  $\sigma(P)(x, \xi + \tau N) = 0$  n'a que des racines réelles. (Theorem 12.4.3 et Theorem 12.4.6 de [47], tome II)

On définit aussi une notion d'hyperbolicité stricte :

**Définition 11.3** *On dit que  $P$ , opérateur différentiel d'ordre  $m$  sur  $\mathbb{R}^d$ , est un opérateur strictement hyperbolique par rapport à  $N \in T_x \mathbb{R}^d$  lorsque son symbole principal  $\sigma(P)$  vérifie*

$$\sigma(P)(x, \xi + sN) = 0 \text{ n'a que des racines réelles de multiplicité 1.}$$

qui est la définition 12.4.11 de [47], Tome II.

Dans le cas que nous avons étudié précédemment, les coordonnées sont  $(x, t)$ , les coordonnées duales sont  $(\xi, \tau)$  et le vecteur  $N$  est (colinéaire à)  $(0, 1)$ . Les opérateurs hyperboliques de la définition 2.1 sont les opérateurs hyperboliques par rapport à  $N = (0, 1)$ , vecteur conormal à toute surface  $t = t_0$ .

Les opérateurs hyperboliques sont extrêmement importants. En effet, d'après le théorème 12.5.1 de [47] Tome II, un opérateur hyperbolique admet une seule solution fondamentale supportée dans l'hyper-demi-espace  $x \cdot N \geq 0$ .

## 11.2 Equation eikonale et problème de Cauchy strictement hyperbolique

Dans ce qui suit, on étudie un opérateur  $P$  de type principal réel qui soit strictement hyperbolique par rapport à  $(0, \xi_n)$  (on dit aussi par rapport à  $x_n = 0$ ). On veut étudier les solutions asymptotiques associées à  $P$ , par la même méthode que celle employée dans le chapitre 2 et le chapitre 3. Cette section s'inspire du livre de F. Trèves [95].

L'opérateur est strictement hyperbolique, ce qui implique (comme les racines sont simples) que  $\partial_\xi p(x, \xi) \neq 0$  sur une feuille de la variété caractéristique  $p(x, \xi) = 0$ . On peut ainsi écrire un changement de coordonnées dans  $X$  tel que  $\partial_{\xi_n} p(x, \xi) \neq 0$  sur la feuille considérée. Cette feuille a pour équation  $\xi_n = q(x, \xi')$ , et il existe un symbole  $e(x, \xi)$  (d'ordre  $m - 1$  lorsque  $p$  est d'ordre  $m$ ) tel que

$$p(x, \xi) = e(x, \xi)(\xi_n - q(x, \xi')),$$

Le symbole  $p$  (et l'opérateur associé) est de Cauchy strictement hyperbolique pour la feuille  $\xi_n = q(x, \xi')$  quand il existe  $c$  telle que  $e(x, \xi', q(x, \xi')) \geq c|\xi'|^{m-1}$  pour  $\xi'$  grand.

Nous étudions les bicaractéristiques de  $e(x, \xi)(\xi_n - q(x, \xi'))$ . Nous notons  $p_1(x, \xi) = \xi_n - q(x, \xi')$ . Le point courant sur la bicaractéristique est noté  $\rho(s) = (x(s), \xi(s))$  et on suppose que  $\rho(0)$  appartient à  $\xi_n - q(x, \xi') = 0, \xi' \neq 0$ .

Le système dans  $T^* \mathbb{R}^n$  de courbes bicaractéristiques est

$$\begin{cases} \frac{d\xi_n}{ds} = e(\rho(s)) \frac{\partial q}{\partial x_n}(x(s), \xi'(s)) - \frac{\partial e}{\partial x_n}(x(s), \xi(s)) p_1(\rho(s)) \\ \frac{dx_n}{ds} = e(\rho(s)) + \frac{\partial e}{\partial \xi_n}(\rho(s)) p_1(\rho(s)) \\ \frac{d\xi'}{ds} = e(\rho(s)) \frac{\partial q}{\partial x'}(x(s), \xi'(s)) - \frac{\partial e}{\partial x'}(\rho(s)) p_1(\rho(s)) \\ \frac{dx'}{ds} = -e(\rho(s)) \frac{\partial q}{\partial \xi'}(x(s), \xi'(s)) + \frac{\partial e}{\partial \xi'}(\rho(s)) p_1(\rho(s)). \end{cases} \quad (11.2.1)$$

On vérifie que

$$e(\rho(s)) p_1(\rho(s)) = 0$$

De plus, comme  $\rho(0) \in \{\xi_n - q(x, \xi') = 0\}$ ,  $e(\rho(0)) \neq 0$ . Il existe alors  $s_0 > 0$  vérifiant  $e(\rho(s)) \neq 0$  pour  $s \in [0, s_0]$ . Ceci indique donc que, pour  $s \in [0, s_0]$ ,  $\rho(s)$  est dans la variété  $p_1(\rho(s)) = 0$ .

Pour  $s \in [0, s_0]$ , le système de courbes bicaractéristiques (11.2.1) est équivalent à

$$\begin{cases} \frac{d\xi_n}{ds} = e(\rho(s)) \partial_{x_n} q(x(s), \xi'(s)) \\ \frac{dx_n}{ds} = e(\rho(s)) \\ \frac{d\xi'}{ds} = e(\rho(s)) \partial_{x'} q(x(s), \xi'(s)) \\ \frac{dx'}{ds} = -e(\rho(s)) \partial_{\xi'} q(x(s), \xi'(s)). \end{cases} \quad (11.2.2)$$

En utilisant le changement de variable  $S(s)$  (qui est un difféomorphisme de  $[0, s_0]$  sur  $[0, S(s_0)]$  et dont le difféomorphisme inverse est noté  $s(S)$ ) tel que

$$S'(s) = e(\rho(s)), S(0) = 0$$

on vérifie que (11.2.2) équivaut à

$$\begin{cases} \frac{d\xi_n}{dS} = \partial_{x_n} q(x(s(S)), \xi'(s(S))) \\ \frac{dx_n}{dS} = 1 \\ \frac{d\xi'}{dS} = \partial_{x'} q(x(s), \xi'(s)) \\ \frac{dx'}{dS} = -\partial_{\xi'} q(x(s), \xi'(s)). \end{cases} \quad (11.2.3)$$

Il s'agit du système donnant les courbes bicaractéristiques de l'opérateur pseudo-différentiel de symbole  $p_1$ . Une courbe bicaractéristique de  $p_1$  est une courbe bicaractéristique de  $p$  tant que  $\xi'(s) \neq 0$ . Nous considérons désormais l'opérateur pseudo-différentiel  $P$  de symbole :

$$p(x, \xi) = \xi_n - q(x, \xi')$$

où  $q$  est un symbole homogène de degré 1. Son flot bicaractéristique est donné par (11.2.3). L'équation eikonale associée à cet opérateur pseudodifférentiel est

$$\partial_{x_n} \phi(x', x_n) = q(x_n, x', \partial_{x'} \phi(x_n, x')).$$

On impose aussi la condition initiale sur  $x_n = 0$   $\partial_{x'} \phi(0, x') = \xi'_0(x')$ .

**Lemme 11.1** *Soit  $\phi$  la phase solution de l'équation eikonale  $\partial_{x_n} \phi(x) = q_1(x, \partial_{x'} \phi(x))$ . On donne  $\phi(x', a)$  et  $\partial_{x'} \phi(x', a)$  (c'est-à-dire on impose  $\phi$  sur l'hypersurface  $x_n = a$  et sa dérivée normale sur cette hypersurface). Il existe une fonction  $\Psi$ , déterminée dans un voisinage du point  $(x'_0, a)$  grâce aux courbes intégrales par*

$$\phi(x', x_n) = \phi(x', a) + \int_a^{x_n} q_1(x', u, \xi'(u, x', \Psi(x', u, \partial_{x'} \phi(x', a)), \partial_{x'} \phi(x', a))) du.$$

**Preuve** On considère la bicaractéristique issue du point

$$x'(0) = x', x_n(0) = 0, \xi'(0) = \xi'_0, \xi_n(0) = q(x', 0, \xi'_0(x'))$$

Le paramètre  $s$  sur la bicaractéristique est égal à  $x_n$ . On choisit ce nouveau paramètre comme variable. Le point courant sur la bicaractéristique est noté

$$(x'(s, x', \xi'_0), s, \xi'(s, x', \xi'_0), q(x'(s, x', \xi'_0), s, \xi'(s, x', \xi'_0))).$$

Le résultat de la proposition 10.1 (inclusion d'une bicaractéristique dans une solution lagrangienne si un point de cette bicaractéristique y est) permet d'écrire

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'}(x'(s, x', \xi'_0), s) = \xi'(s, x', \xi'_0).$$

On en déduit ainsi

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x'(s, x', \xi'_0), s) = q(x'(s, x', \xi'_0), s, \xi'(s, x', \xi'_0)) \quad (11.2.4)$$

qui est une équation sur le comportement en  $x_n$  de la phase. On suppose que le voisinage du point considéré est totalement caractéristique, c'est-à-dire que tout point  $(y', x_n)$  est atteignable de manière unique dans ce voisinage.

Il existe donc une fonction  $\Psi(x_n, y', \xi'_0)$  telle que l'équation (où  $x_0$  est l'inconnue)

$$y' = x'(x_n, x'_0, \xi'_0)$$

admette pour solution (localement)

$$x'_0 = \Psi(x_n, y', \xi'_0).$$

La bicaractéristique issue de  $(\Psi(x_n, y', \xi'_0), 0, \xi'_0, q(\Psi(x_n, y', \xi'_0), 0, \xi'_0))$  passe alors par le point  $(y', x_n, \xi'(x_n, \Psi(x_n, y', \xi'_0), \xi'_0), q(y', x_n, \xi'(x_n, \Psi(x_n, y', \xi'_0), \xi'_0)))$ . L'équation (11.2.4) est équivalente à :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_n}(y', x_n) = q(y', x_n, \xi'(x_n, \Psi(x_n, y', \xi'_0), \xi'_0)).$$

On en déduit la solution à partir de  $\phi(y', 0)$ . Ce dernier terme se calcule en remarquant que

$$\partial_{x'} \phi(y', 0) = \xi'(0, \Psi(0, y', \xi'_0), \xi'_0) = \xi'_0.$$

Il suffit alors d'exprimer la relation donnant  $\xi'_0$  en fonction de  $x'$  pour en déduire  $\phi(y', 0)$ . On obtient la relation du lemme 11.1.

### 11.3 Théorème de propagation des singularités

On considère l'opérateur de dérivation dans  $\mathbb{R}^n$  par rapport à la dernière coordonnée. Les coordonnées dans  $\mathbb{R}^n$  sont notées  $(y', y_n)$  et les coordonnées dans  $T^*(\mathbb{R}^n)$  sont notées  $(y', y_n, \xi', \xi_n)$ , et on se donne  $y_n^0 \in \mathbb{R}$ . Soit  $\tilde{u}_0(y')$  une fonction de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ . On note de manière traditionnelle  $D_{y_n}$  l'opérateur  $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y_n}$ , de sorte que le symbole de l'opérateur  $D_{y_n}$  soit  $\xi_n$ . On étudie le problème modèle dans  $\mathbb{R}^n$  suivant :

$$\begin{cases} D_{y_n} \tilde{u}(y) = \tilde{v}(y) \\ \tilde{u}(y', y_n^0) = \tilde{u}_0(y') \end{cases}$$

dont la solution est

$$\tilde{u}(y) = \tilde{u}_0(y') + i \int_{y_n^0}^{y_n} \tilde{v}(y', t) dt$$

Soit  $H$  la fonction de Heaviside, fonction indicatrice de  $\mathbb{R}_+$ . On introduit la distribution  $w(y', y_n) = i\delta(y') \otimes H(y_n)$  et l'opérateur à noyau  $\tilde{E}$  tel que  $\tilde{E}\phi = w \star \phi$ , plus précisément  $\tilde{E}\phi(x) = \langle w, \phi(x - \cdot) \rangle$ . On a l'égalité

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \tilde{E}\tilde{v}.$$

On vérifie aussi que l'opérateur  $\tilde{E}$  est une parametrix de  $D_{y_n}$ . Le front d'onde de  $w$  est

$$WF(w) = \{(0, y_n, \xi', 0), y_n > 0\} \cup \{(0, \xi)\}.$$

On peut vérifier ce fait aisément, en effectuant la transformée de Fourier de cette distribution, au voisinage d'un point tel que  $y' = 0$  (en effet, les points  $y' \neq 0$  ne contribuent pas au front).

Cherchons maintenant le front d'onde du noyau  $K$  associé à l'opérateur  $w\star$ . Comme  $w\star u(x) = \int w(x-y)u(y)dy$ , on a  $K(x, y) = w(x-y)$ .

On considère une fonction  $\chi$  qui localise en  $t$  au voisinage de  $t_0$ , et on se donne  $x_0, y_0$  tels que  $x_0 - y_0 = t_0$ . On localise  $y$  au voisinage de  $y_0$  par l'intermédiaire de  $\phi_0$ ,  $\chi$  et  $\phi_0$  sont à support compact. On en déduit  $WF(K)$  grâce à l'égalité :

$$\mathcal{F}(\phi_0\chi K)(\xi, \eta) = \int \int \chi(t)w(t)e^{-it\xi} dt \int dy\phi_0(y)e^{-iy(\xi+\eta)}.$$

Comme  $\chi$  est à support compact, la distribution  $\chi w$  est d'ordre fini, donc sa transformée de Fourier est à croissance polynômiale au plus.

Tout d'abord, comme  $\phi_0$  est à support compact et  $C^\infty$ , si  $(\xi, \eta)$  appartient à un cône voisinage de  $(\xi_0, \eta_0)$ , avec  $\xi_0 + \eta_0 \neq 0$ , alors l'intégrale en  $y$  est à décroissance rapide en  $(|\xi|^2 + |\eta|^2)^{\frac{1}{2}}$ . Ainsi, avec la croissance polynômiale de l'autre terme, on a décroissance rapide. Les points de la forme  $(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0)$  avec  $\xi_0 + \eta_0 \neq 0$  ne sont pas dans le front d'onde de  $K$ .

On se préoccupe maintenant de  $\xi_0 + \eta_0 = 0$ . Alors, si  $(x_0 - y_0, \xi_0)$  n'est pas dans le front d'onde de  $w$ , le point  $(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0)$  n'est pas dans le front d'onde de  $K$ . On a obtenu

$$WF(K) \subset \{(x, \xi, y, -\xi), (x - y, \xi) \in WF(w)\}.$$

On en déduit

$$WF'(K) \subset \{(x, \xi, y, \xi), (x - y, \xi) \in WF(w)\}.$$

D'autre part, les bicaractéristiques de l'opérateur  $D_{y_n}$ , notées  $\gamma(s) = \exp sH_{\xi_n}(m_0)$ , sont données, pour  $m_0 = (y_0, \xi'_0, 0)$ , par  $\gamma(s) = (y'_0, y_n^0 + s, \xi'_0, 0)$ .

On utilise la remarque de la section 8.2.4, pour obtenir le front d'onde de  $\tilde{E}\tilde{v}$ . La relation  $WF(w\star u) = WF(Ku) \subset WF'(K)(WF(u)) \cup WF'_X(K)$  et le fait que  $WF'_X(K) = \{(x, \xi), \exists y, (x, \xi, y, 0) \in WF'(K)\} = \emptyset$  donne, reprenant les notations de l'égalité donnant  $\tilde{u}$  :

$$WF(\tilde{E}\tilde{v}) \subset WF(\tilde{v}) \cup \{(Y, \xi), \exists(y, \xi) \in WF(\tilde{v}), (Y - y, \xi) \in WF(w)\}.$$

On démontre le théorème de propagation des singularités dans le cas de l'opérateur  $\partial_{x_n}$ .

Soit  $\gamma$  une bicaractéristique de  $\xi_n$ . On suppose que  $\gamma \cap WF(\tilde{v}) = \emptyset$ . L'étude précédente démontre que  $\gamma \cap WF(\tilde{E}\tilde{v}) = \emptyset$ . Il reste à étudier le terme  $\tilde{u}(x', 0)$ . Le front d'onde de  $\tilde{u}_0$  est inclus dans  $T^*(\mathbb{R}^{n-1})$ . Pour caractériser le front d'onde dans  $\mathbb{R}^n$  de  $\tilde{u}(x', 0)$ , on évalue la transformée de Fourier de  $\chi(x_n)\phi_0(x')\tilde{u}(x', 0)$ . On trouve

$$\mathcal{F}(\chi\phi_0\tilde{u}|_{x_n=0})(\xi', \xi_n) = \hat{\chi}(\xi_n)\mathcal{F}(\tilde{u}_0\phi_0)(\xi').$$

Soit  $\xi_n^0 \neq 0$  et  $(\xi_n^0)^2 + ((\xi')^0)^2 = 1$ . On considère  $(\xi_n, \xi')$  dans un (petit) cône autour de  $(\xi_n^0, (\xi')^0)$ . Alors il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $|\xi_n - \lambda\xi_n^0| \leq \epsilon\lambda$  pour tout  $\lambda$ , et comme  $\chi$  est de classe  $C^\infty$ , sa transformée de Fourier est à décroissance rapide en  $\xi_n$  donc en  $\lambda$ . On en déduit que  $(x', \xi', x_n, \xi_n)$ ,  $\xi_n \neq 0$  n'est pas dans le front d'onde de  $\tilde{u}(x', 0)$ . On en tire

$$WF(\tilde{u}(x', 0)) \subset \{(x', \xi', x_n, 0)\}.$$

De plus, si  $(x'_0, (\xi')^0) \in WF(\tilde{u}_0)$ , on obtient facilement  $(x'_0, x_n, (\xi')^0, 0) \in WF(\tilde{u}(x', 0))$  pour tout  $x_n$ . On suppose alors qu'une bicaractéristique rencontre le front d'onde de  $\tilde{u}$  solution de  $D_{x_n} \tilde{u} = \tilde{v}$  mais ne rencontre pas le front d'onde de  $\tilde{v}$ . Ce point d'intersection est noté  $(y'_0, y_n^0, \eta'_0, 0)$  ( $\eta_n = 0$  car la bicaractéristique est incluse dans la variété caractéristique). Ainsi, comme  $E\tilde{v}$  est régulier, on en déduit que  $(y'_0, \eta'_0)$  est dans le front d'onde de  $\tilde{u}_0$ , et le front d'onde de  $\tilde{u}(x', 0)$  contient alors tous les points de la forme  $(y'_0, y_n, \eta'_0, 0)$ . La bicaractéristique issue de  $(y'_0, y_n^0, \eta'_0, 0)$  est  $\{(y'_0, y_n^0 + s, \eta'_0, 0), s \in \mathbb{R}\}$ , donc elle est entièrement contenue dans le front d'onde de  $\tilde{u}$ . La démonstration est terminée et on a donc, soit  $\gamma \cap WF(\tilde{u}) = \emptyset$ , soit  $\gamma \subset WF(\tilde{u})$ .

On considère désormais le point  $\gamma(s_0) = (y'_0, y_n(s_0), \xi'_0, 0)$  et on étudie  $\tilde{U}(y) = -\tilde{u}(y', 2y_n(s_0) - y_n)$ . Alors  $D_{y_n} \tilde{U}(y) = \tilde{v}(y', 2y_n(s_0) - y_n) = \tilde{V}(y)$ . On vérifie que  $\gamma \cap WF(\tilde{V}) = \emptyset$  et que  $\gamma(s_0) \in WF(\tilde{U})$ . Donc  $\gamma(s), s \geq s_0$  est contenue dans  $WF(\tilde{U})$ , ce qui équivaut à  $\gamma(s), s \leq s_0$  contenue dans  $WF(\tilde{u})$ .

Nous avons donc montré le résultat :

**Lemme 11.2** *Soit  $\gamma$  une bicaractéristique de  $D_{y_n}$ .*

$$\gamma \cap WF(D_{y_n} \tilde{u}) = \emptyset \Rightarrow \gamma \cap WF(\tilde{u}) = \emptyset \quad \text{ou} \quad \gamma \subset WF(\tilde{u}).$$

On considère, plus généralement, un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 1 ( $\in L^1_{cl}$ ). La généralisation du lemme 11.2 est le théorème :

**Théorème 11.1** *Soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel classique de degré 1, dont le symbole principal  $p$  est de type principal réel. Alors*

$$\gamma_p(\rho_0) \cap WF(Pu) = \emptyset \rightarrow \gamma_p(\rho_0) \cap WF(u) = \emptyset \quad \text{ou} \quad \gamma_p(\rho_0) \subset WF(u).$$

Par abus de langage, et par similitude avec le problème de Cauchy strictement hyperbolique, j'appelle ce théorème le théorème de propagation des singularités hyperboliques. En effet, l'opérateur  $\xi_n - e(x, \xi')$ , où  $e$  est homogène en  $\xi'$  de degré 1, vérifie  $dp = d\xi_n - \frac{\partial e}{\partial x} dx - \frac{\partial e}{\partial \xi'} d\xi'$ , et le coefficient 1 devant  $d\xi_n$  implique que  $p$  est de type principal réel. Ce résultat est le théorème 6.1.4 de l'article de Duistermaat et Hörmander [31]. Lorsque  $(x_0, \xi_0)$  est un point de la variété caractéristique de  $p$ , opérateur de type principal réel, les auteurs construisent un opérateur intégral de Fourier  $A$  tel que le point  $(x_0, \xi_0; X_0, \Sigma_0)$  ne soit pas dans le front d'onde d'opérateur de  $PA - AD_{X_n}$ .

Nous reprenons une démonstration explicite pour un opérateur homogène de degré 1. Pour cela, considérons  $\eta_n = p(x, \xi)$ . Comme l'opérateur est de type principal réel,  $dp$  est non nul et  $dp$  est indépendant de  $\xi dx$ . On peut alors compléter la seule coordonnée  $\eta_n$  en un système de coordonnées symplectique sur  $T^*X$ , soit  $(y, \eta)$ , ceci grâce au lemme de Darboux 9.3 démontré dans la section 9.3. Ce système de coordonnées symplectiques est associé à une transformation canonique  $\chi$  permettant de passer de  $(y, \eta)$  à  $(x, \xi)$ . Il existe alors deux opérateurs de Fourier intégraux  $A$  et  $B$  quantifiant la transformation canonique tels que  $BA = Id + R_1, AB = Id + R_2, R_{1,2} \in S^{-\infty}$  tels que le symbole principal de l'opérateur  $Q = BPA$  soit  $\eta_n$ . Ce symbole principal est le symbole de l'opérateur  $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y_n}$ , traditionnellement noté  $D_{y_n}$ . Il existe donc un opérateur  $R$  d'ordre 0 tel que  $Q = D_{y_n} + R$ . À partir de  $R$ , on construit un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre 0 ( $|C(y, \eta)| \geq c > 0$  pour  $(y, \eta)$  dans un voisinage du point  $\chi(x_0, \xi_0)$ ) tel que  $(D_{y_n} + R)C = CD_{y_n}$ . Le symbole de cet opérateur est solution des équations

$$\begin{cases} C_0(y', \eta, y_n^0) = 1 \\ C_p(y', \eta, y_n^0) = 0 \\ \partial_{y_n} C_p(y, \eta) = i(RC)_p(y, \eta) \end{cases}$$

équivalentes à  $C = 1$  sur  $y_n = y_n^0$  et  $[D_{y_n}, C] + RC = 0$ .

Comme  $C$  est elliptique, il admet un inverse  $C^{-1}$  tel que  $CC^{-1} = Id + R_3$ ,  $C^{-1}C = Id + R_4$ . Alors il existe un opérateur  $R_5$  de  $L^{-\infty}$  tel que

$$C^{-1}BPAC = D_{y_n} + R_5. \quad (11.3.5)$$

On a construit une parametrix  $\tilde{E}$  de  $D_{y_n}$ , telle que

$$Id = \tilde{E}D_{y_n} = \tilde{E}C^{-1}BPAC + R_6$$

ce qui implique

$$(AC)^{-1} + R_7 = \tilde{E}C^{-1}BP$$

ou encore

$$AC\tilde{E}C^{-1}BP = Id + R_8$$

Une parametrix de  $P$  est alors  $AC\tilde{E}C^{-1}B$ , et on peut aussi, modulo des termes  $S^{-\infty}$ , écrire

$$P = ACD_{y_n}C^{-1}B.$$

Soit  $\gamma_p(\rho_0)$  la bicaractéristique de  $P$  issue de  $\rho_0$ . On suppose que la bicaractéristique n'est pas dans le front d'onde de  $Pu$

$$\gamma_p(\rho_0) \cap WF(Pu) = \emptyset \Rightarrow \gamma_p(\rho_0) \cap WF(ACD_{y_n}C^{-1}Bu) = \emptyset.$$

Les bicaractéristiques sont transportées par transformation canonique. Ce résultat dans le cas d'une transformation symplectique associée à un changement de variable dans l'espace des  $x$  provient de la Proposition 9.3. La généralisation à une transformation générale est une conséquence du théorème 9.1 et de l'invariance du symbole principal après transformation canonique :  $p_m(y, \nabla_y \phi) = p_m(\nabla_\theta \phi, \theta)$  (relation (9.4.9)). On obtient  $\chi(\gamma_p(\rho_0)) \cap WF(CD_{y_n}C^{-1}(Bu)) = \emptyset$ . Or  $\chi(\gamma_p(\rho_0)) = \gamma_{\xi_n}(\chi(\rho_0))$ , et, comme  $C$  est elliptique ainsi que  $C^{-1}$ ,  $WF(CD_{y_n}C^{-1}(Bu)) = WF(D_{y_n}(Bu))$  (application de la proposition 8.7).

On a donc  $\gamma_{\xi_n}(\chi(\rho)) \cap WF(D_{y_n}Bu) = \emptyset$ . Par application du lemme 11.2,  $\gamma_{\xi_n}(\chi(\rho)) \cap WF(Bu) = \emptyset$  ou  $\gamma_{\xi_n}(\chi(\rho)) \subset WF(Bu)$ .

La transformation canonique transporte le front d'onde (dans le cas d'une transformation symplectique, il s'agit d'un résultat de la Proposition 9.3). Si  $B$  est une quantification de cette transformation canonique,  $WF(Bu) = \chi(WF(u))$ . En effet, de la relation du paragraphe 9.4.1  $WF(Au) \subset \{(x, \nabla_x \phi), (\nabla_\eta \phi, \eta) \in WF(u)\}$ . On a donc l'inclusion  $WF(Au) \subset T_\chi(WF(u))$  et on en déduit  $WF(BAu) \subset T_\chi^{-1}(WF(Au))$ . D'autre part,  $BA = I + R_2$  donc  $WF(BAu) = WF(u)$ , et on a l'égalité cherchée. On en déduit

$$\gamma_p(\rho_0) \subset WF(u) \quad \text{ou} \quad \gamma_p(\rho_0) \cap WF(u) = \emptyset.$$

Nous avons achevé la démonstration pour l'opérateur de symbole  $p(x, \xi)$  homogène de degré 1.

Lorsque  $p$ , d'ordre  $m$ , est de type principal réel, au voisinage d'un point  $\rho$  strictement hyperbolique, il existe un opérateur  $E$  elliptique (au voisinage du point  $\rho$ ) tel que  $P = EP_1 + R$ ,  $E$  elliptique et  $P_1$  d'ordre 1. Le front d'onde de  $Pu$  au voisinage de  $\rho$ ,  $WF(Pu)$  est égal à  $WF(P_1u)$  dans ce voisinage (conséquence de la proposition 8.7). Les bicaractéristiques de  $P$  sont les mêmes que les bicaractéristiques de  $P_1$  (voir la section 11.2), donc

$$\gamma_p(\rho_0) \cap WF(Pu) = \emptyset \Rightarrow \gamma_{p_1}(\rho_0) \cap WF(P_1u) = \emptyset.$$

On utilise alors

$$\gamma_{p_1}(\rho_0) \cap WF(P_1u) = \emptyset \Rightarrow \gamma_{p_1}(\rho_0) \cap WF(u) = \emptyset \quad \text{ou} \quad \gamma_{p_1}(\rho_0) \subset WF(u).$$

On a ainsi prouvé le théorème 11.1. Duistermaat et Hörmander l'énoncent (Théorème 6.1.1 de [31]) de la manière suivante : *Si  $P \in L_{cl}^m(X)$  est proprement supporté, de type principal réel*

et si  $u \in \mathcal{D}'(X)$  et  $Pu = f$ , alors  $WF(u) - WF(f) \subset p^{-1}(0)$  et cet ensemble est invariant par  $H_p$ .

Le but des sections suivantes est de généraliser ce théorème de propagation des singularités par le flot hamiltonien au cas avec bord, c'est-à-dire au cas où la bicaractéristique considérée rencontre le bord du domaine (le problème  $Pu = 0$  est résolu dans  $M$ , typiquement  $x_n > 0$ ). On se restreint au cas de l'application qui nous intéresse : l'équation des ondes.

## 11.4 Problèmes au bord pour l'équation des ondes.

Nous étudions dans cette section des problèmes au bord. Le problème type que nous allons étudier est le suivant :

Soit  $P$  un opérateur d'ordre 2 défini sur  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On veut résoudre, localement au voisinage du bord, le problème  $(P - \partial_t^2)u = 0$  dans le complémentaire de  $\Omega \times \mathbb{R}_t$ , et une condition aux limites sur le bord  $\partial\Omega \times \mathbb{R}_t$ , qui peut être soit

- la condition de Dirichlet (D)  $u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t} = 0$ ,
- la condition de Neumann (N)  $\partial_n u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t} = 0$  (ceci dans le cas où  $u \in H_{loc}^1((\mathbb{R}^d - \Omega) \times \mathbb{R}_t) \cap \{Pu \in L^2\}$ , puisque l'on peut alors définir la dérivée normale),
- la condition mixte (M)  $\partial_n u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t} + z(x, t)\partial_t u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t} = 0$ .

On donne aussi les deux conditions de Cauchy, qui peuvent s'écrire  $u|_{t < 0} = u_i|_{t < 0}$  qui, lorsque  $u \in C^1([-T, T], H^1)$ , conduisent à  $u|_{t=0}$  et  $\partial_t u|_{t=0}$ .

On suppose que, localement au voisinage de  $y_0$ , ce bord peut être redressé, c'est à dire qu'il existe un système de coordonnées  $(x)$  dans lequel le bord est  $x_n = 0$ . Nous nous y ramènerons pour le problème de la diffraction par un ouvert convexe pour l'opérateur des ondes. Nous commençons par montrer la formule des sauts, qui permet de connaître la solution d'un problème dans un ouvert extérieur en fonction des traces sur le bord. Il s'agit d'une généralisation de la formule de Green et des potentiels de simple et double couche. Nous appliquons ce résultat, énoncé pour un opérateur différentiel d'ordre  $m$ , à l'opérateur Laplacien, d'ordre 2. Notons tout de suite, sans démonstration, qu'il n'y a pas redondance entre la condition de Cauchy et la condition au bord.

### 11.4.1 Formule des sauts et front d'onde au bord

On se donne un opérateur différentiel d'ordre  $m$ , sous la forme  $P = \sum_{j=0}^{j=m} P_j(x_n, x', D_{x'}) (D_{x_n})^j$ . On définit une distribution prolongeable, et une solution prolongeable.

**Définition 11.4** • Soit  $V \subset \mathbb{R}^n$ , et  $S$  une hypersurface lisse d'équation  $s = 0$ . On définit, au voisinage d'un point tel que  $\nabla_x s \neq 0$ , les deux ouverts  $V_{\pm} = \{x \in V, \pm s(x) > 0\}$ . On peut aussi définir  $\tilde{V}_+ = \{x \in V, s(x) \geq 0\}$ . L'ensemble  $\tilde{V}_+$  est la variété à bord considérée ici. On dit que  $u$  est une distribution prolongeable de  $V_+$ , et on note  $u \in \mathcal{D}'(\tilde{V}_+)$ , lorsque il existe  $\tilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  telle que

$$\forall \phi \in C_0^\infty(V_+), \langle u, \phi \rangle = \langle \tilde{u}, \phi \rangle .$$

L'espace des distributions prolongeables est ainsi l'espace dual de  $C_0^\infty(V_+)$ , espace des fonctions test  $C^\infty$  à support compact s'annulant à tout ordre sur  $\partial V_+$  (voir Melrose [74]).

Comme  $\nabla_x s \neq 0$ , on choisit une coordonnée  $x_j$  telle que  $\frac{\partial s}{\partial x_j}(x_0) \neq 0$ . On réordonne les coordonnées de sorte que  $j$  devienne  $n$ . Soit  $V$  un voisinage de  $x_0$  où  $|\frac{\partial s}{\partial x_n}(x)| \geq \frac{1}{2} |\frac{\partial s}{\partial x_n}(x_0)|$ . Par le théorème des fonctions implicites,  $s = 0$  équivaut à  $x_n = \psi(x')$ ,  $\psi$  étant une fonction de classe  $C^\infty$  dans  $V$ , et  $s > 0$  équivaut à  $\frac{\partial s}{\partial x_n}(x_0)(x_n - \psi(x')) > 0$ . On choisit alors  $X_n = \frac{\partial s}{\partial x_n}(x_0)(x_n - \psi(x'))$ . l'application  $(x', x_n) \rightarrow (x', X_n)$  est un difféomorphisme de  $V$  sur son image, et  $V_{\pm} = \{\pm X_n > 0\}$ .

On s'est donc ramené à  $s(x) = x_n$ . On se place désormais dans cette situation.



**Proposition 11.1** Soit  $u$  une distribution prolongeable de  $\mathcal{D}'(V_+)$  telle que  $Pu = 0$  dans  $V_+$ . On suppose

$$p(x_0, 0, 0, \dots, 1) \neq 0.$$

Il existe une unique distribution  $\underline{u}$ , prolongeant  $u$  par 0 dans  $V_-$ , telle que  $x_n^m P\underline{u} = 0$ .

**Remarque** Le fait de prolonger  $u$  par 0 ne définit pas de manière unique une prolongée. En effet, soit  $u_1$  et  $u_2$  deux distributions telles que

$$u = u_1 = u_2 \text{ dans } \mathcal{D}'(V_+), 0 = u_1 = u_2 \text{ dans } \mathcal{D}'(V_-).$$

Alors  $u_1 - u_2$  est supportée par  $x_n = 0$ , donc sur un compact de  $x_n = 0$ , il existe  $M \in \mathbb{N}$  et  $M+1$  distributions  $a_j$  de  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n-1})$  telles que  $u_1 - u_2 = \sum_{j=0}^M a_j \otimes \delta_{x_n}^{(j)}$ . Cette idée est utilisée dans la preuve de la proposition 11.1. En particulier, si  $D = \delta_{x_n=0}$  est la distribution de Dirac sur  $x_n = 0$ , définie par  $\langle D, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \phi(x', 0) dx'$ , on voit que pour  $\phi \in C_0^\infty(V_+)$ ,  $\langle D, \phi \rangle = \langle 0, \phi \rangle$  pourtant  $D \neq 0$ . En revanche, on définit l'espace  $C_{(0)}^\infty(V_+)$  comme étant l'espace des restrictions à  $V_+$  de fonctions de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , alors, pour  $\phi_{test}(x', x_n) = \chi(x_n)\chi(x_1)\dots\chi(x_{n-1})$ ,  $\chi$  étant une fonction positive d'intégrale 1, on a  $\langle D, \phi_{test} \rangle = \chi(0) \neq \langle 0, \phi_{test} \rangle$ .

Soit  $x_0$  un point de  $\partial V$  et  $U$  un compact contenant un ouvert  $W$  contenant  $x_0$ . On restreint maintenant toutes les distributions à  $W$ . Ainsi  $\tilde{u}$ , prolongeant  $u$ , est à support compact donc d'ordre fini. On prend dans cette analyse un prolongement quelconque de  $u$ . Il existe ainsi  $M > 0$  tel que

$$(1 - \Delta)^{-M} \tilde{u}(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \frac{\hat{u}(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^M} d\xi$$

est continue sur  $\mathbb{R}^n$ . On définit alors

$$\check{u}(x) = (1 - \Delta)^M [1_{x_n \geq 0} (1 - \Delta)^{-M} \tilde{u}(x)]$$

Cette distribution vérifie  $\check{u}(x) = 0, x_n < 0$ ,  $\check{u}(x) = u(x), x_n > 0$ . De plus,  $P\check{u} = 0$  pour  $x_n \neq 0$ , car  $u$  est solution de  $p$ . La distribution  $P\check{u}$  est d'ordre fini, ainsi il existe des  $a_j$ ,  $0 \leq j \leq j_0$ ,  $a_j(x') \in \mathcal{D}'_{j_0}(|x'| < r)$  telles que

$$P\check{u} = \sum_{j=0}^{j_0} a_j \otimes \delta_{x_n=0}^j.$$

Soit  $\mathcal{D}'_S$  l'espace des distributions à support dans  $S = \partial V_+ = \{x_n = 0\}$ ,  $\mathcal{D}'_{S,l}$  le sous espace des distributions de  $l$ -couche à coefficients sur  $S$ , de la forme  $a_l \otimes \delta_{x_n=0}^l$  (distribution définie, pour  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , la restriction  $\partial_{x_n}^l \phi(x', 0) = \psi_l(x')$ ,  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ , par  $\langle a_l \otimes \delta_{x_n=0}^l, \phi \rangle = (-1)^l \langle a_l, \psi_l \rangle$ , dualité des distributions dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$ ). Comme  $P$  est un opérateur différentiel

$$b \rightarrow P(b)$$

définit une application  $T$  de  $\mathcal{D}'_S$ . Cette application est injective. De plus on vérifie que, pour tout  $a \in \mathcal{D}'_S$ , il existe un  $b \in \mathcal{D}'_{S,m-1}$ .

On le prouve de manière explicite. Soit  $P = \sum p_{j\alpha}(x) \partial_{x'}^\alpha \partial_{x_n}^j$ . On écrit  $b = \sum_{j=0}^{j_0} b_j(x') \otimes \delta_{x_n=0}^j$ , ainsi

$$\begin{aligned} \langle P(b), \phi \rangle &= \sum_{j+|\alpha| \leq m, l \leq j_0} (-1)^{j+|\alpha|} \langle b_l \otimes \delta_{x_n=0}^l, \partial_{x'}^\alpha \partial_{x_n}^j [p_{j,\alpha}(x) \phi(x)] \rangle \\ &= \sum_{j+|\alpha| \leq m, l \leq j_0} (1 - |\alpha| + j + l) \langle b_l, \partial_{x'}^\alpha \partial_{x_n}^{j+l} [p_{j,\alpha}(x) \phi(x)]|_{x_n=0} \rangle \end{aligned}$$

Après application de la formule de Leibniz pour le terme de dérivée en  $x_n$ , il reste

$$T(b) = \sum_{p=0}^{p=m+j_0} \sum_{j+l \geq p} (-1)^{j+l-p} C_{j+l}^p \partial_{x_n}^{j+l-p} p_{j,\alpha}(x', 0) \partial_{x'}^\alpha b_l \otimes \delta_{x_n=0}^p.$$

On vérifie que, pour  $p = m + j_0$ , le coefficient est obtenu en prenant  $j = m, l = j_0$ , ce qui donne  $p_{m,0}(x', 0)b_{j_0}(x')$ . Le coefficient  $p_{m,0}$  est égal à 1, donc le terme d'ordre  $m + j_0$  de  $T(b)$  est égal au terme d'ordre  $j_0$  de  $b$ . De même, le terme d'ordre  $m + j_0 - 1$  est  $b_{j_0-1} + \sum_{|\alpha|=1} p_{m-1,\alpha} \partial_{x'}^\alpha b_{j_0} + p_{m-1,0}(x', 0)b_{j_0} - \partial_{x_n} p_{m,0}(x', 0)C_{m+j_0}^1 b_{j_0}$ . Ainsi le terme d'ordre  $m + j_0 - q$  comprendra le terme  $b_{j_0-q}$  avec pour coefficient 1, et tous les termes  $b_{j_0-q'}$  pour  $q' \leq q$ .

Lorsque  $a$  est donné, d'ordre  $r \geq m$ , on peut construire une suite de distributions  $b_j, j \leq r - m$ , telles que  $T(b) = a$ . En effet,  $b_{r-m} = a_r$ , et on construit  $b_{q-m}$  avec les  $b_{q'-m}$  pour  $q' \geq q$ .

On revient à  $P(\tilde{u})$ . Il existe  $b$  telle que  $T(b) - P(\tilde{u}) \in \mathcal{D}'_{S,m-1}$ , et  $b$  est unique. On en déduit alors que  $x_n^m [T(b) - P(\tilde{u})] = 0$  en comparant les ordres.

On note  $\underline{u} = \tilde{u} - b$ . C'est une réponse au problème. Si il y a deux réponses, on vérifie  $\underline{u}_1 - \underline{u}_2 \in \mathcal{D}'_S$  et  $T(b) \in \mathcal{D}'_{S,m-1}$ . Ceci implique  $b = 0$  par étude de l'ordre de  $T(b)$ . Le prolongement est donc unique. Lorsque  $P$  est un opérateur différentiel d'ordre 2, on a le résultat suivant

**Lemme 11.3** *Soit  $u$  est une distribution prolongeable solution de  $Pu = 0$  dans  $V_+$ . Soit  $\underline{u}$  sa prolongée unique au sens de la proposition 11.1. Il existe deux distributions  $g_0(u)$  et  $g_1(u)$  de  $\mathcal{D}'_S$ , telles que*

$$P\underline{u} = g_0(u) \otimes \delta_{x_n=0} + g_1(u) \otimes \delta'_{x_n=0}.$$

*Cette formule s'appelle la formule des sauts à l'ordre 2.*

Pour cela, on rappelle qu'il existe un unique  $\underline{u}$ , prolongement canonique de  $u, \underline{u} \in \mathcal{D}'(V)$ ,  $\underline{u}|_{V_+} = u, \underline{u}|_{V_-} = 0, x_n^2 P\underline{u} = 0$ . En écrivant  $P\underline{u} = \sum_{j=0}^{j=m} b_j \otimes \delta_{x_n}^j$ , puisque  $P\underline{u}$  est supportée par  $x_n = 0$  et est à support compact, on vérifie que, pour  $j \geq 2, x_n^2 b_j \otimes \delta_{x_n}^j = j(j-1)b_j \otimes \delta_{x_n}^{j-2}$ , ainsi  $b_j = 0$  pour  $j \geq 2$ . On note la distribution  $b_0, g_0(u)$  et la distribution  $b_1, g_1(u)$ .

On définit enfin le front d'onde jusqu'au bord, que l'on note  $WF_b(u)$  pour une distribution prolongeable  $u$ . Il y a plusieurs définitions équivalentes, voir Hörmander [47], [74], Melrose-Sjöstrand [76]. Pour cela, on considère l'injection canonique  $i$  de  $C_0^\infty(V_+)$  dans  $C_{(0)}^\infty(V_+)$ , associée à la surjection duale  $i^*$  de  $\mathcal{D}'(V_+)$  sur  $\mathcal{D}'(\tilde{V}_+)$ . Les distributions régulières jusqu'au bord  $\mathcal{D}'_{\partial}(\tilde{V}_+)$  sont les distributions  $u$  telles que  $u \in C^\infty([0, \varepsilon], \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}))$ . Il est équivalent de dire qu'il existe  $A(x', D_{x'}) \in L^0(\mathbb{R}^{n-1})$  à support compact tel que  $A(x', D_{x'})u(x', x_n) \in C^\infty([0, \varepsilon] \times \mathbb{R}^{n-1})$ . Le fibré conormal à  $\partial V_+$ , noté  $N(\partial V_+)$ , est par définition  $\{(x', 0, 0, \xi_n), \xi_n \neq 0\}$ . On note alors  $B\tilde{V}_+ = T^*\tilde{V}_+/N(\partial V_+)$ , qui est un espace topologique dont la section nulle est bien définie et notée  $\{0\}$ . Cet espace se projette naturellement sur  $T^*(V_+) \times T^*(\partial V_+)$  (l'intérieur se projette sur l'intérieur et un point de  $T^*(\partial V_+)$  s'écrit  $(x', \xi')$ , auquel on associe la classe d'équivalence de  $(x', 0, \xi', 0)$  dans  $B\tilde{V}_+$ ). La projection canonique de  $T^*\tilde{V}_+$  dans  $T^*\tilde{V}_+/N(\partial V_+)$  est notée  $b$ .

La définition du front d'onde au bord donnée par R. Melrose dans [74] est la suivante

**Définition 11.5** *Soit  $u$  une distribution prolongeable. Le front d'onde au bord  $WF_b(u) \subset B\tilde{V}_+$  est*

$$WF_b(u) = \left\{ \begin{array}{l} \rho \in T^*(\tilde{V}_+), \rho \in WF(i^*u) = WF(u|_{V_+}) \} \cup \\ \left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \in T^*(\partial V_+)\{0\}, \text{ pour tout voisinage } \Gamma \text{ conique de } \rho_0, \text{ il existe} \\ \rho = (x', 0, \xi', \xi_n) \text{ tel que } (x', \xi') \in \Gamma \text{ et } \rho \in WF(\underline{u}) \end{array} \right\}. \end{array} \right.$$

La deuxième partie (partie de  $WF_b(u)$  contenue dans  $T^*(\partial V_+)$ ) s'obtient de la manière suivante, comme indiqué par Melrose et Sjöstrand [76] :

**Définition 11.6** *Si  $\rho \in T^*\partial V_+ - \{0\}$ , alors  $\rho \notin WF_b(u)$  si et seulement si  $u$  est régulière jusqu'au bord comme défini ci-dessus.*

Il existe aussi une définition faisant appel aux variétés caractéristiques d'opérateurs, analogue à la définition du front d'onde usuel :

$$WF(u) = \cap \text{Car} B, B u \in C^\infty. \quad (11.4.6)$$

Cette définition est plus technique et fait intervenir les distributions conormales par rapport au bord  $\partial X$  de la variété  $X$ . Le lecteur qui veut plus de détails se reportera utilement à Hörmander [47], Tome III, Définition 18.2.6 pour  $I^m(X, \partial X, T^*X)$ , (183.328) pour définir  $\mathcal{A}(X)$ , distributions conormales par rapport à  $\partial X$ , Définition 18.3.18 pour définir  $\Psi_b^0(X)$ , opérateurs localement de symbole  $a(x, \xi', x_n \xi_n)$ ,  $\partial X$  étant  $x_n = 0$ , et dans ces notations  $WF_b(u) = \cap \text{Char} B, B \in \Psi_b^0(X), B u \in \mathcal{A}(X)$ .

Pour un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients de classe  $C^\infty$ , on démontre (voir par exemple G. Lebeau [66] dans le cas analytique) :

**Proposition 11.2** *Soit  $u$  une solution de  $Pu = 0$  dans  $x_n > 0$ . On note  $U$  sa prolongée canonique, comme obtenue dans la proposition 11.1. On a l'égalité  $WF_b(u) = b(WF(U))$ .*

On donne deux résultats permettant de comprendre un peu mieux le front d'onde au bord. Le premier concerne le front d'onde au bord d'une distribution de couche (Lemme 11.4, dû à Hörmander). Le deuxième permet de relier en partie le front d'onde au bord de  $u$  et le front d'onde des traces de  $u$  sur  $x_n = 0$  (quand on peut les définir, par exemple pour  $u \in H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(x_n > 0)$ ) lorsque  $u$  est solution dans  $x_n > 0$  de  $Pu = 0$  [47]

**Lemme 11.4**

$$WF\left(\sum_{j=0}^{j=m-1} a_j(x') \otimes \delta_{x_n}^j\right) = \cup WF(a_j) \times T^*S.$$

**Preuve** On considère un point  $(x'_0, x_n^0, \xi'_0, \xi_n^0)$ . Au voisinage d'un point où  $x_n^0 \neq 0$ , la distribution est nulle, donc le front est inclus dans  $x_n^0 = 0$ . D'autre part, on considère  $(x'_0, 0, \xi'_0, \xi_n^0)$  et on localise en  $x'$  au voisinage de  $x'_0$ . Après transformée de Fourier, on trouve

$$\chi \hat{a}_j(\xi') (i\xi_n)^j.$$

Si le point  $(x'_0, \xi'_0)$  n'est pas dans le front d'onde de  $a_j$ , alors  $\chi \hat{a}_j(\xi')$  est à décroissance rapide dans un voisinage conique de  $\xi'_0$ . On multiplie par un polynôme, donc le résultat est à décroissance rapide, grâce à l'égalité  $(\lambda = (\xi_n^2 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}})$

$$\hat{a}_j(\xi') \xi_n^j = \lambda^j \hat{a}_j\left(\lambda \frac{\xi'}{(|\xi'|^2 + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \left(\frac{\xi_n}{(|\xi'|^2 + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^j.$$

On note  $(\eta'_0, \eta_n^0) = \frac{1}{((\xi_n^0)^2 + |\xi'_0|^2)^{\frac{1}{2}}} (\xi'_0, \xi_n^0)$ . Alors on sait que, pour  $(\xi', \xi_n)$  dans un voisinage conique de  $(\xi'_0, \xi_n^0)$ ,  $\frac{\xi'}{(|\xi'|^2 + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}}}$  est dans un voisinage conique de  $\xi'_0$  (puisque'un voisinage conique de  $\eta'_0$  est un voisinage conique de  $\xi'_0$ ) et donc  $\hat{a}_j\left(\lambda \frac{\xi'}{(|\xi'|^2 + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$  est à décroissance rapide en  $\lambda$ , ce qui fait que  $\lambda^j \hat{a}_j\left(\lambda \frac{\xi'}{(|\xi'|^2 + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$  est à décroissance rapide en  $\lambda$ .

Ceci démontre que  $WF(a_j \otimes \delta_{x_n}^{(j)}) \subset WF(a_j) \times \{0\} \times \mathbb{R}^*$ .

Réciproquement, soit  $(x'_0, 0, \xi'_0, \xi_n^0) \notin WF(a_j \otimes \delta_{x_n}^{(j)})$ . Alors  $\hat{a}_j(\xi') \xi_n^j$  est à décroissance rapide dans le cône donné par  $(\xi'_0, \xi_n^0)$ . On en déduit que, pour tout  $N$ , il existe  $C_{N+j}$  tel que l'on ait l'inégalité de décroissance rapide pour la puissance  $N+j$ . On utilise l'homogénéité de  $\xi_n^j$  pour obtenir

$$|\hat{a}_j(\lambda \eta') \eta_n^j| \leq C_{N+j} \lambda^{-N}.$$

Lorsque  $\eta_n^0 \neq 0$ , on voit que cela implique la décroissance rapide de  $\hat{a}_j$  dans le cône engendré par  $\eta'_0$ , donc  $\xi'_0$ , et donc le point  $(x'_0, \xi'_0)$  n'est pas dans le front d'onde de  $a_j$ .

Lorsque  $\eta_n^0 = 0$ , on choisit un point **fixe**  $\eta_n = \frac{\varepsilon}{2}$ , et on a  $(x'_0, \xi'_0)$  hors du front d'onde de  $a_j$ .

Ainsi  $WF(a_j \otimes \delta_{x_n}^{(j)}) = WF(a_j) \times (\{0\} \times \mathbb{R})$ .

On étudie enfin le front d'onde de la somme, en utilisant les ordres successifs de  $\delta_{x_n}$ . En effet, on a (par exemple)

$$x_n \delta_{x_n}^j = -j \delta_{x_n}^{(j-1)}$$

pour  $j \geq 1$ .

On utilise  $WF(fT) \subset WF(T)$  si  $f$  est une fonction de classe  $C^\infty$  et  $T$  une distribution tempérée. On en déduit ainsi que, pour  $T = a_M \delta_{x_n}^{(M)}$

$$WF(x_n^{M-1}T) = (-1)^M WF((M-1)! a_M \delta_{x_n}) = WF(a_M) \times (\{0\} \times \mathbb{R}).$$

Ceci démontre que  $WF(a_M) \times (\{0\} \times \mathbb{R}) \subset WF(T)$ . Pour simplifier la preuve, on se restreint à  $M = 1$ . On vérifie que

$$\begin{aligned} x_n T &= -a_1 \otimes \delta_{x_n} \\ (1 + \frac{\partial}{\partial x_n} \circ x_n) T &= a_0 \otimes \delta_{x_n} \end{aligned}$$

ce qui donne, utilisant le fait que  $(1 + \frac{\partial}{\partial x_n} \circ x_n)$  est un opérateur différentiel, l'inclusion  $WF(a_0) \cup WF(a_1) \times (\{0\} \times \mathbb{R}) \subset WF(T)$ . L'inclusion inverse est immédiate. On a montré le résultat du lemme 11.4. Un opérateur différentiel d'ordre 2 se met sous la forme

$$P = a_{nn}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \sum_{1 \leq j \leq n-1} b_j(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_n} + \sum_{k,l \leq n-1} c_{kl}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + b(x) \frac{\partial}{\partial x_n} + C(x, \frac{\partial}{\partial x'}).$$

Introduisant

$$A(x_n, x', D_{x'}) = - \sum_{1 \leq j \leq n-1} \frac{1}{2} \frac{b_j(x)}{a_{nn}(x)} D_{x_j} + \frac{i}{2} \frac{b(x)}{a_{nn}(x)}$$

on trouve

$$\frac{1}{a_{nn}} P = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2}{i} A(x_n, x', D_{x'}) \frac{\partial}{\partial x_n} + B(x_n, x', D_{x'})$$

où l'opérateur  $B$  est un opérateur différentiel d'ordre 1 dans les coordonnées  $x'$  dont les coefficients dépendent de  $x$ . Alors on a le

**Lemme 11.5** *On considère  $u$  une distribution prolongeable telle que  $Pu$  soit une distribution prolongeable.*

*Soit  $U$  la prolongée de  $u$  par 0 dans  $x_n < 0$  et  $(Pu)^*$  la prolongée de  $Pu$  par 0 dans  $x_n < 0$ . ( $Pu = 0$  dans  $x_n > 0$ )*

1. *Lorsque  $u$  est une fonction de classe  $C^\infty$ ,*

$$PU = (Pu)^* + \frac{\partial u}{\partial x_n}(0, x') \delta_{x_n=0} + u(x', 0) \delta'_{x_n=0} + \frac{2}{i} A(0, x', D_{x'}) u(x', 0) \delta_{x_n=0}.$$

2. *Si  $u$  est une solution prolongeable, il existe deux distributions  $g_0(u)$  et  $g_1(u)$  telles que  $PU = g_0(u) \otimes \delta_{x_n=0} + g_1(u) \otimes \delta'_{x_n=0}$ . Lorsque  $u$  est un peu plus régulière, par exemple  $u \in H^1(x_n > 0)$ ,  $Pu \in L^2(x_n > 0)$ , alors  $PU = (\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', 0) + \frac{2}{i} A(0, x', D_{x'}) u(x', 0)) \delta_{x_n=0} + u(x', 0) \delta'_{x_n=0}$ . La régularité de  $Pu$  permet de prolonger  $Pu$  par zéro et le résultat est dans  $L^2$ . La régularité de  $u$  permet de définir la trace de  $u$ ,  $\gamma u \in H_{loc}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ , ainsi que la dérivée normale, donnée dans ce cas par*

$$\langle PU, \phi \rangle + \frac{2}{i} \langle \gamma u, A(0, x', D_{x'}) \phi \rangle + \langle \gamma u, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \rangle = \langle \frac{\partial u}{\partial n}, \phi \rangle.$$

Le premier item est la forme particulière des expressions (20.1.4) et (20.1.5) de [47].

**Preuve** Nous démontrons la formule des sauts pour les opérateurs  $\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  et pour  $A(x_n, x', D_{x'}) \frac{\partial}{\partial x_n}$ . Soit  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Alors

$$\begin{aligned} \int (\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2})^*(x) \phi(x) dx &= \int dx' \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \phi(x) dx_n \\ &= \int dx' [-\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', 0) \phi(x', 0) - \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial \phi}{\partial x_n} dx_n] \\ &= \int dx' [-\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', 0) \phi(x', 0) + u(x', 0) \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x', 0) + \int u(x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2} dx_n] \end{aligned}$$

De même, en notant  $A^\perp$  l'adjoint de l'opérateur  $A$  (en variables  $x'$ ),  $x_n$  étant un paramètre

$$\begin{aligned} \int (A(x_n, x', D_{x'}) \frac{\partial u}{\partial x_n})^* \phi(x) dx &= \int_0^\infty dx_n \int dx' A(x_n, x', D_{x'}) \frac{\partial u}{\partial x_n} \phi(x) \\ &= \int_0^\infty dx_n \int dx' \frac{\partial u}{\partial x_n} A^\perp(x_n, x', D_{x'}) \phi(x) \\ &= \int dx' \int_0^\infty dx_n \frac{\partial u}{\partial x_n} A^\perp(x_n, x', D_{x'}) \phi(x) \\ &= \int dx' [-u(x', 0) A^\perp(0, x', D_{x'}) \phi(0, x') \\ &\quad - \int_0^\infty dx_n u(x) \frac{\partial}{\partial x_n} \circ A(x_n, x', D_{x'}) \phi \\ &= - \int dx' A(0, x', D_{x'}) u(x', 0) \phi(x', 0) \\ &\quad - \int_0^\infty dx_n \int dx' u(x) \frac{\partial}{\partial x_n} \circ A(x_n, x', D_{x'}) \phi \end{aligned}$$

On vérifie ainsi, en regardant les égalités et en remarquant que l'adjoint dans  $\mathcal{D}(R^n)$  de  $A(x, D_{x'}) \frac{\partial}{\partial x_n}$  est  $-\frac{\partial}{\partial x_n} \circ A^\perp(x_n, x', D_{x'})$  l'égalité du lemme puisque

$$\int_0^{+\infty} dx_n \int dx' u P^\perp \phi = \int dx U P^\perp \phi \int P U \phi.$$

Ceci achève la démonstration du premier point du lemme 11.5. Le deuxième point provient du fait que si  $u$  est une solution,  $Pu = 0$  dans  $x_n > 0$  donc le prolongement unique de 0 étant 0 dans  $L^2$ ,  $(Pu)^* = 0$  comme distribution dans  $\mathbb{R}^n$ .

On a alors des informations supplémentaires sur le front d'onde au bord de  $u$ , distribution prolongeable solution de  $Pu = 0$  dans  $x_n > 0$  :

**Proposition 11.3** *Le front d'onde au bord d'une distribution  $u$  prolongeable solution de  $Pu = 0$  pour  $x_n > 0$*

$$WF_b(u)|_{x_n=0} = WF(u|_{x_n=0}) \times T^*S \cup WF(\partial_{x_n} u|_{x_n=0}) \times T^*S.$$

Lorsque  $u$  est assez régulière ( $H^1$  par exemple), les notations employées sont bonnes. Lorsque  $u$  n'est pas assez régulière, on remplace  $u|_{x_n=0}$  par  $g_1(u)$  et  $\partial_{x_n} u|_{x_n=0}$  par  $g_0(u)$ , les distributions  $g_0(u)$  et  $g_1(u)$  de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$  étant définies dans le lemme 11.3.

**Preuve** Comme, pour tout opérateur différentiel  $B$ , on a  $WF(Bu) \subset WF(u)$ , on déduit que  $WF(P\underline{u}) \subset WF(\underline{u})$ , donc comme  $WF(g_0(u) \otimes \delta_{x_n=0} + g_1(u) \otimes \delta'_{x_n=0}) = WF(g_0(u)) \times T^*S \cup WF(g_1(u)) \times T^*S$ , on a l'inclusion

$$WF(g_0(u)) \cup WF(g_1(u)) \subset WF_b(u).$$

### 11.4.2 Réduction de l'opérateur des ondes

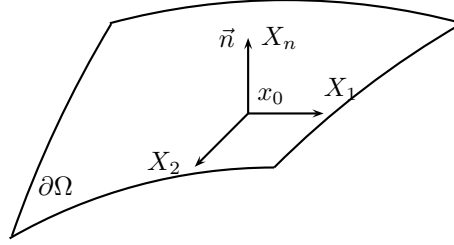
Nous démontrons la proposition de représentation du laplacien suivante, dans le cas où  $\Omega$  est totalement géodésique au voisinage de  $x_0$ , c'est-à-dire que tout point de  $\mathbb{R}^n$  peut se mettre sous la forme  $M = N + X_n n(N)$ ,  $N \in \partial\Omega$  et  $n(N)$  normale extérieure à  $\partial\Omega$  en  $N$ .

**Proposition 11.4** *Il existe un système de coordonnées locales  $(X_n, X)$  au voisinage de  $x_0 \in \partial\Omega$  ( $x_0$  est caractérisé par  $X_n = 0, X = 0$  et  $\partial\Omega$  est localement  $X_n = 0$ ) et il existe une fonction  $K$  identiquement égale à 1 sur  $\partial\Omega$  tels que*

$$K^{-1} \Delta K f = \frac{\partial^2 f}{\partial X_n^2} + Q(X_n, X, \frac{\partial}{\partial X}) f.$$

L'opérateur  $Q$  est différentiel et sa restriction sur  $\partial\Omega$  est le Laplacien associé à la métrique du bord.

Figure 5



**Preuve** Nous considérons  $x_0 \in \partial\Omega$  et on associe au bord  $\partial\Omega$  une carte locale au voisinage de  $x_0$ . Cette carte locale est constituée des coordonnées  $(X_1, \dots, X_{n-1}) = X'$  et chaque point de  $\partial\Omega$  peut s'écrire  $M(X_1, \dots, X_{n-1})$ , chaque coordonnée étant  $x_j(X_1, \dots, X_{n-1})$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

A chaque point  $M \in \partial\Omega$  on associe le vecteur normal unitaire extérieur  $n(M)$ , de coordonnées  $n_j(X_1, \dots, X_{n-1})$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Dans le système de coordonnées cartésiennes usuel, on écrit donc

$$x_j(X_1, \dots, X_n) = x_j(X_1, \dots, X_{n-1}) + X_n n_j(X_1, \dots, X_{n-1}).$$

Ce changement de variable définit un difféomorphisme d'un voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  qui transforme un voisinage de  $x_0$  dans  $\partial\Omega$  en un voisinage de  $(X_n = 0, X = 0)$  dans  $X_n = 0$ . On note que  $X \in \mathbb{R}^{n-1}$ . L'égalité

$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = \sum_j \frac{\partial f}{\partial X_j} dX_j$$

se traduit en, utilisant  $dx_j = \sum_{k \geq n-1} (\frac{\partial x_j}{\partial X_k} + X_n \frac{\partial n_j}{\partial X_k}) dX_k + n_j(X_1, \dots, X_{n-1}) dX_n$ , en

$$\nabla_X f = {}^t B(X_n, X) \nabla_x f \quad (11.4.7)$$

le système de coordonnées  $X_1, \dots, X_{n-1}$  étant appelé  $X$ . Les composantes de  $B$  sont données par

$$\begin{aligned} B_{ij}(X_n, X) &= \frac{\partial x_j}{\partial X_k} + X_n \frac{\partial n_j}{\partial X_k} \\ B_{in}(X_n, X) &= n_i(X) \end{aligned}$$

Soit  $C = {}^t B^{-1}$ . On a, de (11.4.7)

$$\nabla_x f = C(X_n, X) \nabla_X f.$$

L'opérateur laplacien est donné par les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= \sum_j C_{ij} \partial_{X_j} \left( \sum_p C_{ip} \partial_{X_p} f \right) \\ \Delta f &= \sum_{j,p} \left[ \sum_i C_{ij} C_{ip} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial X_p \partial X_j} + \sum_p \left( \sum_{i,j} C_{ij} \frac{\partial C_{ip}}{\partial X_j} \right) \frac{\partial f}{\partial X_p} \end{aligned}$$

Le coefficient de  $\frac{\partial^2 f}{\partial X_j \partial X_p}$  dans cette somme est alors  $({}^t C C)_{pj} = ({}^t B B)_{pj}^{-1}$ . La matrice obtenue est symétrique. La matrice  ${}^t B B$  vérifie les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} ({}^t B B)_{nn} &= \sum_i (n_i(X, X_n))^2 = 1 \\ ({}^t B B)_{ni} &= \sum_p ({}^t B)_{np} B_{pi} = \sum_p B_{pn} B_{pi} = \sum_p n_p(X) \left[ \frac{\partial x_p}{\partial X_i} + X_n \frac{\partial n_p}{\partial X_i} \right] \end{aligned}$$

Comme  $x(X) \in \partial\Omega$ , le vecteur  $\partial_{X_i}(x(X))$  est tangent à  $\partial\Omega$  en  $x(X)$ . Comme  $(n_p)$  est le vecteur normal au même point du bord, la somme  $\sum_p n_p(X) \frac{\partial x_p}{\partial X_i}$  est nulle. Le reste du coefficient est nul car il s'agit de  $X_n \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial X_i}$ . La matrice  ${}^t B B$  est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} G^{-1}(X_n, X) & 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est alors la matrice

$$\begin{pmatrix} G(X_n, X) & 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il existe donc une matrice  $G$  symétrique telle que

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial X_n^2} + \sum_{j,k \leq n-1} g_{jk}(X_n, X) \frac{\partial^2 f}{\partial X_j \partial X_k} + a(X_n, X) \frac{\partial f}{\partial X_n} + \sum_{j \leq n-1} b_j(X_n, X) \frac{\partial f}{\partial X_j}$$

Soit  $K$  la fonction solution de

$$\begin{cases} K|_{X_n=0} = 1 \\ 2\partial_{X_n} K + a(X_n, X)K = 0. \end{cases}$$

Alors il existe un opérateur différentiel  $Q$  d'ordre 2 dans les variables  $X$ , à coefficients dépendant de  $X_n$ , tel que

$$K^{-1} \Delta K f = \frac{\partial^2 f}{\partial X_n^2} + Q(X_n, X, \frac{\partial}{\partial X}) f.$$

Le symbole principal de  $Q$  est la forme quadratique associée à la matrice  $G(X_n, X)$ . On peut alors écrire

$$Q(X_n, X, \frac{\partial}{\partial X}) = \sum_{j,k} g_{j,k}(X_n, X) \frac{\partial^2}{\partial X_j \partial X_k} + \sum_j V_j(X_n, X) \frac{\partial}{\partial X_j} + S(X_n, X), \quad (11.4.8)$$

où les indices  $j, k$  varient de 1 à  $n-1$ , construit à partir des  $b_j(X_n, X)$  et de  $K$ . On a  $S(X_n, X) = (\Delta K / K)$  et  $K V_j(X_n, X) = \Delta(X_j K) - X_j \Delta K$ . Ceci achève la preuve de la proposition 11.4. Nous abandonnerons dans la suite les notations  $(X_n, X)$  que nous avions employé ici pour faire la différence entre les coordonnées cartésiennes usuelles de  $\mathbb{R}^n$ , notées  $(x)$ , et les coordonnées semi-géodésiques ici introduites  $(X_n, X)$ . On considérera donc maintenant, dans les coordonnées  $(x', x_n)$ , le bord redressé  $x_n = 0$  et le laplacien à coefficients variables  $\frac{\partial^2}{\partial X_n^2} + Q$ .

### 11.4.3 Régions elliptique, hyperbolique et *glancing*

Soit  $P$  un opérateur d'ordre 2, différentiel, défini sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t$ . Nous l'étudions dans le demi-espace  $\Omega = \{(x', x_n, t), x_n > 0\}$  au voisinage de l'hypersurface  $x_n = 0$ . Ici, on se restreint tout de suite aux coordonnées adaptées au bord.

L'espace cotangent au bord  $T^*(\partial\Omega) = T^*(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_t)$  peut être divisé en trois régions, définies de la manière suivante : Soit  $\pi$  la projection canonique de  $T^*\mathbb{R}^{n+1}$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  et soit  $\Pi$  la projection canonique de  $\pi^{-1}(\partial\Omega) \cap T^*(\mathbb{R}^{n+1})$  sur  $T^*(\partial\Omega)$  qui associe à  $(x'_0, 0, t_0, \xi_0, \tau_0) \in T^*\mathbb{R}^{n+1}$  le point  $(x'_0, t_0, \xi'_0, \tau_0)$ . L'équation  $p(x'_0, 0, t_0, \xi'_0, \xi_n, \tau_0) = 0$  est une équation de degré 2 en  $\xi_n$ , qui admet 0, 1, ou 2 racines réelles. On introduit la classification

**Définition 11.7** La région elliptique  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des points  $\rho_0 \in T^*(\partial\Omega)$  tels que

$$\Pi^{-1}(\rho_0) \cap \text{Car}(p) = \emptyset.$$

La région hyperbolique  $\mathcal{H}$  est l'ensemble des points  $\rho_0 \in T^*(\partial\Omega)$  tels que

$$\text{Card}(\Pi^{-1}(\rho_0) \cap \text{Car}(p)) = 2.$$

Enfin, la région *glancing*  $\mathcal{G}$  est  $T^*\partial\Omega - \mathcal{E} \cup \mathcal{H}$ .

Ce mot *glancing* provient de la première étude de Friedlander. Je cite la phrase de Friedlander p 148 de [41]” The front of disturbance in the shadow is orthogonal to diffracted rays which are *glancing* rays emerging from the boundary”

**Interprétation.** Pour l'opérateur des ondes  $\Delta - \partial_t^2$  et le bord  $\partial\Omega$  défini par  $x_n = 0$ , les points de  $T^*(\partial\Omega \times \mathbb{R}_t)$  sont alors de la forme  $(x', t, \xi', \tau)$ . La variété caractéristique du d'Alembertien est  $\xi_n^2 + (\xi')^2 - \tau^2 = 0$ . Alors

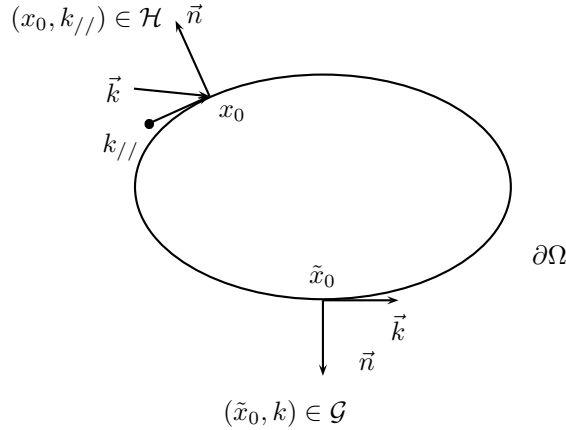
$$\mathcal{E} = \{(x', t, \xi', \tau), |\xi'| > |\tau|\}$$

$$\mathcal{H} = \{(x', t, \xi', \tau), |\xi'| < |\tau|\}$$

$$\mathcal{G} = \{(x', t, \xi', \tau), |\xi'|^2 = \tau^2\}.$$

Une onde plane incidente vérifie nécessairement (puisque c'est une solution de l'équation des ondes)  $|k| = 1$ . Alors, nécessairement,  $|k'| \leq 1$ , et l'onde est tangente quand  $k_n = 0$ . Une onde plane incidente n'est donc jamais associée à un point elliptique, en revanche, les points hyperboliques sont ceux où la réflexion est transverse, et les points *glancing* sont ceux où l'onde arrive tangentiellement. Nous explicitons et précisons ces remarques dans la section suivante.

Figure 6



## 11.5 Réflexion des singularités

Dans cette partie, nous voulons démontrer le résultat de réflexion des singularités hyperboliques, qui est la généralisation du résultat de propagation des singularités dans le vide pour des rayons généralisés, c'est à dire en admettant pour les rayons des courbes se propageant dans l'extérieur de  $\Omega$  se réfléchissant sur  $\Omega$ . Pour cela, il est possible de passer par la construction de deux opérateurs intégraux de Fourier qui sont les deux parametrix, sortante et rentrante par rapport à  $\partial\Omega$ , de l'opérateur d'ordre 2 considéré. Ces opérateurs de Fourier intégraux sont notés  $A_+$  et  $A_-$ . Ils sont solution de  $P$  et peuvent être considérés respectivement comme sortant et entrant (par rapport à  $x_n > 0$ )



### 11.5.1 Parametrix pour la réflexion

On se place dans le cas où  $P = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + R(x_n, x', \frac{\partial}{\partial x'}, \partial_t)$ ,  $R$  étant un opérateur différentiel dans les variables  $(x', t)$  à paramètre  $x_n$ . Lorsque l'on étudie l'équation des ondes, ceci revient à considérer un système de coordonnées  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$  adapté sur  $\partial\Omega$ , la variable normale au bord  $x_n$  et le temps  $t$ . L'opérateur  $R$  dans cette égalité est obtenu, pour l'équation des ondes, à partir de l'opérateur  $Q(x_n, x', \partial_{x'})$  de la proposition 11.4 en considérant

$$R(x_n, x', \partial_{x'}, \partial_t) = Q(x_n, x', \partial_{x'}) - \partial_t^2,$$

puisque le bord  $\partial\Omega$  est supposé de la forme  $\partial C \times \mathbb{R}_t$ , indépendant du temps et  $K$  commute alors avec  $\partial_t$ .

On veut prouver la proposition, qui décrit la solution d'un problème de Cauchy avec données sur  $x_n = 0$  :

**Proposition 11.5** *Soit  $f \in S'(\{x_n = 0\})$  et  $\rho_0 \in WF(f) \cap \mathcal{H}$ . On note  $\rho_+$  et  $\rho_-$  les deux points de Carpi qui se projettent sur  $\rho_0$ .*

*Soit  $A_+$  et  $A_-$  les opérateurs intégraux de Fourier qui décrivent la parametrix sortante et entrante de  $P$  au voisinage de  $\rho_+$  et de  $\rho_-$ .*

*La solution du problème*

$$\begin{cases} Pu = 0, x_n > 0 \\ u|_{x_n=0} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_n}|_{x_n=0} = f(x', t) \end{cases}$$

*est décrite au voisinage de  $\rho_0$  par*

$$u(x', x_n, t) = (A_+ - A_-)(g)(x', x_n, t)$$

*où  $g(x', t)$  est solution du problème au bord, elliptique au voisinage de  $\rho_0$*

$$(\partial_{x_n} \circ A_+ - \partial_{x_n} \circ A_-)|_{x_n=0}(g)(x', t) = f(x', t)$$

*Les deux opérateurs  $T_{\pm} = \partial_{x_n} \circ A_{\pm}|_{x_n=0}$  sont des opérateurs pseudo-différentiels sur  $T^*(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_t)$ .*

**Preuve constructive** Selon les notations de la section précédente, on écrit l'opérateur  $P$  sous la forme

$$P = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + G(x_n, x', \partial_{x'^2}) - \partial_t^2 + V(x_n, x') \cdot \nabla_{x'} + S(x_n, x').$$

Cette représentation est celle de l'opérateur des ondes en coordonnées adaptées, et est moins générale que la représentation d'un opérateur hyperbolique. L'opérateur  $G(x_n, x', \partial_{x'^2})$  s'écrit

$$G(x_n, x', \partial_{x'^2}) = \sum_{i,j=1..n-1} g_{ij}(x_n, x') \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Le symbole principal de  $P$ , est égal à

$$p(x_n, x', \xi_n, \xi', \tau) = -\xi_n^2 + \tau^2 - \sum_{i,j=1..n-1} g_{ij}(x_n, x') \xi_i \xi_j. \quad (11.5.9)$$

Si  $\phi(x_n, x', t, \xi', \tau)$  est une phase homogène de degré 1 en  $\xi', \tau$  et si  $\sigma(x, t, \xi', \tau)$  est un symbole de  $C^\infty(\mathbb{R}, S^0(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_t))$ , l'application du Lemme 1.2 conduit à l'équation eikonale, qui exprime la nullité du premier ordre d'homogénéité en  $\tau, \xi$  de  $e^{-i\phi} P(\sigma e^{i\phi})$  :

$$p(x_n, x', \nabla_{x_n} \phi, \nabla_{x'} \phi, \nabla_t \phi) = 0 \quad (11.5.10)$$

(on a omis les variables pour simplifier). Nous écrivons les opérateurs du lemme 1.2 qui interviendront dans les équations de transport :

$$P^b(x, \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2} + \sum_{j,k=1..n-1} g_{jk}(x_n, x') \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \sum_{j=1..n-1} V_j(x_n, x') \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$$

ainsi que

$$L_1(x, \partial_x, \partial_t) = -2 \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} - 2 \sum_j \left( \sum_k g_{jk}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} + P^b(x, \phi)$$

L'équation eikonale (11.5.10) se réécrit

$$(\partial_t \phi)^2 = (\partial_{x_n} \phi)^2 + \sum_{i,j} g_{i,j}(x_n, x') \partial_{x_i} \phi \partial_{x_j} \phi.$$

On veut que la phase  $\phi$  soit la phase identité sur le bord  $x_n = 0$ . Ceci correspond à l'écriture

$$\phi(0, x', t, \xi', \tau) = x' \xi' + t \tau. \quad (11.5.11)$$

Les dérivées tangentielles de cette phase sont alors connues sur le bord par

$$\partial_t \phi = \tau, \partial_{x_j} \phi = \xi_j,$$

ce qui donne

$$\tau^2 = (\partial_{x_n} \phi|_{x_n=0})^2 + \sum_{i,j} g_{i,j}(0, x') \xi_i \xi_j. \quad (11.5.12)$$

Le système des bicaractéristiques pour l'opérateur  $P$  est ( $\dot{f}$  désigne la dérivée par rapport au paramètre sur les bicaractéristiques de la fonction  $f(s)$ )

$$\begin{cases} \dot{t} = 2\tau \\ \dot{\tau} = 0 \\ \dot{x}_n = -2\xi_n \\ \dot{\xi}_n = -\sum_{i,j} \partial_{x_n} g_{ij}(x_n, x') \xi_i \xi_j \\ \dot{x}_i = 2 \sum_{i,j} g_{i,j}(x_n, x') \xi_j \\ \dot{\xi}_i = -2 \sum_{j,k} \partial_{x_i} g_{j,k}(x_n, x') \xi_j \xi_k. \end{cases}$$

On en déduit en particulier que  $\tau(s) = \tau(0)$  et  $t(s) = t(0) + 2\tau(0)s$ .

On applique la proposition 10.1 sur l'identité entre une variété lagrangienne et la variété générée par les bicaractéristiques. Ce théorème indique que si

$$(x'(0), x_n(0), t(0), \xi'(0), \xi_n(0), \tau(0)) \in \Lambda_\phi,$$

où la phase  $\phi$  est une solution de l'équation eikonale (11.5.12) associée au symbole  $p$ , alors la courbe bicaractéristique

$$\{(x'(s), x_n(s), t(s), \xi'(s), \xi_n(s), \tau(s)), s \in [-a, b]\}$$

est contenue dans la variété lagrangienne  $\Lambda_\phi$ .

On choisit le point initial

$$(0, x', t, \partial_{x_n} \phi, \partial_{x'} \phi, \partial_t \phi)$$

dans la variété lagrangienne associée à la phase  $\phi$  introduite ci-dessus par (11.5.12), (11.5.11). Ce point initial s'écrit

$$(0, x', t, \partial_{x_n} \phi, \xi', \tau).$$

On vérifie alors que le point situé sur la courbe bicaractéristique issue de ce point initial est  $(x_n(s), x'(s), t - 2\tau s, \xi'(s), \tau)$ . En particulier, on vérifie que, identiquement

$$\partial_t \phi(x_n(s), x'(s), t(s), \xi', \tau) = \tau.$$

Il existe donc une phase  $\psi(x_n, x', \xi', \tau)$ , indépendante de  $t$  telle que

$$\phi(x', x_n, t, \xi', \tau) = \psi(x', x_n, \xi', \tau) + t\tau.$$

Cette phase  $\psi$  est solution de l'équation eikonale (remarquons que ce n'est pas la même que (11.5.12)) :

$$\tau^2 = (\partial_{x_n} \psi)^2 + \sum_{i,j} g_{i,j}(x_n, x') \partial_{x_i} \psi \partial_{x_j} \psi.$$

Considérons un point du bord  $\partial\Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  qui soit hyperbolique :  $(x'_0, t_0, \xi'_0, \tau_0) \in \mathcal{H}$ . Ceci signifie que

$$\tau_0^2 - \sum_{i,j} g_{ij}(0, x'_0) (\xi_i)_0 (\xi_j)_0 > 0.$$

Il existe deux valeurs  $\xi_n^\pm$  telles que  $(x'_0, 0, t_0, \xi'_0, \xi_n^\pm, \tau_0)$  sont dans l'ensemble *Carp*. De tels points sont stables, donc dans un voisinage de  $(x'_0, \xi'_0, t_0, \tau_0)$  et de  $x_n = 0$  on peut écrire

$$-\xi_n^2 + \tau^2 - \sum_{i,j} g_{ij}(x) \xi_i \xi_j = -(\xi_n - \xi_n^+(x, \xi', \tau))(\xi_n - \xi_n^-(x, \xi', \tau))$$

Dans le cas étudié sur le symbole  $p$ ,  $\xi_n^- = -\xi_n^+$  et  $\xi_n^+(x, \xi', \tau) = (\tau^2 - \sum_{i,j} g_{ij}(x) \xi_i \xi_j)^{\frac{1}{2}}$ . La phase  $\psi$  est donc solution de l'équation eikonale (11.5.12) qui s'écrit

$$(\partial_{x_n} \psi)^2 = (\xi_n^+(x, \partial_{x'} \psi, \tau))^2.$$

Il existe deux phases  $\psi_+$  et  $\psi_-$ , solutions dans le voisinage du point hyperbolique  $(x'_0, 0, t_0, \xi'_0, \tau_0)$  de  $T^*(\partial\Omega \times R)$  de

$$\begin{cases} \partial_{x_n} \psi_\pm = \pm \xi_n^\pm(x, \partial_{x'} \psi, \tau) \\ \psi_\pm(x', 0, \xi', \tau) = x' \cdot \xi' \end{cases} \quad (11.5.13)$$

Ces deux phases sont homogènes par rapport à  $(\xi', \tau)$ . Elles existent au voisinage du point  $(x'_0, 0, \xi'_0, \tau_0)$  car  $\xi_n^\pm(x_0, \xi'_0, \tau_0) \neq 0$ . Ces deux phases étant supposées connues, nous noterons  $L_1^\pm(x, \xi', \tau, \partial_x, \partial_t)$  l'opérateur de transport associé à la phase  $\psi_\pm + t\tau$  et  $c_\pm(x, \xi', \tau)$  la fonction  $P^b(\psi_\pm + t\tau)$ . Nous obtenons, pour toute fonction  $\sigma(x_n, x', t, \xi', \tau)$  admettant un développement asymptotique homogène :

$$\begin{aligned} c_\pm(x, \xi', \tau) &= \partial_{x_n}^2 \psi_\pm + \sum_{j,k} g_{jk}(x) \partial_{x_j x_k}^2 \psi_\pm + \sum_j V_j(x) \partial_{x_j} \psi_\pm \\ L_1^\pm \sigma &= -2\tau \frac{\partial \sigma}{\partial t} \pm 2\xi_n^\pm(x, \partial_{x'} \psi_\pm, \tau) \frac{\partial \sigma}{\partial x_n} + 2 \sum_{j,k} g_{jk}(x) \frac{\partial \psi_\pm}{\partial x_j} \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} + c_\pm \cdot \sigma \end{aligned}$$

Maintenant, supposons que

$$\sigma(0, x', t, \xi, \tau) = 1$$

(cette condition est le pendant de la condition sur la phase qui permet d'obtenir la transformée de Fourier sur  $x_n = 0$ ).

Nous écrivons  $\sigma(x, t, \xi', \tau)$  comme une somme de symboles homogènes  $\sigma_j$  de degré  $-j$  en  $(\xi', \tau)$ . On vérifie

$$\sigma_j(0, x', t, \xi', \tau) = \delta_{j0}$$

et l'équation de transport homogène sur  $\sigma_0$  est  $L_1^\pm \sigma_0 = 0$ . Comme  $L_1^\pm$  commute avec  $\partial_t$  et que  $\partial_t \sigma_0(0, x', t, \xi', \tau) = 0$ , le problème de Cauchy sur  $\partial_t \sigma$  admet une solution unique, qui est 0. On en déduit que  $\sigma_0(x, t, \xi', \tau)$  ne dépend pas de  $t$ . Pour chaque symbole  $\sigma_j$ , on procède par récurrence, le terme source ne dépendant pas de  $t$  et les coefficients ne dépendant pas de  $t$  dans  $L_1^\pm \sigma_j = iP(\sigma_{j-1})$ , donc  $\partial_t \sigma_j = 0$ . On omet la dépendance en  $t$  et on peut écrire l'opérateur de transport

$$R_1^\pm = \pm 2\xi_n^\pm(x, \partial_{x'} \psi_\pm, \tau) \frac{\partial}{\partial x_n} + 2 \sum_{j,k} g_{jk}(x) \frac{\partial \psi_\pm}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} + c_\pm.$$

Comme  $\xi_n^\pm$  est non nul dans un voisinage du point hyperbolique considéré, les équations de transport

$$R_1^\pm(\sigma^\pm(x, \xi', \tau)) = iP(\sigma^\pm(x, \xi', \tau))$$

avec condition initiale  $\sigma^\pm(0, x', \xi', \tau) = 1$  admettent une unique solution. On a la

**Proposition 11.6** *Soit  $(x'_0, t_0, \xi'_0, \tau_0) \in T_{x'_0, t_0} \mathbb{R}^{n-1} \times T^* \mathbb{R}_t \cap \mathcal{H}$ . Il existe deux symboles et deux phases  $\psi_+(x, \xi', \tau)$  et  $\psi_-(x, \xi', \tau)$  tels que*

$$\begin{cases} \psi_\pm|_{x_n=0} = x' \cdot \xi' \\ \frac{\partial \psi_\pm}{\partial x_n} = \pm \xi_n^\pm(x, \partial_{x'} \psi_\pm, \tau) \\ \sigma^\pm(0, x', \xi', \tau) = 1 \\ R_1^\pm(\sigma^\pm) - iP\sigma^\pm = 0. \end{cases}$$

Alors

$$u_{\xi', \tau}(x, t) = \sigma^\pm(x, \xi', \tau) e^{it\tau + i\psi_\pm(x, \xi', \tau)} = \sigma^\pm(x, \xi', \tau) e^{i\tau(t + \psi_\pm(x, \frac{\xi'}{\tau}, 1))}$$

sont deux solutions de  $(P - \partial_{t_2}^2)u = 0$  vérifiant  $u(x', 0, t) = e^{i\tau(t + \frac{\xi'}{\tau} x')}$ . On les définit microlocalement dans un voisinage conique de  $\rho_0^\pm = (x'_0, 0, t_0, \xi'_0, \pm \xi_n^\pm(x'_0, \xi'_0, \tau_0), \tau_0)$  dans  $T_{(x'_0, 0, t_0)} \mathbb{R}^{n+1}$

A partir de ces deux solutions, on introduit les opérateurs intégraux de Fourier définis sur les fonctions  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_\tau)$  dont le front d'onde est localisé au voisinage du point  $\rho_0^\pm$  :

$$A_\pm(f)(x, t) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\phi_\pm(x, t, \xi', \tau)} \sigma^\pm(x, \xi', \tau) \mathcal{F}(f)(\xi', \tau) d\xi' d\tau \quad (11.5.14)$$

qui s'écrivent encore

$$A_\pm(f)(x, t) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\phi_\pm(x, t, \xi', \tau) - i\tau s - iy' \xi'} \sigma^\pm(x, \xi', \tau) f(y', x) d\xi' d\tau dy' ds.$$

Nous reconnaissons ici la notation des opérateurs de Fourier intégraux de la Section 7, et en particulier la Définition 7.4. On vérifie que les opérateurs  $A_\pm$  construisent des solutions de  $P$ . Dans  $x_n > 0$ , si nous introduisons deux éléments de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})$ , notés  $f_+$  et  $f_-$  :

$$P(A_\pm(f_\pm)) = 0, x_n > 0$$

Nous remarquons aussi que, lorsque  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})$ , alors les opérateurs de Fourier intégraux  $A_\pm$  construisent des distributions qui sont très régulières en  $x_n$  dans un voisinage du bord :

$$A_\pm(f) \in C^\infty([0, \varepsilon], \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})).$$

Ceci permet alors de vérifier que les distributions  $g_0(u)$  et  $g_1(u)$  de la formule des sauts (Lemme 11.5) sont donc la trace et la dérivée normale, qui sont les opérateurs pseudo-différentiels

$$g_1(A_+(f)) = A_+(f)(x', 0, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x' \xi' + t\tau)} \sigma^+(x', 0, \xi', \tau) \mathcal{F}(f)(\xi', \tau) d\xi' d\tau,$$

$$g_0(A_+(f)) = \partial_{x_n}(A_+(f))(x', 0, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x' \cdot \xi' + t\tau)} [i\partial_{x_n}\phi_+(x', 0, \xi')\sigma^+ + \partial_{x_n}\sigma_+](x', 0, \xi', \tau)\mathcal{F}(f)(\xi', \tau)d\xi' d\tau.$$

On en déduit, grâce à la formule des sauts

$$P(A_+(f_+) + A_-(f_-)) = (A_+(f_+) + A_-(f_-))|_{x_n=0}\delta'_{x_n=0} + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}(A_+(f_+) + A_-(f_-))\right)|_{x_n=0}\delta_{x_n=0}.$$

On définit alors les opérateurs

$$T_{\pm} = \frac{\partial}{\partial x_n} \circ A_{\pm}|_{x_n=0}.$$

On vérifie que

$$\partial_{x_n} \circ A_+(f)(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\phi_{\pm}(x, t, \xi', \tau)} [i\partial_{x_n}\phi_+(x, \xi')\sigma^+(x, \xi', \tau) + \partial_{x_n}\sigma_+(x, \xi', \tau)]\mathcal{F}(f)(\xi', \tau)d\xi' d\tau.$$

L'opérateur  $A_+$  a été construit de telle sorte que sa restriction à  $x_n = 0$  soit l'identité, la phase  $\phi_+$  se restreignant en  $x_n = 0$  à  $x' \cdot \xi' + t\tau$  et le symbole  $\sigma_+|_{x_n=0}$  étant identiquement 1. Il vient

$$T_+f(x', t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix' \cdot \xi' + t\tau} [i\xi_n^+(x, \partial_{x'}\psi_+(x', \xi')) + \partial_{x_n}\sigma_+(x', 0, t, \xi', \tau)]\mathcal{F}(f)(\xi', \tau)d\xi d\tau.$$

**Les opérateurs  $T_+$  et  $T_-$  sont des opérateurs pseudo-différentiels classiques de symbole principal respectif  $\pm i\xi_n^{\pm}(x, \partial_{x'}\psi(x', \xi))$ . Nous remarquons que ce sont des opérateurs d'ordre 1, elliptiques aux points hyperboliques.**

On introduit  $V = A_+(f_+) + A_-(f_-)$ . D'après Hörmander,  $U$  est dans  $C^{\infty}([0, \varepsilon], \mathcal{D}')$  (avec l'ordre pour les variables  $x_n, (x', t)$ ). Il est solution de

$$PU = \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', 0, t)\delta_{x_n=0}.$$

L'égalité  $PU = PV$  se traduit par

$$\begin{cases} A_+(f_+)(x', 0, t) + A_-(f_-)(x', 0, t) = 0 \\ T_+(f_+)(x', 0, t) + T_-(f_-)(x', 0, t) = \partial_{x_n}u(x', 0, t) \end{cases}$$

Après transformation de Fourier, le coefficient de  $\delta_{x_n=0}$  est

$$\xi_n^+(x', 0, \xi', \tau)(\mathcal{F}(f_+)(\xi') - \mathcal{F}(f_-)(\xi')).$$

Il reste donc le système, équivalent à  $P(U - V) = 0$  :

$$\begin{cases} f_- = -f_+ \\ \left[\frac{\partial}{\partial x_n} \circ A_+ - \frac{\partial}{\partial x_n} \circ A_-\right](f_+) = \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', 0, t) \end{cases} \quad (11.5.15)$$

Le symbole principal de l'opérateur  $T_+ - T_-$  est elliptique (il est homogène en  $\xi'$  d'ordre 1, et nous sommes au voisinage d'un point hyperbolique). En effet, on peut affirmer que  $r_2(0, x', \xi') \geq c > 0$  pour  $|\xi'| = 1$  dans un voisinage de  $(x'_0, \xi'_0/|\xi'_0|)$ , la propriété d'hyperbolicité étant stable, et le caractère homogène d'ordre 1 de  $\sqrt{r_2}$  implique l'ellipticité de  $\sqrt{r_2}(0, x', \xi')$  dans un voisinage du point  $(x'_0, \xi'_0) \in \mathcal{H}$ .

La seconde équation de (11.5.15) est une équation elliptique au voisinage des points hyperboliques de  $P$ . En supposant que  $\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', 0)$  a son front d'onde inclus dans un petit voisinage conique de  $(x'_0, \xi'_0)$ , il existe une solution  $f_+(x')$  dont le front d'onde est inclus dans un petit voisinage conique de  $(x'_0, \xi'_0)$ . On a ainsi déterminé  $f_+(x') = (T_+ - T_-)^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', 0)\right)$  modulo  $C^{\infty}$ .

Il reste à démontrer que si  $u$  et  $v$  sont deux distributions solution prolongeables nulles sur  $x_n < 0$  et que  $PU = PV$ , alors  $u$  et  $v$  coïncident microlocalement au voisinage des points hyperboliques. Il est équivalent de démontrer que si  $w$  est une distribution solution prolongeable nulle sur  $x_n < 0$ ,  $PW = 0$  implique  $w = 0$  au voisinage des points hyperboliques.

Le front d'onde de  $W$  ne rencontre pas la zone  $x_n < 0$  car  $w$  est nulle sur  $x_n < 0$ . Comme le point  $\rho_0 = (x'_0, t_0, \xi'_0, \tau_0)$  est hyperbolique, les deux bicaractéristiques  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  qui passent par un point de la forme  $(x'_0, 0, t_0, \xi'_0, \pm \xi_n^0, \tau_0)$  rencontrent toutes les deux la zone  $x_n < 0$  (on dit qu'elles rentrent dans la zone  $x_n < 0$ ). Elles ne rencontrent donc pas le front d'onde de  $W$ . Ainsi  $W$  est microlocalement nulle dans un voisinage du bord.

On a ainsi obtenu  $U = A_+(f_+) - A_-(f_+) + W$ , où  $WF(W) \cap (\gamma_+ \cup \gamma_-) = \emptyset$ .

La proposition 11.5 est donc démontrée. Cette proposition, rappelons le, permet de connaître la solution d'un problème de Dirichlet où la dérivée normale est connue sur le bord, microlocalement, et que son front d'onde ne contient que des points hyperboliques.

On souhaite maintenant résoudre le problème de Dirichlet avec données de Cauchy  $u_0$  et  $u_1$  en  $t = 0$  :

$$\begin{cases} Pu = 0, x_n > 0 \\ u|_{x_n=0} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \partial_t u(x, 0) = u_1(x). \end{cases} \quad (11.5.16)$$

Ce problème est un problème localement bien posé. On rappelle que  $K^{-1}\Delta K = \frac{\partial^2}{\partial X_n^2} + Q(X_n, X, \frac{\partial}{\partial X})$  et  $P = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ . On introduit donc  $\tilde{Q}(X_n, X, \frac{\partial}{\partial X_n}, \frac{\partial}{\partial X}) = \frac{\partial^2}{\partial X_n^2} + Q(X_n, X, \frac{\partial}{\partial X})$ . Pour se reporter à des notations plus traditionnelles, on change  $X_n$  et  $x_n$  et  $X$  en  $x'$ . Les coordonnées  $(x', x_n)$  sont notées  $x$ .

Soit  $p_0 \in WF(u_0) \cup WF(u_1) \subset T^*(\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n+1} \cap \{t = 0\})$ . On construit la bicaractéristique de  $p$  passant par  $(p_0, t = 0, \tau = (\sigma(\tilde{Q})(p_0))$ .

Commençons par la solution du problème de Cauchy. Aux données de Cauchy sont associés deux opérateurs intégraux de Fourier, notés  $B_{\pm}$ , dont la construction est similaire de celle des opérateurs intégraux de Fourier  $A_+$  et  $A_-$ . On introduit

$$B_{\pm}g(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\phi_{\pm}(x, \xi, t) - iy \cdot \xi} s_{\pm}(x, \xi, t) g(y) dy d\xi$$

où  $\phi_{\pm}$  et  $s_{\pm}$  sont solution des équation eikonale et de transport engendrées par la variable temps, soit

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_{\pm}}{\partial t} = \pm (\sigma(\tilde{Q})(x, \nabla_x \phi_{\pm}(x, \xi, t)))^{\frac{1}{2}} \\ \phi_{\pm}(x, \xi, 0) = x \cdot \xi. \end{cases}$$

Les deux problèmes pour  $\phi_{\pm}$  sont des problèmes de Hamilton-Jacobi. Pour simplifier les notations, on introduit  $\tilde{q}(x, \xi) = \sigma(\tilde{Q})(x, \xi)$ .

On écrit, au voisinage de  $p_0$ , la solution  $u$  de (11.5.16) sous la forme

$$u = B_+g_+ + B_-g_-.$$

Il s'agit de déterminer  $g_+$  et  $g_-$  en fonction de  $u_0$  et de  $u_1$ , toujours microlocalement. Le système obtenu est alors

$$\begin{cases} u_0 = g_+ + g_- \\ u_1 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int [i(\tilde{q}(x, \xi))^{\frac{1}{2}} + \partial_t s_+(x, \xi, 0)] \hat{g}_+(\xi) d\xi \\ \quad + \frac{1}{(2\pi)^n} \int [-i(\tilde{q}(x, \xi))^{\frac{1}{2}} + \partial_t s_-(x, \xi, 0)] \hat{g}_-(\xi) d\xi \end{cases} \quad (11.5.17)$$

Comme  $\tau$  est constant sur la bicaractéristique, égal à  $-(\tilde{q}(p_0))^{\frac{1}{2}}$ , on en déduit que sur la bicaractéristique  $\tilde{q}(x(s), \xi(s))$  est aussi constant, donc dans un voisinage de celle-ci (tubulaire par exemple), ce symbole reste borné inférieurement, ce qui entraîne l'ellipticité du

système (11.5.17). Plus précisément, soit  $R$  l'inverse de l'opérateur pseudodifférentiel de symbole  $2i(p(x, \xi))^{\frac{1}{2}} + \partial_t s_+(x, \xi, 0) + \partial_t s_-(x, \xi, 0)$ , et  $\tilde{T}$  l'opérateur pseudodifférentiel de symbole  $i(p(x, \xi))^{\frac{1}{2}} - \partial_t s_-(x, \xi, 0)$ . On a

$$g_+ = R(u_1 + \tilde{T}u_0), g_- = (I - R\tilde{T})u_0 - Ru_1.$$

On obtient la solution du problème (11.5.16)

$$u = (B_+R - B_-R)u_1 + (B_+R\tilde{T} + B_-(I - R\tilde{T}))u_0. \quad (11.5.18)$$

Cette solution est valable **uniquement dans un voisinage de  $t = 0$** , ou, plus précisément, tant que les bicaractéristiques  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  (la deuxième passant par le point  $(p_0, 0, (\tilde{q}(p_0))^{\frac{1}{2}})$ ) ne rencontrent pas le bord.

On reprend alors l'égalité (11.5.18) pour calculer la solution du problème de Dirichlet. En effet, on sait que l'opérateur  $B_+$  propage sur la bicaractéristique incluse dans  $\tau = (\tilde{q}(x, \xi))^{\frac{1}{2}}$  et l'opérateur  $B_-$  propage sur la bicaractéristique incluse dans  $\tau = -(\tilde{q}(x, \xi))^{\frac{1}{2}}$ . Ces deux bicaractéristiques se projettent sur le même rayon sur  $\mathbb{R}_x^n$ , la différence essentielle vient du sens du parcours du rayon. Pour calculer la solution de (11.5.16), on reprend les notations précédentes, en considérant  $p_0 \in WF(u_0) \cap WF(u_1)$ ,  $u_0$  et  $u_1$  étant les données au bord du problème (11.5.16). La bicaractéristique  $\gamma$ , correspondant à  $B_-$ , rencontre le bord en  $\tilde{\rho}_0$ , si il existe. La projection de  $\tilde{\rho}_0$  sur  $T^*(\partial\Omega \times \mathbb{R}_t)$  est notée  $\rho_0$ . En écrivant en coordonnées, on a  $p_0 = (x_0, \xi_0)$ , on lui associe  $\tilde{p}_0 = (x_0, \xi_0, 0, \tau_0 = [((\xi_0)_n)^2 + \sigma(Q)(x_0, \xi_0)]^{\frac{1}{2}})$ , alors  $\tilde{\rho}_0 = (x(s_0), \xi(s_0), 2\tau_0 s_0, \tau_0)$  avec  $x_n(s_0) = 0$ , et  $\rho_0 = (x'(s_0), 2\tau_0 s_0, \xi'(s_0), \tau_0)$ .<sup>1</sup> On suppose que le point  $\rho_0$  est un élément de  $\mathcal{H}$ . Microlocalement au voisinage de  $\rho_0$ , on sait que les deux traces générées  $u|_{x_n=0}$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_n}|_{x_n=0}$  sont connues. Pour  $t > t_0$ ,  $u$  n'est pas la solution du problème de Dirichlet, car la trace sur le bord existe et est non nulle. En revanche, tant que le rayon n'a pas rencontré le bord, microlocalement  $u$  est solution du problème de Dirichlet puisque  $u$  est  $C^\infty$  au voisinage du bord, le rayon n'a pas encore touché le bord. La solution du problème de Dirichlet s'écrit

$$\tilde{u} = A_+(h) - A_-(h) \quad (11.5.19)$$

qui vérifie la condition de Dirichlet. D'autre part, on vérifie que la contribution microlocale entrante est donnée par  $A_-(h)$ , et on sait que  $h|_{x_n=0} = u|_{x_n=0}$  et  $T_-(h) = \frac{\partial u}{\partial x_n}|_{x_n=0}$ , en regardant microlocalement au voisinage de  $\rho_0$ . Comme  $h$  est connue, la contribution microlocale de  $u$ , au voisinage d'un rayon réfléchi par le bord  $x_n = 0$  au voisinage de  $\rho_0$ , est donnée par l'égalité (11.5.19). On a ainsi résolu le problème de Dirichlet avec données de Cauchy en  $t = 0$ , dans l'hypothèse où les rayons intersectent transversalement le bord (traduction de la condition  $(x'_0, t_0, \xi'_0, (\tilde{q}(p_0))^{\frac{1}{2}}) \in \mathcal{H}$ ). On remarque que l'écriture totale de la solution est plutôt compliquée, et dépend du fait que les rayons rencontrent le bord ou non. Une traduction simple et intrinsèque de ces idées est présentée dans la section qui suit, et porte le nom de théorème de propagation des singularités réfléchies.

**Remarque** On sait que  $P(A_+(f)) \simeq 0$ . En revanche, on vérifie que  $P = \partial_{x_n}^2 - (-R(x_n, x', \partial_{x'}, \partial t))$ . Le symbole principal de  $R$  est noté  $r_2(x_n, x', \xi', \tau)$ . Traditionnellement on introduit les opérateurs strictement hyperboliques d'ordre 1 égaux à  $P_\pm = \partial_{x_n} \mp Op(-r_2(x_n, x', \xi', \tau))^{\frac{1}{2}}$ . Les opérateurs  $A_+$  et  $A_-$  ne résolvent pas  $P_+$  et  $P_-$  respectivement. En effet, il existe deux opérateurs  $S_\pm$  d'ordre 1 tels que

<sup>1</sup>On note que l'on note parfois les coordonnées dans  $T^*(X \times Y)$  sous les deux formes équivalentes  $T^*X \times T^*Y$  et  $X \times Y \times T_x X \times T_y Y$ .

<sup>2</sup>En effet, on a supposé que le point est hyperbolique, donc le rayon associé à  $B_-$  "provient de  $x_n < 0$ ", ce qui implique que  $B_-(I - R\tilde{T})u_0 - B_-Ru_1$  n'est pas une partie de la solution induite par la réflexion totale sur le bord. Cette raison est heuristique; il faudrait plutôt dire que la solution  $u$  du problème de Cauchy dans le vide ne comprend pas de terme en  $B_-$  si le rayon associé a déjà parcouru, en temps, une partie de l'intérieur de l'objet réfléchissant.

$$P_+ \circ P_- = P + S_+, P_- \circ P_+ = P + S_-.$$

Ainsi il en découle  $P_+[P_-(A_-)] = S_+(A_-)$  et  $P_-[P_+(A_+)] = S_-(A_+)$ , ce qui prouve que  $A_+$  ne résout pas  $P_+$  car  $A_+$  résout  $P$ . La démarche que nous avons utilisé ici n'est pas celle utilisée habituellement pour le problème de Cauchy (comme dans Taylor [93]).

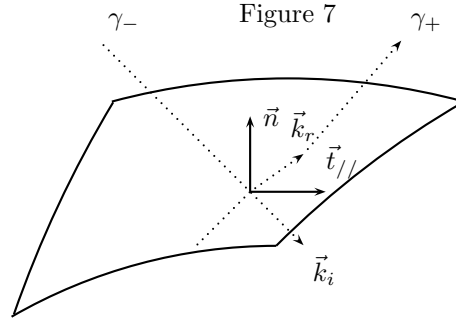
### 11.5.2 Théorème de propagation des singularités réfléchies

On veut montrer le théorème suivant, qui est le théorème de propagation des singularités sur les rayons réfléchis.

**Théorème 11.2** *Soit  $u$  une solution, quand elle existe du problème (11.5.16). Soit  $\gamma$  une bicaractéristique de  $p$ , passant par un point de  $\text{Car } p \cap \{t = 0\}$  se projetant sur  $p_0$  élément de  $WF(u_0) \cup WF(u_1)$ . Soit  $\rho_0$  la projection sur  $T^*(\{x_n = 0\})$  d'un point d'intersection de  $\gamma$  et de  $T^*X \cap \{x_n = 0\}$ .*

*Si  $\rho_0 \in \mathcal{H}$ , on construit les deux bicaractéristiques  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  passant par les deux points de  $(\Pi^{-1}(\rho_0) \cap \text{Car}(p))$ . L'équivalence suivante est vraie*

$$\rho_0 \in WF_b(u) \Leftrightarrow \gamma_+ \subset WF(u) \text{ ou } \gamma_- \subset WF(u) \Leftrightarrow \gamma_+ \subset WF(u) \text{ et } \gamma_- \subset WF(u).$$



**Preuve** On considère les deux points de  $\text{Car } p$  qui se projettent sur  $\rho_0$  (l'un est d'ailleurs  $\tilde{\rho}_0$ ). Ces deux points sont alors  $\rho^+ = (x'_0, 0, 2\tau_0 s_0 \xi'_0, [\sigma(R)(x'_0, 0, \xi'_0, \tau_0)]^{\frac{1}{2}})$  et  $\rho^- = (x'_0, 0, \xi'_0, -[\sigma(R)(x'_0, 0, \xi'_0, \tau_0)]^{\frac{1}{2}})$ . On note  $\gamma_+$  la bicaractéristique pour  $q_+(x, \xi) = \xi_n - [\sigma(R)(x, \xi'_0, \tau_0)]^{\frac{1}{2}}$  issue de  $\rho_+$  et  $\gamma_-$  la bicaractéristique de  $q_-(x, \xi) = \xi_n + [\sigma(R)(x, \xi'_0, \tau_0)]^{\frac{1}{2}}$  issue de  $\rho^-$ .

Grâce à l'étude sur le problème de Cauchy strictement hyperbolique (Section 11.2),  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  sont les bicaractéristiques de  $P$  issues de  $\rho^+$  et de  $\rho^-$  (il serait plus juste de dire "passant par" car il y a probablement à étudier le signe du coefficient elliptique pour être sûr du signe du paramètre de la bicaractéristique). De plus,  $A_+$  et  $A_-$  permettent de construire respectivement deux solutions de  $P$ , associées respectivement à  $q_+$  et à  $q_-$  (sans que cela soit des solutions de  $q_+$  ou de  $q_-$ ). Lorsque  $u \in H^1(x_n > 0)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_n}$  est bien défini. Comme  $u$  vérifie la condition de Dirichlet, on en déduit l'égalité  $PU = \frac{\partial u}{\partial x_n}|_{x_n=0} \delta_{x_n=0}$ .

On suppose  $\gamma_+ \subset WF(A_+(f_+))$  (il suffit, d'après le théorème de propagation sans bord, de supposer que  $\gamma_+ \cap WF(A_+(f_+)) \neq \emptyset$ ). Alors

$$\gamma_+ \cap \{x_n = 0\} \times T_x \mathbb{R}^{n+1} \subset WF(A_+(f_+)) \cap \{x_n = 0\}.$$

On vérifie que  $(\pi$  est la projection d'un élément de  $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \cap \{x_n = 0\}$  sur  $T^*(\mathbb{R}^n)$ )  $WF(f_+) \subset \pi(WF(A_+(f_+)) \cap \{x_n = 0\})$  ceci car  $A_+(f_+)|_{x_n=0} = f_+$ . D'autre part, par décroissance rapide dans un cône autour de  $(x'_0, \xi'_0)$ ,  $\xi'_0 \neq 0$ , si  $(x'_0, \xi'_0) \notin WF(f_+)$ , alors par développement limité au voisinage de  $x_n = 0$ ,  $\mathcal{F}[\theta(x_n)\psi(x')A_+(f_+)(x', x_n)](\xi', \xi_n)$  est à décroissance rapide dans tout cône (petit) construit autour de  $(x'_0, 0, \xi'_0, \xi_n^0)$  car  $\xi'_0 \neq 0$  et donc  $|\xi'|^2 + |\xi_n|^2$



équivalent à  $|\xi'|^2$  dans ce cône. Ainsi  $\pi(WF(A_+(f_+) \cap \{x_n = 0\})) = WF(f_+)$ . Comme  $\gamma_+ \cap \{x_n = 0\} = \{\rho^+\}$ , le point  $\rho_0$  est dans  $WF(f_+)$ . Tout point  $(\rho_0, 0, \xi_n)$  est alors dans  $WF(PU)$ , et de  $WF(PU) \subset WF(U)$ , on en déduit que  $\rho_0 \in WF_b(u) = b(WF(U))$ . On en déduit aussi que  $\rho_0 \in WF(f_-)$  donc  $\gamma_- \subset WF(A_-(f_-))$ , et donc  $\gamma_- \subset WF(U)$ .

Réciproquement, soit  $\rho_0 \notin WF(\frac{\partial u}{\partial x_n}|_{x_n=0})$ . Alors, pour tout  $\xi_n, (\rho_0, 0, \xi_n) \notin WF(\frac{\partial u}{\partial x_n}|_{x_n=0} \otimes \delta_{x_n=0})$ . En particulier, si  $(\rho_0, 0, \xi_n^\pm)$  sont les deux antécédents par  $\Pi$  de  $\rho_0$ , on sait que ces deux points ne sont pas dans  $WF(PU)$  ni dans  $WF(u|_{x_n=0})$ . Par théorème de propagation des singularités hyperboliques sur  $U$ , les deux bicaractéristiques  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  ne rencontrent pas  $WF(U)$  car elles ne sont pas incluses dans  $WF(U)$ , puisque l'intersection est vide sur une demi-bicaractéristique ( $U|_{x_n>0} = u|_{x_n>0}$ ). Ainsi, microlocalement au voisinage de  $\gamma_+$  et de  $\gamma_-$ ,  $U$  est régulière.

On considère un point  $\rho_+^1 \notin WF(A_+(f_+))$ . Soit  $\rho_1$  le point d'intersection entre la bicaractéristique de  $P$  passant par  $\rho_+^1$  et  $\{x_n = 0\}$ . Par application du théorème de propagation des singularités pour un opérateur de Cauchy strictement hyperbolique, la projection  $\tilde{\rho}_1$  de  $\rho_1$  dans  $T^*(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_t)$  n'est pas dans  $WF(f_+)$ .

Comme

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}|_{x_n=0} = \left(-\frac{\partial}{\partial x_n} \circ A_+|_{x_n=0} + \frac{\partial}{\partial x_n} \circ A_-|_{x_n=0}\right)(f_+)$$

on trouve  $\tilde{\rho}_1 \notin WF(\frac{\partial u}{\partial x_n}|_{x_n=0})$ .

D'autre part, on considère  $\rho \notin WF(\frac{\partial u}{\partial x_n})$ . On étudie la possibilité qu'il existe  $\xi_n$  tel que  $(\rho, 0, \xi_n) \in WF(U)$ . Comme  $WF(U) \subset WF(PU) \cup \text{Car } p$ , il vient  $(\rho, 0, \xi_n) \in \text{Car } p$ . On note  $\rho_+$  et  $\rho_-$  les deux points (en supposant que  $\rho$  est hyperbolique. Alors  $WF(U)$  contient soit  $\rho_+$  soit  $\rho_-$ . Dans les deux cas, on en déduit que la bicaractéristique  $\gamma_+$  ou  $\gamma_-$  est contenue dans le front d'onde de  $U$ , et donc que  $\gamma_+ \subset WF(A_+(f_+))$  ou  $\gamma_- \subset WF(A_-(f_-))$ , donc  $\rho \in WF(f_+)$ , ce qui est contradictoire car  $\rho \notin WF(\frac{\partial u}{\partial x_n})$  et que  $\frac{\partial u}{\partial x_n} = (T_+ - T_-)(f_+)$ , et  $T_+ - T_-$  est un opérateur elliptique au voisinage des points hyperboliques. On a ainsi prouvé le théorème de propagation des singularités transverses (Théorème 11.2).

Enonçons enfin un théorème plus puissant que le théorème 11.2, puisqu'il permet de tenir compte du cas *glancing* en partie. Soit  $u$  une distribution prolongeable solution de  $Pu = 0$  dans  $x_n > 0$ , de prolongée  $U$ , et soit  $g_0(u)$  et  $g_1(u)$  les deux distributions de  $\mathcal{D}'_S$  obtenues par le lemme 11.5 telles que

$$PU = g_0(u) \otimes \delta_{x_n=0} + g_1(u) \otimes \delta'_{x_n=0}.$$

**Théorème 11.3** (Hörmander [47]) *Soit  $\rho$  dans la variété caractéristique, telle que  $\exp(sH_p(\rho))$  rencontre  $x_n < 0$ . On note  $\rho_0$  le point d'intersection de  $\exp(sH_p(\rho))$  et de  $\{x_n = 0\}$ . On a l'équivalence*

$$\rho_0 \in WF_b(u) \Leftrightarrow \rho_0 \in WF(g_0(u)) \cup WF(g_1(u))$$

Le lecteur intéressé par de tels résultats peut se reporter, pour une généralisation de ce théorème, au résultat de Melrose et Sjostrand [76] qui est un résultat de propagation des singularités : Soit  $\Sigma_b$  la projection sur  $T^*\partial\Omega$  de  $\text{Car}(\partial_{t^2}^2 - \Delta)$ , et soit  $\Sigma_b^\infty$  l'ensemble des points où  $\partial_{x_l}^l r(0, x', t, \xi', \tau) = 0$  pour tout  $l$  lorsque l'opérateur des ondes en coordonnées redressées est écrit sous la forme  $\partial_{x_n^2}^2 + R(x_n, x', D_{x'}, D_t)$ . On a le théorème de propagation des singularités le long du flot généralisé :

**Théorème 11.4** *Si  $u \in \mathcal{D}'(\Omega^c)$ ,  $(\partial_{t^2}^2 - \Delta)u \in C^\infty(\Omega^c)$  et  $u|_{\partial\Omega} \in C^\infty(\partial\Omega)$ ,  $WF_b(u) \subset \Sigma_b$  et  $WF_b(u)$  est invariant suivant le flot généralisé hamiltonien (défini dans [76]).*

### 11.5.3 Construction de la solution du problème de Dirichlet

Nous nous inspirons de Taylor [93] pour la construction de la solution

Tout d'abord, on considère une solution du problème de Cauchy associé à  $u_0$  et  $u_1$ , notée  $\tilde{u}$ . Cette solution est définie microlocalement au voisinage des bicaractéristiques  $\gamma$  passant par un point de  $WF(u_0) \cup WF(u_1)$ . On la suppose définie pour  $x_n \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  dans un voisinage des rayons issus des points de  $WF(u_0) \cup WF(u_1)$ . On la note  $\tilde{u}$ . On considère le point  $\tilde{\rho}_0 = (x'_0, 0, t_0, \xi'_0, \xi_n^0, \tau_0)$  d'intersection de  $\gamma$  et de  $x_n = 0$ , en remarquant que le point  $(x'_0, t_0, \xi'_0, \tau_0)$  est hyperbolique, que  $\xi_n^0 < 0$  et que l'autre point de la variété caractéristique est  $\tilde{\rho}_0 = (x'_0, 0, t_0, \xi'_0, -\xi_n^0, \tau_0)$ . On définit la bicaractéristique réfléchie qui est  $\tilde{\gamma}$  issue du point  $\tilde{\rho}_0$ . On considère alors le problème mixte

$$\begin{cases} Pv = 0 \\ v|_{x_n=0} = -\tilde{u}|_{x_n=0} \end{cases}$$

où  $v$  est défini dans un voisinage conique des bicaractéristiques  $\tilde{\gamma}$ . Ce problème mixte a une solution (modulo  $C^\infty$ ) notée  $v$ . Alors le front d'onde de  $v$  est concentré dans un voisinage des rayons  $\tilde{\gamma}$  rayons réfléchis issus des rayons incidents provenant de  $\gamma$  issu d'un point de  $WF(u_0) \cup WF(u_1)$ . La solution  $v$  est microlocalement nulle au voisinage de  $WF(u_0) \cup WF(u_1)$  à  $t = 0$ .

La distribution  $\tilde{u} + v$  est une solution, modulo  $C^\infty$  de  $P(\tilde{u} + v) = 0$  dans  $x_n > 0$ ,  $\tilde{u} + v|_{t=0} = u_0$ ,  $\partial_t(\tilde{u} + v) = u_1$  (modulo  $C^\infty$ ), vérifiant  $(\tilde{u} + v)|_{x_n=0} = 0$ .

#### 11.5.4 Analyse du problème mixte

Nous appelons ici (contrairement à la terminologie classique de la littérature de l'analyse microlocale) la condition mixte une condition mêlant  $\partial_t u(x', 0, t)$  et  $\partial_{x_n} u(x', 0, t)$ . On veut résoudre le problème

$$Pu = 0, z(x')\partial_t u(x', 0, t) + \partial_{x_n} u(x', 0, t) = 0.$$

En employant la représentation avec les opérateurs  $A_+$  et  $A_-$ , on étudie une solution sous la forme  $A_+(f_+) + A_-(f_-) = u$ . Ainsi, l'égalité sur le bord conduit à

$$T_+(f_+) + T_-(f_-) + z(x')[\partial_t \circ A_+|_{x_n=0}(f_+) + \partial_t \circ A_-|_{x_n=0}(f_-)] = 0. \quad (11.5.20)$$

On remarque que le symbole de l'opérateur  $\partial_t \circ A_+|_{x_n=0}$ , qui est un opérateur pseudo-différentiel, est égal à  $i\tau$ , car la phase et le symbole ne dépendent pas du temps. L'égalité (11.5.20) devient

$$Op(i\xi_n^+(x', \partial_{x'}\psi_+(x', \xi')) + \partial_{x_n}\sigma_+ + i\tau z(x'))(f_+) = -[T_-(f_-) + z(x')Op(i\tau)(f_-)]$$

Si la condition mixte vérifie la condition de Lopatinskii, par exemple si  $\text{Re}z > 0$ , on a une égalité elliptique et  $f_+$  est connue en fonction de  $f_-$ , ce qui permet d'identifier les deux traces  $u$  et  $\partial_{x_n} u$  en fonction de  $f_-$ . Le résultat de propagation des singularités s'applique alors comme précédemment.

Dans la section suivante, nous présentons des applications des paramétrix de l'équation des ondes. Nous nous focaliserons en particulier sur la démonstration rigoureuse, en terme de propagation des singularités, des lois de Snell-Descartes (réflexion transverse d'une onde scalaire incidente).

Nous analysons en premier la notion de front d'onde, et nous introduisons des fonctions adaptées à cette notion : les ondes conormales. Nous utilisons cette représentation pour construire de manière explicite le front d'onde de l'onde réfléchie, en utilisant les opérateurs  $A_+$  et  $A_-$ , pour une condition de Dirichlet.

## 11.6 Le coefficient de réflexion

Nous voulons ici calculer le coefficient de réflexion induit par l'écriture de la condition aux limites. Pour le calculer plus facilement, nous introduisons une représentation de l'onde

incidente qui généralise la notion d'onde plane incidente. Il s'agit de l'onde conormale. Elle est caractérisée par un symbole et une phase  $t - \theta_i(x', x_n)$ . Cette phase est nulle sur le front étudié (généralisation de l'hyperplan dans le cas d'une onde plane).

### 11.6.1 Onde conormale

Le bon outil pour étudier la propagation d'une onde associée à un front d'onde mis sous la forme  $t = \theta_i(x)$  est une onde conormale. Nous en donnons la définition et nous en étudions les propriétés :

**Définition 11.8** Une onde  $u(x, t)$  est une distribution conormale par rapport à la surface  $\Sigma = \{t = \theta(x)\}$  quand il existe un symbole  $\sigma(x, \tau) \in S^{m+\frac{n-1}{4}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, C)$  tel que

$$u(x, t) = \int_0^\infty e^{i\tau(t-\theta_i(x))} \sigma(x, \tau) d\tau.$$

avec

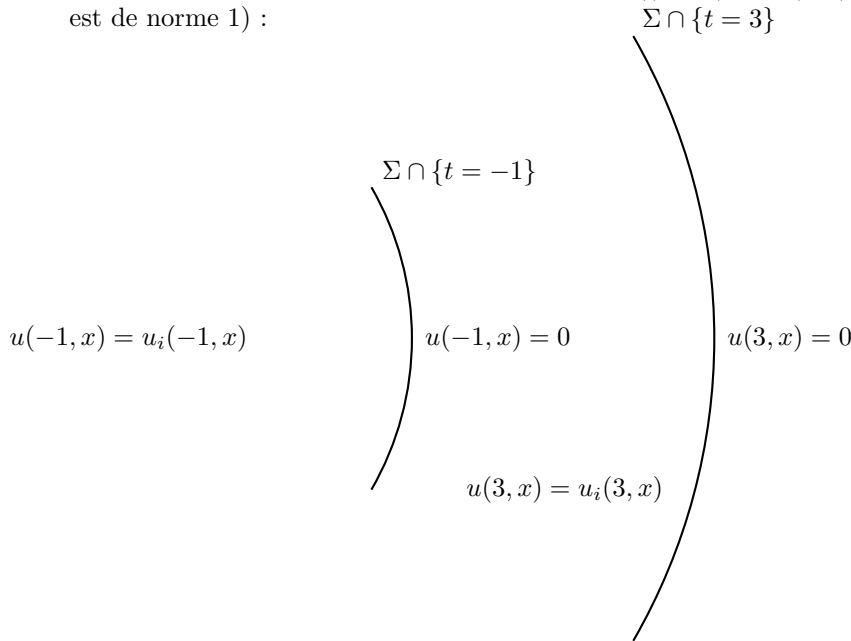
$$\sigma(x, \tau) \simeq \tau^\alpha \sum_j \sigma^j(x) \tau^{-j}.$$

Cette définition est une application de la définition 18.2.6 et du théorème 18.2.8 de [47].

Remarque : on dit que l'onde est conormale analytique lorsque le symbole  $\sigma(x, \tau)$  est holomorphe dans  $\Im\tau < 0$  et qu'il vérifie

$$\sup_{s \geq 0} \int_0^\infty (1 + |\tau|^2)^{-\beta/2} |\sigma(x, \tau - is)|^2 d\tau < \infty.$$

Nous pouvons les représenter de manière imagée dans la figure suivante, la fonction  $\theta_i(x)$  pouvant alors se calculer et elle est égale à  $-5 + ((x+5)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$  (on vérifie que son gradient est de norme 1) :



Nous vérifions que les ondes conormales sont  $C^\infty$  hors du front  $\Sigma$ .

En effet, nous divisons l'intégrale en  $\tau$  en un voisinage fixe de  $\tau = 0$  et en son complémentaire. Dans son complémentaire, la seule majoration  $|\sigma(\tau)| \leq \tau^{-1-\varepsilon}$  conduit à une intégrale absolument convergente.

On se donne un ordre de troncature  $N$  de la série asymptotique tel que  $\alpha - N < -1$ . Alors on peut écrire, sur tout compact  $K$  en  $x$ , la majoration

$$|\sigma(x, \tau) - \sigma^n(x, \tau)| \leq C_{N,K} \tau^{-N}$$

qui conduit à

$$\int e^{i\tau(t-\theta(x))} (\sigma(x, \tau) - \sigma^N(x, \tau)) d\tau$$

absolument convergente.

Si on considère une dérivée d'ordre  $m$  de  $\int e^{i\tau(t-\theta(x))} (\sigma(x, \tau) - \sigma^{N+m}(x, \tau)) d\tau$ , cette dérivée est aussi associée à une intégrale absolument convergente.

On se fixe un ordre de dérivation  $m$ . On vérifie alors par intégrations par parties la relation, valable hors de  $t = \theta(x)$  :

$$u^{N+m}(x, t) = \int e^{i\tau(t-\theta(x))} \sigma^{N+m}(x, \tau) d\tau = \left( \frac{i}{t-\theta(x)} \right)^p \int e^{i\tau(t-\theta(x))} \partial_{\tau^p}^p (\sigma^{N+m}(s, \tau)) d\tau.$$

Cette relation indique, en choisissant  $p > \alpha + 1$ , que l'intégrale définissant  $u^{N+m}$  est absolument convergente hors de  $t = \theta(x)$ . On remarque aussi que

$$\partial_t^l \partial_{x^\beta}^{|\beta|} u^{N+m}(x, t) = \int e^{i\tau(t-\theta(x))} \tau^{l+|\beta|} S_{\alpha,\beta}(\sigma^{N+m})(x, \tau) d\tau,$$

et le choix  $p > l + \alpha + |\beta| + 1$  permet de conclure à l'existence dans  $C^0$  de l'intégrale définissant la dérivée de  $u^{N+m}$ . La fonction  $u$  est somme de deux fonctions élément de  $C^m$  hors de  $t = \theta(x)$ .

De plus, le caractère holomorphe de  $\sigma(x, \tau)$  permet d'écrire l'intégrale en déformant le contour dans le plan complexe, sur  $\{\tau - is, s > 0\}$ . On vérifie alors que

$$u(x, t) = e^{s(t-\theta_i(x))} \int_0^\infty e^{i\tau(t-\theta_i(x))} \sigma(x, \tau - is) d\tau.$$

La majoration uniforme de  $\sigma(x, \tau - is)$  et le fait que  $e^{-s(\theta_i(x)-t)}$  tende vers 0 lorsque  $s$  tend vers  $+\infty$  pour  $\theta_i(x) - t > 0$  permet d'obtenir que  $u(x, t)$  est nulle pour  $t < \theta_i(x)$ . La fonction  $u(x, t_0)$  est supportée dans le demi espace caractérisé par la frontière  $t_0 = \theta_i(x)$  ne contenant pas  $\nabla_x \theta_i(x_0), \theta_i(x_0) = t_0$ .

Nous donnons deux exemples

**Somme de Dirac** On suppose que  $\alpha$  est un entier positif  $N_0$ . On vérifie que, pour  $\phi$  à support compact dans  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int \int e^{i\tau(t-\theta(x))} \tau^l d\tau \phi(x, t) dx dt &= i^{-l} \int dx \int d\tau \int dt \partial_t^l (e^{i\tau(t-\theta(x))}) \phi(x, t) \\ &= i^l \int dx \int d\tau \int dt e^{i\tau(t-\theta(x))} \partial_t^l \phi(x, t) \\ &= 2\pi i^l \int dx \partial_t^l \phi(x, \theta(x)) \end{aligned}$$

La distribution  $\int e^{i\tau(t-\theta(x))} \tau^l$  est donc la distribution  $2\pi i^l \delta_{t=\theta(x)}^{(l)}$  lorsque  $l$  est positif ou nul. Le cas  $l = 0$  donne ce que l'on appelle un potentiel de simple couche, le cas  $l = 1$  donne un potentiel de double couche.

Pour fixer les idées et simplifier les notations, on suppose que  $\theta_i(0) = 0$  et que le point  $(0, \nabla_x \theta_i(0), -1)$  est un point hyperbolique de  $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_t$ .

**Front d'onde** On décompose  $\sigma_i$  en  $\sigma_i^N$  et  $r_i^N$ . La  $m$ -ième dérivée en  $t$  (ou en  $x$ ) de  $u_i^N$  correspond à un symbole en  $\tau^{\alpha+m}$ . On effectue alors suffisamment d'intégrations par parties (licites sur  $t \neq \theta_i(x)$ ) pour que l'intégrale en  $\tau$  soit absolument convergente en  $\tau = +\infty$ . Le terme  $r_i^N$  se traite de la même façon. On en déduit que  $u_i(x, t)$  est  $C^\infty$  hors de  $t = \theta_i(x)$ .

Le front d'onde de la distribution  $u_i$  est alors concentré sur  $t = \theta_i(x)$ . On localise  $u_i$  grâce à  $\chi(x, t)$  au voisinage d'un point  $(x_0, t_0)$  tel que  $t_0 = \theta_i(x_0)$ . La transformée de Fourier de  $\chi u_i$  est :

$$\hat{u}(\xi, k) = \int \int e^{i(\tau(t-\theta_i(x)) - kt - \xi x)} \sigma_i(x, \tau) \chi(x, t) dx dt d\tau$$

On vérifie que la dérivée en  $(x, t, \tau)$  de la phase dans cette intégrale est  $-\xi - \tau \nabla_x \theta_i(x) = 0$ ,  $\tau - k = 0$ ,  $t - \theta_i(x) = 0$ . La phase présente un point critique en  $t = \theta_i(x)$ ,  $\xi = -k \nabla_x \theta_i(x)$ . Ceci implique que

$$WF(u_i) \subset \{(x, \theta_i(x), -k \nabla_x \theta_i(x), k), k \in \mathbb{R}^*\}.$$

**Solution** On considère l'opérateur  $P$  étudié précédemment

$$P = P_0 - \partial_{t^2}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + R_2(x_n, x', \frac{\partial}{\partial x'}) + R_1(x_n, x', \frac{\partial}{\partial x'}) + R_0(x_n, x') - \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

La première égalité que nous vérifions est

$$P \left( \int e^{i\tau(t-\theta_i(x))} \sigma_i(x, \tau) d\tau \right) = \int d\tau e^{i\tau t} (P_0 + \tau^2) (e^{-i\tau \theta_i(x)} \sigma_i(x, \tau)).$$

Ceci correspond à l'application de la transformée de Fourier en temps à  $v = Pu$ .

On utilise alors la section 1.5. On trouve explicitement ( $R_2$  est une forme bilinéaire sur le fibré tangent  $T_{x'} \mathbb{R}^{n-1}$  à paramètre  $x_n$  et  $R_1$  est un vecteur de ce même fibré tangent) :

$$\begin{aligned} & e^{i\tau \theta_i(x)} P_0 (e^{-i\tau \theta_i(x)} \sigma_i(x, \tau)) \\ &= \\ & -\tau^2 \left[ \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial x_n} \right)^2 + R_2(\nabla_{x'} \theta_i, \nabla_{x'} \theta_i) \right] \sigma_i(x, \tau) \\ & -i\tau \left[ 2 \frac{\partial \theta_i}{\partial x_n} \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_n} + 2R_2(\nabla_{x'} \theta_i, \nabla_{x'} \sigma_i) + (P_0 - R_0)(\theta_i) \sigma_i \right] \\ & + P_0 \sigma_i. \end{aligned} \tag{11.6.21}$$

On vérifie qu'il existe  $\theta_i$  solution de l'équation eikonale

$$\left( \frac{\partial \theta_i}{\partial x_n} \right)^2 + R_2(x_n, x') \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial x'}, \frac{\partial \theta_i}{\partial x'} \right) = 1$$

et  $\sigma_i$  solution des équations de transport

$$2 \frac{\partial \theta_i}{\partial x_n} \frac{\partial \sigma_i^l}{\partial x_n} + \sum_j \partial_{x_j} R \partial_{x_j} \sigma_i^l + \partial_\tau R \partial_t \sigma_i^l + (P_0 - R_0)(\theta_i) \sigma_i^l = i P_0 (\sigma_i^{l-1})$$

### 11.6.2 La phase et l'amplitude après réflexion

On se donne une onde  $u_i(x, t)$ , conormale analytique par rapport à la surface d'équation  $t = \theta_i(x)$ , supportée pour  $t = -T$  dans la partie de  $\mathbb{R}^3$  ne contenant pas l'ouvert  $\Omega$ . Dans ces conditions, par propagation à vitesse finie pour l'équation des ondes, il existe un point de  $\partial\Omega$ , noté  $x_0$ , tel que  $(x_0, \theta_i(x_0), \nabla \theta_i(x_0), -1)$  soit dans le front d'onde de  $u_i$  et que  $WF(u_i) \cup \partial\Omega \times \mathbb{R}^3$  soit vide pour  $t < \theta_i(x_0)$ . Nous démontrons dans ce paragraphe la proposition :

**Proposition 11.7** *Soit*

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau(t-\theta_i(x))} \sigma_i(x, \tau) d\tau$$

une solution de  $(P_0 - \partial_{t^2}^2)u_i = 0$ .

- Il existe une fonction  $\theta_r(x', x_n)$ , telle que

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial\theta_r}{\partial x_n}\right)^2 + R_2(x_n, x')\left(\frac{\partial\theta_r}{\partial x'}, \frac{\partial\theta_r}{\partial x'}\right) = 1 \\ \theta_r(x', 0) = \theta_i(x', 0) \\ \frac{\partial\theta_r}{\partial x_n}(x', 0) = -\frac{\partial\theta_i}{\partial x_n}(x', 0). \end{cases}$$

Cette fonction  $\theta_r(x)$  vaut

$$\theta_r(x) = \theta_i(y'_c, 0) + y'_c \eta'_c - \psi_+(x, \eta'_c)$$

où  $y'_c, \eta'_c$  sont solution du système

$$\begin{cases} y'_c = \nabla_{\xi'} \psi_+(x, \eta'_c) \\ \eta'_c = -\partial_{y'} \theta_i(y'_c, 0). \end{cases}$$

La solution  $u(x, t) = u_i(x, t) + u_r(x, t)$  de

$$\begin{cases} (P_0 - \partial_{t^2}^2)u = 0 \\ u|_{t<0} = u_i|_{t<0} \\ (D), (N), (M) \end{cases}$$

(où la condition (D), (N), ou (M) est écrite sur  $u$ ) est de la forme

$$u_r(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{i\tau(t-\theta_r(x))} \sigma_r(x, \tau),$$

où

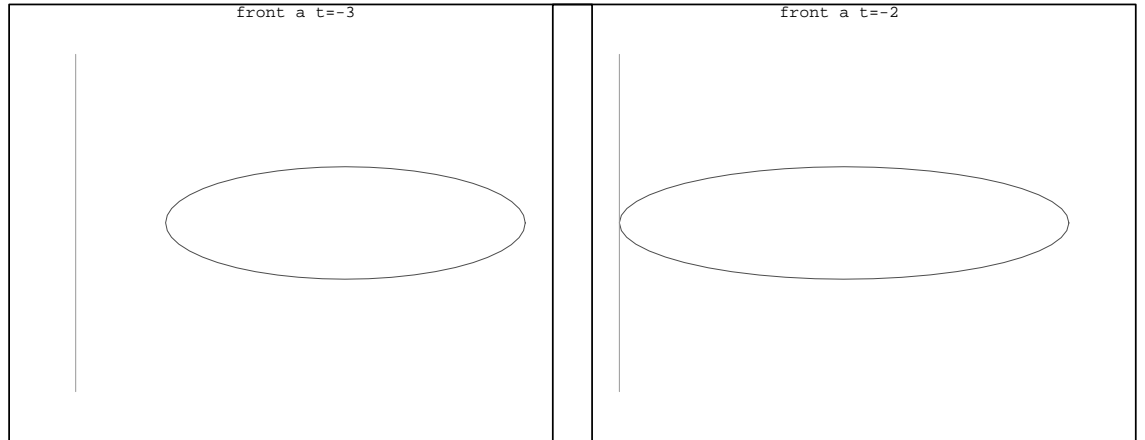
$$\sigma_r^0(x', 0) = R_{(D),(N),(M)} \sigma_i^0(x', 0).$$

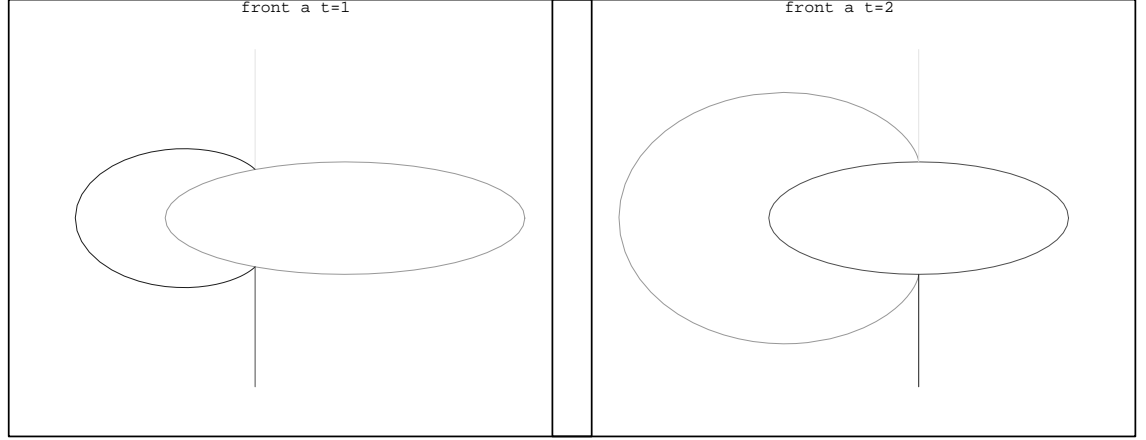
Dans cette égalité

$$\begin{aligned} R_{(D)} &= -1 \\ R_{(N)} &= 1 \\ R_{(M)}(x') &= \frac{\frac{\partial\phi_+}{\partial x_n}(x', 0) - z(x')}{\frac{\partial\phi_+}{\partial x_n}(x', 0) - z(x')} = \frac{\xi_n^+(x', \frac{\partial\psi_+}{\partial x'}(x', 0)) - z(x')}{\xi_n^+(x', \frac{\partial\psi_+}{\partial x'}(x', 0)) - z(x')}. \end{aligned}$$

Nous représentons dans l'ensemble de figures qui suivent la réflexion d'un front par une ellipse. Ces dessins proviennent de l'application des lois de l'optique géométrique.

Figure 8





On effectue un changement de coordonnées semi-géodésiques, qui correspond à ce point  $x_0$  et on effectue une translation en temps, pour que le temps  $t'$  soit  $t' = t - \theta_i(x_0)$ . Le point  $x_0$  sera alors associé au point  $(0, 0)$  en coordonnées semi-géodésiques.

On suppose donc que le front d'onde de  $u_i$  contient le point

$$\rho_0^- = (0, 0, \nabla_{x'}\theta_i(0), \nabla_{x_n}\theta_i(0), -1)$$

et que, pour fixer les idées, ce point est le premier du bord atteint par  $u_i$ . On cherche la solution du problème

$$\begin{cases} Pu = 0, x_n > 0 \\ u|_{x_n=0} = 0 \\ u - u_i \in C^\infty, t < -T \end{cases}$$

Nous relient alors ce calcul classique de résolution des équations de Helmholtz au calcul fait sur  $A_+$  et  $A_-$  en considérant la trace de la solution  $u_i$  sur  $x_n = 0$  et en appliquant l'opérateur  $A_+$  pour trouver la solution réfléchiée et l'opérateur  $A_-$  pour obtenir la solution incidente.

En effet, écrivons la solution de ce problème sous la forme  $u = u_i + u_r$ . Le problème devient :

$$\begin{cases} Pu_r = 0, x_n > 0 \\ u_r|_{x_n=0} = -u_i|_{x_n=0} \\ u_r \in C^\infty, t < -T \end{cases}$$

L'ensemble des points de  $T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_t) \cap \partial\Omega \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  qui se projettent sur  $\rho_0 = (0, \nabla_{x'}\theta_i(0, 0), -1)$  est caractérisé par  $\xi_n^2 = (\nabla_{x_n}\theta_i(0, 0))^2$ . Lorsque  $\nabla_{x_n}\theta_i(0, 0)$  est non nul,  $\rho_0$  est un point hyperbolique pour  $p$ . Nous nous plaçons dans cette hypothèse. Remarquons que nous avons utilisé ici le fait que  $\tau(t - \theta_i(x', x_n))$  est solution de l'équation eikonale. Notons aussi que  $WF(u_i - A_-(u_i|_{x_n=0})) = \emptyset$  dans un voisinage de tous les points de  $\gamma_-(\rho_0^-) = \{\exp(sH_p(\rho_0^-)), s < 0\}$ . La bicaractéristique pour  $P$  de symbole principal

$$p = \tau^2 - \xi_n^2 - R_2(x_n, x')(\xi', \xi')$$

issue de  $\rho_0^-$  est caractérisée par le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{t} = 2\tau \\ \dot{\tau} = 0 \\ \dot{x}_n = -2\xi_n \\ \dot{\xi}_n = \partial_{x_n} R_2(\xi', \xi') \\ \dot{x}' = -2R_2(\xi') \\ \dot{\xi}' = \partial_{x'} R_2(\xi', \xi') \end{cases}$$

avec condition initiale

$$t(0) = 0, \tau(0) = -1, x_n(0) = 0, \xi_n(0) = \nabla_{x_n} \theta_i(0, 0), x'(0) = 0, \xi'(0) = -\nabla_{x'} \theta_i(0, 0).$$

En particulier  $\tau(s) = -1$ ,  $t(s) = -2s$ . On vérifie ainsi que la dernière relation du système, qui est  $u_r \in C^\infty$ ,  $t < -T$  implique

$$WF(u_r) \cap \{-2s < -T, \exp(sH_{-p}(\rho_0^-))\} = \emptyset$$

ou encore

$$WF(u_r) \cap \{s \geq 0, \exp(sH_p(\rho_0^-)), s > T/2\} = \emptyset.$$

En termes imagés,  $u_r$  n'a pas de front d'onde sur la bicaractéristique rentrante de  $P$  arrivant au point  $\rho_0^-$ .

Ceci se traduit par le fait que, microlocalement au voisinage de cette bicaractéristique rentrante  $u_r$  est nul. On définit la bicaractéristique sortante associée au point

$$\rho_0^+ = (0, \nabla_{x'} \theta_i(0), -\nabla_{x_n} \theta_i(0), -1).$$

Par l'analyse sur les opérateurs  $A_+$  et  $A_-$ , lorsque le point  $(0, \nabla_{x'} \theta_i(0), -1)$  est dans le front d'onde de  $f$ , alors la bicaractéristique  $\gamma_+$  est contenue dans le front d'onde de  $A_+(f)$ .

Microlocalement au voisinage de  $\gamma_+$ , on a prouvé que  $u_r = -A_+(u_i|_{x_n=0})$ .

On vérifie que  $u_r$  est accessible de deux façons : un théorème de phase stationnaire et un calcul de solution réfléchie pour des équations eikonale et de transport. La deuxième vision est immédiate. Pour la première, on rappelle l'existence de  $\sigma_+$  et de  $\psi_+$  tels que

$$A_+(f)(x) = \int \int e^{i\psi_+(x, \xi') - iy' \xi'} \sigma_+(x, \xi') f(y') dy' d\xi'$$

On remplace  $f(y')$  par  $-e^{-i\tau\theta_i(y', 0)} \sigma_i(y', 0, \tau)$ . On obtient

$$u_r(x, \tau) = \int \int e^{i\psi_+(x, \xi') - iy' \xi' - \tau\theta_i(y', 0)} \sigma_+(x, \xi') \sigma_i(y', 0, \tau) dy' d\xi'.$$

Un changement de variable permet de se ramener à  $\eta' \tau = \xi'$ . Le théorème de la phase stationnaire en  $(y', \eta')$  donne

$$\begin{cases} -\eta'_c - \nabla_{y'} \theta_i(y'_c, 0) = 0 \\ \nabla_{\xi'} \psi_+(x, \eta'_c) - y'_c = 0 \end{cases}$$

Il est clair que pour  $x = 0$  ce système admet pour solution  $y'_c = \eta'_c = 0$ . Pour  $x_n$  petit, on vérifie  $\psi_+(x, \eta') = x' \eta' + x_n g(x, \eta')$  donc  $\nabla_{\eta'} \psi_+(x, \eta') = x' + x_n \nabla_{\eta'} g(x, \eta')$ . On vérifie donc que le point critique est de la forme

$$\begin{cases} y'_c = x' + x_n \nabla_{\eta'} g(x, \eta'_c) \\ \eta'_c = -\nabla_{y'} \theta_i(y'_c, 0) \end{cases}$$

Pour  $x_n = 0$ , on retrouve  $y'_c = x'$  et  $\eta'_c = -\nabla_{y'} \theta_i(x', 0)$ . La valeur critique de la phase ainsi obtenue est  $x' \cdot \eta' - x' \eta' - \theta_i(x', 0) = -\theta_i(x', 0)$ .

Pour  $x_n > 0$ , l'équation donnant  $y'_c$  est

$$y'_c = x' + x_n \nabla_{\eta'} g(x, -\nabla_{y'} \theta_i(y'_c))$$

Cette équation implicite en  $y'_c$  est résoluble dans un voisinage de  $x_n = 0$  puisque sa différentielle est de la forme  $Id + x_n \text{Hess}_{\eta'} g \text{Hess}_{y'} \theta_i$ , inversible si  $x_n$  est assez petit. Ce système admet donc une solution unique  $(y'_c(x), \eta'_c(x))$ . La valeur critique est notée  $-\theta(x)$  avec

$$\theta(x) = \theta_i(y'_c(x), 0) + y'_c(x) \cdot \eta'_c(x) - \psi_+(x, \eta'_c(x))$$

On contrôle que le Hessien est non nul et que

$$\begin{aligned} \nabla_x \theta(x) &= [\nabla_{y'} (\theta_i(y', 0)) + \eta'_c(x)] \cdot \frac{dy'_c}{dx} + [y'_c(x) - \nabla_{\eta'} \psi_+(x, \eta'_c(x))] \frac{d\eta'_c}{dx} - \nabla_x \psi_+(x, \eta'_c(x)) \\ &= -\nabla_x \psi_+(x, \eta'_c(x)) \end{aligned}$$



La phase  $\theta(x)$  est, on le voit, solution de l'équation eikonale associée à  $A_+$ . Nous avons donc construit la phase  $\theta_r$  attendue pour l'onde réfléchie par  $x_n = 0$ . Nous résumons dans

**Lemme 11.6** *Soit  $\theta_i(x', x_n)$  la fonction caractérisant le front de l'onde incidente. Soit  $\psi_+(x, \eta')$  la phase caractéristique de l'opérateur intégral de Fourier sortant  $A_+$ . On désigne par  $(y'_c, \eta'_c)$  la solution de*

$$\begin{cases} -\eta'_c - \nabla_{y'} \theta_i(y'_c, 0) = 0 \\ \nabla_{\xi'} \psi_+(x, \eta'_c) - y'_c = 0 \end{cases}$$

Alors

$$\theta_r(x) = \theta_i(y'_c, 0) + y'_c \eta'_c - \psi_+(x, \eta'_c).$$

Il s'agit maintenant d'identifier le coefficient de réflexion. Pour ce faire, on écrit

$$u_i(x, t) = A_-(u_i|_{x_n=0}), u_r = -A_+(h(x', t)).$$

La condition aux limites de Dirichlet donne  $u_i + u_r = 0$ . On obtient ainsi

$$A_-(u_i|_{x_n=0})|_{x_n=0} - A_+(h(x', t))|_{x_n=0} = 0.$$

Les opérateurs  $A_-$  et  $A_+$  sont l'identité sur  $x_n = 0$ , donc  $h(x', t) = u_i(x', t)$ . On en déduit immédiatement

$$R_{(D)}(x', \tau) = -1.$$

La condition aux limites de Neumann est  $\partial_{x_n}(u_i + u_r)|_{x_n=0}$ . Elle se traduit donc par

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \circ A_-(u_i|_{x_n=0})|_{x_n=0} - \frac{\partial}{\partial x_n} \circ A_+(h)|_{x_n=0}.$$

On utilise alors  $\partial_{x_n} \phi_+ = -\partial_{x_n} \phi_-$ . Comme nous sommes au voisinage d'un point hyperbolique, cette quantité est non nulle. Il vient alors, en regardant l'asymptotique en  $\tau$ , que

$$\frac{\partial \phi_+}{\partial x_n}(x', 0)[\sigma_i^0(x', 0) + \tilde{h}(x')] = 0.$$

Comme  $\sigma_r$  est obtenu en calculant  $A_+(\tilde{h}e^{-i\tau\theta_r(x', 0)})$  et que  $A_+$  est l'identité sur  $x_n = 0$ , on trouve

$$R_{(N)} = 1.$$

Enfin, la condition aux limites mixte s'écrit

$$\partial_{x_n}(u_i + u_r)|_{x_n=0} + z(x')\partial_t(u_i + u_r)|_{x_n=0}.$$

On remplace alors  $\partial_t$  par  $i\tau$ ,  $\partial_{x_n} A_+|_{x_n=0}$  par  $-i\tau \frac{\partial \phi_+}{\partial x_n}(x', 0)$  et  $\partial_{x_n} A_-$  par  $i\tau \frac{\partial \phi_+}{\partial x_n}(x', 0)$ . On obtient

$$-i\tau \frac{\partial \phi_+}{\partial x_n}(x', 0)\sigma_i^0(x', 0) - i\tau \frac{\partial \phi_+}{\partial x_n}(x', 0)h(x') + i\tau z(x')[\sigma_i(x', 0) - h(x')] = 0$$

On obtient ainsi

$$\sigma_i^0(x', 0) = \frac{z(x') + \frac{\partial \phi_+}{\partial x_n}(x', 0)}{z(x') - \frac{\partial \phi_+}{\partial x_n}(x', 0)} h(x').$$

Le coefficient de réflexion s'en déduit immédiatement

$$R_{(M)}(x') = \frac{\frac{\partial \phi_+}{\partial x_n}(x', 0) - z(x')}{\frac{\partial \phi_+}{\partial x_n}(x', 0) + z(x')}.$$

Nous résumons dans

**Lemme 11.7** *Le coefficient de réflexion en fonction de la condition aux limites est*

$$R_{(D)} = -1$$

$$R_{(N)} = 1$$

$$R_{(M)}(x') = \frac{\frac{\partial \phi_+}{\partial x_n}(x', 0) - z(x')}{\frac{\partial \phi_+}{\partial x_n}(x', 0) + z(x')}.$$

*On reconnaît les cas limites  $z = 0$  (qui permet de trouver (N)) et  $z = \infty$  (qui permet de trouver (D)).*

## Chapitre 12

# Les valeurs propres du Laplacien (C. Bardos)

La détermination des valeurs propres du Laplacien, ou plus généralement d'un opérateur elliptique sur une variété compacte avec ou sans bord est un problème de mathématiques "pures" qui trouve de nombreuses applications aussi bien en mathématiques fondamentales, théorie des nombres ou géométrie, qu'en physique (comme cela est expliqué dans l'introduction de l'article de Balian et Bloch (1970) [7]), physique nucléaire et électromagnétisme, et enfin dans les sciences de l'ingénieur (acoustique d'une salle de concert par exemple).

Les premiers résultats datent de 1911 et sont dûs à Hermann Weyl, ils donnent un équivalent du comportement asymptotique de ces valeurs propres.

Plusieurs idées sont apparues par la suite ; le noyau de la chaleur s'est révélé être un outil commode (Minakshisundaram et Pleijel (1949) [78]) et le lien avec la géométrie riemannienne s'est imposé (Mac Kean et Singer (1967) [71]).

Mais comme l'ont observé Keller et Rubinow (1960) [53] ainsi que Balian et Bloch [7], la distribution des valeurs propres présente des oscillations dont le noyau de la chaleur ne peut pas rendre compte. Ces oscillations sont dues à la contribution des géodésiques fermées. Il s'agit donc d'effets globaux. Ainsi les opérateurs intégraux de Fourier se sont avérés être l'outil le plus adapté à la mise en forme rigoureuse de ces observations.

Sans prétendre à la nouveauté, on se propose dans le présent chapitre d'illustrer ces idées et de montrer comment la sophistication des outils va de pair avec la précision des résultats. Simultanément, on essaie de faire preuve "d'économie" dans cette présentation et de n'introduire les outils que lorsqu'ils deviennent indispensables à l'amélioration des résultats.

### 12.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'évaluation des valeurs propres d'un opérateur elliptique du second ordre, soit dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$ , avec pour fixer les idées la condition de Dirichlet :

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

soit sur une variété compacte sans bord.

Les informations les plus élémentaires sur ce comportement peuvent s'obtenir par un calcul direct (principe du maximum) puis grâce à une série de Lévy (qui s'interprète comme un calcul pseudo-différentiel). Pour accéder aux résultats "optimaux" il est nécessaire de tenir compte de la géométrie globale du problème et donc d'utiliser des Opérateurs Intégraux de Fourier. C'est cette démarche que l'on se propose d'illustrer dans le présent chapitre.

On désigne donc par  $L$  un opérateur du second ordre qui s'écrit sous la forme :

$$Lu = - \sum_{ij} \partial_i (a^{ij}(x) \partial_j u) + \sum_i b^i \partial_j + c = -\nabla_x \cdot (A(x) \nabla_x u) + B(x) \nabla_x u + c(x)u \quad (12.1.1)$$

où  $A$  désigne une matrice symétrique réelle définie positive,  $B \cdot \nabla_x$  un champ de vecteurs et  $c$  une fonction scalaire.

On suppose qu'il existe sur  $\Omega$  une densité  $0 < Y(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$  qui symétrise  $L$  c'est-à-dire que pour tout couple de fonctions  $(u, v) \in D(L) \times D(L)$  on a :

$$\int_{\Omega} Lu(x)v(x)Y(x)dx = \int_{\Omega} u(x)Lv(x)Y(x)dx, \int_{\Omega} Lu(x)u(x)Y(x)dx \geq 0 \quad (12.1.2)$$

Dans ce cas il existe des bases Hilbertiennes de  $L^2(\Omega)$  formées de fonctions propres  $w_k(x)$  de l'opérateurs  $L$  :

$$Lw_k(x) = \lambda_k w_k(x) \text{ dans } \Omega, w_k(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ si } \Omega \text{ n'est pas une variété sans bord}$$

On désigne donc par

$$0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k$$

la suite de ces valeurs propres *comptées avec leur multiplicité*. Cette suite tend bien sûr vers l'infini avec  $k$  et on veut obtenir des informations sur son comportement asymptotique lorsque  $k$  tend vers l'infini.

Il s'agit donc d'une analyse à hautes fréquences (ce qui rentre bien dans la théorie asymptotique). De plus dans de nombreuses applications physiques on sera amené à considérer des valeurs "pas trop grandes" et ainsi la précision du comportement asymptotique devient une issue importante.

Pour simplifier l'exposé et pour mettre encore plus en évidence le rôle de la géométrie, on se limite au cas où  $L$  s'identifie au Laplacien sur  $\Omega$  muni de la structure Riemannienne ad hoc. En fait, à cause de l'aspect haute fréquence, seule la partie principale de l'opérateur intervient. On peut donc toujours se ramener au cas du laplacien qui contient les aspects géométriques de la théorie des OIF, ainsi on suppose que dans un système de coordonnées locales cet opérateur s'écrit sous la forme (invariante par changement de coordonnées riemannien) :

$$Lu = -\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{ij} \partial_i (a^{ij}(x) \sqrt{\det g} \partial_j u) \quad (12.1.3)$$

Dans (12.1.3) intervient la matrice symétrique définie positive :  $A(x) = \{a^{ij}(x)\}$  associée au symbole principal de l'opérateur  $(A(x)\xi, \xi)$ ,  $g(x)$  est la matrice qui définit la structure riemannienne, elle est reliée à  $A(x)$  par la formule (dédue du calcul variationnel via la transformation de Legendre)  $g(x) = (A(x))^{-\frac{1}{2}}$ . L'élément de volume (cf (12.1.2) ) est donc

$$dv(x) = Y(x)dx = \sqrt{\det g(x)}dx$$

formule qui identifie les densités d'ordre  $\frac{1}{2}$  et les fonctions selon l'isomorphisme :

$$f \mapsto f \sqrt{\det g(x)}dx$$

Pour évaluer le comportement asymptotique des valeurs propres il est commode d'introduire plusieurs objets :

1. La fonction de dénombrement :

$$N(\lambda) = \text{Card}\{\lambda_k \leq \lambda\}$$

2. La trace de l'opérateur de la chaleur

$$\text{Trace } e^{-tL} = \sum_k e^{-t\lambda_k} \quad (12.1.4)$$

3. La fonction de dénombrement des fréquences :

$$\tilde{N}(\tau) = N(\tau^2)$$

4. La trace de l'opérateur des ondes

$$\text{Trace } \cos t\sqrt{L} = \sum_k e^{\pm it\sqrt{\lambda_k}}. \quad (12.1.5)$$

Le terme 1 dans le second membre de (12.1.5) correspond à la valeur propre 0 qui est présente (et simple) dans le cas d'un ouvert sans bord, elle disparaît dans le cas d'un ouvert à bord et bien sûr n'influe pas sur le comportement asymptotique des valeurs propres. La fonction de dénombrement est l'inverse de la fonction  $k \mapsto \lambda_k$ ; il n'est pas évident et cela sera prouvé ci dessous que les expressions figurant au membre de droite de (12.1.4) et (12.1.5) soient bien définies mais il convient d'observer que, au moins formellement, la trace de l'opérateur de la chaleur est la transformée de Laplace de la distribution

$$\sum_k \delta(\lambda - \lambda_k) = \frac{d}{d\lambda} N(\lambda)$$

tandis que la trace de l'opérateur des ondes est la transformée de Fourier de la distribution

$$\sum_k \delta(\tau \pm \sqrt{\lambda_k})$$

et que l'on a enfin :

$$\tilde{N}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\tau d\tau \int_{-\infty}^\infty e^{it\tau} \{ \text{Trace } \cos t\sqrt{L} \} dt.$$

L'objet le plus facile à étudier est le noyau de la chaleur et on prouvera ci dessous on a pour  $t > 0$  et voisin de zéro un développement asymptotique de la forme suivante

$$\sum_k e^{-t\lambda_k} = (4\pi t)^{-n/2} \sum_{0 \leq k \leq n} a_k t^{\frac{k}{2}} + O(1). \quad (12.1.6)$$

Les termes de ce développement ont une interprétation géométrique intrinsèque. En particulier dans le cas du Laplacien "plat" sur un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , le premier coefficient n'est autre que le volume de  $\Omega$ , le second est proportionnel à la surface du bord etc... De plus pour une variété sans bord seuls sont présents dans (12.1.6) les puissances paires de  $k$ .

Le formule (12.1.6) s'obtient par des calculs très directs (cf MacKean et Singer [71]) qui peuvent aussi s'interpréter comme le recours aux opérateurs pseudo-différentiels (cf Taylor [T] paragraphe 8.3).

Le théorème Tauberien de Karamata, [87], [52] (Théorème 12.2) permet alors de d'obtenir l'estimation de Weyl

$$N(\lambda) \sim \frac{a_0}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)(4\pi)^{n/2}}.$$

Si la fonction de dénombrement  $N(\lambda)$  admettait pour  $\lambda \rightarrow \infty$  un développement en puissance :

$$N(\lambda) = b_0 \lambda^{s_0} + b_1 \lambda^{s_1} \dots + b_p \lambda^{s_p} + \lambda^{s_p} (1 + o(\lambda)), \quad s_0 > s_1 > \dots > 0 \quad (12.1.7)$$

alors il en serait de même de sa transformée de Laplace, (c'est l'objet d'un théorème très simple dit théorème abélien (Théorème 12.1) dont la preuve est rappelée ci dessous), pour  $t \rightarrow 0_+$  et les coefficients  $b_l$  se déduisent des coefficients  $a_l$  du développement de la transformée de Laplace par une simple identification selon la formule :

$$\sum_{k \geq 0} e^{-\lambda_k} = \sum_{0 \leq l \leq (p-1)} \frac{b_l \Gamma(s_l - 1)}{t^{s_l}} + O\left(\frac{1}{t^{s_l}}\right). \quad (12.1.8)$$

Les pathologies de l'asymptotique proviennent du fait que la fonction  $N(\lambda)$  n'est en général pas, jusqu'à un ordre convenable, somme de puissances, elle contient des termes oscillants qui sont dûs à des effets géométriques non locaux. C'est pour cela que le recours à la trace de l'opérateur des ondes s'impose.

Pour terminer cette introduction on prouve le théorème abélien et le théorème tauberien de Karamata et on donne deux résultats permettant d'utiliser la transformée de Fourier de la distribution

$$\sum_k \delta(\tau \pm \sqrt{\lambda_k}).$$

Il convient de remarquer que le dernier de ces énoncés contient des informations plus précises que ceux qui n'utilisent que la transformée de Laplace.

**Théorème 12.1** (*Théorème Abélien*) Soit  $d\mu$  une mesure de Borel sur  $[0, \infty)$  ayant le comportement asymptotique suivant :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-\gamma} \mu[0, \lambda] = C, \quad \text{avec } \gamma \geq 0. \quad (12.1.9)$$

Alors on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\gamma \int_0^\infty e^{-\lambda} d\mu(\lambda) = C\Gamma(\gamma + 1).$$

**Démonstration.** On introduit la fonction

$$G(\lambda) = (\lambda + 1)^{-\gamma} \int_0^\lambda d\mu \equiv (\lambda + 1)^{-\gamma} F(\lambda)$$

Par hypothèse  $G(\lambda)$  est une fonction uniformément bornée sur  $[0, \infty)$  qui tend vers  $C$  lorsque  $\lambda$  tend vers l'infini. Une intégration par parties au sens de Stieltjes donne alors

$$\begin{aligned} t^\gamma \int_0^\infty e^{-t\lambda} d\mu(\lambda) &= t^{\gamma+1} \int_0^\infty e^{-t\lambda} F(\lambda) d\lambda \\ &= t^{\gamma+1} \int_0^\infty e^{-t\lambda} (\lambda + 1)^\gamma G(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty e^{-y} (y + t)^\gamma G\left(\frac{y}{t}\right) dy. \end{aligned}$$

Pour  $t \leq 1$ ,

$$e^{-y} (y + t)^\gamma G\left(\frac{y}{t}\right)$$

est uniformément borné dans  $L^1(\mathbb{R}_y^+)$  et pour  $t$  tendant vers zéro,  $(y + t)^\gamma G\left(\frac{y}{t}\right)$  converge simplement vers  $Cy^\gamma$ . Ainsi (12.1.9) se déduit ainsi du théorème de convergence dominée.

On remarque que le théorème 12.1 peut s'appliquer au second membre de (12.1.7) et qu'il conduit alors à l'identification des termes de ce second membre en fonction du comportement en puissance de la transformée de Laplace. Mais comme la transformée de Laplace lisse les fonctions, le théorème réciproque est bien moins précis, en l'absence de l'hypothèse concernant le développement en puissances. Il est un peu moins trivial et c'est le célèbre

**Théorème 12.2** (*Théorème Tauberien*). Pour toute mesure  $\mu$  positive sur  $[0, \infty)$  la relation

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda} d\mu(\lambda) \sim t^{-s}, \quad s \geq 0, \quad t \rightarrow 0_+ \quad (12.1.10)$$

implique pour  $\lambda \rightarrow \infty$  la relation :

$$\int_0^\lambda d\mu(k) \sim \frac{\lambda^s}{\Gamma(s + 1)}. \quad (12.1.11)$$

**Démonstration.**

On utilise la transformation qui, à toute mesure  $\sigma$ , associe la mesure  $\sigma_t$  définie par la formule

$$\sigma_t(A) = t^s \sigma(t^{-1}A).$$

Cette transformation laisse invariante la mesure  $d\nu = k^{s-1}dk$  et la conclusion (12.1.11) se reformule selon la relation :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu_t[0, 1) = \frac{1}{\Gamma(s)} \nu([0, 1)).$$

Il suffit donc de prouver la relation plus forte :

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \int f(x) d\mu_t(x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int f(x) d\nu(x) \quad \forall f \in C_0^\infty[0, \infty).$$

L'hypothèse (12.1.10) (la positivité joue un rôle important) implique que la famille de mesures  $e^{-t}d\mu_t$  est uniformément bornée. Ainsi il suffit de prouver (12.1.8) pour  $f$  appartenant à un sous espace dense de fonctions continues tendant vers zéro à l'infini. On utilise enfin la densité de polynômes en  $e^{-x}$  (Stone Weierstrass!) pour lesquels un calcul exact est immédiat.

Voici enfin les deux énoncés impliquant non pas la transformée de Laplace mais une analyse de Fourier.

**Proposition 12.1** *Soit  $S(t)$  une distribution uniformément d'ordre fini sur  $\mathbb{R}_t$ . On suppose que zéro est un point isolé de son support singulier et qu'après localisation (par une fonction  $\theta$  égale à 1 au voisinage de zéro et ne rencontrant pas le support singulier de  $S(t)$  en dehors de zéro) on a :*

$$(\hat{\theta}S)(\tau) \simeq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n |\tau|^{(n-1)} \sum_{k \geq 0} p^k |\tau|^{-k}.$$

Alors pour  $t \rightarrow 0$  on a

$$\langle e^{-t\tau^2} S(\tau) \rangle \simeq \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{0 \leq k \leq n} a_k t^{\frac{k}{2}} + O(1). \quad (12.1.12)$$

avec

$$a_k = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \Gamma(n-k) p_k. \quad (12.1.13)$$

**Démonstration.** On introduit donc la fonction  $\theta(t)$  et on décompose  $S(t)$  en la somme de deux distributions  $S_1(t) = \theta(t)S(t)$  et  $S_2(t) = (1 - \theta(t))S(t)$ , la première est localisée au voisinage de zéro, sa transformée de Fourier est donc une fonction régulière qui, pour  $\tau$  tendant vers l'infini, a un comportement asymptotique donné par

$$(\hat{\theta}S)(\tau) \simeq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} |\tau|^{n-1} \sum_{k \geq 0} p^k |\tau|^{-k}$$

Sa contribution :

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_0^\infty e^{-\tau^2 t} |\tau| \sum_{k \geq 0} p^k |\tau|^{-k} d\tau$$

fournit par un calcul évident (du type théorème abélien) la relation (12.1.12) pourvu que soit établi que la contribution de  $S_2(t)$  dans le premier membre de (12.1.12) est négligeable; et en effet on a d'après Plancherel

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\tau^2 t} S_2(\tau) d\tau = \sqrt{2\pi} \langle \frac{1}{4t} e^{-\frac{s^2}{4t}}, S_2(s) \rangle.$$

Maintenant, comme  $S_2(s)$  est uniformément d'ordre fini (dérivée au plus  $m$  fois d'une fonction continue bornée) et comme son support ne rencontre pas 0, on a

$$\left\langle \frac{1}{4t} e^{-\frac{s^2}{4t}}, S_2(t) \right\rangle \leq e^{-\frac{c^2}{t}},$$

ce qui termine la démonstration du théorème 12.1.

L'énoncé suivant permet de préciser le comportement asymptotique d'une mesure  $d\mu$  dont la transformée de Fourier est connue dans un voisinage  $I$  de zéro. Pour filtrer on introduit une fonction de troncature (en Fourier)  $\phi$  construite de la manière suivante. On choisit  $\hat{\psi} \in C_0^\infty(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  de norme  $L^2$  égale à 1 et on pose

$$\phi = |\psi|^2 \star |\psi|^2, \quad \phi_a(\tau) = \frac{1}{a} \phi\left(\frac{\tau}{a}\right).$$

Bien entendu le support de  $\hat{\psi}$  est contenu dans l'intervalle  $] -1, 1[$  et celui de  $\hat{\phi}_a$  dans l'intervalle  $]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[$ . Enfin  $\phi$  est une fonction strictement positive sur tout  $\mathbb{R}$ . On a le théorème (Lemme 17.5.6 volume III. p 50 de Hörmander [47])

**Théorème 12.3** *Soit  $\mu$  une fonction à croissance tempérée vérifiant  $\mu(0) = 0$ . Soit d'autre part  $\nu$  une fonction localement à variation bornée avec  $\nu(0) = 0$ .*

*On suppose que ces deux fonctions vérifient les estimations suivantes*

$$\begin{aligned} |d\nu(\tau)| &\leq M_0(|\tau| + a_0)^{n-1} d\tau \\ |(d\mu - d\nu) \star \phi_a(\tau)| &\leq M_1(|\tau| + a_1)^\kappa \end{aligned} \quad (12.1.14)$$

avec  $\kappa \in [0, n-1]$  et  $a \leq a_0, a \leq a_1$ . Alors

$$|\mu(\tau) - \nu(\tau)| \leq C(aM_0(|\tau| + a_0)^{n-1} + M_1(|\tau| + a_1)^\kappa)$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend que de  $\kappa$  et  $n$ .

**Démonstration.** Comme  $\phi(\tau)$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , il existe une constante  $c_0 > 0$  telle que, sur l'intervalle  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  on ait  $\phi > c_0$  et ainsi il vient :

$$c_0 a^{-1} \int_{\tau - \frac{1}{2}a}^{\tau + \frac{1}{2}a} d\mu \leq d\mu \star \phi_a(\tau) \leq C(aM_0(|\tau| + a_0)^{n-1} + M_1(|\tau| + a_1)^\kappa) \quad (12.1.15)$$

en effet il suffit de majorer convenablement  $|d\mu \star \phi_a(\tau)|$  ce qui, avec (12.1.14), résulte des relations :

$$|d\mu \star \phi_a(\tau)| \leq |(d\mu - d\nu) \star \phi_a(\tau)| + |d\nu \star \phi_a(\tau)| \leq C(aM_0(|\tau| + a_0)^{n-1} + M_1(|\tau| + a_1)^\kappa).$$

En divisant l'intervalle  $(0, s)$  en  $|s| + 1$  intervalles de longueur inférieure à 1 on déduit de (12.1.15) la relation

$$|\mu(\tau) - \mu(\tau - as)| \leq C(a(|s| + 1)M_0(|\tau| + a_0 + a|s|)^{n-1} + M_1(|\tau| + a_1 + a|s|)^\kappa) \quad (12.1.16)$$

En multipliant (12.1.16) par  $\phi(s)$  et en intégrant on obtient la relation essentielle :

$$|\mu(\tau) - \mu \star \phi_a(\tau)| \leq C(aM_0(|\tau| + a_0)^{n-1} + M_1(|\tau| + a_1)^\kappa)$$

et la démonstration se termine en utilisant à nouveau la seconde relation de (12.1.14).

## 12.2 Trace du noyau de la chaleur.

L'opérateur  $L$  est (avec une définition convenable de son domaine) le générateur d'un semi groupe fortement continu dans  $L^2(\Omega)$  et par le théorème des noyaux on a :

$$e^{-tL} f(x) = \int_{\Omega} K(t, x, y) f(y) dy.$$



Il résulte aussi de la régularité des solutions de l'équation de la chaleur que, pour tout  $t > 0$ , ce noyau est une fonction bornée. D'autre part la décomposition spectrale de  $L$  (avec les conditions aux limites s'il s'agit d'un domaine borné avec frontière) conduit à la formule :

$$(e^{-tL}f)(x) = \int_{\Omega} K(t, x, y)f(y)dv(y) = \sum_k e^{-t\lambda_k} w_k(x) \int_{\Omega} w_k(y)f(y)dv(y)$$

Des théorèmes classiques sur la régularité des solutions des problèmes elliptiques, il résulte que les séries

$$\sum_k e^{-t\lambda_k} |w_k(x)|^2, \quad x \in \bar{\Omega}$$

$$\sum_k e^{-t\lambda_k} = \sum_k e^{-t\lambda_k} \int_{\Omega} |w_k(x)|^2 dv(x) = \int_{\Omega} K(t, x, x) dx = \text{Trace } e^{-tL} \quad (12.2.17)$$

sont (pour tout  $t > 0$ , sont mais pas pour  $t = 0$ ) convergentes et en particulier le noyau de l'opérateur de la chaleur est un opérateur à trace.

On commence par traiter un cas élémentaire.

### 12.2.1 L'asymptotique de Weyl pour le problème de Dirichlet à coefficients constants

On considère les fonctions propres et les valeurs propres du Laplacien "plat"  $\Delta$  dans un ouvert  $\Omega$  borné avec conditions de Dirichlet :

$$-\Delta w_k = \lambda_k w_k, \quad w_k(x)_{\partial\Omega} = 0.$$

On introduit le noyau de la chaleur dans l'espace entier :

$$E_0(t, x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}.$$

Pour  $t \geq 0$ ,  $x$  et  $y$  dans  $\Omega$  cette distribution est (par rapport aux variables  $x, t$ ) solution de l'équation de la chaleur ; elle vérifie les mêmes conditions initiales mais de plus sur le bord elle est strictement positive ainsi, d'après le principe du maximum, elle majore le noyau du semi groupe de la chaleur avec condition de Dirichlet selon la formule

$$0 < K(t, x, y) < E_0(t, x, y), \quad \forall (t, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \Omega.$$

De cette équation on déduit tout de suite la relation :

$$\int_{\Omega} K(t, x, x) dx \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \text{vol}(\Omega).$$

Ensuite pour tout  $\epsilon > 0$  fixé on introduit un ouvert  $\mathcal{O}$  qui approxime  $\Omega$  à  $\epsilon > 0$  près par l'intérieur :

$$\mathcal{O} \subset \bar{\mathcal{O}} \subset \Omega, \quad \text{vol}(\Omega \setminus \mathcal{O}) \leq \epsilon.$$

On note  $\delta(y)$  la distance d'un point  $y$  à  $\partial\Omega$  et  $\delta = \delta\mathcal{O}$  la distance de  $\mathcal{O}$  à  $\Omega$  et on observe que l'on a (toujours d'après le principe du maximum) :

$$0 < E_0(t, x, y) - K(t, x, y) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\delta(y)^2}{4t}}. \quad (12.2.18)$$

En étudiant le comportement de la fonction

$$s \rightarrow \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\delta^2}{4s}}$$

et en choisissant  $t > 0$  assez petit ( $\mathcal{O}$  et  $\delta$  fixés,  $t \leq \frac{\delta^2}{2n}$ ) on en déduit la formule :

$$0 < \int_{\mathcal{O}} E_0(t, x, x) dx - \int_{\mathcal{O}} K(t, x, x) dx \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\delta^2}{4t}}$$

Ceci donne

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} (4\pi t)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathcal{O}} K(t, x, x) dx = \lim_{t \rightarrow 0_+} (4\pi t)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathcal{O}} E_0(t, x, x) dx$$

En réutilisant (12.2.18) on en conclut que l'on a :

$$\text{Vol}(\Omega) \geq (4\pi t)^{\frac{n}{2}} \lim_{t \rightarrow 0_+} \int_{\Omega} K(t, x, x) dx \geq \text{Vol}(\Omega) - \epsilon$$

Avec la relation (12.2.17) et le Théorème 12.2 (Théorème taubérien) on obtient l'estimation de Weyl :

**Théorème 12.4** (*Estimation de Weyl*) *Le comportement asymptotique de la fonction de dénombrement des valeurs propres du Laplacien "plat" dans un ouvert borné est "au premier ordre" donné par les formules :*

$$N(\lambda) = \#\{\lambda_k \leq \lambda\} \sim \frac{\text{Vol}(\Omega)}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \lambda^{\frac{n}{2}}, \quad \lambda_k \sim \frac{4\pi}{(\text{Vol}(\Omega))^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}}. \quad (12.2.19)$$

**Remarque 1** Le volume de la boule unité dans  $\mathbb{R}^n$  est donné par la formule (cf. Schwartz Méthodes Mathématiques de la Physique page 350)

$$C_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

ainsi l'asymptotique de Weyl s'écrit aussi sous la forme :

$$N(\lambda) \sim \text{Vol}(\Omega) \frac{C_n}{(2\pi)^n} \lambda^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Omega} \int_{(|\xi|^2 \leq \lambda)} dx d\xi \quad (12.2.20)$$

formule qui sera généralisée dans les paragraphes suivants.

### 12.2.2 La méthode des coefficients gelés et les sommes de Lévy

Pour systématiser les résultats sur la trace du noyau de la chaleur on procède en deux étapes.

- on généralise d'abord à un problème à coefficients variables sur une variété sans bord,
- ensuite on traite l'influence du bord.

Les calculs faits dans Mac Kean et Singer [71] et que l'on reproduit ici sont essentiellement explicites. Ils peuvent bien sûr s'interpréter en termes de calcul d'opérateurs pseudo différentiels ce que le lecteur trouvera dans Taylor [93] (volume 2 page 55). On remarque que comme le noyau de la chaleur est régularisant l'analyse est locale et donc le recours aux opérateurs intégraux de Fourier n'est pas contrairement à ce qui sera exposé dans la section 12.3 nécessaire.

Suivant les notations de l'introduction on considère donc le noyau de l'opérateur de la chaleur pour une variété compacte sans bord. En coordonnées locales celui ci s'écrit sous la forme

$$e^{tL} f = \int_{\Omega} K(t, x, y) f(y) dv(y) \quad (12.2.21)$$

Bien sûr le noyau  $K(t, x, y)$  est symétrique en  $(x, y)$  et positif.

Enfin comme c'est à la fois une étape de la démonstration et un outil pour la suite (grâce au Théorème 12.3) on étudie la série :

$$\sum_k e^{-\lambda_k t} |w_k(x)|^2 = K(t, x, x), \quad x \in \Omega \quad (12.2.22)$$

en gardant à l'esprit qu'il s'agit d'une série convergente et que l'on a :

$$\sum_k e^{-\lambda_k t} = \int_{\Omega} K(t, x, x) dv(x). \quad (12.2.23)$$

Pour  $x \neq y$ ,  $K(t, x, y)$  est à décroissance exponentielle en  $\frac{1}{t}$  pour  $t$  tendant vers zéro. Ainsi pour l'asymptotique du second membre de (12.2.22) on utilise des coordonnées locales et la formule (12.1.3) :

$$Lu = -\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{ij} \partial_i (a^{ij}(x) \sqrt{\det g} \partial_j u)$$

On peut étendre l'opérateur à  $\mathbb{R}^n$  en supposant qu'en dehors d'une boule de taille convenable il coïncide avec le laplacien usuel, puis on "gèle" alors les coefficients au point  $y$  ce qui conduit à l'équation parabolique à coefficients constants :

$$\partial_t u = \nabla_x \cdot (A(y) \nabla_x u) = L_y u, \quad u(x, 0) = f(x)$$

dont la solution élémentaire est donnée (faire un changement de variables) par

$$u(t, x) = (4\pi t)^{-n/2} \int e^{-\frac{(g(y)(x-z), (x-z))}{4t}} \sqrt{\det g(y)} f(z) dz.$$

On pose donc

$$K_y(t, x, z) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{(g(y)(x-z), (x-z))}{4t}} \quad (12.2.24)$$

*j'ai essayé de refaire le calcul, je ne comprends pas car il me semble que  $K(0, z, y) = K_y(0, z, y) = 0$  D'une part on a :*

$$\begin{aligned} & \int K(t, x, z) \sqrt{\det g(z)} K_y(0, z, y) \sqrt{\det g(y)} dz \\ &= K(t, x, y) \sqrt{\det g(y)} \int K_y(t, x, z) \sqrt{\det g(y)} K(0, z, y) \sqrt{\det g(z)} dz \\ &= K_y(t, x, y) \sqrt{\det g(y)} \end{aligned}$$

*et d'autre part on a aussi :*

$$\begin{aligned} & K(t, x, y) \sqrt{\det g(y)} - K_y(t, x, y) \sqrt{\det g(y)} \\ &= \int_0^t ds \frac{\partial}{\partial s} \int_{\mathbb{R}^n} K(s, x, z) \sqrt{\det g(z)} K_y((t-s), z, y) \sqrt{\det g(y)} dz \end{aligned} \quad (12.2.25)$$

En simplifiant (12.2.25) par  $\sqrt{\det g(y)}$  et en utilisant les propriétés des solutions élémentaires il vient enfin

$$\begin{aligned} K(t, x, y) - K_y(t, x, y) &= \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} L(K(s, x, z)) \sqrt{\det g(z)} K_y((t-s), z, y) dz \\ &\quad - \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} K(s, x, z) \sqrt{\det g(z)} L_y K_y((t-s), z, y) dz \end{aligned} \quad (12.2.26)$$

L'opérateur de Laplace Beltrami étant autoadjoint pour la forme de volume  $\sqrt{\det g(z)} dz$  on peut réécrire l'équation 12.2.26 sous la forme :

$$K(t, x, y) - K_y(t, x, y) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} K(s, x, z) (L - L_y) (K_y((t-s), z, y)) \sqrt{\det g(z)} dz. \quad (12.2.27)$$

On introduit les notations suivantes :

$$f(t, x, y) = (L - L_y) K_y(t, x, y)$$

et

$$(g \# h)(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t g(s, x, z) h(t-s, z, y) \sqrt{\det g(z)} dz ds$$

qui permettent de réécrire (12.2.25) sous la forme suivante

$$K(t, x, y) = K_y(t, x, y) + K \# f$$

On désigne par  $f^{\#k}(t, x, y)$  la suite de fonction définie par la récurrence :

$$f^{\#1} = f, f^{\#(k+1)} = K \# f^{\#k}.$$

Dans la suite de cette construction on désigne par  $c$  et  $d$  différentes constantes indépendantes de  $(t, x, y)$  et on observe que  $f$  vérifie l'estimation :

$$|f(t, x, y)| \leq c \left( \frac{|x-y|^3}{t^2} + \frac{|x-y|}{t} \right) t^{-n/2} \exp(-d \frac{|x-y|^2}{t}) \quad (12.2.28)$$

et on en déduit la majoration :

$$|f^{\#k}(t, x, y)| \leq \frac{c^k}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} t^{\frac{k-n}{2}} \exp(-d \frac{|x-y|^2}{t})$$

La série (appelée Somme de Lévy)

$$S(t, x, y) = \sum_{k \geq 1} f^{\#k}(t, x, y) \quad (12.2.29)$$

converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}^{2n}$  et  $S_N(t)$ , sa somme à l'ordre  $N$  vérifie la relation :

$$K = K_y + S_N + K f^{\#(N+1)},$$

soit en faisant tendre  $N$  vers l'infini, on obtient l'unicité du noyau pour la solution de l'équation de la chaleur. On a enfin la relation :

$$K(t, x, y) = K_y(t, x, y) + \sum_{k \geq 1} K_y \# f \# f \# \dots \# f \text{ } k \text{ fois}$$

On résume le calcul ci dessus dans la

**Proposition 12.2** *Soit  $L$  l'opérateur de Laplace Beltrami associé à une variété sans bord  $\Omega$  alors le noyaux de la solution élémentaire est en coordonnées locales donné par la série :*

$$K(t, x, y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{(g(y)(x-z), (x-z))}{4t}} \left( 1 + t^{\frac{1}{2}} p_1(t, x, y) + t p_2(t, x, y) + \dots + t^{\frac{k}{2}} p_k(t, x, y) \dots \right) \quad (12.2.30)$$

avec

$$|p_k(t, x, y)| \leq \frac{c^k}{\Gamma[\frac{n}{2} + 1]}$$

En explicitant le développement asymptotique du second membre de (12.2.30) on obtient (cf. Minakshisundaram et Pleijel [78] pour une démonstration complète) la formule

$$\sum_{k \geq 0} e^{-\lambda_k t} |w_k(x)|^2 = K(t, x, x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k \geq 0} a_k(x) t^{\frac{k}{2}} \quad (12.2.31)$$

Les étapes suivantes de l'analyse sont alors d'une part le calcul des coefficients

$$a_k = \int_{\Omega} a_k(x) dv(x)$$

intervenant dans le développement de la trace du Laplacien et d'autre part la généralisation de cette formule à un ouvert sans bord.

Une remarque essentielle due à Mac Kean et Singer est que ces coefficients ne dépendent que d'objets géométriques intrinsèques et donc que l'on dispose de moyens de calcul également intrinsèques. Plus précisément,  $p_{2k}(g)$  est un polynôme homogène en la métrique  $g$  et en ses dérivées covariantes, associée à une  $2k$ -forme différentielle. Comme le calcul est local il se fait au voisinage d'un point  $x$  choisi pour simplifier égal à zéro. Avec des coordonnées géodésiques,

on voit que la matrice  $g(x)$  se développe en fonction polynomiale du tenseur de courbure  $R$  et de ses dérivées covariantes. Ce tenseur est défini par le développement au premier ordre selon la formule de Taylor :

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3}R_{ij}^{kl}x_kx_l + O(|x|^3) \quad (12.2.32)$$

On observe ensuite que  $a_k$  est un polynôme homogène de degré  $k$  en  $R$  et en ses dérivées covariantes, il en résulte, avec les symétries du laplacien que les coefficients d'ordre impair sont nuls.

On introduit ensuite les fonctions (qui sont intrinsèques sur  $\Omega$  c'est à dire invariantes par changement de coordonnées riemanniennes) :

$$K = - \sum_{i < j} R_{ij}^{ij}$$

et

$$\begin{aligned} A &= (\sum_{i < j} R_{ij}^{ij})^2 = K^2 \\ B &= \sum_{j,k} (\sum_i R_{ij}^{ik})^2 \\ C &= \sum_{ijkl} (R_{ij}^{kl})^2 \end{aligned} \quad (12.2.33)$$

On note, pour une variété avec ou sans bord (dans le cadre d'une variété sans bord on ne définit pas  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{J}$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_{\Omega} dv(x) \text{ le volume riemannien de } \Omega \\ \mathcal{S} &= \int_{\partial\Omega} d\sigma \text{ la surface riemannienne de } \partial\Omega \\ \mathcal{K} &= \int_{\partial\Omega} K(x)dv(x) \text{ la courbure intégrale de } \Omega \\ \mathcal{J} &= \int_{\partial\Omega} J(\sigma)d\sigma \text{ la courbure moyenne intégrée de } \partial\Omega \end{aligned}$$

et on a le

**Théorème 12.5** *Soit  $\Omega$  une variété Riemannienne compacte sans bord, de dimension  $n$  et  $L$  l'opérateur de Laplace Beltrami correspondant alors on a la formule de trace suivante :*

$$\begin{aligned} \sum_k e^{-\lambda_k t} &= \int_{\Omega} K^d(t, x, x)dv(x) \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \left\{ \mathcal{V} + \frac{t}{3}\mathcal{K} + \frac{t^2}{180} \int_{\Omega} (10A - B + 2C)dv(x) + O(t^3) \right\} \end{aligned} \quad (12.2.34)$$

**Corollaire 12.1** *Si  $\Omega$  est une variété compacte de dimension 2 la formule (12.2.34) se réécrit :*

$$\sum_k e^{-\lambda_k t} = \int_{\Omega} K^d(t, x, x)dV_g(x) = \frac{\text{La surface}}{4\pi t} + \frac{E}{6} + \frac{\pi t}{60} \int_{\Omega} K^2 dV_g(x) \quad (12.2.35)$$

où  $E$  désigne la caractéristique d'Euler [25], égale à  $\frac{1}{2\pi} \int_M K$ .

**Commentaires et Démonstration.** La formule (12.2.35) se déduit de la formule (12.2.34) avec des changements de notations et des arguments de géométrie. D'abord on parle de surface au lieu de volume, ensuite on utilise la formule de Gauss Bonnet :

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \mathcal{K} dV_g(x)$$

et la relation (propre à la dimension 2) :

$$10A - B + 2C = 12K^2$$

Le terme d'ordre zéro se calcule directement à partir du premier terme de la série de Lévy (12.2.30). On va indiquer le calcul du terme en  $t$  et pour le terme en  $t^2$  on renvoie à [71]. Si on change  $g$  en  $C^2$ , l'opérateur  $L$  est changé en l'opérateur  $C^{-2}L$ , donc la série

$$\sum_{k \geq 0} e^{-\lambda_k t} |w_k(x)|^2$$

est changée en la série

$$\sum_{k \geq 0} e^{-\lambda_k \frac{t}{c^2}} |w_k(x)|^2$$

Ainsi les coefficients  $a_{2k}$  (les seuls non nuls) sont multipliés par  $C^{2k}$ . D'autre part toute dérivée covariante d'ordre  $l$  de  $R(C^2)g$  est un multiple de  $C^{2l+2}$ . En conséquence,  $a_{2k}$  est un polynôme homogène de degré  $2k$  en  $R$  et ses dérivées covariantes, si on convient d'attribuer à une dérivée covariante d'ordre  $l$  le degré  $2+l$ . En particulier  $a_2$  est une forme de degré 1 en  $R$  tandis que  $a_4$  est une forme de degré 2 en  $R$  plus une forme de degré 1 en les dérivées covariantes d'ordre 2 de  $R$ . Les coefficients de ces expressions ne dépendent de  $\Omega$  que par l'intermédiaire de la dimension.

Ensuite on utilise le fait que le laplacien commute avec les transformations orthogonales. Il en est donc de même des coefficients des formule de trace et il en résulte que  $a_2$  forme invariante de degré 1 est proportionnelle (H. Weyl [98]) à

$$K(x) = - \sum_{i < j} R_{ij}^{ij}(x).$$

Le calcul des coefficients se fait en regardant la sphère  $\Omega = S^2$  et des variétés produit.

### 12.2.3 Le calcul des premiers termes dans le problème de Dirichlet

**Théorème 12.6** Soit  $\Omega$  une variété Riemannienne compacte à bord, de dimension  $n$  et  $L$  l'opérateur de Laplace Beltrami correspondant avec condition de Dirichlet  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Alors on a la formule de trace suivante :

$$\sum_k e^{-\lambda_k t} = \int_{\Omega} K^d(t, x, x) dv(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \left\{ \mathcal{V} - \frac{1}{4} \sqrt{4\pi t} \mathcal{S} + \frac{t}{3} \mathcal{K} - \frac{t}{6} \mathcal{J} + o(t^{\frac{3}{2}}) \right\}$$

**Remarque 2** Comme en dimension 2 on a :

$$\int_{\partial\Omega} J d\sigma = 2(1 - h)$$

avec  $h$  désignant le nombre de "trous" de l'ouvert (connexe mais éventuellement pas simplement connexe)  $\Omega$ . Ainsi le comportement asymptotique des valeurs propres  $\lambda_k$  pour  $k \rightarrow \infty$  contient-il toute l'information (utiliser le théorème Abélien) sur le comportement asymptotique pour  $t \rightarrow 0$  de  $\sum e^{-\lambda_k t}$  et donc permet de connaître la taille du domaine, la surface de sa frontière et en dimension 2 le nombre de "trous".

**Remarque 3** Dans tous les cas on trouve pour le premier terme l'expression

$$(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{V}$$

Ce qui avec le théorème taubérien donne :

$$N(\lambda) \sim \frac{\lambda^{n/2}}{((4\pi)^{n/2} \Gamma(n/2 + 1))} \mathcal{V} \quad (12.2.36)$$

ou encore, en introduisant dans le calcul le volume  $C_{n-1}$  de la boule unité de  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,

$$N(\lambda) \sim \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{(A(x), \xi, \xi) \leq \lambda} dx d\xi \quad (12.2.37)$$

formule qui sera retrouvée dans la section 12.3. La structure sera ainsi expliquée.

#### Schéma de la preuve du Théorème 12.6

On commence par calculer  $K^d(t, x, x)$  pour  $x \in \Omega'$  ( $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ ). L'influence du bord est pour  $t$  tendant vers zéro en  $\exp(-c/t)$  et ainsi les méthodes du théorème 12.5 s'appliquent et on a :

$$(4\pi t) \int_{\Omega'} K(t, x, x) \sqrt{\det g(x)} dx = \int_{\Omega'} \left[ 1 + \frac{t}{3} \mathcal{K} \right] + O(t^2)$$

Ensuite on utilise aux voisinage des points de  $\partial\Omega$  un système de cartes locales qui transforme l'ouvert  $\Omega$  en l'ouvert  $x_n > 0$  et on introduit un recouvrement de  $\partial\Omega$  par des ouverts  $U_j$  de  $\mathbb{R}^n$  et on se propose d'estimer :

$$(4\pi t) \int_{\Omega \cap U} K(t, x, x) \sqrt{\det g(x)} dx$$

Sur  $U$  on introduit une involution  $I : U \rightarrow U$  qui conserve la structure riemannienne et laisse invariant  $\partial\Omega$ . On observe que le noyau de la chaleur avec conditions de Dirichlet sur  $\partial\Omega \cap U$  est donné par

$$K^d(t, x, y) = \tilde{K}(t, x, y) - \tilde{K}(t, x, Iy)$$

où  $\tilde{K}(t, x, y)$  désigne la restriction à  $U \times U$  du noyau de la chaleur. On a au voisinage du bord :

$$K^d(t, x, x) = \tilde{K}(t, x, x) - \tilde{K}(t, x, Ix) \quad (12.2.38)$$

Les deux termes du second membre de (12.2.38) sont calculés par somme de Lévy (12.2.30) en puissance de  $t^{\frac{1}{2}}$ . On utilise à nouveau le développement de Taylor de  $g(x)$  en terme du tenseur de Ricci et de ses dérivées covariantes, cela permet d'améliorer l'estimation (12.2.28) et de prouver que l'on a :

$$|f(t, x, y)| \leq c \left( \frac{|x||x-y|^3}{t^2} + \frac{|x||x-y|}{t} + 1 \right) t^{-n/2} \exp(-d \frac{|x-y|^2}{t})$$

et on en déduit la majoration :

$$|K \# \sum_{k \geq 2} f^{\#k}(t, x, y)| \leq ct^{2-\frac{n}{2}} \quad (12.2.39)$$

Ainsi pour avoir le comportement asymptotique jusqu'à l'ordre 1 inclus, il suffit de considérer les termes suivants extraits de (12.2.39) par sommes de Lévy :

$$\begin{aligned} & (4\pi t)^{n/2} \int_{\Omega \cap U} e^0(t, x, Ix) dv(x) \\ & \text{et} \\ & (4\pi t)^{n/2} \int_{\Omega \cap U} e^0 f(t, x, Ix) dV_g(x) \end{aligned}$$

On utilise bien sûr le changement de variable semi-géodésique en notant  $\partial_n$  la dérivée selon la normale extérieure à  $\Omega$ . Les calculs se font de manière difficile mais complètement explicite en remplaçant  $g$  par son développement de Taylor en terme du tenseur de Ricci  $R$ .

$$\begin{aligned} (4\pi t)^{n/2} \int_{U \cap \Omega} e^0(t, x, Ix) dv(x) &= \frac{1}{4} \sqrt{4\pi t} \int_{U \cap \partial\Omega} \frac{\frac{\partial}{\partial n} \{g_{nn} \det g\}}{\det g} dx' + o(t) \text{volume de } U \\ (4\pi t)^{n/2} \int_{U \cap \Omega} e^0(t, x, Ix) dV_g(x) &= -\frac{t}{6} \int_{U \cap \Omega} \frac{\partial_n (g^{nn} \det g)}{\det g} \sqrt{g_{nn}} + o(t \times \text{vol} U) \end{aligned}$$

et

$$(4\pi t)^{n/2} \int_{U \cap \Omega} e^0 \# f(t, x, Ix) dV_g(x) + o(t \times \text{vol} U).$$

**Remarque 4** Pour conclure cette section on peut rappeler à nouveau le "sens" des résultats obtenus ; les informations sur les valeurs propres fournissent par la transformée de Laplace de leur fonction de dénombrement, des renseignements précis sur la géométrie du domaine : volume, surface, nombre de trous, courbure géodésique, mais inversement le comportement asymptotique de la trace de l'opérateur de la chaleur permet de connaître le premier terme du développement asymptotique de la fonction  $N(\lambda)$  ; il permettrait de connaître d'autres termes si on savait que cette fonction a un développement en puissance de  $\lambda$  mais comme cela va être illustrée ci dessous ce n'est en général pas le cas et ainsi les résultats les plus précis que l'on puisse espérer dans le cas général pour cette fonction de dénombrement se limitent au premier ou au mieux au deux premiers termes comme selon les énoncés des corollaire 12.2, théorème 12.8, corollaire 12.3 et Théorème 12.9 qui suivent.

## 12.3 Influence des géodésiques fermées et opérateurs intégraux de Fourier.

### 12.3.1 Formule de Poisson et pathologies du cercle et de la sphère

L'existence d'un développement de la forme (12.1.7) même jusqu'au second terme est nullement évidente, et même fautive dans des cas simples. Sa non existence est liée à l'accumulation de géodésiques fermées qui comme on le verra ci dessous contribuent à son caractère non rationnel (en  $\lambda^{\frac{n-k}{2}}$ ). Le premier exemple se construit en dimension 1 et n'est autre que l'interprétation dans ce cadre de la formule de Poisson.

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} e^{ikt} = 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(t - 2\pi k). \quad (12.3.40)$$

En effet avec  $\Omega = T = \mathbb{R}/(2\pi\mathbf{Z})$ , les fonctions propres du laplacien sont les exponentielles complexes  $e^{\pm ikx}$  et les valeurs propres correspondantes sont les nombres  $\lambda_k = k^2$ , (de multiplicité 2 pour  $k \neq 0$ ). On retrouve bien la relation :

$$N(\lambda) \sim 2\lambda^{\frac{1}{2}}$$

en parfait accord avec (12.1.9). Mais, comme au passage de chaque valeur propre,  $N(\lambda)$  augmente de 2, cette fonction ne peut admettre un développement de la forme :

$$N(\lambda) = 2\lambda^{\frac{1}{2}} + a_1 + o(1).$$

D'autre part pour la fonction  $\tilde{N}(\tau) = N(\tau^2)$  dont la dérivée est la distribution :

$$S(t) = \sum \delta(\tau - \sqrt{\lambda_k})$$

on a une formule encore plus explicite (en désignant par  $\tilde{N}(x) = N(x^2)$ ) :

$$N(\tau) = 2\tau + 2(E(\tau) - \tau). \quad (12.3.41)$$

Ainsi on observe que le second membre de (12.3.41) est la somme d'une fonction linéaire et d'une fonction périodique ( $E(\tau)$  désignant bien sûr la partie entière de  $\tau$ ). La présence de cette fonction périodique se traduit par des singularités dans  $\tilde{N}(\tau)$  ou de sa dérivée :

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{N}(\tau) = \delta + 2 \sum_{k>0} \delta_k.$$

En prolongeant par parité, pour utiliser la transformation de Fourier, on a, d'après la "Formule de Poisson" (12.3.40) :

$$\mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\tau-k}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{ikt} = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\tau-2\pi k} \quad (12.3.42)$$

Il est alors important de remarquer que le deuxième terme de (12.3.42) coïncide avec la distribution

$$\text{Trace } \text{cost}\sqrt{-\Delta}. \quad (12.3.43)$$

Et la formule (12.3.43) dit en particulier que le support singulier de la transformée de Fourier de la distribution

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{N}(\tau)$$

coïncide avec les longueurs des géodésiques fermées tracées sur le cercle (dans le cas présent il n'y a qu'une que l'on parcourt bien sur plusieurs fois soit dans le sens positif soit dans le



sens rétrograde). Ce support singulier traduit la présence d'oscillations dans le comportement asymptotique de la fonction  $\tilde{N}(\tau)$ .

Le second exemple est la sphère, pour fixer les idées on la considère en dimension 3, (l'observation étant cependant valable en toute dimension) l'opérateur de Laplace Beltrami est alors

$$Lu = -\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta u) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2 u\right]$$

dont les fonctions propres sont les harmoniques sphériques :

$$Y_{k,l}(\theta, \phi) = e^{\pm ik\phi} P_l^k(\cos\theta), \quad 0 \leq l \leq k.$$

correspondant aux valeurs propres

$$\lambda_k = k(k+1)$$

ainsi chaque valeur propre est ainsi de multiplicité  $2k+1$ . A cause de cette multiplicité on a :

$$N(\lambda_k) = \sum_{l=1}^{l=k} (2l+1) = k(k+1) + k = (k+1)^2$$

Ici aussi on retrouve la relation

$$N(\lambda) \sim \lambda$$

qui n'est autre que (12.2.36) en dimension 2.

Par contre au passage de chaque valeur propre  $N(\lambda_k)$  saute de  $(2k+1)$

$$N(\lambda_{k+0}) - k(k+1) = k+1, \quad N(\lambda_{k-0}) - k(k+1) = -k,$$

et il est impossible d'avoir un développement de la forme :

$$N(\lambda) = (\lambda) + a_1\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda})$$

**Remarque 5** Le cercle est bien sûr la sphère de  $\mathbb{R}^2$ , le calcul fait ci dessus s'étend à la sphère de  $\mathbb{R}^n$  pour tout  $n$ . Néanmoins on a préféré ici séparer les deux cas car c'est la dimension 2 qui redonne la formule originale de Poisson. La sphère de  $\mathbb{R}^n$  est une variété où toutes les géodésiques fermées ont la même longueur primitive. On dit alors que le flot Hamiltonien est périodique et dans ce cadre on peut exhiber des comportements de même nature. Ceci dépasse cependant le cadre de cet exposé et le lecteur pourra se référer à l'article de Duistermaat et Guillemin [32] ou au tome III de Hörmander [47].

### 12.3.2 Géodésiques fermées et singularités de la trace de l'opérateur des ondes.

Généraliser ces observations est une application importante des opérateurs intégraux de Fourier en particulier parce que les contributions des géodésiques fermées nécessitent le recours à des parametrix globales. Ceci est l'objet du présent paragraphe où, pour simplifier on considère toujours le spectre de l'opérateur de Laplace Beltrami, écrit en coordonnées locales sous la forme suivante :

$$Lu = \frac{1}{\sqrt{\det A^{-1}(x)}} \nabla_x \cdot ((A(x)\sqrt{\det A^{-1}(x)} \nabla_x u)$$

sur une variété compacte en général sans bord  $\Omega$ .

Comme le symbole principal de l'opérateur est  $(A(x)\xi, \xi)$ , la variété caractéristique de l'opérateur des ondes

$$u \mapsto \partial_t^2 u - Lu$$

est définie par la relation :  $\mathcal{C} = \{\tau^2 = (A(x)\xi, \xi)\} \subset T^*(\mathbb{R} \times \Omega) \setminus \{0\}$ , la métrique riemannienne est définie par la matrice  $A^{-1}$  et les bicaractéristiques sont les applications

$$s \mapsto (t(s), \tau(s); y(s), \eta(s)) \in \mathcal{C}$$

solutions du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{t} = 2\tau, & \dot{\tau} = 0 \\ \dot{y} = -2A(x)\xi, & \dot{\eta} = \nabla_x(A(x)\xi, \xi) \\ (t, \tau; y, \eta)|_{s=0} = (0, \tau_0; x, \xi) \in \mathcal{C} \end{cases}$$

On a bien entendu

$$\tau = \tau_0 = \pm \sqrt{(A(y)\eta, \eta)} = \pm \sqrt{(A(x)\xi, \xi)}$$

et on dit qu'une bicaractéristique est périodique si sa projection  $s \mapsto (x(s), y(s))$  est une application périodique. Les temps de parcours d'une ou plusieurs boucles s'appellent les périodes de la bicaractéristique. On note  $\mathcal{L}^+$  l'ensemble des périodes positives et on pose

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^+ \cup -\mathcal{L}^+ \cup 0.$$

Avec le paramétrage par  $s$  et la métrique donnée par  $A^{-1}$ , la longueur d'une géodésique fermée de période  $t > 0$  est donnée par :

$$l = \int_0^{\frac{t}{2\tau_0}} (A^{-1}\dot{x}(s), \dot{x}(s)) ds = \int_0^{\frac{t}{2\tau_0}} 4(A(x(s)\xi(s), \xi(s)) ds = l = \int_0^{\frac{t}{2\tau_0}} 4\tau_0^2 ds = t.$$

Comme dans le cas du noyau de la chaleur il est naturel de considérer à la fois les sommes

$$S(t, x) = 1 + \frac{1}{2} \sum_k \sum_{k \geq 0} e^{\pm i\sqrt{\lambda_k}t} |w_k(x)|^2 \quad (12.3.44)$$

et

$$S(t) = \int_{\Omega} S(t, x) dv(x). \quad (12.3.45)$$

**Proposition 12.3** *Les formules (12.3.44) et (12.3.45) où les valeurs propres sont comptées avec leur multiplicité définissent bien des distributions uniformément d'ordre fini.*

**Démonstration** : On utilise la relation,

$$\frac{d^p}{dt^p} \left( \frac{1}{(i\sqrt{\lambda_k})^p} e^{i\sqrt{\lambda_k}t} |w_k(x)|^2 \right) = e^{i\sqrt{\lambda_k}t} |w_k(x)|^2,$$

le fait que la norme dans  $L^\infty(\Omega)$  de  $|w_k(x)|$  est majorée par  $C\lambda_k^M$  avec  $M$  convenable résulte du théorème de Sobolev et de la relation :

$$-Lw_k(x) = \lambda_k w_k(x).$$

La convergence (uniforme en  $t$  et  $x$ ), pour  $p$  assez grand de la série

$$\sum_k \frac{e^{i\sqrt{\lambda_k}t}}{(i\sqrt{\lambda_k})^p}$$

est donc conséquence de l'estimation de Weyl (12.2.19) obtenue précédemment.

Pour prendre en compte l'influence des longueurs des géodésiques fermées on aura besoin des opérateurs Fourier intégraux et d'une généralisation du théorème de la phase stationnaire adaptée à l'évaluation d'intégrales dont la phase oscille sur des sous variétés. Ainsi on introduit la :

**Proposition 12.4** *Théorème de la Phase stationnant sur une sous variété (Colin de Verdière [26]). Soit  $Z$  une variété riemannienne de dimension  $d$ , soit  $a \in C_0^\infty(Z)$  et soit une phase à valeurs réelles  $\Phi \in C^\infty(Z)$ . On suppose que les points critiques de  $\Phi$  situés dans le support de  $a$  constituent une sous variété connexe  $W$  de  $Z$  dont on note  $\nu$  la dimension. On suppose de plus que  $W$  est une variété critique non dégénérée pour  $\Phi$ , c'est à dire que le Hessien  $\Phi''(z)$  induit sur l'espace normal*

$$N = T_z Z / T_z W$$

*une forme quadratique non dégénérée  $\Phi''(z)|_N$  dont on note  $\sigma$  la signature.*

*Alors on a un comportement asymptotique de la forme suivante :*

$$J(\tau) = \int_Z e^{i\tau\Phi(z)} a(z) dz = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{d-\nu}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma(W)} e^{i\tau\Phi(W)} p(\tau) \quad (12.3.46)$$

*avec*

$$p(\tau) \sim \sum_{k \geq 0} a_k \tau^{-k} \text{ pour } \tau \rightarrow \infty \quad (12.3.47)$$

*Enfin dans (12.3.47) le coefficient principal est donné par*

$$a_0 = \int_W a(z) |\det \Phi''(z)|_N|^{-\frac{1}{2}} dv_w(z) \quad (12.3.48)$$

*avec dans (12.3.48)  $dv_w(z)$  désignant l'élément de volume défini par la métrique induite par celle de  $Z$  sur  $W$ .*

La démonstration de la proposition 12.4 est donnée à la fin de ce paragraphe et on observera dans le cours de cette démonstration que la valeur de  $\Phi(z)$  et la signature de la matrice  $\Phi''(z)$  sont constants sur  $W$ .

### 12.3.3 Le support non singulier de la trace de l'opérateur des ondes et sa singularité en 0.

Pour introduire les outils et bien que l'extension au cas d'un ouvert à bord soit une issue fondamentale, on se concentre dans ce paragraphe au cas d'un ouvert sans bord.

**Théorème 12.7** *i) Pour  $x \in \Omega$  le support singulier de  $S(t, x)$  est contenu dans  $\mathcal{L}(x)$  ensemble des longueurs des géodésiques fermées passant par  $x$  et celui de  $S(t)$  dans  $\mathcal{L}$ .*

*ii) Le point 0 est isolé dans  $\mathcal{L}$  et en son voisinage (avec l'introduction d'une fonction  $\theta$  qui localise autour de zéro, la transformée de Fourier de  $S(t, x)$  admet un développement asymptotique de la forme suivante :*

$$(\hat{\theta}S)(\tau, x) \simeq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} |\tau| \sum_{k \geq 0} p^k(x) |\tau|^{-k} \quad (12.3.49)$$

*et de même on a :*

$$(\hat{\theta}S)(\tau) \simeq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} |\tau| \sum_{k \geq 0} p^k(x) |\tau|^{-k}$$

*iii) Les coefficients  $p^k(x)$  apparaissant dans la formule (12.3.46) sont (pour  $k < n$ ) liés aux coefficients  $a_k$  du développement asymptotique de Minakshisundaram et Pleijel (formule (12.2.31)) par la relation*

$$a_k(x) = (2\pi)^{1-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right) p_k(x) \quad (12.3.50)$$

La relation (12.3.50) s'intègre pour donner, avec les notations de la section 12.2,

$$a_k = (2\pi)^{1-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right) p_k$$

Ceci implique en particulier que ces coefficients sont nuls pour  $k$  impair.

**Démonstration** On utilise l'asymptotique par opérateurs de Fourier intégraux et plus précisément la

**Proposition 12.5** (*Théorème de représentation*) Il existe un opérateur intégral de Fourier  $\tilde{F} : \Omega \mapsto \mathbb{R} \times \Omega$  appartenant à la classe  $I^{-\frac{1}{4}}(\mathbb{R} \times \Omega, \Omega; C)$  qui résout le problème de Cauchy :

$$\partial_t^2 \tilde{F} - L\tilde{F} = 0, \tilde{F}|_{t=0} = \text{Identité de } \Omega, \partial_t \tilde{F}|_{t=0} = 0 \quad (12.3.51)$$

où  $C$  est la relation canonique :  $(t, \tau; y, \eta)$  est sur la bicaractéristique qui passe par l'un des points  $(0, \tau_0 = \pm\sqrt{A(x)\xi, \xi}; x, \xi)$ .

La variété canonique exhibée est donc, si on note  $\Phi^t$  le flot bicaractéristique de l'opérateur étudié  $i^{-1}\partial_t + \sqrt{A(x)\xi, \xi}$ ,

$$\{(t, \tau); (x, \xi); (y, \eta), \tau + q(x, \xi) = 0, (x, \xi) = \Phi^t(y, \eta)\}. \quad (12.3.52)$$

On désigne par  $F(t, x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \Omega \times O)$  le noyau distribution de  $F$ . Son front d'onde est donc contenu dans

$$\{(t, \tau; y, \eta; x, \xi) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \setminus (t, \tau; y, \eta; x, -\xi) \in \mathcal{C}\}.$$

En introduisant la décomposition spectrale de l'opérateur  $L$  on a bien sûr

$$1_x \otimes 1_y + \sum_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) w_k(x) \otimes w_k(y) = F(t, x, y) \text{ modulo } C^\infty.$$

De plus on peut définir la restriction de cette distribution à la variété  $\mathbb{R} \times D \subset \mathbb{R} \times \Omega \times \Omega$  où  $D$  désigne la diagonale de  $\Omega \times \Omega$  et on obtient :

$$\sum_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) |w_k(x)|^2 - \int_\Omega F(t, x, x) \in C^\infty.$$

Par conséquent le support singulier de  $S(t, x)$  vérifie la relation :

$$\text{supp. sing } S(t, x) \subset \{t \setminus \exists (\xi, 0, \tau) \in \mathcal{C}, (t, \tau, x; \xi, x, \xi) \in \mathcal{C}\}$$

ce qui prouve le point i).

Pour prouver que le point 0 est isolé dans  $\mathcal{L}$  (donc dans  $\mathcal{L}(x)$  pour tout  $x \in \Omega$ ) on utilise l'équation hamiltonienne et le fait  $\Omega$  est compacte.

La singularité de  $S(t, x)$  au voisinage de zéro est donc caractérisée par le comportement asymptotique pour  $\tau \rightarrow \pm\infty$  de l'expression

$$I(\tau, x) = (\hat{\theta}S)(\tau, x) = \int_{\mathbb{R} \times \Omega} e^{-i\tau t} \theta(t) F(t, x, x) dt.$$

Comme  $S$  est réelle et paire il suffit d'étudier le cas  $\tau > 0$

Au voisinage de  $t = 0$  on peut résoudre de manière classique (il n'y a pas de caustique) l'équation eikonale

$$\partial_t \phi^2 = (A(x) \nabla_x \phi, \nabla_x \phi) \quad (12.3.53)$$

et les équations de transport. Le noyau  $F(t, x, y)$  s'écrit sous la forme :

$$F(t, x, y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}_\eta^n} \exp\{i(\phi(t, x, \eta) - y \cdot \eta)\} a(t, x, y, \eta) d\eta \quad (12.3.54)$$

où  $a(t, x, y, \eta)$  est un symbole d'ordre zéro.

On utilise l'homogénéité de degré 1 de la phase  $\phi$  et de degré 0 du symbole pour réécrire, en changeant  $\eta$  en  $\tau\eta$ , (12.3.54) sous la forme

$$I(\tau, x) = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}_\eta^n} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) \exp\{i\tau(\phi(t, x, \eta) - x \cdot \eta - t)\} a(t, x, x, \eta) d\eta dt. \quad (12.3.55)$$

La phase stationne au plus pour  $t = 0$  où on a :

$$\phi(0, x, \eta) = x \cdot \eta, \text{ et } a(t, x, x, \eta) = 1 \quad (12.3.56)$$

et

$$\begin{aligned} \phi'_t(t, x, \eta) &= 1, \\ \phi'_x &= \eta, \\ \phi'_\eta &= x. \end{aligned} \quad (12.3.57)$$

Ainsi la sous variété de  $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\eta^n$  où la phase stationne est caractérisée par les relations :

$$t = 0, (A(x)\xi, \xi) = 1 \quad (12.3.58)$$

Il s'agit donc d'une sous variété de dimension  $(n - 1)$  dans un espace de dimension  $(n + 1)$  elle est donc de codimension 2. De plus au voisinage de zéro la phase correspondante s'écrit (utiliser l'équation eikonale du (12.3.53) ) sous la forme :

$$\phi(t, x, \eta) = x \cdot \eta + t\sqrt{(A(x)\eta, \eta)} + O(t^2) \quad (12.3.59)$$

On déduit de (12.3.59) que la sous variété définie par (12.3.58) est bien non dégénérée au sens du théorème de la phase stationnant sur une sous variété. L'existence d'un développement du type (12.3.49) est donc conséquence de ce dernier théorème. Pour finir la démonstration du point (ii) il suffit d'observer que 0 est un point isolé du spectre singulier de  $S(t, x)$  et d'appliquer la proposition 12.1 en conjonction avec les résultats de la section 12.2.

**Corollaire 12.2** Soit  $N(\lambda)$  la fonction de dénombrement des valeurs propres du Laplacien sur une variété compacte  $\Omega$  de dimension  $n$  (avec condition de Dirichlet s'il y a un bord) alors on a :

$$N(\lambda) = (2\pi)^{-n} C_n \text{Vol}(\Omega) \lambda^{\frac{n}{2}} + O((\lambda)^{n-1})$$

**Démonstration :** D'après les points i) et ii) du théorème 12.7, la distribution  $S(t, x)$  est régulière sur l'ouvert  $0 < t < l(x) = \frac{1}{a(x)}$  (avec  $l(x)$  désignant la longueur de la plus petite géodésique fermée de longueur non nulle passant par  $x$ , de plus toujours d'après le théorème 12.7 (point iii)), pour  $t = 0$  elle admet un développement asymptotique de la forme suivante :

$$\theta(t)S(\hat{t}, x, x)(\tau) = A(x)|\tau|^{(n-1)} + O(|\tau|^{(n-2)}). \quad (12.3.60)$$

Ainsi on peut appliquer le théorème de localisation (Théorème 12.3) avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} d\nu(\tau, x) &= A(x)\tau^{n-1} \\ \text{et} \\ d\mu(\tau, x) &= \frac{2}{2\pi} \int e^{i\tau t} F(t, x, x). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\mu(\tau, x) = \frac{1}{n} A(x)\tau^n + Ca(x)(\tau^{n-1})$$

La relation (12.3.60) s'en déduit par intégration.

En fait il est possible d'améliorer sensiblement ce théorème en microlocalisant l'opérateur  $F(t, x, x)$  et en particulier ce qui conduit au résultat pertinent d'Ivrii pour le problème au bord.

Pour ce faire on introduit deux objets.

D'une part pour tout couple  $(x, \xi) \in T^*(X) \setminus 0$  on désigne par  $l(x, \xi)$  la longueur de la plus petite géodésique fermée passant par ce point puis on pose (comme ci dessus)

$$l(x) = \inf_{\xi \neq 0} l(x, \xi)$$

bien entendu s'il n'existe pas de géodésique fermée passant par ce point  $l(x)$  est pris égal à  $+\infty$ . Ainsi définie  $l(x, \xi)$  est une fonction semi continue inférieurement et l'infimum dans la définition de  $l(x)$  peut être pris sur la sphère unité.

D'autre part on introduit un recouvrement de  $T^*(X) \setminus 0$  par un nombre arbitraire mais fini de cônes ouverts  $\Gamma_j$  et une famille  $B_j$  d'opérateurs pseudo différentiels homogènes d'ordre zéro convenables (cf. Hörmander [47] tome IV page 258 pour les détails) qui réalisent une résolution (modulo  $C^\infty$ ) de l'identité et dont le front d'onde est contenu dans  $\Gamma_j$ . Notons simplement que ce résultat a été établi pour la première fois en 1968 par Hörmander [45]. Il s'agit de la parametrix d'Hadamard.

Avec ces outils on va prouver le

**Théorème 12.8** *La fonction de dénombrement de l'opérateur de Laplace Beltrami sur la variété sans bord  $\Omega$  vérifie l'estimation suivante :*

$$|N(\lambda) - C_n \text{Vol}(\Omega) \lambda^{\frac{n}{2}}| \leq C \lambda^{\frac{(n-1)}{2}} \int_{(A(x), \xi, \xi) < 1} \frac{1}{l(x, \xi)} dx d\xi \quad (12.3.61)$$

Avant de faire la démonstration il convient de remarquer que de ce théorème on déduit immédiatement le

**Corollaire 12.3** *On suppose que l'ensemble des points  $(x, \xi)$  par lesquels passe une géodésique fermée est de mesure nulle dans  $T^*(X) \setminus 0$  (ce qui est beaucoup moins fort que de supposer que l'ensemble des points  $x \in \Omega$  par lesquels passe une géodésique fermée est de mesure nulle dans  $\Omega$ ) alors on a, pour la fonction de dénombrement de l'opérateur de Laplace Beltrami, la formule :*

$$N(\lambda) = C_n \text{Vol}(\Omega) \lambda^{\frac{n}{2}} + o(\lambda^{\frac{(n-1)}{2}})$$

**Démonstration du Théorème 12.8** On utilise le recouvrement  $\Gamma_j$  et les opérateurs  $B_j$  introduits ci dessus en posant en particulier

$$l_j = \inf_{(x, \xi) \in \Gamma_j} l(x, \xi).$$

Avec la fonction  $\tilde{N}(\tau) = N(\tau^2)$  la formule (12.3.61) s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\tau) &= C_n \text{Vol}(\Omega) \lambda^{\frac{n}{2}} + C(\tau) \\ |C(\tau)| &\leq C \tau^{(n-1)} \int_{(A(x), \xi, \xi) < 1} \frac{1}{l(x, \xi)} dx d\xi. \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\tilde{N}(\tau) = \int_0^\tau \int_\Omega d\mu(\tau', x) dx.$$

On introduit la résolution de l'identité :

$$I = \sum_1^N B_j B_j^* = I + R, \text{ avec } R \text{ indéfiniment régularisant}$$

et ainsi modulo  $\tau^{-\infty}$ , on a :

$$\tilde{N}(\tau) = \sum_j \int_0^\tau \int_\Omega d\mu_j(\tau', x) dx$$

avec

$$d\mu_j(\tau', x) = \frac{1}{\pi} \int e^{-it\tau} \text{Trace}\{\cos(t\sqrt{-\Delta} B_j B_j^*)\} dt; \quad (12.3.62)$$

dans (12.3.62) les traces et transformées de Fourier sont comprises au sens des distributions. On désigne enfin par  $F_j(t, x, y)$  toute approximation (modulo  $C^\infty$ ) du noyau de l'opérateur :

$$\cos(t\sqrt{-\Delta} B_j B_j^*)$$

et, comme on a :

$$\text{Trace}\{\cos(t\sqrt{-\Delta}B_jB_j^*)\} = \text{Trace}\{B_j^* \cos(t\sqrt{-\Delta}B_j)\}$$

on déduit du théorème de propagation des singularités que la fonction :

$$S_j(t, x) : t \mapsto F_j(t, x, x)$$

est régulière pour  $0 < t < l_j$ . On suppose (ce qui est aussi possible) que les symboles principaux  $b_j$  des opérateurs  $B_j$  vérifient la relation :

$$\sum_j |b_j|^2 = 1.$$

Pour appliquer le théorème de localisation, on introduit les mesures :

$$d\nu_j(\tau) = \frac{1}{\pi} \in e^{-it\tau} \theta(t) \text{Trace}\{\cos(t\sqrt{-\Delta}B_jB_j^*)\} dt \quad (12.3.63)$$

Dans (12.3.63)  $\theta(t)$  désigne une fonction régulière, à support dans un voisinage assez petit de 0 (pas de caustiques formées pour  $t \in \text{support}\theta$ ) et égale à 1 dans un voisinage (encore plus petit) de zéro. Ainsi comme dans la formule (12.3.54), le terme principal du noyau d'une parametrix de l'opérateur  $\cos(t\sqrt{-\Delta}B_jB_j^*)$  s'écrit :

$$F_j(t, x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-n} \int_{\mathbf{R}_\eta^n} e^{i\{\phi(t, x, \eta) - y \cdot \eta\}} a(t, x, y, \eta) |b_j(\eta)|^2 d\eta$$

Ceci permet d'expliciter les mesures  $\nu_j(\tau, x)$  et  $\nu_j(\tau)$  selon les formules :

$$\begin{aligned} d\nu_j(\tau) &= \int d\nu_j(\tau, x) dx \\ d\nu_j(\tau, x) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-n} \int_{\mathbf{R}_\eta^n} e^{i\{\phi(t, x, \eta) - x \cdot \eta\}} a(t, x, x, \eta) |b_j(\eta)|^2 d\eta \end{aligned}$$

d'où l'on déduit comme ci dessus et par le théorème de la phase stationnant sur une sous variété que  $d\nu_j(\tau, x)$  admet un développement asymptotique de la forme

$$d\nu_j(\tau, x) = C_j(x)\tau^{(n-1)} + D_j(x)\tau^{(n-2)} + o(\tau^{(n-2)}) \quad (12.3.64)$$

avec

$$|C_j(x)| \leq C \int_{(A(x)\xi, \xi) \leq 1} |b_j(\xi)|^2 dx d\xi.$$

Il reste alors à appliquer le théorème de localisation 12.3 et à sommer par rapport à  $j$  pour obtenir la relation :

$$\left| \tilde{N}(\tau) - \tau^n \sum_j \int_\Omega C_j(x) dx - \tau^{(n-1)} \sum_j \int_\Omega D_j(x) dx \right| \leq C \sum_j \frac{1}{l_j} \int_{(A(x)\xi, \xi) \leq 1} |b_j(\xi)|^2 dx d\xi. \quad (12.3.65)$$

On utilise le point ii) pour l'identification des coefficients, en particulier le terme en  $\tau^{(n-1)}$  figurant dans le premier membre de (12.3.65) est nul dans le cas, considéré ici, de l'ouvert sans bord. Enfin pour le second membre de (12.3.65) on a la majoration :

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{1}{l_j} \int_{(A(x)\xi, \xi) \leq 1} |b_j(\xi)|^2 dx d\xi &\leq \int_{(A(x)\xi, \xi) \leq 1} \sum_j \frac{|b_j(\xi)|^2}{l_j(x, \xi)} dx d\xi \\ &\leq C \int_{(A(x)\xi, \xi) \leq 1} \frac{1}{l_j(x, \xi)} dx d\xi \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

L'inspection de la démonstration ci dessus fait apparaître les ingrédients suivants :

i) Le fait que  $S_j(t, x)$  est régulière sur l'intervalle  $0 < t < l_j$ ,

ii) Le calcul (il suffit de savoir que l'on a un développement en puissance et que l'on a une majoration convenable du premier terme) de la singularité en  $t = 0$  de cette distribution.

Ces deux étapes se généralisent bien sûr pour un problème aux limites. En particulier pour le point i) on parle (cf. Hörmander [47] Tome III) de bicaractéristiques généralisées (incluant toute interaction "physique" avec le bord) et ainsi on obtient l'énoncé suivant du à Ivrii que l'on cite sans démonstration.

**Théorème 12.9** *La fonction de dénombrement de l'opérateur de Laplace sur un ouvert  $\Omega$  avec condition de Dirichlet sur la frontière vérifie l'estimation suivante :*

$$|N(\lambda) - \frac{C_n}{(2\pi)^n} \mathcal{V} \lambda^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{4} \frac{C_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}} \mathcal{S} \lambda^{\frac{(n-1)}{2}}| \leq C \lambda^{\frac{(n-1)}{2}} \int_{(A(x), \xi, \xi) \leq 1} \frac{1}{l(x, \xi)} dx d\xi$$

et en particulier si les géodésiques fermées forment un ensemble de mesure nulle, on a :

$$N(\lambda) = \frac{C_n}{(2\pi)^n} \mathcal{V} \lambda^{\frac{n}{2}} - \frac{1}{4} \frac{C_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}} \mathcal{S} \lambda^{\frac{(n-1)}{2}} + o(\lambda^{\frac{(n-1)}{2}})$$

### 12.3.4 Contribution des géodésiques au spectre de la trace.

Grâce au théorème de localisation les résultats précédents sont, par rapport à la structure riemannienne *Globale* de nature négative : on a prouvé que si on n'a pas trop de géodésiques fermées on peut améliorer (un peu) l'asymptotique de Weyl. Pour prouver des résultats "positifs" c'est à dire impliquant des géodésiques fermées il est nécessaire de disposer de paramètres globales plus précises. On ne peut plus (à cause du passage des caustiques) représenter l'opérateur Fourier intégral  $F(x, y, t)$  de la formule (12.3.51) par une seule intégrale oscillante, par contre on dispose de l'énoncé suivant :

Au voisinage de tout point  $l \in \mathbb{R}_t$  l'opérateur  $\theta(t)F(t, x, y)$  s'explique en une somme finie d'intégrales oscillantes.

Pour ce faire on définit un recouvrement de la relation canonique  $C$  par des domaines  $C_\alpha$  de cartes  $T_\alpha$  associées à des fonctions de phase de la forme

$$\Phi_\alpha(t, x, \eta, y) = \phi_\alpha(t, x, \eta, y) - y \cdot \eta \quad (12.3.66)$$

Plus précisément l'ouvert  $C_\alpha$  est difféomorphe à un ouvert conique  $Z_\alpha$  de  $]l-\epsilon, l+\epsilon[ \times \Omega \times \Gamma_\alpha$  avec  $\Gamma_\alpha$  cône ouvert de  $\mathbb{R}^n \setminus 0$  au moyen de l'application :

$$(t, x, \eta) \in Z_\alpha \xrightarrow{T_\alpha} (t, \phi'_{\alpha t}, x, \phi'_{\alpha x}; y = \phi'_{\alpha \eta}, \eta);$$

ainsi on représente localement modulo  $C^\infty$ , (pour  $t$  dans un voisinage de  $T$ ) le noyau  $K(t, x, y)$  comme une somme finie d'intégrales oscillantes :

$$F_\alpha(t, x, y) = \sum_{\alpha \in A} (2\pi)^{-n} \int_{\Gamma_\alpha} e^{i\{\phi_\alpha(t, x, \eta) - y \cdot \eta\}} a_\alpha(t, x, \eta) d\eta \quad (12.3.67)$$

où  $a_\alpha(t, x, \eta)$  est un symbole d'ordre zéro dont le support est une partie conique à base compacte incluse dans  $Z_\alpha$ . Avec cette représentation on a le :

**Théorème 12.10** *On suppose que  $(l > 0) \in \mathcal{L}$  est un point isolé dans  $\mathcal{L}$  et que, hypothèse  $(H_l)$ , l'ensemble  $W_l^+$  des bicaractéristiques fermées admettant  $l$  pour période est une réunion finie de sous variété compactes connexes non dégénérées  $W_{l,j}$  de dimension  $\nu_j$  :*

$$W_l^+ = \bigcap_{j \in J_l} W_{l,j}, \quad (12.3.68)$$



alors au voisinage du point  $l$  la singularité de  $S(t)$  est donnée (au sens du front d'onde c'est à dire en localisant et en prenant la transformation de Fourier) par un développement asymptotique de la forme suivante :

$$(\hat{\theta}S)(\tau) = \sum_{j \in J_l} e^{-i\tau l} \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{(1-\nu_j)/2} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_j} p_j^k \tau^{-k} \quad (12.3.69)$$

avec

$$p_j^0 = \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{T_{\alpha}^{-1}(W_{l,j} \cap C_{\alpha})} |a_{\alpha}^0(l, x, \eta)| |det\Phi''_{\alpha}|^{-\frac{1}{2}} dv(x) d\eta$$

### Démonstration

Soit maintenant  $l \in \mathcal{L}$  et  $\theta$  une fonction indéfiniment dérivable localisant au voisinage de  $l$ . La singularité de  $S$  au point  $l$  est caractérisée par le comportement asymptotique pour  $\tau \rightarrow \pm\infty$  de l'expression

$$I(\tau) = (\hat{\theta}S)(\tau) = \int_{\mathbf{R} \times \Omega} e^{-i\tau t} \theta(t) F(t, x, x) dt dv(x). \quad (12.3.70)$$

Comme  $S$  est réelle, il suffit d'étudier le cas  $\tau > 0$ , l'autre s'en déduisant par conjugaison, de même il suffit de se limiter par parité à  $l \in \mathcal{L} \cup O$ .

Selon la théorie classique des opérateurs Fourier intégraux on explicite  $\theta F$  en une somme finie (l'intégrale du second membre de (12.3.70) porte sur un compact en  $(x, t)$ ) d'intégrales oscillantes utilisant (12.3.67). Le premier membre de (12.3.70) est donc, modulo un terme à décroissance rapide en  $\tau$ , une somme finie d'intégrales oscillantes du type suivant

$$\int \int \theta(t) \int_{\Gamma_{\alpha}} \exp\{i\{\phi_{\alpha}(t, x, \eta) - x \cdot \eta - \tau t\}\} a_{\alpha}(t, x, \eta) d\eta dx dt; \quad (12.3.71)$$

on utilise (comme dans le passage de (12.3.54) à (12.3.55) l'homogénéité de degré 1 de la phase  $\phi_{\alpha}$  et de degré 0 du symbole  $a_{\alpha}(t, x, \eta)$  pour obtenir

$$I_{\alpha}(\tau) = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^n \int \int \theta(t) \int_{\Gamma_{\alpha}} \exp\{i\tau\{\phi_{\alpha}(t, x, \eta) - x \cdot \eta - t\}\} a_{\alpha}(t, x, \tau\eta) d\eta dx dt. \quad (12.3.72)$$

Désormais on omettra l'indice  $\alpha$  dans les calculs. Les points critiques de la phase de l'intégrale (12.3.72) sont donnés par (12.3.57), ce qui implique, compte tenu de la relation canonique  $C$ , que ces points critiques coïncident avec les points de la forme :

$$(t, 1; x, \xi; x, \xi), \quad \xi = \phi'_x(t, x, \xi)$$

De plus la phase  $\phi$  vérifie l'équation "eikonale"

$$\phi_t'^2 = (A(x) \nabla_x \phi, \phi) = 1$$

On désigne par  $W_l^+$ , la partie de  $C$  constituée par tous les points

$$(l, 1; x, \xi; x, \xi)$$

qui sont obtenus comme image par les diverses cartes  $T_{\alpha}$  des points critiques des diverses phases  $\Phi_{\alpha}$  et on introduit le fibré en sphère conormale  $S^*\Omega$  de  $\Omega$  :

On considère maintenant  $l \in \mathcal{L}$ , avec pour fixer les idées  $l > 0$  et on suppose donc que l'ensemble  $W_l^+$  est une réunion finie de sous variétés compactes connexes selon la formule (12.3.68) reprise ci dessous :

$$W_l^+ = \bigcap_{j \in J_l} W_{l,j},$$

On pose  $\nu_j = \dim W_{l,j}$ .

Par une partition de l'unité  $C_\alpha, r_\alpha$  subordonnée aux applications  $T_\alpha$  définies par les phases  $\phi_\alpha$  (en nombre fini) on se ramène à évaluer (cf Chazarain [22] pour les détails), modulo des termes à décroissance rapide en  $\tau$

$$(\hat{\theta}S)(\tau) = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^n \sum_j \sum_\alpha I_{j,\alpha}(\tau)$$

où  $I_{j,\alpha}(\tau)$  correspond à une carte  $C_\alpha$  qui rencontre  $W_{l,j}$ . L'intégrale oscillante  $I_{j,\alpha}(\tau)$  s'écrit sous la forme :

$$I_{j,\alpha} = \sum_\alpha \int_{Z_\alpha} \exp(i\tau[\phi_\alpha(t, x, \eta) - x \cdot \eta - t]) a_\alpha dt dv(x) d\eta \quad (12.3.73)$$

Dans (12.3.73) le symbole principal  $a_\alpha^0$  est la partie principale du symbole  $r_\alpha a$  par la carte  $T_\alpha$ , la phase stationne sur la variété  $T^{-1}(W_{l,j} \cap C_\alpha)$ , sur cette variété elle est constante, et d'après l'équation eikonale égale à  $-\tau l$ ; ainsi on a (phase stationnaire avec paramètre)

$$I_{j,\alpha}(\tau) = e^{-i\tau l} \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{1-\nu_j}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\alpha}} p_{j,\alpha}(\tau)$$

avec

$$p_{j,\alpha} \sim \sum_{k>0} p_{j,\alpha}^k \tau^{-k}$$

et

$$p_{j,\alpha}^0 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{T_\alpha^{-1}(W_{l,j} \cap C_\alpha \cap \text{supp}(r_\alpha a))} a_\alpha^0(l, x, \eta) |\det(\Phi''_{\alpha|N})|^{-\frac{1}{2}} dv(x) d\eta$$

Il reste pour terminer la démonstration à prouver que l'on a :

$$a_\alpha^0(l, x, \eta) = e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_j} |a_\alpha^0(l, x, \eta)|$$

avec  $\sigma_j$  indépendant de la carte d'ordre  $\alpha$  et  $|a_\alpha^0(l, x, \eta)| > 0$ . Ceci résulte des deux lemmes suivants explicités dans l'article de Chazarain [22] et que l'on rappelle ici :

**Lemme 12.1 ([22] Lemme 5.2)** *Il existe un entier  $n_\alpha$  tel que l'on ait sur  $T_\alpha^{-1}(W_{l,j} \cap C_\alpha)$*

$$a_\alpha(l, x, \eta) = e^{in_\alpha \frac{\pi}{2}} |a_\alpha^0(l, x, \eta)| \neq 0.$$

et

**Lemme 12.2 ([22] Lemme 5.3)** *Soit deux indices  $\alpha, \beta$  tels que*

$$(\text{supp } r_\alpha) \cap (\text{supp } r_\beta) \cap (W_{l,j}) \neq \emptyset$$

alors on a :

$$e^{(i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\alpha} + in_\alpha \frac{\pi}{2})} = e^{(i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\beta} + in_\beta \frac{\pi}{2})}.$$

Le premier lemme se prouve en remarquant que le symbole principal est sur  $C$  solution de l'équation de transport

$$\{H, a\} = 0, \quad (12.3.74)$$

que les conditions initiales impliquent que la restriction  $a|_{\{0,1\} \times D^*}$  est identique à 1 et que  $a|_{(\{0,1\} \times D^*) \cap C}$  est une section constante de cette restriction.

Le deuxième lemme se prouve en microlocalisant l'opérateur Fourier intégral  $F(t, x, x)$  sur l'intersection des deux cartes et en calculant le comportement asymptotique de ces deux mêmes termes par le théorème 12.2.

Le cas le plus intuitif de sous variété formée de bicaractéristiques fermées correspond à une unique bicaractéristique  $\gamma$  de longueur primitive  $T$  passant par le point  $(x, \xi)$ . L'application :

$$(x, \xi) \mapsto (x(s), \xi(s)) = \exp sH(x, \xi)$$

est symplectique ainsi sa différentielle  $D(\exp sH)$  est une application  $\mathbb{R}^{2n}$  dans lui même dont le spectre est invariant par la transformation  $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$ .

Comme la trajectoire est périodique, au point  $t = s = T$  le vecteur  $(\dot{x}(0), \dot{\xi}(0))$  est invariant ainsi 1 est une valeur propre de multiplicité au moins égale à 2 de l'application  $D(\exp TH)$ . Selon la tradition on dit que  $\gamma$  est non dégénérée si la multiplicité de cette valeur propre est exactement égale à 2. On désigne par  $K$  le sous espace propre correspondant et par  $P$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^{2n}$  modulo  $K$ , elle s'identifie à une application de  $\mathbb{R}^{2(n-1)}$  dans lui même dite application de Poincaré et notée  $P_\gamma$  dont 1 n'est pas valeur propre. Ainsi  $\det(I - P)$  est non nul.

On a alors le

**Théorème 12.11** (Duistermaat Guillemin [32])

On suppose que  $mT$  est un point isolé dans  $\mathcal{L}$  qui correspond à une géodésique  $\gamma$  non dégénérée alors au voisinage de  $t = mT$  alors la singularité de la distribution trace  $\cos t\sqrt{-\Delta}$  est décrite, avec  $\theta$  une fonction localisant au voisinage de  $t = mT$  et  $\tau$  tendant vers l'infini, par la formule :

$$\int e^{it\tau} \sum_k e^{i\sqrt{\lambda_k}t} \theta(t) dt = i^{-m\sigma} \frac{T}{2\pi} e^{-imT\tau} |I - P^m|^{-\frac{1}{2}} + O(\tau^{-1}).$$

avec  $\sigma$  l'indice de Morse de la courbe  $\gamma$ .

Comme le point  $mT$  est isolé, la variété  $W_{mT}$  du théorème 12.9 est réduite à la bica-ractéristique  $\gamma$  parcourue  $m$  fois. De plus le fait que l'application de Poincaré soit non dégénérée équivaut au fait que cette variété est aussi non dégénérée.

Ainsi d'après la formule (12.3.69) et avec les notations du théorème 12.9 on a :

$$I_m(\tau) = e^{i\frac{\pi}{4}\sigma} e^{-i\tau mT} c_m + O(\tau^{-1}) \quad (12.3.75)$$

Et il reste à observer que  $\sigma$  s'identifie à l'indice de Morse de la courbe et que  $c_m$  est donné par la formule :

$$c_m = \frac{T}{2\pi} |\det(I - P^m)|^{-\frac{1}{2}} \quad (12.3.76)$$

ce qui fait l'objet de la section 3.5.

En introduisant une fonction  $\theta(t)$  paire qui localise près des points  $\pm mT$  et en utilisant la parité et la réalité de la distribution  $\text{Trace} \cos t\sqrt{-\Delta}$ , on déduit de la formule (12.3.75) et sous les hypothèses du théorème 12.10, la relation

$$\int e^{-i\tau t} \text{Trace} \cos t\sqrt{-\Delta} \theta(t) dt = (-1)^{\sigma' m} \frac{T}{2\pi} |\det(I - P^m)|^{-\frac{1}{2}} \cos(\tau mT) + O(\tau^{-1}) \quad (12.3.77)$$

A partir de cet énoncé on se rapproche beaucoup d'une généralisation explicite de la formule de Poisson, comme le montre le

**Corollaire 12.4** On désigne par  $U$  un intervalle ouvert borné de  $]0, \infty[$  et on suppose que

$$\bar{U} \cap \mathcal{L} = \cup \{mT_j | mT_j \in \mathcal{L}\}$$

est une réunion finie de longueurs de géodésiques isolées non dégénérées, alors pour toute fonction paire  $\phi$  régulière et à support dans  $U \cup (-U)$  on a :

$$\begin{aligned} & \langle \sum_k \cos t\sqrt{\lambda_k}, \phi(t) \rangle \\ &= \langle \text{Trace} \cos t\sqrt{-\Delta}, \phi(t) \rangle \\ &= \langle \sum_{j,m} (-1)^{\sigma'_j m} \frac{T_j}{2\pi} |\det(I - P_j^m)|^{-\frac{1}{2}} \delta(t - mT_j), \phi(t) \rangle + \langle h(t), \phi(t) \rangle \end{aligned} \quad (12.3.78)$$

avec  $h(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$

La démonstration se fait simplement en prenant la transformée de Fourier inverse de la formule (12.3.77) en observant que seul un nombre fini de termes sont impliqués.

**Remarque 6** Les énoncés ci dessus ont été décrits dans le cadre d'un ouvert sans bord, mais comme ils n'utilisent que l'analyse microlocale le long d'une bicaractéristique isolée ils s'adaptent ici sans trop de difficulté au cas des bicaractéristiques fermées, après un nombre fini de réflexions transverses sur le bord, et non dégénérées.

### 12.3.5 Relation avec l'application de premier retour de Poincaré

L'objet de cette section est donc le calcul de coefficient  $c_m$  et de l'exposant  $\sigma$  et leur interprétation géométrique. Rappelons que, dans la carte locale adaptée, il existe une phase  $\phi(t, x, \eta)$  telle que (selon l'égalité (12.3.67))

$$F(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Gamma} e^{i(\phi(t, x, \eta) - y \cdot \eta)} a(t, x, \eta) d\eta.$$

Nous mettons l'opérateur des ondes sous la forme de son terme de Cauchy strictement hyperbolique  $i^{-1}\partial_t + q(x, i^{-1}\partial_x)$ , de symbole principal  $\tau + q(x, \eta)$ . Nous sommes amenés à calculer l'action de  $Q$  sur  $F$ . Le théorème de la phase stationnaire en  $(z, xi)$  sur

$$\int dz d\zeta e^{i(x-z) \cdot \zeta + i\phi(t, z, \eta) - iy \cdot \eta} Q(x, \zeta) a(t, z, \eta) d\eta$$

conduit au point critique  $(z_c, \zeta_c) = (x, \partial_x \phi(t, z_c, \eta))$ , la jacobienne de la phase étant

$$J = \begin{pmatrix} \partial_{x^2}^2 \phi & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d'inverse} \quad J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & -\partial_{x^2}^2 \phi \end{pmatrix}.$$

Les deux premiers termes du développement asymptotique de  $Op(q)F$  sont

$$(\partial_t \phi + q(x, \partial_x \phi(t, x, \eta)))(a_0 + i^{-1}a_1) + i^{-1}\partial_t a_0 + \frac{1}{2i} [q_1 a_0 + 2 \sum_j \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \zeta_j} + \sum_{j,k} \partial_{x_j x_k}^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k}] a_0$$

Alors la phase  $\phi$  est solution de l'équation eikonale :

$$\partial_t \phi(t, x, \eta) + q_0(x, \partial_x \phi(t, x, \eta)) = 0. \quad (12.3.79)$$

Le symbole  $a_0$  est solution de l'équation de transport :

$$\frac{\partial a_0}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial Q}{\partial \eta_j}(x, \partial_x \phi) \frac{\partial a_0}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \left( \sum_{j,k} \partial_{\eta_j \eta_k}^2 Q(x, \partial_x \phi) \partial_{x_j x_k}^2 \phi \right) a_0 = 0. \quad (12.3.80)$$

Notons aussi que

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial_{\eta_j} q_0(x, \partial_x \phi)) = \sum_{j,l} \partial_{\eta_j \eta_l}^2 Q \partial_{x_j x_l}^2 \phi + \sum_j \partial_{x_j \eta_j}^2 Q$$

ce qui fait que le terme coefficient de  $a_0$  dans (12.3.80) est étroitement lié au symbole sous-principal de  $Op(Q)$  qui est  $q_1 - \sum_j \partial_{x_j \eta_j}^2 Q$ , et qui est invariant par changement de coordonnées symplectiques. Dans le cas d'espèce de l'opérateur des ondes, le symbole sous principal est nul<sup>1</sup>.

La relation canonique associée à la représentation de  $F$  est donc caractérisée par

<sup>1</sup>Notons que l'on retrouve ce qui a été fait précédemment, lorsque  $Q = \xi^2$ , où on retrouve le terme  $\Delta \phi$ . La solution est proposée par Nirenberg et Treves [80] p 491-493 par exemple, et on voit que

$$a_0(t, x(t), \eta) = a_0(0, x(0), \eta) e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial_{\eta_j} q_0(x, \partial_x \phi))|_{x=x(s), t=s} ds}.$$

Nous verrons ci-dessous une méthode directe.

$$(y, \eta) \leftrightarrow (x, \zeta)$$

avec  $y = \partial_\eta \phi(t, x, \eta)$  et  $\zeta = \partial_x \phi(t, x, \eta)$ . Alors le graphe de la transformation canonique  $\Phi^{t_0}$  associée à l'opérateur  $e^{it_0 P}$  est égal à

$$\Phi^{t_0} \begin{pmatrix} \partial_\eta \phi(t_0, x, \eta) \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \partial_x \phi(t_0, x, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_x^{t_0} \begin{pmatrix} \partial_\eta \phi(t_0, x, \eta) \\ \eta \end{pmatrix} \\ \Phi_\xi^{t_0} \begin{pmatrix} \partial_\eta \phi(t_0, x, \eta) \\ \eta \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

De cette relation, nous déduisons la matrice jacobienne de  $\Phi^{t_0}$ , qui est appelée application de premier retour de Poincaré, grâce aux relations obtenues en dérivant par rapport à  $x$  et par rapport à  $\eta$  les deux égalités :

$$\begin{cases} \Phi_x^{t_0} \begin{pmatrix} \partial_\eta \phi(t_0, x, \eta) \\ \eta \end{pmatrix} = x \\ \Phi_\xi^{t_0} \begin{pmatrix} \partial_\eta \phi(t_0, x, \eta) \\ \eta \end{pmatrix} = \partial_x \phi(t_0, x, \eta) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \nabla_y \Phi_x^{t_0} \begin{pmatrix} \partial_\eta \phi(t_0, x, \eta) \\ \eta \end{pmatrix} \partial_{x\eta}^2 \phi(t_0, x, \eta) = Id \\ \nabla_y \Phi_x^{t_0} \begin{pmatrix} \partial_\eta \phi(t_0, x, \eta) \\ \eta \end{pmatrix} \partial_{\eta^2}^2 \phi(t_0, x, \eta) + \nabla_\eta \Phi_x^{t_0} \begin{pmatrix} \partial_\eta \phi(t_0, x, \eta) \\ \eta \end{pmatrix} = 0 \\ \nabla_y \Phi_\xi^{t_0} \begin{pmatrix} \partial_\eta \phi(t_0, x, \eta) \\ \eta \end{pmatrix} \partial_{x\eta}^2 \phi(t_0, x, \eta) = \partial_{x^2}^2 \phi(t_0, x, \eta) \\ \nabla_y \Phi_\xi^{t_0} \begin{pmatrix} \partial_\eta \phi(t_0, x, \eta) \\ \eta \end{pmatrix} \partial_{\eta^2}^2 \phi(t_0, x, \eta) + \nabla_\eta \Phi_\xi^{t_0} \begin{pmatrix} \partial_\eta \phi(t_0, x, \eta) \\ \eta \end{pmatrix} = \partial_{x\eta}^2 \phi(t_0, x, \eta). \end{cases}$$

Omettant le jeu de variables  $(t_0, x, \eta)$ , on obtient

$$P = \begin{pmatrix} \nabla_y \Phi_x^{t_0} & \nabla_\eta \Phi_x^{t_0} \\ \nabla_y \Phi_\xi^{t_0} & \nabla_\eta \Phi_\xi^{t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_{x\eta}^2 \phi)^{-1} & -(\partial_{x\eta}^2 \phi)^{-1} \partial_{\eta^2}^2 \phi \\ (\partial_{x\eta}^2 \phi)^{-1} \partial_{x^2}^2 \phi & \partial_{x\eta}^2 \phi - (\partial_{x\eta}^2 \phi)^{-1} \partial_{x^2}^2 \phi \partial_{\eta^2}^2 \phi \end{pmatrix}.$$

Cette égalité est licite puisque l'application de premier retour de Poincaré est bien définie lorsque cette matrice jacobienne est non singulière, ce qui implique que  $\partial_{x\eta}^2 \phi$  est inversible.

On en déduit que

$$I - P = \begin{pmatrix} I - (\partial_{x\eta}^2 \phi)^{-1} & (\partial_{x\eta}^2 \phi)^{-1} \partial_{\eta^2}^2 \phi \\ -(\partial_{x\eta}^2 \phi)^{-1} \partial_{x^2}^2 \phi & I - \partial_{x\eta}^2 \phi + (\partial_{x\eta}^2 \phi)^{-1} \partial_{x^2}^2 \phi \partial_{\eta^2}^2 \phi \end{pmatrix}.$$

Par des manipulations algébriques élémentaires, on trouve que

$$-(I - P) \begin{pmatrix} \partial_{x\eta}^2 \phi & 0 \\ 0 & \partial_{x\eta}^2 \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\eta^2}^2 \phi & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial_{\eta^2}^2 \phi & I - \partial_{x\eta}^2 \phi \\ I - \partial_{x\eta}^2 \phi & \partial_{x^2}^2 \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x\eta}^2 \phi & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

d'où la relation, dans tout système de coordonnées symplectiques

$$-\det(I - P) \det(\partial_{x\eta}^2 \phi) = \det(\text{Hess}_{x,\eta}(\phi(t_0, x, \eta) - x\eta)). \quad (12.3.81)$$

Nous avons constaté que les points critiques de (12.3.72) étaient les points  $(t_c, x_c, \eta_c)$  solution de (12.3.57)

$$\begin{cases} \partial_t \phi(t_c, x_c, \eta_c) = 1 \\ \partial_x \phi(t_c, x_c, \eta_c) = \eta_c \\ \partial_\eta \phi(t_c, x_c, \eta_c) = x_c \end{cases} \quad (12.3.82)$$

La relation  $\partial_\eta(\phi(t, x, \eta) - x\eta)|_{(t_c, x_c, \eta_c)} = 0$  implique que  $(t, \partial_t\phi); (x, \partial_x\phi); (x, \xi)$  est dans  $\mathcal{C}$ , soit, d'après la définition de  $\mathcal{C}$  donnée par (12.3.52), la relation  $(x, \partial_x\phi(t, x, \eta)) = \Phi^t(x, \xi)$ , l'autre relation  $\tau + q(x, \partial_x\phi) = 0$  étant déjà vérifiée car  $\phi$  est solution de l'équation eikonale.

La troisième relation de (12.3.82) permet d'avoir

$$(x_c, \partial_x\phi(t_c, x_c, \eta_c)) = \Phi^{t_c}(x_c, \eta_c).$$

Des deux premières relations, on déduit que

$$q(x_c, \xi_c) = 1, (x_c, \eta_c) = \Phi^{t_c}(x_c, \eta_c).$$

On vérifie ainsi que les points  $(t_c, x_c, \eta_c)$  où la phase stationne dans (12.3.72) sont les points  $t_c = T$ , période du flot caractéristique, et  $(x_c, \eta_c)$  point fixe de  $\Phi^{t_c}$  avec la relation normalisante  $q(x_c, \eta_c) = 1$ . C'est une variété critique au sens des intégrales avec paramètre.

Considérons  $(x, \eta)$  un point du fibré cotangent, et  $(x(s), \xi(s))$  la solution des équations de Hamilton associées à  $q_0$  :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \partial_\eta q_0(x(s), \xi(s)) \\ \frac{d\xi}{ds} = -\partial_x q_0(x(s), \xi(s)) \\ x(0) = x, \xi(0) = \eta \end{cases} \quad (12.3.83)$$

On vérifie que, à partir de (12.3.79)

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \sum_p \frac{\partial q_0}{\partial \eta_p}(x, \partial_x\phi(t, x, \eta)) \frac{\partial}{\partial x_p} \right] \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \eta_j}(t, x, \eta) \right] = 0, \quad (12.3.84)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \sum_p \frac{\partial q_0}{\partial \eta_p}(x, \partial_x\phi(t, x, \eta)) \frac{\partial}{\partial x_p} \right] \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(t, x, \eta) \right] = -\frac{\partial q_0}{\partial x_j}(x, \partial_x\phi(t, x, \eta)). \quad (12.3.85)$$

L'équation (12.3.85) est celle permettant d'obtenir  $\xi(t)$ , ce qui est justifié par ce qui suit. Comme  $\phi$  est solution de l'équation eikonale, la variété lagrangienne  $\Lambda_\phi$  est feuilletée par les bicaractéristiques). Or  $(x, \frac{\partial}{\partial x}(\phi(0, x(0), \eta))) = (x, \eta)$ , et on vérifie que

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(s, x(s), \eta) \right) = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \sum_p \frac{\partial q_0}{\partial \eta_p}(x, \partial_x\phi(s, x(s), \eta)) \frac{\partial}{\partial x_p} \right] \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(s, x(s), \eta) \right).$$

Le point initial correspond à  $s = 0$  sur la bicaractéristique (12.3.83), donc  $\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x(t), \eta) = \xi(t)$ . On déduit de (12.3.84) que

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \eta_j}(s, x(s), \eta) \right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \eta_j}(s, x(s), \eta) = \frac{\partial \phi}{\partial \eta_j}(0, x(0), \eta) = x_j.$$

Il vient

$$\frac{\partial}{\partial x_p} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta_j}(s, x(s), \eta) \right) = \delta_{jp}$$

et en développant le terme de gauche, il reste

$$\sum_m \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_m \partial \eta_j}(z, x(s), \eta) \frac{\partial}{\partial x_p}(x_m(s)) = \delta_{jp}.$$

Les deux matrices ainsi exhibées sont inverses l'une de l'autre, ce qui implique que leurs déterminants sont inverses l'un de l'autre. Ainsi

$$\frac{a_0(s, x(s), \eta)}{(\det(\partial_{x_m \eta_j}^2 \phi(s, x(s), \eta)))^{\frac{1}{2}}} = a_0(s, x(s), \eta) \left| \frac{\partial}{\partial x_p}(x_m(s)) \right|^{\frac{1}{2}}.$$

Le dernier terme est le jacobien du changement de variable, et on sait que  $a_0(s, x(s), \eta) \left| \frac{\partial}{\partial x_p}(x_m(s)) \right|^{\frac{1}{2}}$  est constant, égal à  $a_0(0, x, \eta) \times 1 = 1$ . On prend  $s = t_c$  et  $\eta = \eta_c$ , auquel cas  $x(t_c) = x_c$ .

Pour appliquer le théorème de la phase stationnaire avec paramètre à l'intégrale (12.3.73), il faut représenter la phase dans un système de coordonnées où la variable sur la variété caractéristique est isolée. On considère ainsi un point  $(x_0, \eta_0)$  de la bicaractéristique fermée de longueur  $T = t_c$ . Alors l'hypersurface  $H = \{(x - x_0) \cdot \eta_0 = 0\}$  de  $T^*\mathbb{R}^n$  est transverse à la géodésique, et elle est paramétrée par  $(y, \eta)$ . On introduit

$$(x(s, y, \eta), \eta(s, y, \eta)) = \Phi^s(y, \eta).$$

La phase considérée est alors

$$\psi(t, s, y, \eta) = \phi(t, x(s, y, \eta), \eta) - x(s, y, \eta) \cdot \eta - t.$$

Elle stationne en  $(t_c, y_c, \eta_c) \simeq (T, x_0, \eta_0)$  pour tout  $s$  par les relations de (12.3.82).

Le gradient de cette phase est  $(t, s, y_i, \eta_i)$

$$\begin{pmatrix} \partial_t \phi(t, x(s, y, \eta), \eta) - 1 \\ \sum_j [\partial_{x_j} \phi(t, x(s, y, \eta), \eta) - \eta_j] \frac{\partial x_j}{\partial s} \\ \sum_j [\partial_{x_j} \phi(t, x(s, y, \eta), \eta) - \eta_j] \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \\ \sum_j [\partial_{x_j} \phi(t, x(s, y, \eta), \eta) - \eta_j] \frac{\partial x_j}{\partial \eta_i} + \partial_{\eta_i} \phi(t, x(s, y, \eta), \eta) - x_i(s, y, \eta) \end{pmatrix}$$

Le jacobien en  $(t, y, \eta)$  est alors

$$\begin{pmatrix} \partial_{t^2}^2 \phi(t, x(s, y, \eta), \eta) & \sum_j \partial_{t x_j}^2 \phi \frac{\partial x_j}{\partial y_i} & \sum_j \partial_{t x_j}^2 \phi \frac{\partial x_j}{\partial \eta_i} + \partial_{t \eta_i}^2 \phi \\ \sum_j \partial_{t x_j}^2 \phi \frac{\partial x_j}{\partial y_i} & \sum_{j,l} \partial_{x_j x_l}^2 \phi \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial x_l}{\partial y_k} & \sum_{j,l} \partial_{x_j x_l}^2 \phi \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial x_l}{\partial \eta_k} + [\sum_j \partial_{x_j \eta_k}^2 \phi - \delta_{jk}] \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \\ \sum_j \partial_{t x_j}^2 \phi \frac{\partial x_j}{\partial \eta_i} + \partial_{t \eta_i}^2 \phi & \sum_{j,l} \partial_{x_j x_l}^2 \phi \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial x_l}{\partial \eta_k} & \sum_{j,l} \partial_{x_j x_l}^2 \phi \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \frac{\partial x_l}{\partial \eta_i} \\ & + [\sum_j \partial_{x_j \eta_k}^2 \phi - \delta_{jk}] \frac{\partial x_j}{\partial y_i} & + [\sum_j \partial_{x_j \eta_k}^2 \phi - \delta_{jk}] \frac{\partial x_j}{\partial \eta_i} \end{pmatrix}.$$

Nous utilisons une transformation canonique<sup>2</sup> dans laquelle l'opérateur s'écrit  $q_0(x, \eta) = \eta_1$ . Alors on obtient, à partir de l'équation eikonale

$$\begin{cases} \partial_{t^2}^2 \phi + \partial_{t x_1}^2 \phi = 0 \\ \partial_{t x_1}^2 \phi + \partial_{x_1}^2 \phi = 0 \\ \partial_{t x'}^2 \phi + \partial_{x_1 x'}^2 \phi = 0 \\ \partial_{t \eta}^2 \phi + \partial_{x_1 \eta}^2 \phi = 0 \end{cases}$$

ce qui permet de réécrire, notant que  $\partial_s x_j = \delta_{j1}$  et  $\partial_\eta x_j = 0$ , que le déterminant de cette matrice hessienne est égal au déterminant de la matrice hessienne de  $\phi(t, x, \eta) - x \cdot \eta$  dans les variables  $(x, \eta)$ .

Enfin, la phase  $\phi$  est constante sur la variété critique, et donc on trouve  $\phi(t_c, x_c, \eta_c) - x_c \cdot \eta_c - t_c = -t_c = -T$ . Ceci achève la preuve de la relation

<sup>2</sup>L'équation eikonale  $\partial_t \phi(t, x, \eta) + q_0(x, \partial_x \phi(t, x, \eta)) = 0$  implique les relations

$$\partial_{t^2}^2 \phi(t, x(s, y, \eta), \eta) = \sum_j \frac{\partial q_0}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial s} + \sum_{j,l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial x_l}{\partial s} \partial_{t x_j}^2 \phi = -\frac{\partial q_0}{\partial x_j} - \sum_k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial s} \partial_{t \eta_j}^2 \phi = -\sum_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_p \partial \eta_j} \frac{\partial x_p}{\partial s}$$

La première ligne de la matrice hessienne est

$$\left( \sum_j \frac{\partial q_0}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial s} + \sum_{j,l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial x_l}{\partial s}, -\sum_j \frac{\partial q_0}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} - \sum_{j,l} \partial_{x_j x_l}^2 \phi \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial x_l}{\partial s}, -\sum_j \frac{\partial q_0}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_i} - \sum_{j,l} \partial_{x_j x_l}^2 \phi \frac{\partial x_j}{\partial \eta_i} \frac{\partial x_l}{\partial s} - \sum_p \partial_{x_p \eta_i}^2 \phi \frac{\partial x_p}{\partial s} \right).$$

La matrice hessienne est égale à (noter les deux termes supplémentaires)

$$t \begin{pmatrix} \partial_s x & 0 \\ \partial_y x & 0 \\ \partial_\eta x & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \eta} - I \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \eta} - I & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_s x & 0 \\ \partial_y x & 0 \\ \partial_\eta x & I \end{pmatrix} + M_1 \frac{\partial q_0}{\partial x_1} + M_2 \frac{\partial q_0}{\partial x_2}.$$

$$I(\mu) \simeq (\det(I-P))^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-1-n} \left(\frac{2\pi}{\mu}\right)^{\frac{2n+1-1}{2}} \mu^n \int_{Z \cap q(x,\xi)=1} d\omega_{Z \cap q(x,\xi)=1} e^{-i\mu T} \hat{\rho}(T) \frac{a(T, x, x, \mu\xi)}{(\det(\partial_{x\eta}^2 \phi))^{\frac{1}{2}}}.$$

soit

$$I(\mu) \simeq (\det(I-P))^{-\frac{1}{2}} \frac{T}{2\pi} e^{-i\mu T} \hat{\rho}(T) \frac{a(T, x, x, \mu\xi)}{(\det(\partial_{x\eta}^2 \phi))^{\frac{1}{2}}} = (\det(I-P))^{-\frac{1}{2}} \frac{T}{2\pi} e^{-i\mu T} \hat{\rho}(T).$$

### 12.3.6 Démonstration du théorème de la phase stationnant sur une sous variété

On désigne par  $Z$  une variété de dimension  $n$  et par  $\phi(z)$  une phase qui stationne sur

$$W = \{z \in Z, \nabla_z \phi = 0\}$$

On suppose que  $W \subset Z$  est une sous variété connexe de dimension  $d$ . Il existe donc une application  $\mathcal{W} : \mathbb{R}^d \mapsto X$  telle que

$$W = \{z \in \mathbb{R}^n, z = \mathcal{W}(y), y \in \mathbb{R}^d\}$$

ainsi  $y \mapsto \mathcal{W}(y)$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^d$  sur  $W$  et il existe un jeu de coordonnées  $(z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_1})$  telles que la matrice

$$\begin{pmatrix} \partial Z_{j_p} \\ \partial y_l \end{pmatrix}$$

soit inversible. On réordonne alors les coordonnées sur  $X$  pour que les  $d$  dernières coordonnées soient  $(z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_1})$  et on note  $\Xi$  le difféomorphisme inverse de l'application

$$y \mapsto (z_{j_1}(y), z_{j_2}(y), \dots, z_{j_1}(y)) = (\tilde{z}_{n-d+1}(y), \tilde{z}_{n-d+1}(y), \dots, \tilde{z}_{n-d+1}(y)) = \tilde{z}'' = \Xi^{-1}(y)$$

On vérifie que  $W$  s'écrit sous la forme suivante :

$$W = \{(\tilde{z}'(\tilde{z}''), \tilde{z}'')\}, \text{ avec } \tilde{z}'' = \Xi^{-1}(y), \quad \tilde{z}'(\tilde{z}'') = \tilde{z}'(\Xi(y))$$

Ainsi on construit une représentation de  $Z$  sous la forme  $Z = (\tilde{z}', \tilde{z}'')$  dans laquelle on a  $W = \{(\tilde{z}'(\tilde{z}''), \tilde{z}'')\}$ . Bien entendu pour tout  $p, 1 \leq p \leq n$  on a

$$\partial_{z_p} \phi(\tilde{z}'(\tilde{z}''), \tilde{z}'') = 0 \quad (12.3.86)$$

ce qui implique que la phase est constante sur  $W$  et que l'on a, en dérivant (91) par rapport à  $l$ , pour  $n-d+1 \leq l \leq n$

$$\sum_{q=1}^{q=n-d} \partial_{z_p z_q}^2 \phi(\tilde{z}'(\tilde{z}''), \tilde{z}'') \frac{\partial \tilde{z}_q}{\partial \tilde{z}_l} + \partial_{z_p \tilde{z}_l}^2 \phi(\tilde{z}'(\tilde{z}''), \tilde{z}'') = 0 \quad (12.3.87)$$

La hessienne de  $\phi$  est ainsi solution de  $d$  équations indépendantes et est au plus de rang  $n-d$ . On dit que la sous variété  $W$  est non dégénérée si cette hessienne est exactement de rang  $n-d$ . Il existe alors au moins une sous matrice inversible de taille  $(n-d) \times (n-d)$ . Les équations (92) montrent aussi que pour  $l \geq n-d+1$  on a :

$$\partial_{z_p \tilde{z}_l}^2 \phi(\tilde{z}'(\tilde{z}''), \tilde{z}'') = - \sum_{q=1}^{q=n-d} \partial_{z_p z_q}^2 \phi(\tilde{z}'(\tilde{z}''), \tilde{z}'') \frac{\partial \tilde{z}_q}{\partial \tilde{z}_l}$$

ainsi la matrice inversible  $(n-d) \times (n-d)$  est extraite de la matrice

$$(\partial_{z_p z_q}^2)_{1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n-d}$$



On écrit désormais  $\tilde{z}'' = y$  et  $\tilde{z}'(\tilde{z}'') = x(y)$ . La variété critique  $W$  est l'ensemble des points de la forme  $(x(y), y)$  et les équations du point critique sont

$$\begin{aligned} \nabla_x \phi(x(y), y) &= 0, \\ \nabla_y \phi(x(y), y) &= 0 \end{aligned} \quad (12.3.88)$$

En dérivant par rapport à  $y$  ces deux égalités il vient :

$$\begin{aligned} \text{Hess}_x \phi(x(y), y) \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi(x(y), y)}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \text{Hess}_y \phi(x(y), y) &= 0 \end{aligned} \quad (12.3.89)$$

Ce qui permet d'écrire que l'on a :

$$\text{Hess}_{(x,y)} \phi = \begin{pmatrix} \text{Hess}_x \phi & -\text{Hess}_x \phi \frac{\partial x}{\partial y} \\ {}^t \text{Hess}_x \phi \frac{\partial x}{\partial y} & {}^t (\text{Hess}_x \phi \frac{\partial x}{\partial y}) \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Il en résulte que si  $\text{Hess}_x \phi$  est de rang strictement inférieur à  $n - d$  il en est de même de la matrice  $\text{Hess}_{(x,y)} \phi$ . Donc imposer que la matrice  $\text{Hess}_{(x,y)} \phi$  soit de rang  $n - d$  (ce qui est l'hypothèse de non dégénérescence est équivalent à imposer que la matrice  $\text{Hess}_x \phi$  soit aussi de rang  $n - d$  ce qui est l'hypothèse nécessaire pour pouvoir appliquer le théorème de la phase stationnaire avec paramètre. On observe de plus que si  $W$  est connexe  $\phi(x(y), y)$  et la signature de  $\text{Hess}_x \phi$  sont tous deux constants sur  $W$ , ces deux nombres sont donc notés  $\phi(W)$  et  $\sigma(W)$ . On a donc d'après le théorème de la phase stationnaire avec paramètre pour  $a(z)$  une fonction indéfiniment dérivable et en utilisant les changements de variables et de notations ci dessus :

$$\begin{aligned} \int e^{ik\phi(z)} a(z) dz &= \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{n-d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ik\phi(x(y), y)} e^{i\frac{\phi}{4}\sigma(\text{Hess}_x \phi(x(y), y))} (|\text{Hess}_x \phi(x(y), y)|^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \{\sum_{j \geq 0} k^{-j} L^j(a)(x(y), y)\} dy \\ &= \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{n-d}{2}} e^{ik\phi(w)} e^{i\frac{\phi}{4}\sigma(w)} \{\sum_{j \geq 0} \int_{\mathbb{R}^d} |\text{Hess}_x \phi(x(y), y)|^{-\frac{1}{2}} L^j(a)(x(y), y)\} dy. \end{aligned} \quad (12.3.90)$$

Bien sur dans (12.3.90) les égalités sont à prendre au sens des développements asymptotiques par rapport au paramètre  $k$  et les  $L^j$  désignent des opérateurs différentiels d'ordre  $j$  par rapport aux variables "conormales"  $y \in \mathbb{R}^{n-d}$ . Nous avons achevé la preuve du théorème de la phase stationnant sur une sous-variété.

## 12.4 Conclusion

On a essayé de montrer dans ce rapport la nécessité d'utiliser des outils précis et adaptés pour démontrer des propriétés fines concernant la distribution des valeurs propres du Laplacien.

Le lecteur observera qu'il reste encore un gap assez important entre les résultats intuitifs fournis par les physiciens (Balian et Bloch [7] par exemple) et ceux rigoureusement démontrés. Une des raisons essentielles est que, au niveau de l'équation des ondes, on utilise un double passage à la limite.

Les parametrix (obtenues par opérateurs intégraux de Fourier) ne sont en général valables que pour un temps fini (la stabilité des géodésiques fermées permet de contourner dans certains cas ce handicap), tandis que les valeurs propres se manifestent naturellement dans le comportement à "grand" temps des solutions.

Des situations plus complexes au niveau de la géométrie (trajectoires chaotiques) conduisent à la théorie du chaos quantique ou des cicatrices.

Inversement, on peut se demander si la connaissance des valeurs propres détermine le domaine et la géométrie riemannienne. Ceci est d'ailleurs le titre d'une contribution essentielle de Kac [51] sur le sujet (Can we hear the shape of a drum?). Lax et Phillips [59] ont ainsi contribué à étudier la réponse à cette question.

Comme on l'a vu à la section 2, de nombreuses quantités géométriques sont déjà déterminées par la distribution ou le comportement asymptotique des valeurs propres, néanmoins la réponse à la question de Kac est négative (même à une isométrie près).

Pour connaître l'objet, il faudrait avoir non seulement les valeurs propres mais la trace sur le bord des fonctions propres correspondantes (ou ce qui revient au même l'opérateur de Dirichlet-Neumann) Belyshev [10], Sylvester and Uhlmann [86]. Ceci est d'ailleurs déjà vrai en dimension 1 pour l'opérateur de Hill (Mc Kean [70]).

A plus d'une dimension d'espace, un exemple géométrique explicite où la réponse à la question de Kac est négative est fourni par Buser et Bérard [19].

Dans le cas d'un ouvert non borné (par exemple le complémentaire d'un compact (obstacle)) le spectre de l'opérateur des ondes (avec pour fixer les idées une condition de Dirichlet sur le bord) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{D}(A) = (H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$$

devient continu et égal à  $i\mathbb{R}$ . La résolvante  $(\mu I - A)^{-1}$ , définie pour  $\operatorname{Re}\mu > 0$ , peut - pourvu qu'on la localise (c'est-à-dire on la multiplie à gauche et à droite par des fonctions régulières à support compact) - être prolongée à tout le plan complexe en une fonction méromorphe dont les pôles

$$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k, \operatorname{Re}\alpha_k < 0$$

sont appelées fréquences de rayonnement. Sous des hypothèses convenables, ces pôles permettent de représenter le champ proche (c'est-à-dire la solution au voisinage de l'obstacle) sous la forme

$$u(t, x) = \sum_{\operatorname{Re}\mu_k \geq -\sigma, |x| \leq R} e^{\mu_k t} w_k(x) + O(e^{-\sigma t}). \quad (12.4.91)$$

Ainsi la partie imaginaire des pôles traduit les oscillations des ondes et leur partie réelle correspond à la décroissance locale due à la dispersion.

Les résonances jouent pour le problème extérieur le rôle des valeurs propres pour le problème intérieur. Leur signification "appliquée" est même bien plus explicite (un avion éclairé par un radar ne vole pas dans un domaine borné; lorsqu'on écoute de la musique on ne place pas son oreille à l'intérieur de l'instrument mais à l'extérieur). Sans développer ce sujet il semble bon de signaler que, au fur et à mesure de leur obtention, les résultats concernant les valeurs propres ont été transposés aux fréquences de rayonnement.

L'estimation de Weyl trouve son analogue d'abord dans l'estimation des fréquences réelles (Lax et Phillips [60]) puis dans une première estimation du nombre  $N(R)$  des fréquences de module inférieur à  $R$  (Melrose [75]). Le calcul d'asymptotiques avec une phase stationnaire ou une série asymptotique a permis de traiter des exemples "pathologiques" faisant apparaître les contributions des géodésiques captives (Ralston [84], Bardos-Guillot-Ralston [8] Ikawa [48], [49]).

L'introduction du front d'onde analytique et de la régularité Gevrey a permis de systématiser les premiers résultats de V. B. Filippov [37], V. M. Babic et N.S. Grigoreva [4]. On peut ainsi évaluer la contribution des géodésiques rampant sur l'obstacle (Bardos-Lebeau-Rauch [9], Sjostrand-Zworski [89]). Enfin, l'utilisation des inégalités de Carleman ou du calcul  $h$ -pseudo-différentiel conduit à des résultats optimaux sur la manière dont les fréquences de rayonnement (qui sont, rappelons le  $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k, \alpha_k < 0$ ) peuvent s'approcher de l'axe imaginaire lorsque  $\beta_k \rightarrow \infty$  (Burq [18]).

Comme cela a été dit en introduction, l'analyse du spectre du laplacien apparaît aussi en arithmétique et en théorie des groupes. Pour commencer, on peut étendre la formule de Poisson à  $n$  (ou pour simplifier à 2) dimensions d'espace. On désigne par  $L$  le réseau des points

$$L = \{(ma, nb), (m, n) \in \mathbb{Z}^2, a, b \in \mathbb{R}^2\}$$

ainsi que le groupe des translations engendré par le vecteur  $(a, b)$ . De même, on désigne par  $L'$  le réseau dual des  $2\pi(\frac{m}{a}, \frac{n}{b})$ . Comme les translations commutent avec le laplacien, par passage au quotient celui-ci devient l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la variété compacte sans bord  $\Omega = \mathbb{R}^2/L$ . Les valeurs propres sont les carrés des modules des éléments du groupe dual  $\omega' = 2\pi(\frac{m}{a}, \frac{n}{b})$ ,  $|\omega'|^2 = 4\pi^2(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})$ , tandis que les longueurs des géodésiques fermées sont les modules des éléments de  $L : \omega = (ma, nb)$ ,  $|\omega|^2 = m^2a^2 + n^2b^2$ . On retrouve par la formule de Poisson une version exacte de (3.80) :

$$\sum_{\omega' \in L'} e^{it|\omega'|} = \frac{ab}{4\pi} \sum_{\omega \in L} \delta(t - |\omega|).$$

Par Fourier inverse et Laplace elle redonne la célèbre formule de Jacobi

$$\sum_{L'} e^{-4\pi^2|\omega|^2t} = \frac{ab}{4\pi t} \left( \sum_L e^{-\frac{|\omega|^2}{4t}} \right)$$

qui correspond au comportement asymptotique de la trace du noyau de la chaleur. Bien entendu, le comportement asymptotique de la fonction de comptage  $N(\lambda)$  s'interprète comme le calcul du nombre de points à coordonnées entières situés dans l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\lambda}{4\pi^2}$$

Selon Lax et Phillips [61], Gauss avait, dans le cas du cercle, donné la formule "optimale"

$$N(\lambda) = M\lambda^2 + O(\lambda).$$

On remarque immédiatement que la démarche ci-dessus peut être généralisée au cas où  $M$  est une variété riemannienne quelconque et où  $\Gamma$  est un sous groupe des transformations de  $M$  qui préservent la structure riemannienne. Alors le spectre du Laplacien va contenir des informations intrinsèques sur la variété  $M$  et le sous-groupe  $\Gamma$ . Le cas qui a été le plus étudié est sans doute celui où  $M$  s'identifie au demi plan de Poincaré  $H = \{(x, y), y > 0\}$  muni de la métrique Riemannienne  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ . Le groupe qui préserve cette métrique s'identifie à  $SL(2, \mathbb{R}) = G$  et l'opérateur de Laplace-Beltrami est  $y^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + \frac{1}{4}u$ .

Pour tout sous groupe  $\Gamma$  de  $G$ , on peut donc considérer la variété riemannienne  $H/\Gamma$  et étudier le spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami en relation avec  $\Gamma$ . Le cas où  $H/\Gamma$  est compacte a été développé entre autres par Mc Kean [73]. Mais le cas le plus fascinant est celui qui correspond au groupe modulaire donné par

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc = 1, (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4.$$

Dans cette situation,  $H/\Gamma$  n'est plus compacte (bien que de volume fini). Le recours à une adaptation de la théorie du scattering évoquée ci-dessus s'impose pour contourner cette difficulté et comme dans le cas de l'obstacle borné, on introduit un semi groupe  $Z(t)$  correspondant à un développement du type (12.4.91). Un calcul explicite de représentation des groupes montre que le spectre de  $B$  correspond aux pôles de la fonction

$$-\left(\frac{1 - 2\mu}{1 + 2\mu}\right)^2 \frac{\Gamma(-\mu)\zeta(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu)\zeta(1 - 2\mu)}$$

où  $\zeta$  désigne la fonction zeta de Riemann. Ainsi une analyse du comportement asymptotique de  $Z(t)$  donnerait la réponse à la conjecture de Riemann. Plus précisément il suffirait de prouver l'estimation

$$\bar{\lim}_t \frac{1}{t} \log \|(B + i)Z(t)\| \leq -\frac{1}{4}. \tag{12.4.92}$$

Malheureusement les auteurs [60] poursuivant le calcul montrent que la preuve de (12.4.92) repose en fait sur l'hypothèse de Riemann, et ainsi le problème reste ouvert. Ces dernières remarques achèvent ce chapitre de présentation d'une application des opérateurs intégraux de Fourier.

## Chapitre 13

# Réflexion des ondes électromagnétiques.

Dans ce chapitre, nous calculons l'expression locale d'une relation au bord entre champ électrique et champ magnétique (condition d'impédance). Nous introduisons à cet effet une formulation intrinsèque des équations de Maxwell, que nous dériverons de manière élémentaire d'identités sur la divergence et le rotationnel. Nous écrivons alors les équations de Maxwell dans un système de coordonnées adapté au bord.

Nous étendons la notion de front d'onde pour une distribution  $(E, H)$ . Nous considérons un champ électromagnétique incident conormal analytique par rapport à une surface d'onde.

De cette forme du champ électromagnétique, on en déduira, dans certaines hypothèses sur l'objet réfléchissant  $\Omega$ , une relation entre les champs électrique et magnétique tangentiels. Le problème extérieur obtenu en imposant sur  $\partial\Omega$  cette condition est alors un problème de réflexion de singularités comme celui que nous avons étudié pour les ondes scalaires. Nous démontrerons le résultat de réflexion dans le cas général.

### 13.1 Géométrie et équations de Maxwell

#### 13.1.1 Formalisme différentiel

Nous commençons par des formules explicites de calcul différentiel. Nous considérons donc deux systèmes de coordonnées dans  $\mathbb{R}^3$ , le système  $(x_1, x_2, x_3)$  et le système  $(X_1, X_2, X_3)$ . Nous supposons que les équations de Maxwell sont écrites dans le système de coordonnées cartésien  $(X)$ .

La matrice jacobienne qui caractérise le changement de variables est

$$(M_{ij}) \quad M_{ij}(x) = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x)$$

Nous introduisons la matrice  $N$  égale à  $(\det M)({}^t M)^{-1}$ . Cette matrice est la matrice des cofacteurs de  $M$ . Nous introduisons aussi la matrice  $g(x) = (M^t M)^{-1}$ .

L'identité remarquable que nous utilisons est la suivante : soit  $F_1(X), F_2(X), F_3(X)$  trois fonctions  $C^\infty(X)$ . Alors si on introduit

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} = M(x) \begin{pmatrix} F_1(X(x)) \\ F_2(X(x)) \\ F_3(X(x)) \end{pmatrix} \quad (13.1.1)$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_3} f_2(x) - \partial_{x_2} f_3(x) \\ \partial_{x_1} f_3(x) - \partial_{x_3} f_1(x) \\ \partial_{x_1} f_2(x) - \partial_{x_2} f_1(x) \end{pmatrix} = N(x) \begin{pmatrix} \partial_{X_3} F_2(X(x)) - \partial_{X_2} F_3(X(x)) \\ \partial_{X_1} F_3(X(x)) - \partial_{X_3} F_1(X(x)) \\ \partial_{X_1} F_2(X(x)) - \partial_{X_2} F_1(X(x)) \end{pmatrix}. \quad (13.1.2)$$

Cette égalité permet d'écrire l'équivalence :

$$\operatorname{rot}_x e = i\omega\mu h \Leftrightarrow \operatorname{rot}_X E = i\omega\mu H.$$

D'autre part, nous notons que  $\operatorname{div}_X H$  est transformé facilement par cette opération; en effet

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^3} \operatorname{div}_X H u(X) dX &= - \int_{\mathbf{R}^3} H \cdot \nabla_X u(X) dX \\ &= - \int_{\mathbf{R}^3} H \cdot M^{-1} \nabla_x u(X(x)) (\det M)(x) dx \\ &= - \int_{\mathbf{R}^3} H \cdot (\det M)^{-1t} N \nabla_x u(X(x)) (\det M) dx \\ &= - \int_{\mathbf{R}^3} (NH) \cdot \nabla_x u dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} \operatorname{div}_x (N(x)H(X(x))) u(x) dx \end{aligned}$$

Nous avons donc aussi l'égalité

$$\operatorname{div}_x h = \operatorname{div}_X H$$

Les deux équations  $\operatorname{div}_X H$  et  $\operatorname{rot}_X E = i\omega\mu H$  sont donc conservées par le changement **simultané** de variable et de fonction inconnues. On vérifie que la transformation  $ME = e$  est une transformation qui caractérise les 1-formes différentielles (en écrivant la 1-forme différentielle associée à  $e$  comme  $e_1 dx_1 + e_2 dx_2 + e_3 dx_3$  et celle associée à  $E$  comme  $E_1 dX_1 + E_2 dX_2 + E_3 dX_3$ ). De même, la matrice  $N$  étant la matrice des cofacteurs de  ${}^t M$ , elle caractérise les 2-formes différentielles (exprimées par exemple sous la forme  $h_1 dx_2 \wedge dx_3 + h_2 dx_3 \wedge dx_1 + h_3 dx_1 \wedge dx_2$ ).

L'opérateur différentielle extérieure  $d$  qui permet de passer d'une 1-forme différentielle à une 2-forme différentielle (et aussi d'une fonction à une 1-forme différentielle ainsi que d'une 2-forme différentielle à un déterminant) est intrinsèque. Il peut s'exprimer sur les bases adaptées aux coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  et  $(X_1, X_2, X_3)$  respectivement en utilisant la correspondance entre les champs de vecteurs et les formes différentielles :

$$\begin{cases} df \rightarrow \nabla_x f = M \nabla_X f \\ de \rightarrow \operatorname{rot}_x e = N \operatorname{rot}_X M^{-1} E \\ dh \rightarrow \operatorname{div}_x h = \operatorname{div}_X (N^{-1} H) \end{cases}$$

Il nous faut enfin évaluer  $\operatorname{rot}_X H$  et  $\operatorname{div}_X E$  en fonction de  $E, H$  et du changement de variable. Par exemple, dans l'égalité (13.1.2), nous considérons  $F = H$ . Alors on trouve, définissant  $f = MH$  comme en (13.1.1), que

$$N \operatorname{rot}_X H = \operatorname{rot}_x M H,$$

Comme  $h = NH$ , on obtient  $N \operatorname{rot}_X H = \operatorname{rot}_x (MN^{-1}h)$ . D'après la définition de  $N$  et de  $g$ , on a  $MN^{-1} = (\det M)^{-1} M^t M = (\det M)^{-1} g^{-1}$ . Enfin,  $\det g = (\det(M^t M))^{-1} = (\det M)^{-2}$ , ce qui donne

$$\operatorname{rot}_X H = (\det g)^{\frac{1}{2}t} M [\operatorname{rot}_x ((\det g)^{\frac{1}{2}} g^{-1} h)]. \quad (13.1.3)$$

Enfin, par intégration par parties

$$\int_{\mathbf{R}^3} \operatorname{div}_X E u(X) dX = - \int_{\mathbf{R}^3} E \cdot \nabla_X u dX = - \int (M^{-1}e) \cdot M^{-1} \nabla_x u (\det M) dx,$$

ce qui donne

$$\operatorname{div}_X E = (\det g)^{\frac{1}{2}} \operatorname{div}_x ((\det g)^{-\frac{1}{2}} g(e)). \quad (13.1.4)$$

Les deux équations de Maxwell  $\operatorname{div}_X E = 0$  et  $\operatorname{rot}_X H = -i\omega\varepsilon E$  deviennent alors

$$\begin{aligned} (\det g)^{\frac{1}{2}} \operatorname{div}_x ((\det g)^{-\frac{1}{2}} g(e)) &= 0 \\ (\det g)^{\frac{1}{2}t} M [\operatorname{rot}_x ((\det g)^{\frac{1}{2}} g^{-1} h)] &= -i\omega\varepsilon E, \end{aligned} \quad (13.1.5)$$

qui se réécrit

$$(\det g)^{\frac{1}{2}} g^{-1} [\text{rot}_x((\det g)^{\frac{1}{2}} g^{-1} h)] = -i\omega \varepsilon e. \quad (13.1.6)$$

Notons que nous reconnaissons ici l'opérateur  $d^*$  agissant dans (13.1.4) sur les 1-formes différentielles et dans (13.1.6) sur les 2-formes différentielles. Ce résultat est bien connu (voir Bossavit [14], Buldyrev [5]). Nous résumons ceci dans le

**Lemme 13.1** *Associant à  $E = (E_1, E_2, E_3)$  en coordonnées cartésiennes la 1-forme différentielle  $\mathcal{E} = E_1 dX_1 + E_2 dX_2 + E_3 dX_3$  et à  $H = (H_1, H_2, H_3)$  dans ce même système de coordonnées la 2-forme différentielle  $\mathcal{H} = H_1 dX_2 \wedge dX_3 + H_2 dx_3 \wedge dX_1 + H_3 dX_1 \wedge dX_2$ , les équations de Maxwell s'écrivent de manière intrinsèque dans tout système de coordonnées indépendant du temps*

$$\begin{cases} d\mathcal{E} = -\mu \partial_t \mathcal{H} \\ d^* \mathcal{H} = +\varepsilon \partial_t \mathcal{E} \\ d^* \mathcal{E} = 0 \\ d\mathcal{H} = 0 \end{cases}$$

Nous n'utiliserons pas réellement cette représentation intrinsèque ici, mais il est bon de remarquer que toutes les égalités que nous écrirons sont indépendantes du système de coordonnées que nous avons choisi; en particulier, les relations au bord, la définition du champ tangent et normal au bord s'écrivent de manière plus simple que dans le système de coordonnées cartésiennes.

De plus, la forme des opérateurs  $d$  et  $d^*$  et le changement simultané d'inconnues (en passant de  $E$  à  $e = ME$ ) permet d'écrire plus simplement le système différentiel vérifié par des combinaisons linéaires des  $E_j$  (comme  $E_n = E_1 n_1 + E_2 n_2 + E_3 n_3$  si  $n$  est le vecteur normal à une surface). De la sorte, cette représentation permet de simplifier et de réécrire le système associé à la réflexion des singularités électromagnétiques.

### 13.1.2 Opérateurs de Calderòn

Nous considérons donc un objet  $\Omega$  (dont, pour plus de commodité nous supposons le bord assez régulier) et nous supposons que le matériau contenu dans  $\Omega$  est caractérisé par ses constantes diélectriques  $\varepsilon$  et  $\mu$ . Nous écrivons  $\mathbb{R}^3 = \Omega \cup \Omega' \cup \partial\Omega$ . Les champs électromagnétiques stationnaires, solution des équations de Maxwell dans  $\Omega$  et dans un voisinage du bord  $\partial\Omega$  dans  $\Omega'$ , vérifient les conditions de transmission au bord de  $\Omega$ , soit, en désignant par  $n(x)$  la normale extérieure à  $\Omega$  au point  $x \in \partial\Omega$  :

$$\begin{cases} \lim_{y \rightarrow x, y \in \Omega} n(x) \wedge E(y) = \lim_{y \rightarrow x, y \in \Omega'} n(x) \wedge E(y) \\ \lim_{y \rightarrow x, y \in \Omega} n(x) \wedge H(y) = \lim_{y \rightarrow x, y \in \Omega'} n(x) \wedge H(y). \end{cases}$$

Traditionnellement, lorsque l'on cherche à étudier la réflexion ou la diffraction par  $\Omega$ , on voudrait remplacer le calcul ou l'analyse de la solution dans  $\Omega$  par une relation liant  $\lim_{y \in \Omega, y \rightarrow x \in \partial\Omega}$  et  $\lim_{y \in \Omega', y \rightarrow x \in \partial\Omega}$ . La réponse théorique a été apportée par Michel Cessenat [21], avec les opérateurs de Calderòn. Lorsque l'onde incidente est une onde plane, de fréquence donnée, et que le vecteur d'onde incident est normal ou proche de la normale, (ou encore lorsque le matériau contenu dans  $\Omega$  est à fort indice), Léontovich a introduit en 1948 la notion de coefficient d'impédance  $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$  et a donné une relation approchée locale entre  $E$  et  $H$ , qui est  $n \wedge E = Z(n \wedge n \wedge H)$ . Nous démontrons ici que, modulo certaines hypothèses sur les coefficients  $E$  et  $H$ , l'opérateur de Calderòn obtenu par M. Cessenat est localement un opérateur pseudo-différentiel. On donne son symbole principal dans une asymptotique haute fréquence. Cet opérateur pseudo-différentiel est la généralisation du coefficient d'impédance obtenu par Léontovich dans le cas du milieu à fort indice.

Les hypothèses que nous considérons sont alors (dans le cas où la transformée de Fourier en temps est caractérisée par  $-i\omega$ )

$$\Im \varepsilon > 0, \Im \mu > 0, \Im(\varepsilon \mu) > 0. \quad (13.1.7)$$

Dans ces conditions, le problème à l'intérieur de  $\Omega$  est un problème elliptique. Le résultat de la Proposition 2.4 permet alors de démontrer l'existence d'un développement asymptotique de la solution à l'intérieur de  $\Omega$  lorsque le champ tangentiel  $n \wedge E$  est donné sur le bord par son développement asymptotique. D'autre part, on rappelle le résultat donné par M. Cessenat de l'existence et de l'unicité de la solution du problème harmonique des équations de Maxwell à l'intérieur d'un ouvert  $\Omega$ . Pour cela, introduisons l'espace  $H_0(\text{rot}, \Omega)$  des distributions  $u$  de  $(L^2(\Omega))^3$  telles que  $\text{rot}u \in (L^2(\Omega))^3$  et que  $n \wedge u|_{\partial\Omega} = 0$ , et l'espace au bord  $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial\Omega) = \{v \in (H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^3, n \cdot v = 0, \text{div}_{\partial\Omega} v \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\}$ . Alors :

**Théorème 13.1** • Soit  $S$  une fonction de  $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial\Omega)$ , et soit  $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2$  un nombre complexe qui n'est pas une valeur propre de l'opérateur  $A$  autoadjoint tel que

$$Au = \text{rotrot}u + u, u \in H_0(\text{rot}, \Omega), \text{rotrot}u \in (L^2(\Omega))^3 \quad (\mathcal{D}(A) = \{u \in H_0(\text{rot}, \Omega), Au \in L^2(\Omega)\})$$

Le système d'équations

$$\begin{cases} \text{rot}E = i\omega\mu H \\ \text{rot}H = -i\omega\varepsilon E \\ n \wedge E|_{\partial\Omega} = S \\ (E, H, \text{rot}E, \text{rot}H) \in (L^2(\Omega))^3 \end{cases}$$

admet une solution unique

• Si  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon$  ou  $\mu$  est complexe, la condition sur  $k^2$  est toujours vérifiée, ce qui assure l'existence et l'unicité de la solution du système d'équations.

La preuve en est classique : lorsque on étudie la solution du système d'équations (utilisant  $\text{div}(\text{rot}) = 0, \text{div}E = \text{div}H = 0$ ), on se ramène à l'équation de Helmholtz

$$(\Delta + k^2)E = 0, n \wedge E|_{\partial\Omega} = S, \text{div}E = 0,$$

dont la formulation variationnelle est

$$\int_{\Omega} (-\nabla E \nabla \bar{\phi} + k^2 E \bar{\phi}) dx + \int_{\partial\Omega} \phi (n \wedge S) d\sigma = 0$$

La forme sesquilineaire est coercive, car  $k$  est complexe. En effet, on trouve, grâce à

$$|a(E, E)|^2 = (\text{Re}a(E, E))^2 + (\text{Im}a(E, E))^2$$

et aux contrôles respectifs de chaque terme, l'inégalité

$$|a(E, E)|^2 \geq C(\|E\|^2 + \|\nabla E\|^2).$$

L'opérateur donnant  $(n \wedge (n \wedge H))|_{\partial\Omega}$  en fonction de  $S$  existe et s'appelle opérateur de Calderón intérieur. Nous étudions dans ce qui suit un développement asymptotique de cet opérateur dans un système de coordonnées adapté au bord.

Dans la fin de ce paragraphe, nous définissons, suivant littéralement Cessenat [21], les opérateurs de Calderón pour le problème de Maxwell stationnaire dans le cas de constantes diélectriques  $\varepsilon > 0, \mu > 0$ . Nous montrons comment cette définition est reliée à la définition de l'opérateur Dirichlet to Neumann (DTN) employé pour le problème de Helmholtz. Nous ne définissons pas les espaces employés ; le lecteur se reportera au chapitre 4.2 de [21]. On s'appuie sur deux théorèmes d'existence et d'unicité (respectivement Theorem 5 et Theorem 6 de [21] pp 106-107). Ces théorèmes sont valables lorsque  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de complémentaire connexe :

**Théorème 13.2** Soit  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^3$ . Il existe un unique  $u \in H_{loc}^1(\Delta, C\Omega)$  vérifiant

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ \text{condition de Sommerfeld sortante : } \nabla u \cdot \frac{\vec{r}}{r} - iku = o(\frac{1}{r}). \end{cases}$$



**Théorème 13.3** Soit  $\varepsilon, \mu > 0$ . Il existe un unique couple  $(E, H)$  tel que (le  $o$  dans la condition de Silver-Muller est uniforme en fonction de la direction  $\frac{\vec{r}}{r}$  sur la sphère unité)

$$\begin{cases} \operatorname{rot}H + ikc\varepsilon E = 0, \operatorname{rot}E - ikc\mu H = 0 \text{ dans } C\Omega \\ n \wedge E|_{\partial\Omega} = m \in H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \partial\Omega) \\ (E, H) \in (L_{loc}^2(C\Omega))^6, (\operatorname{rot}E, \operatorname{rot}H) \in (L_{loc}^2(C\Omega))^6 \\ \text{conditions de Silver-Muller : } kc\varepsilon E - kH = o(\frac{1}{r}), kc\mu \frac{\vec{r}}{r} \wedge H + kE = o(\frac{1}{r}). \end{cases}$$

L'opérateur Dirichlet to Neumann pour le problème de Helmholtz est alors l'application  $u_0 \rightarrow \partial_n u|_{\partial\Omega}$ , où  $u$  est la solution du problème du théorème 13.2.

L'opérateur de Calderón extérieur  $C^e$  est l'application  $m \rightarrow n \wedge H|_{\partial\Omega}$ , où  $(E, H)$  est la solution du problème traité dans le théorème 13.3.

### 13.1.3 Écriture des équations de Maxwell dans un système de coordonnées semi-géodésiques

Ce paragraphe donne à nouveau la construction des coordonnées adaptées au bord déjà vu dans la section 11.4.2. Nous reprenons exactement la même démarche pour que cette partie puisse se lire indépendamment du reste. Nous considérons un point  $x_0 \in \partial\Omega$ . Il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  tel que, localement,  $V$  puisse être représenté par un système de coordonnées  $x_1, x_2$  sur  $\partial\Omega$  et par  $l$  la distance le long de  $n(x_1, x_2)$ ,  $n$  vecteur normal unitaire sortant à  $\partial\Omega$  en  $(x_1, x_2)$ . Autrement dit, tout point de  $V$  est caractérisé par le changement de variable

$$X_i(x_1, x_2, l) = Y_i(x_1, x_2) + ln_i(x_1, x_2)$$

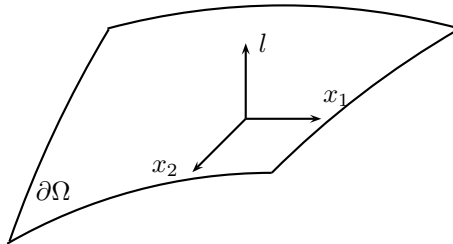
où  $(n_1(x_1, x_2), n_2(x_1, x_2), n_3(x_1, x_2))$  est le vecteur normal à  $\partial\Omega$  au point

$$(Y_1(x_1, x_2), Y_2(x_1, x_2), Y_3(x_1, x_2)).$$

La matrice de changement de variable  $M$  (en notant  $x_3 = l$ ) est alors

$$\begin{aligned} M_{ij}(x_1, x_2, l) &= \partial_{x_i} Y_j(x_1, x_2) + l \partial_{x_i} n_j(x_1, x_2), i = 1, 2 \\ M_{3j}(x_1, x_2, l) &= n_j(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Figure 9



Nous remarquons que, comme  $n$  est un vecteur unitaire et que  $Y(x_1, x_2)$  décrit  $\partial\Omega \cap V$ , le vecteur  $n$  est orthogonal à  $\partial_{x_i} n$  aussi bien qu'à  $\partial_{x_i} Y$ , ce deuxième vecteur étant tangent à  $\partial\Omega$ . La troisième ligne de  $M$  est donc orthogonale aux deux autres. La matrice  $M^t M$  est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} g_{11}(x_1, x_2, l) & g_{12}(x_1, x_2, l) & 0 \\ g_{12}(x_1, x_2, l) & g_{22}(x_1, x_2, l) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilisant la relation  $N = (\det g)^{-\frac{1}{2}} g M$ , on constate que la dernière ligne de  $N$  est  $(\det g)^{-\frac{1}{2}} n_i$ . De plus, cette dernière ligne est orthogonale aux deux autres.

Ceci permet de vérifier que, pour  $l = 0$ ,  $e = ME$  et  $h = MH$  vérifient  $e_3 = E.n$ ,  $h_3 = (\det g)^{-\frac{1}{2}} H.n$ , et  $e_1, e_2, h_1, h_2$  appartiennent au plan tangent à  $\partial\Omega$ . Ce changement d'inconnues permet donc d'avoir un système d'équations simple (puisque ne dépendant que de la métrique au bord) où les composantes tangentielle et normale de  $e$  et de  $h$  sont décomposées.

Nous nous intéressons à ces composantes. En particulier, il existe quatre fonctions  $C_{ij}$ ,  $i, j = 1..2$  et deux opérateurs  $A_j$  et un champ de vecteur  $B$ , définis par

$$A_j f = (\det g)^{\frac{1}{2}} [g_{1j} \partial_{x_1} ((\det g)^{\frac{1}{2}} f) + g_{2j} \partial_{x_2} ((\det g)^{\frac{1}{2}} f)]$$

$$B(h_1, h_2) = (\det g)^{\frac{1}{2}} [\partial_{x_1} ((\det g)^{-\frac{1}{2}} (-g_{12} h_1 + g_{11} h_2) + \partial_{x_2} ((\det g)^{-\frac{1}{2}} (-g_{22} h_1 + g_{12} h_2))]$$

tels que

$$(\det g)^{\frac{1}{2}} g^{-1} [\text{rot}_x ((\det g)^{\frac{1}{2}} g^{-1} h)] = \begin{pmatrix} -\partial_l h_2 \\ \partial_l h_1 \\ B(h_1, h_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 h_3 \\ -A_2 h_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{1j} h_j \\ C_{2j} h_j \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système d'équations

$$\begin{cases} (\det g)^{\frac{1}{2}} g^{-1} [\text{rot}_x ((\det g)^{\frac{1}{2}} g^{-1} h)] = -i\omega \varepsilon e \\ \text{rot}_x e = i\omega \mu h \end{cases} \quad (13.1.8)$$

est alors équivalent à

$$\begin{cases} -\partial_l h_2 + A_2 h_3 + C_{11} h_1 + C_{12} h_2 = -i\omega \varepsilon e_1 \\ \partial_l h_1 - A_1 h_3 + C_{21} h_1 + C_{22} h_2 = -i\omega \varepsilon e_2 \\ -\partial_l e_2 + \partial_{x_2} e_3 = i\omega \mu h_1 \\ \partial_l e_1 - \partial_{x_1} e_3 = i\omega \mu h_2 \\ B(h_1, h_2) = -i\omega \varepsilon e_3 \\ \partial_{x_1} e_2 - \partial_{x_2} e_1 = i\omega \mu h_3 \end{cases}$$

En remplaçant dans les quatre premières équations  $e_3$  et  $h_3$  par leur expression en fonction de  $h_1, h_2, e_1, e_2$ , on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} (P_0 + \frac{1}{i\omega} P_1 + \frac{1}{(i\omega)^2} P_2)(x_1, x_2, l, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (i\omega)^{-1} \partial_l \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ -(i\omega)^{-1} B(h_1, h_2) = \varepsilon e_3 \\ (i\omega)^{-1} (\partial_{x_1} e_2 - \partial_{x_2} e_1) = \mu h_3. \end{cases} \quad (13.1.9)$$

où les opérateurs différentiels  $P_0, P_1, P_2$  sont :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{21} & -C_{22} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13.1.10)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & -\varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} -\partial_{x_1} \circ B \\ -\partial_{x_2} \circ B \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A_1 \circ \partial_{x_2} & -A_1 \circ \partial_{x_1} \\ A_2 \circ \partial_{x_2} & -A_2 \circ \partial_{x_1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Nous avons ainsi décomposé notre problème selon les variables normale et tangentes au bord  $\partial\Omega$ .

Nous remarquons que le problème étudié peut être caractérisé comme un problème h-pseudo-différentiel, où les opérateurs utilisés se développent en  $h = \omega^{-1}$ . Par exemple,  $(i\omega)^{-1}\partial_l = hD_l$ . Le système (13.1.9), avec conditions aux limites en  $l = 0$   $e_1(x_1, x_2, 0, \omega) = e_1^0(x_1, x_2, \omega)$  et  $e_2(x_1, x_2, 0, \omega) = e_2^0(x_1, x_2, \omega)$  et les conditions de décroissance à l'infini (lorsque  $l$  tend vers  $-\infty$ )  $e_1, e_2$  bornés dans  $L^2$  est alors un système h-pseudo-différentiel, que l'on résout par les techniques introduites par Hörmander et Levitan. Il faut cependant modifier le raisonnement précédent sur les conditions aux limites à imposer aux inconnues car l'ouvert est de taille finie et on ne peut pas faire tendre  $l$  vers  $+\infty$ . Il faut ajouter des conditions supplémentaires sur la solution pour que le raisonnement soit possible. En particulier, lorsque l'on regarde en optique classique une onde incidente de vecteur d'onde  $\vec{k}_i$  qui arrive sur l'objet  $\Omega$ , il existe une onde transmise telle que  $\vec{k}_{trans}$  est complexe. La continuité des composantes tangentielles du vecteur d'onde transmis implique l'égalité de  $\vec{k}_{trans} \wedge n$  et  $\vec{k}_i \wedge n$ . On en déduit les deux possibilités pour la partie normale du vecteur d'onde, en utilisant l'équation de dispersion  $\|\vec{k}_{//}\|^2 + k_n^2 = \varepsilon\mu c^2$ . On obtient donc

$$k_n = \pm(\varepsilon\mu c^2 - \|\vec{k}_i \wedge n\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L'hypothèse classique  $Re\varepsilon > 0$ ,  $Re\mu > 1$  et le fait que les parties imaginaires sont petites devant les parties réelles permet d'écrire  $k_n = \pm(a + ib)$ ,  $a$  et  $b$  étant de même signe. On remarque que l'onde transmise (celle qui correspond à  $-a - ib$ ) est donc caractérisée par la phase

$$e^{i\omega l(-a-ib)} = e^{-ia\omega l} e^{-b\omega|l|}$$

car  $l$  est négatif. L'onde transmise (qui se propage donc dans le matériau) est l'onde amortie (ce qui justifie l'appellation "dissipatif" donné à ce matériau. Nous allons dans la suite interpréter ces remarques en utilisant l'analyse microlocale.

## 13.2 Calcul de Hörmander-Levitan

Notons  $(x_1, x_2, l, \eta_1, \eta_2, \xi_3)$  un élément de  $T^*(\Omega)$ . On introduit l'élément associé par l'intermédiaire de la géométrie  $\xi_i = g_{i1}(x_1, x_2, l)\eta_1 + g_{i2}(x_1, x_2, l)\eta_2$  et sa norme dans la métrique  $|\eta|_g^2 = g_{11}\eta_1^2 + 2g_{12}\eta_1\eta_2 + g_{22}\eta_2^2$ . On vérifie que, dans le calcul  $\omega^{-1}$ -pseudo-différentiel, le symbole principal du système sur  $e_1, e_2, h_1, h_2$  écrit ci-dessus est

$$\xi_3 Id_4 - \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \varepsilon^{-1}M_1 \\ \varepsilon(\varepsilon\mu - |\eta|_g^2)M_1^{-1} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

où la matrice  $M_1$  vaut

$$M_1 = \begin{pmatrix} \eta_1\xi_2 & \varepsilon\mu - |\eta|_g^2 + \eta_2\xi_2 \\ \varepsilon - |\eta|_g^2 - \eta_1\xi_1 & -\eta_2\xi_1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est alors

$$(\varepsilon\mu - |\eta|_g^2 - \xi_3^2)^2,$$

et comme  $\Im\varepsilon\mu < 0$ , ce déterminant est minoré par  $|\Im\varepsilon\mu|^2$ . Dans le calcul  $\omega^{-1}$ -pseudo-différentiel, l'opérateur est d'ordre 0. On en déduit qu'il est elliptique.

Le calcul de Hörmander-Levitan ([62], [63], [45]) pour la représentation en terme d'opérateurs de Fourier intégraux de  $e^{itH}$  peut s'appliquer dans ce cas,  $t$  étant l'équivalent de  $l$ . L'opérateur  $P = P_0 + (i\omega)^{-1}P_1 + (i\omega)^{-2}P_2$  admet deux valeurs propres  $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{\varepsilon\mu - |\eta|_g^2}$  de multiplicité 2, ( $\pm\Im\lambda_{\pm} \geq |\Im\varepsilon\mu|^{\frac{1}{2}} > 0$ ). Notons que nous ne sommes pas exactement dans le cadre classique développé par Levitan puis Hörmander, puisque les valeurs propres ne sont pas simples. Comme l'espace propre est de dimension égale à la multiplicité, les arguments sont identiques.

On désigne alors par  $\psi_{\pm}$  les deux phases définies sur  $\mathbb{R}_- \times T^*(\partial\Omega)$ , nulles sur  $l = 0$ , solutions respectives de

$$\partial_l \psi_{\pm}(x_1, x_2, l, \eta_1, \eta_2) = \lambda_{\pm}(x_1, x_2, l, \eta_1, \eta_2).$$

Introduisant les opérateurs de Fourier intégraux  $F_{\psi_{\pm}}$  de phase  $\omega\psi_{\pm}$  et de symbole 1, on peut écrire une décomposition de l'opérateur de Fourier intégral matriciel  $\mathcal{K}$  solution de (13.2.11) :

$$(i\omega)^{-1} \partial_l \mathcal{K} = P \circ \mathcal{K}, \mathcal{K}|_{l=0} = Id_{C^\infty(\partial\Omega)} \quad (13.2.11)$$

comme

$$\mathcal{K} = Op(M_+) \circ Op(F_{\psi_+}) + Op(M_-) \circ Op(F_{\psi_-}).$$

et les symboles  $M_{\pm,ii}$  sont elliptiques dans un voisinage de  $l = 0$ .

Notons alors que

$$|e^{i\omega\psi_+(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2, l)}| \geq e^{\omega|l|c_1}$$

et que

$$|e^{i\omega\psi_-(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2, l)}| \leq e^{-\omega|l|c_2}$$

Seul l'opérateur de Fourier Intégral  $F_{\psi_-}$  est borné lorsque  $\omega l$  tend vers  $-\infty$ .

On vérifie alors que la connaissance de  $e_1, e_2, h_1, h_2$  sur  $l = 0$  entraîne la connaissance de  $e_1, e_2, h_1, h_2$  partout dans  $l \leq 0$  (dans un voisinage de  $l = 0$  bien sûr). Dans ces conditions, on trouve

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} (x_1, x_2, l, \omega) = [Op(M_+) \circ Op(F_{\psi_+}) + Op(M_-) \circ Op(F_{\psi_-})] \begin{pmatrix} e_1^0 \\ e_2^0 \\ h_1^0 \\ h_2^0 \end{pmatrix} (x_1, x_2, l)$$

On en déduit, grâce à un calcul de composition d'un opérateur pseudodifférentiel et d'un opérateur de Fourier intégral, qu'il existe deux opérateurs  $Q_+$  et  $Q_-$  tels que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} (x_1, x_2, l, \omega) &= \iint e^{i\omega\psi_+(x_1, x_2, l) - i\omega y \cdot \eta} Q_+ \begin{pmatrix} e_1^0 \\ e_2^0 \\ h_1^0 \\ h_2^0 \end{pmatrix} (y, \omega) dy d\eta \\ &+ \iint e^{i\omega\psi_-(x_1, x_2, l) - i\omega y \cdot \eta} Q_- \begin{pmatrix} e_1^0 \\ e_2^0 \\ h_1^0 \\ h_2^0 \end{pmatrix} (y, \omega) dy d\eta. \end{aligned}$$

Comme la solution doit rester finie lorsque  $l \rightarrow \infty$ , on obtient la relation pseudo-différentielle

$$Q_+ \begin{pmatrix} e_1^0 \\ e_2^0 \\ h_1^0 \\ h_2^0 \end{pmatrix} (y, \omega) = 0.$$

Cette relation pseudo-différentielle entre  $e^0$  et  $h^0$  sur le bord est celle que nous cherchons. Nous allons donner le symbole principal de l'opérateur obtenu calculant, grâce à cette relation  $(e_1^0, e_2^0)$  en fonction de  $(h_1^0, h_2^0)$ , et plus précisément de  $(-e_2^0, e_1^0)$  en fonction de  $(h_1^0, h_2^0)$ .

Remarquons que nous avons supposé que  $\pm \partial_l \psi_{\pm}(x_1, x_2, 0, \eta_1, \eta_2)$  est de partie imaginaire positive, donc  $\partial_l \psi_{\pm}(x_1, x_2, 0, \eta_1, \eta_2) = \pm \nu$ , où  $\nu$  est la racine de partie imaginaire positive de

$$\varepsilon\mu - (g_{11}(x_1, x_2, 0)\eta_1^2 + 2g_{12}(x_1, x_2, 0)\eta_1\eta_2 + g_{22}(x_1, x_2, 0)\eta_2^2).$$

Nous supposons que le front d'onde conormal analytique de l'onde incidente (sous-jacente dans notre étude) est contenu dans  $t - \theta(x, y, l) = 0$ . Nous savons que  $|\nabla\theta| = 1$ , donc  $\operatorname{Re}(\varepsilon\mu - |\eta|_g^2) > 0$  (le milieu est d'indice plus grand que 1). Comme  $\Im\varepsilon\mu > 0$ , on en déduit que  $\operatorname{Re}\nu > 0$  lorsque  $\Im\nu > 0$ . Lorsque  $\Im\nu \rightarrow 0$  (pertes faibles),  $\nu \rightarrow \sqrt{\varepsilon}\mu$ .

De l'inégalité  $\Im\nu > 0$  et de la relation  $\partial_l\psi_\pm|_{l=0} = \pm\nu$ , on en déduit  $\mp\Im\psi_\pm(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2, l) \geq c_1|l|$  pour  $-l_1 < l < 0$  grâce à la nullité de  $\psi_\pm$  sur  $\partial\Omega$  et la continuité de  $|\eta|_g$  en fonction de  $x$  (la régularité du bord étant suffisante). Comme  $\operatorname{Re}(i\omega\psi_\pm) = -\omega\Im\psi_\pm$ , seule  $\psi_-$  conduit à une décroissance exponentielle en  $\omega$ .

La solution retenue est donc sous la forme

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}(x_1, x_2, l, \omega) = \int dy_1 dy_2 d\eta_1 d\eta_2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}(y_1, y_2, \omega) e^{i\omega(\psi_-(x_1, x_2, l, \eta_1, \eta_2) - y_1\eta_1 - y_2\eta_2)} \quad (13.2.12)$$

Appliquant  $(i\omega)^{-1}\partial_l - P$  à cette solution, on vérifie que nous obtenons le système

$$\int dy d\eta [\partial_l\psi_-(x_1, x_2, l, \eta_1, \eta_2) Id_4 - Op(P)] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}(y_1, y_2, \omega) e^{i\omega(\psi_-(x_1, x_2, l, \eta_1, \eta_2) - y_1\eta_1 - y_2\eta_2)} = 0$$

ce qui donne la relation sur les symboles principaux des vecteurs propres en considérant cette égalité à  $l = 0$  (auquel cas la phase  $\psi_-$  se réduit à la phase usuelle de transformée de Fourier) :

$$-\nu \begin{pmatrix} e_1^0(x_1, x_2, 0, \omega) \\ e_2^0(x_1, x_2, 0, \omega) \end{pmatrix} - \varepsilon^{-1} M_1 \begin{pmatrix} h_1^0(x_1, x_2, 0, \omega) \\ h_2^0(x_1, x_2, 0, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que

$$M_1 \begin{pmatrix} -\eta_2 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \nu^2 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad M_1 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \varepsilon\mu \begin{pmatrix} \xi_2 \\ -\xi_1 \end{pmatrix}.$$

Introduisons la matrice  $Z^0$  telle que

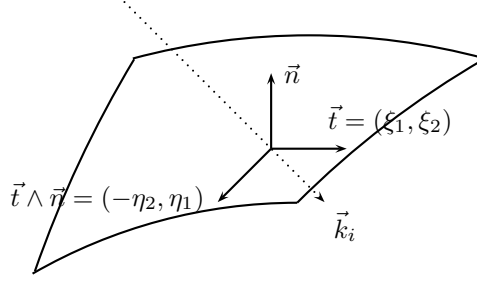
$$\begin{aligned} Z^0 \begin{pmatrix} -\eta_2 \\ \eta_1 \end{pmatrix} &= \frac{\nu}{\varepsilon} \begin{pmatrix} -\eta_2 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \\ Z^0 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \frac{\mu}{\nu} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On sait qu'il existe un opérateur pseudo-différentiel  $Op(Z)$ , local, tel que

$$\begin{pmatrix} -e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}|_{l=0} = -Op(Z) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}|_{l=0}.$$

Alors  $e_1, e_2, h_1, h_2$  solution bornée en  $\omega$  est solution de  $[(i\omega)^{-1}\partial_l - P]u = 0$  si et seulement si le terme principal de l'opérateur pseudo-différentiel  $Op(Z)$  est  $Z^0$ . Nous représentons les deux vecteurs propres de  $M_1$  dans la figure :

Figure 10



L'onde incidente est supposée égale à

$$\tilde{E}(x, t) = \int e^{ik(\phi(x)-t)} E(x, k) dx.$$

On désigne par  $(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2)$  l'élément de  $T^*(\partial\Omega)$  où nous calculons les opérateurs pseudo-différentiels tangentiels. La matrice d'impédance  $Z^0$  est la matrice dont les vecteurs propres sont respectivement  $\begin{pmatrix} -\eta_2 \\ \eta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $(M^t M)^{-1} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$  dans le système de coordonnées semi-géodésiques et dont les valeurs propres sont  $\nu/\varepsilon$  et  $\mu/\nu$ .

**Proposition 13.1** *Sous l'hypothèse*

$$\Im\varepsilon > 0, \Im\mu > 0, \Im\varepsilon\nu > 0$$

sur les constantes diélectriques, l'opérateur de Calderón intérieur, liant les traces tangentiels de  $E$  et de  $H$  sur  $\partial\Omega$  admet un développement asymptotique en  $k$  dans le  $k$ -calcul pseudo-différentiel. Le symbole principal de l'opérateur pseudo-différentiel local qui représente  $\mathcal{C}$  est  $Z^0$ .

Soit  $\Omega'$  le complémentaire de  $\bar{\Omega}$ . Soit  $k = \omega(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}}$ .

**Proposition 13.2** *Le système des équations de Maxwell dans  $\Omega'$*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_X E &= i\omega\mu_0 H, \operatorname{rot}_X H = -i\omega\varepsilon_0 E, \\ &\text{condition de radiation à l'infini,} \\ &\text{énergie locale finie} \end{aligned}$$

qui contient les conditions de divergence sur  $E$  et  $H$  est équivalent au système des équations de Helmholtz sur chaque composante de  $E$ , la condition de radiation, la relation  $H = (i\omega\mu_0)^{-1} \operatorname{rot}_X E$  et la relation  $\operatorname{div}_X E|_{\partial\Omega'} = 0$ .

La preuve de cette proposition est la suivante. On remplace  $H$  par sa valeur  $(i\omega\mu_0)^{-1} \operatorname{rot}_X E$  dans l'équation sur  $E$ . On obtient

$$\operatorname{rot}_X \operatorname{rot}_X E - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 E = 0.$$

Cette équation implique que  $\operatorname{div}_X E = 0$ , et donc  $(\Delta + (\omega/c)^2)E = 0$  et bien sûr implique  $\operatorname{div}_X E|_{\partial\Omega'} = 0$ . La condition de divergence n'est obtenue que sur le bord.

Maintenant, considérons les équations

$$(\Delta + k^2)E = 0, H = (i\omega\mu_0)^{-1} \operatorname{rot}_X E, \operatorname{div}_X E|_{\partial\Omega'} = 0, C.R.$$

La distribution  $u(X, k) = \operatorname{div}_X E(X, k)$  est solution de l'équation de Helmholtz scalaire

$$(\Delta + k^2)u(X, k) = 0$$

avec la condition aux limites  $u(X, k)|_{\partial\Omega'} = 0$  et une condition sortante à l'infini. Le bord  $\partial\Omega$  est non caractéristique pour l'opérateur des ondes, donc par application du théorème de Holmgren, la solution de ce problème est unique, et  $u(X, k) = 0$  dans  $\Omega'$ . Ceci achève la preuve de la réciproque. Le même résultat vaut pour  $H$ .

Nous écrivons la condition de divergence sur  $e$  en coordonnées semi-géodésiques. En utilisant l'expression (13.1.4) nous obtenons

$$(\det g)^{\frac{1}{2}} \partial_l ((\det g)^{-\frac{1}{2}} e_3) + (\det g)^{\frac{1}{2}} (\partial_{x_1} (g_{11} e_1 + g_{12} e_2) + \partial_{x_2} (g_{21} e_1 + g_{22} e_2)) = 0$$

Nous utilisons alors les relations  $h_1 = (i\omega\mu_0)^{-1}(\partial_{x_2} e_3 - \partial_l e_2)$ ,  $h_2 = (i\omega\mu_0)^{-1}(-\partial_{x_1} e_3 + \partial_l e_1)$  que nous remplaçons dans l'égalité

$$\begin{cases} -e_2 = -Op(Z_{11})h_1 - Op(Z_{12})h_2 \\ e_1 = -Op(Z_{21})h_1 - Op(Z_{22})h_2 \end{cases}$$

ce qui donne, après avoir noté  $\mu_0 c = Z_0$ , impédance du vide

$$ikZ_0 \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Op(Z_{22}) & -Op(Z_{21}) \\ -Op(Z_{12}) & Op(Z_{11}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_l e_1 - \partial_{x_1} e_3 \\ \partial_l e_2 - \partial_{x_2} e_3 \end{pmatrix}$$

En remarquant que le symbole principal de l'opérateur matriciel écrit dans le second membre de cette égalité a pour déterminant  $\frac{\mu}{\nu} \times \frac{\nu}{\varepsilon} = \frac{\mu}{\varepsilon}$ , il est donc inversible et on peut calculer le symbole principal de l'inverse qui est

$$\frac{\varepsilon}{\mu} \begin{pmatrix} Z_{11}^0 & Z_{12}^0 \\ Z_{21}^0 & Z_{22}^0 \end{pmatrix}.$$

On a donc accès à deux lignes de conditions aux limites, qui sont :

$$\begin{cases} \frac{1}{ik} \partial_l e_1 = \partial_{x_1} e_3 - Z_0 \frac{\varepsilon}{\mu} (Z_{11}^0 e_1 + Z_{12}^0 e_2) + L_0^1(e_1, e_2) \\ \frac{1}{ik} \partial_l e_2 = \partial_{x_2} e_3 - Z_0 \frac{\varepsilon}{\mu} (Z_{21}^0 e_1 + Z_{22}^0 e_2) + L_0^2(e_1, e_2) \end{cases}$$

les opérateurs  $L_0^{1,2}(e_1, e_2)$  étant des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0. La troisième ligne de conditions aux limites est donnée par la relation de divergence restreinte au bord (Proposition 13.2), c'est-à-dire, en application de la relation (13.1.4) rappelée ci-dessus,  $\frac{1}{ik} \partial_l e_3 + \mathcal{D}(e_1, e_2)$ , où  $\mathcal{D}$  est un opérateur différentiel de symbole principal  $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ . On peut écrire la condition aux limites obtenue :

$$\begin{pmatrix} \partial_l e_1 \\ \partial_l e_2 \\ \partial_l e_3 \end{pmatrix} - ikT_E \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (13.2.13)$$

où l'opérateur  $T_E$  est un opérateur pseudo-différentiel matriciel tangentiel. On vérifie que

$$\begin{aligned} T_E^0 \begin{pmatrix} -\eta_2 \\ \eta_1 \\ 0 \end{pmatrix} &= -Z_0^{-1} \frac{\nu}{\mu} \begin{pmatrix} -\eta_2 \\ \eta_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \\ T_E^0 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} &= -Z_0^{-1} \frac{\varepsilon}{\nu} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \\ T_E^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On écrit ensuite la relation  $e(x_1, x_2, l, k) = M(x_1, x_2, l)E(X(x, l))$ . Cette relation est la relation entre les composantes cartésiennes et semi-géodésiques du champ électrique, relation exprimée dans le système de variables semi-géodésiques.

On a alors

$$\partial_l e(x, 0, k) = (\partial_l M)(x, 0)E(X(x, 0)) + M(x, 0)\partial_l E(X(x, 0))$$

ce qui donne

$$(\partial_l M)E + M(x, 0)\partial_l E - T_E(ME) = 0$$

soit encore

$$\partial_l E(X(x, 0)) - [M^{-1}(x, 0)T_E(M(x, 0, \cdot)) - M^{-1}(x, 0)\partial_l M(x, 0)]E(x, 0) = 0.$$

On note  $\mathcal{B}$  l'opérateur pseudodifférentiel égal à  $M^{-1}(x, 0)T_E \circ M(x, 0)Id - M^{-1}(x, 0)(\partial_l M(x, 0))Id$ . Nous avons donc

**Proposition 13.3** *Il existe un opérateur pseudo-différentiel matriciel tangentiel  $\mathcal{B}$  tel que le comportement du champ électromagnétique dans  $\Omega$  + les équations à l'extérieur soit équivalent à l'égalité  $H = (i\omega\mu_0)^{-1}rot_X E$ , les trois équations de Helmholtz scalaires munies des conditions de radiation à l'infini*

$$(\Delta + k^2)E_j = 0$$

et la condition aux limites couplant ces trois composantes

$$\partial_n E - \mathcal{B}(E|_{\partial\Omega'}) = 0$$

A ce système d'équations, on pourra appliquer en la généralisant la théorie permettant la réflexion des singularités transverses. Ceci est l'objet de la section suivante.

### 13.3 Le théorème de réflexion des singularités transverses pour les équations de Maxwell

Nous prouvons le résultat

**Théorème 13.4** *Il y a propagation des singularités transverses pour les équations de Maxwell.*

Nous écrivons une version explicite du théorème dans la proposition qui suit. On suppose qu'il existe  $j \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $WF(E_j)$  contienne le point  $\rho_-$ . Par ce point  $\rho_-$ , il passe une bicaractéristique  $\gamma_-(-s)$  telle que  $\pi(\gamma_-)$  rencontre  $\partial\Omega$  en un point  $x_0$ , le point correspondant sur  $\gamma_-$  étant  $\rho_0^- \in T^*\mathbb{R}^n \cap \pi^{-1}(\partial\Omega)$ . On suppose que ce point se projette sur  $T^*(\partial\Omega)$  en un point hyperbolique  $\rho_0$ . Pour préciser les notations,  $\rho_0^- = (x_0 = \pi(\rho_0^-), \zeta)$ ,  $\zeta \in T_{x_0}\mathbb{R}^n \simeq T_{x_0}\partial\Omega \times \mathbb{R}$ , ce qui fait que  $\zeta = (\zeta', \zeta_n)$ , et  $\rho_0 = (x_0, \zeta')$ . On note  $\rho_0^+$  l'autre point de  $Car(\Delta - \partial_{t^2}^2)$  qui se projette sur  $\rho_0$  et on désigne par  $\gamma_+$  la bicaractéristique qui passe par  $\rho_0^+$ .

**Proposition 13.4** *Il existe  $p \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $\gamma_+ \cap T^*(\Omega') \subset WF(E_p)$  et  $q \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $\rho_0 \in WF_b(E_q)$ .*

La preuve est une généralisation matricielle de la preuve pour une condition aux limites dans le cas scalaire. On construit les opérateurs  $A_+$  et  $A_-$  du chapitre 11. La solution des trois équations de Helmholtz s'écrit

$$(E_1, E_2, E_3) = (A_-(f_1^-), A_-(f_2^-), A_-(f_3^-)) + (A_+(f_1^+), A_+(f_2^+), A_+(f_3^+)). \quad (13.3.14)$$

Nous écrivons la formule des sauts générale pour chaque composante ( $P$  est l'opérateur des ondes conjugué en coordonnées  $(l, x_1, x_2)$ )



$$PE_j = \partial_t E_j(x, 0, k) \delta_{l=0} + E_j(x, 0, k) \delta'_{l=0}.$$

Appliquant cette égalité à (13.3.14), on trouve

$$A_+(f_j^+) + A_-(f_j^-)|_{l=0} = E_j, T_+(f_j^+) + T_-(f_j^-) = \partial_t E_j$$

En remplaçant ces égalités dans la condition aux limites, on trouve (les opérateurs pseudo-différentiels  $T_{\pm}$  ont été introduits dans le chapitre 11.5.15 dans la proposition 11.5 et ils sont elliptiques aux points hyperboliques)

$$\mathcal{B}f^+ + \mathcal{B}f^- - (T_+ Id_3 f^+ + T_- Id_3 f^-) = 0$$

On vérifie que  $\mathcal{B} - T_{\pm}$  est un opérateur inversible. On en déduit l'égalité

$$f^+ = (\mathcal{B} - T_+ Id_3)^{-1} (T_- Id_3 - \mathcal{B})(f^-)$$

et l'égalité

$$E|_{\partial\Omega} = (\mathcal{B} - T_+ Id_3)^{-1} (T_- - T_+) Id_3 (f^-)$$

On en conclut alors que, si  $\rho_- \in WF(E_j)$ , alors  $\rho_0 \in WF(f_j^-)$ . L'égalité sur  $E$  permet d'affirmer qu'il y a au moins une coordonnée de  $E|_{\partial\Omega}$  qui contient  $\rho_0$  dans son front d'onde. Il y a aussi une coordonnée de  $f^+$ ,  $f_p^+$ , qui contient  $\rho_0$  dans son front d'onde. Les propriétés de l'opérateur  $A_+$  permettent d'affirmer que  $\rho_+$  est dans le front d'onde de  $A_+(f_p^+)$ . Comme  $\rho_+$  n'est pas dans le front d'onde de  $A_-(f_p^-)$ , alors  $\rho_+$  est dans le front d'onde de  $E_p$ . Ceci achève la preuve du théorème.

Remarquons que nous pouvons pas affirmer que toutes les composantes de  $E$  contiennent du front d'onde en  $\rho_+$ , car il se pourrait que le coefficient s'annule. En particulier, si il se trouvait que le vecteur d'onde coïncide à un instant donné avec un des axes de coordonnées, la relation  $\operatorname{div} E = 0$  (qui est vérifiée partout) impliquerait que la composante suivant cet axe est nulle, et donc ne contient pas de front d'onde.

Nous pouvons résoudre ce problème en remarquant que la 1-forme différentielle  $\tilde{E}$  associée à  $E$ , qui est

$$\tilde{E} = E_1 dX_1 + E_2 dX_2 + E_3 dX_3$$

est telle que

$$WF(\tilde{E}) = \cup WF(\tilde{E}_p)$$

ce qui permet d'obtenir la proposition sur les formes différentielles, exactement identique au Théorème 11.2 :

**Proposition 13.5** 1. Si  $\rho_0 \in \mathcal{E}$  et si  $\tilde{E}, \tilde{H}$  est solution de

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \tilde{E} = d^* \tilde{H} \\ d\tilde{E} = \mu \partial_t \tilde{H} \\ d\tilde{H} = 0 \\ d^* \tilde{E} = 0 \\ n \wedge \tilde{E} = Z(\tilde{H}^{tan}) \end{cases}$$

(système équivalent à une équation de Helmholtz  $(-dd^* - d^*d - \partial_{t^2}^2)\tilde{E} = 0$  et un système de conditions aux limites incluant  $d^*E|_{\partial\Omega} = 0$ ) alors  $\rho_0 \notin WF_b(\tilde{E})$ ,

2. Si  $\rho_0 \in \mathcal{H}$ , on construit les deux bicaractéristiques  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  passant par les deux points de  $(\Pi^{-1}(\rho_0) \cap \operatorname{Car}(p))$ . L'équivalence suivante est vraie

$$\rho_0 \in WF_b(\tilde{E}) \Leftrightarrow \gamma_+ \subset WF(\tilde{E}) \quad \text{ou} \quad \gamma_- \subset WF(\tilde{E})$$

De la démonstration du théorème, on déduit la proposition, qui est la généralisation de la proposition 11.5 pour les ondes avec condition mixte :

**Proposition 13.6** *La matrice des coefficients de réflexion associée à un point hyperbolique est un opérateur pseudo-différentiel matriciel  $R_{\varepsilon,\mu}$  tel que*

$$E_r(x_1, x_2, 0, k) = R_{\varepsilon,\mu}(E_i|_{l=0})(x_1, x_2, k).$$

*Son symbole principal est la matrice*

$$(\xi_n^+(x', 0, \partial_{x'}\psi_+(x', 0, \xi'))Id_3 - \mathcal{B}^0(x', \xi'))^{-1}(\xi_n^+(x', 0, \partial_{x'}\psi_+(x', 0, \xi'))Id_3 + \mathcal{B}^0(x', \xi')).$$

*Cette matrice est diagonalisable dans la transportée par  $M^{-1}$  de la base qui diagonalise  $Z^0$ . Les deux coefficients de réflexion sont  $R_1(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2)$  sur le vecteur  $M^{-1}(-\eta_2, \eta_1, 0)$  et  $R_2(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2)$  sur le vecteur  $M^{-1}(\xi_1, \xi_2, 0)$  :*

$$R_1 = (\xi_n^+(x', 0, \partial_{x'}\psi_+(x', 0, \xi')) + Z_0^{-1}\frac{\mu}{\nu(x, \eta)})^{-1}(\xi_n^+(x', 0, \partial_{x'}\psi_+(x', 0, \xi')) - Z_0^{-1}\frac{\mu}{\nu(x, \eta)})$$

$$R_2 = (\xi_n^+(x', 0, \partial_{x'}\psi_+(x', 0, \xi')) + Z_0^{-1}\frac{\nu(x, \eta)}{\varepsilon})^{-1}(\xi_n^+(x', 0, \partial_{x'}\psi_+(x', 0, \xi')) - Z_0^{-1}\frac{\nu(x, \eta)}{\varepsilon}).$$

Nous n'avons que deux coefficients de réflexion pour les composantes qui sont tangentes au plan car la condition de divergence est naturellement vraie pour  $E_r$  comme pour  $E_i$  et se traduit par le produit scalaire avec le vecteur d'onde (respectivement incident et réfléchi) permettant de trouver la troisième composante.

# Chapitre 14

## La diffraction

### 14.1 Le problème modèle de Friedlander

**Fin de l'étude du problème modèle de Friedlander de la section 6.3** Nous pouvons énoncer le premier résultat de propagation de singularités dans le cas d'un point strictement diffraction. Il s'agit du résultat obtenu par Friedlander pour son opérateur modèle, que nous avons étudié en détail dans cet ouvrage. Nous énonçons les dernières étapes sous la forme de la fin de l'exercice 6.3. Pour plus de lisibilité, nous reprenons ici le texte intégral de l'exercice. Nous ne donnerons la solution que des questions 9) à 11).

*On se donne l'opérateur sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$*

$$Pu(x, y_1, y_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1+x) \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}.$$

*On résout*

$$\begin{aligned} Pu &= 0, u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2) \\ u(0, y) &= f(y), f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2) \\ u(x, y_1, y_2) &= 0, y_1 < 0. \end{aligned} \quad .^1$$

1) *Démontrer que la solution de (6.3.7) s'écrit, pour  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$*

$$u(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{K}_x(\theta_1, \theta_2) \hat{f}(\theta_1, \theta_2) e^{iy_1\theta_1 + iy_2\theta_2} d\theta_1 d\theta_2$$

*au sens des intégrales de Fourier, ou  $K_x$ , solution de*

$$\begin{aligned} PK_x &= 0 \\ K_0(y) &= \delta_{y=0} \\ K_x(y_1, y_2) &= 0, y_1 < 0. \end{aligned}$$

*est supposée admettant une transformée de Fourier, égale dans  $\Im\theta_1 < 0$ , à*

$$\hat{K}_x(\theta_1, \theta_2) = \frac{Ai(\theta_1^{-\frac{4}{3}}\theta_2^2 - (1+x)\theta_1^{\frac{2}{3}})}{Ai(\theta_1^{-\frac{4}{3}}\theta_2^2 - \theta_1^{\frac{2}{3}})} = \frac{Ai(\xi)}{Ai(\xi_0)},$$

*les racines (et donc  $\xi$  et  $\xi_0$ ) étant obtenues canoniquement grâce à la représentation*

$$\theta_1 = |\theta_1| e^{i(\frac{3\pi}{2} + \lambda)}, -\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$$

*qui donne*

$$\theta_1^{\frac{2}{3}} = -|\theta_1|^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2i}{3}\lambda}$$

$$\theta_1^{-\frac{4}{3}} = |\theta_1|^{-\frac{4}{3}} e^{-\frac{4i}{3}\lambda}.$$

On notera dans toute la suite

$$|\theta| = (\theta_1^2 + \theta_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$Z = |\theta_1|^{\frac{2}{3}} - (1+x)\theta_2^2|\theta_1|^{-\frac{4}{3}}$$

$$Z_0 = |\theta_1|^{\frac{2}{3}} - \theta_2^2|\theta_1|^{-\frac{4}{3}}.$$

2) Démontrer que la fonction  $\Phi$  définie par l'égalité

$$u^{\frac{1}{4}} Ai(u) \exp\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) = u^{\frac{1}{4}} \Phi(u)$$

admet, ainsi que son inverse, un développement asymptotique pour  $u \in \mathbb{R}_+$  grand, en puissances inverses de  $u^{\frac{3}{2}}$ , développement valable uniformément dans  $\arg u \in [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$ .

3) On se donne une fonction  $C^\infty$ , notée  $\sigma_0$ , nulle pour  $t \leq 1$ , identiquement égale à 1 pour  $t \geq 2$ . On introduit  $\sigma_2(t) = \sigma_0(\delta_2 t)$ ,  $0 < \delta_2 < 1/2$ . On introduit

$$a_2(x, \theta_1, \theta_2) = \sigma_0(|\theta|) \sigma_2(Z_0) \frac{\Phi(\xi)}{\Phi(\xi_0)}.$$

a) Démontrer par récurrence l'existence de fonctions  $C^\infty Q_j^{k,\alpha}(x, \theta)$ , homogènes en  $\theta$  de degré d'homogénéité  $\frac{2}{3}(j+k) - |\alpha|$ , telles que

$$\partial_{x^k}^k \partial_{\theta^\alpha}^\alpha [G(Z)] = \sum_{j=0}^{j=|\alpha|} G^{(k+j)}(Z) Q_j^{k,\alpha}(x, \theta)$$

b) Démontrer que  $\sigma_2(Z_0) \in S_{1/3,0}^0(\mathbb{R}^2)$ .

c) Utilisant l'inclusion  $S_{1/3,0}^0 \subset S_{1/3,2/3}^0$ , démontrer que  $a_2 \in S_{1/3,2/3}^0$ .

4) a) Démontrer que

$$(1 - \sigma_0(|\theta|)) \frac{Ai(\xi)}{Ai(\xi_0)} \in S^{-\infty}.$$

Soit  $\sigma_1$  la fonction paire, nulle sur  $[1 - \delta_1, +\infty[$ , égale à 1 sur  $[0, 1 - 2\delta_1]$ , par exemple  $\sigma_1(u) = 1 - \sigma_0(\delta_1|u| + 1 - 3\delta_1)$ . Soit  $h$  la fonction égale à  $(s^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(s^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$  sur  $[1, (1+x)^{\frac{1}{2}}]$ , égale à  $(s^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}[(s^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - (s^2 - 1 - x)^{\frac{3}{2}}]$  sur  $[(1+x)^{\frac{1}{2}}, +\infty[$ . Elle est minorée par une fonction  $\gamma(x)$ , que l'on pourra exprimer, pour  $s \geq (1 - \delta_1)^{-1}$ .

b) Démontrer que

$$|\sigma_0(|\theta|) \sigma_1\left(\frac{\theta_1}{|\theta_2|}\right) \exp\left(-\frac{2}{3}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}})\right)| \leq \exp\left(-\frac{2}{3}\gamma(x)|\theta|\right).$$

c) Démontrer, quel que soit  $n$ , l'existence de  $C_n$  telle que

$$|\partial_{x^n}^n (\sigma_0(|\theta|) \sigma_1\left(\frac{\theta_1}{|\theta_2|}\right) \frac{Ai(\xi)}{Ai(\xi_0)})| \leq C_n \exp\left(-\frac{1}{3}\gamma(x)|\theta|\right).$$

d) En conclure sur l'appartenance de  $a_1(x, \theta) = \sigma_0(|\theta|) \sigma_1\left(\frac{\theta_1}{|\theta_2|}\right) \frac{Ai(\xi)}{Ai(\xi_0)}$  à un espace de symbole.

5) On note

$$a_3(x, \theta) = [\hat{K}_x(\theta) - (1 - \sigma_0(|\theta|)) \frac{Ai(\xi)}{Ai(\xi_0)} - \sigma_0(|\theta|) \sigma_1\left(\frac{\theta_1}{|\theta_2|}\right) \frac{Ai(\xi)}{Ai(\xi_0)} - a_2(x, \theta) \exp\left(-\frac{2}{3}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}})\right)] \exp\left(\frac{2i}{3} Z^{\frac{3}{2}} \text{sign} \theta_1\right) 1_{x > \delta}$$

a) Démontrer que le support  $S$  de  $a_3$  est donné par les inégalités

$$|\theta| \geq 1, |\theta_2| \leq (1 - 2\delta_1)^{-1}|\theta_1|, Z_0 \leq 2\delta_2.$$

b) Déterminer le plus petit cône contenant  $S$ .

c) Démontrer que  $Z$  a un minorant strictement positif sur  $\{(x, \theta), x > \delta, |\theta_1| \geq (1 - 2\delta_1)|\theta_2|\}$ .

d) Démontrer que  $a_3 \in S_{1/3, 2/3}^0$ .

6) On se donne un point  $\rho_0 = (0, 0, 0, \xi^0, \eta_1^0, \eta_2^0) \in T^*(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2) \cap \text{Car}(p)$ . Déterminer la bicaractéristique de l'opérateur  $P$  défini par (6.3.6) passant par  $\rho_0$ . Pour cela, on définira

$$q(x, \eta_1, \eta_2) = (1 + x)\eta_1^2 - \eta_2^2$$

et on exprimera ces courbes à l'aide de

$$S(x, \eta_1, \eta_2) = \int_0^x (q(u, \eta_1, \eta_2))^{\frac{1}{2}} du.$$

7) On introduit la fonction, définie sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , par

$$\phi(x, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = y_1\theta_1 + y_2\theta_2 - S(x, \theta_1, \theta_2)\text{sign}(\theta_1).$$

Démontrer que les bicaractéristiques issues de l'origine dans  $y_1 > 0$  forment l'ensemble

$$\Sigma = \{(x, y, \xi, \eta) \in T^*(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2), x > 0, |\theta_1| \geq |\theta_2|, \begin{array}{l} \xi = \partial_x \phi(x, y, \theta) \\ \eta = \nabla_y \phi(x, y, \theta) \\ \nabla_\theta \phi(x, y, \theta) = 0 \end{array}\}$$

8) Démontrer que le support singulier de l'opérateur de Fourier intégral  $K^{(2)}$  de symbole  $a_2(x, \theta)$  et de phase  $l(x, y, Y, \theta) = (y - Y)\theta - \frac{2}{3}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}})$  est inclus dans la réunion des bicaractéristiques issues de l'origine dans  $y_1 > 0$ .

9) Déterminer pour l'opérateur (6.3.6) les zones elliptique, hyperbolique, et glancing.

10) Soit  $X_\delta = \{(x, y), x > \delta\}$ . On considère la restriction de l'opérateur de symbole  $a_3 \exp(-\frac{2}{3}i\text{sign}(\theta_1)Z_0^{\frac{3}{2}})$  à  $X_\delta$ , que l'on note  $K_\delta^{(3)}$ . On considère la phase

$$\tilde{\phi}(x, y, \theta) = y \cdot \theta - \frac{2}{3}\text{sign}(\theta_1)Z^{\frac{3}{2}}$$

Sous la condition

$$\delta_1 < \frac{1}{2}(1 - (1 + \delta)^{-\frac{1}{2}})$$

démontrer que le front d'onde de  $K_\delta^{(3)}$  est inclus dans

$$\Lambda_\delta = \{(x, y, \xi, \eta), x > \delta, \theta \in S_3, \xi = \partial_x \tilde{\phi}, \eta = \nabla_y \tilde{\phi}, \nabla_\theta \tilde{\phi} = 0\}.$$

11) Démontrer le théorème de propagation des singularités pour tout rayon, autrement dit

**Théorème 14.1** • Le front d'onde de la solution fondamentale  $K$  est contenu dans l'union des bicaractéristiques sortantes (dans le sens  $y_1 > 0$ ) issues du point  $(0, 0, 0)$ .

• Le front d'onde de la solution de (6.3.7) est contenu dans l'ensemble des bicaractéristiques de  $P$  issues d'un point  $(0, z, 0, \eta)$  appartenant au front d'onde de  $f$ .

9) Nous vérifions que

$$p(x, \xi, \theta_1, \theta_2) = -\xi^2 + (1 + x)\theta_1^2 - \theta_2^2.$$

La variété elliptique est  $\mathcal{E}$ , ensemble des  $(y, \theta_1, \theta_2)$  tels que  $p(0, \xi, \theta_1, \theta_2) = 0$  n'ait pas de solution, soit  $|\theta_2| > |\theta_1|$ .

La variété hyperbolique est  $|\theta_2| < |\theta_1|$ .

La variété *glancing* est  $|\theta_1| = |\theta_2|$ . On vérifie que, sur la variété *glancing*, si on écrit  $P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + R(x, y, \partial_y)$ , alors le symbole principal  $r$  sur la variété  $\mathcal{G}$  vérifie  $r = 0$  et  $\partial_x r(0, \theta_1, \theta_2) > 0$ . En effet, la valeur explicite est  $\theta_1^2$ , qui n'est pas nul car  $\theta \neq 0$ . On dit que les points de  $\mathcal{G}$  pour l'opérateur  $P$  défini par (6.3.6) sont des points strictement diffractifs.

10) On introduit

$$K_\delta^{(3)}(x, \theta) = a_3(x, \theta) \exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}}\right) 1_{x>\delta}.$$

On sait déjà que  $a_3 \in S_{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}}^0(\mathbb{R}^2)$  par la question 5) de 6.3. De plus, lorsque  $x > \delta$  et

$$0 < \delta_1 < \frac{1}{2}(1 - (1 + \delta)^{-\frac{1}{2}}) \quad (14.1.1)$$

on sait, par cette même question, que  $Z \geq D > 0$ , donc

$$K_\delta^{(3)}(x, \theta) = a_3(x, \theta) \exp\left(-\frac{2}{3}iZ^{\frac{3}{2}} \text{sign}\theta_1\right).$$

On peut alors vérifier que  $\langle K_\delta^{(3)}, \chi \rangle$  peut être défini par l'intermédiaire d'une intégrale oscillante

$$\langle K_\delta^{(3)}, \chi \rangle = \int dx dy d\theta 1_{x>\delta} a_3(x, \theta) \chi(x, y) e^{i(y \cdot \theta - \frac{2}{3}Z^{\frac{3}{2}} \text{sign}\theta_1)},$$

ceci car la fonction

$$\tilde{\phi}(x, y, \theta) = y \cdot \theta - \frac{2}{3}Z^{\frac{3}{2}} \text{sign}\theta_1 \quad (14.1.2)$$

est une phase admissible au sens du lemme 7.1.

Son front d'onde est alors contenu dans l'intersection de  $x > \delta$  et de la variété lagrangienne  $\Lambda_{\tilde{\phi}}$ , par application immédiate de la proposition 7.2. On note cette intersection  $\Lambda_\delta$ .

11) On vérifie que

$$\begin{aligned} \hat{K}_x(\theta) 1_{x>\delta} &= (1 - \sigma_0(|\theta|)) 1_{x>\delta} \frac{Ai(\xi)}{Ai(\xi_0)} + a_1(x, \theta) 1_{x>\delta} \\ &\quad + a_2(x, \theta) 1_{x>\delta} \exp\left(-\frac{2i}{3}(\xi^{\frac{3}{2}} - \xi_0^{\frac{3}{2}})\right) \\ &\quad + a_3(x, \theta) \exp\left(-\frac{2i}{3}\xi^{\frac{3}{2}}\right) 1_{x>\delta} \end{aligned}$$

Si les réels  $\delta_1$  et  $\delta_2$  vérifient les inégalités

$$0 < \delta_2 < \frac{1}{2}, 0 < \delta_1 < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \delta}}\right), \quad (14.1.3)$$

on désigne par  $L_{\delta_1, \delta_2, \delta}$  l'espace de  $T^*(\mathbb{R}^3)$  égal à

$$L_{\delta_1, \delta_2, \delta} = \Lambda_\delta \cap \{(x, y, \xi, \theta), (1 - 2\delta_1)|\theta_2| \leq |\theta_1| \leq (1 + \kappa(\delta_2))|\theta_2|\}.$$

Il vient alors, désignant par  $K_\delta$  la transformée de Fourier inverse de  $\hat{K}_x(\theta) 1_{x>\delta}$

$$WF(K_\delta) \subset (\Sigma \cap \{x > \delta\}) \cup L_{\delta_1, \delta_2, \delta}. \quad (14.1.4)$$

On sait alors que le front d'onde à gauche est un ensemble ne dépendant par de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  vérifiant (14.1.3). Donc

$$WF(K_\delta) \subset \Sigma \cap \{x > \delta\} \cap (\cap_{(\delta_1, \delta_2) \in (14.1.3)} L_{\delta_1, \delta_2, \delta}).$$

On voit que  $\kappa(\delta_2)$  tend vers 0 lorsque  $\delta_2$  tend vers 0, donc cette intersection est incluse dans  $\tilde{\Lambda}_\delta \cap \{|\theta_1| = |\theta_2|\}$ . Comme  $\partial_{y, \theta, x}(\frac{2}{3}Z_0^{\frac{3}{2}}) = Z_0^{\frac{1}{2}} \partial_{y, \theta, x} Z_0$  et que  $Z_0 = 0$  sur  $|\theta_1| = |\theta_2|$ , on en conclut que

$$\tilde{\Lambda}_\delta \cap \{|\theta_1| = |\theta_2|\} \subset \Sigma \cap \{x > \delta\}.$$

On affirme ainsi que  $WF(K_\delta) \subset \Sigma \cap \{x > \delta\}$ , d'où  $WF(K) \subset \Sigma$ . Le premier alinéa du théorème 14.1 est démontré.

Pour démontrer le deuxième alinéa, considérons les bicaractéristiques issues d'un point  $(0, z)$ . On peut alors définir de la même façon  $\Sigma_z$ . Le résultat provient alors de l'égalité  $u_x = K_x \star f$ . On définit l'application de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$  par  $\mu(x, y, z) = (x, y - z)$ . On a  $\mu^* F = F(x, y - z)$ , et  $u = \mu^* K f$ .

L'opérateur  $\mu^* K$  a pour front d'onde d'opérateurs le sous-ensemble de  $T^*(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$  défini par

$$WF'(\mu^* K) = \{(x, y, z, \xi, \eta, \zeta), (x, y, z, \xi, \eta, -\zeta) \in WF(\mu^* K)\},$$

grâce aux relations entre le front d'onde de l'opérateur de convolution et le front d'onde de son noyau. On sait de plus que

$$WF(\mu^* K) = \{(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \in T^*(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2), (x, y - z, \xi, \eta) \in WF(K)\}$$

Par définition des bicaractéristiques issues de  $WF(f) \cap \{|\theta_1| \geq |\theta_2|\}$ , et par la relation

$$WF(u) \subset WF'(\mu^* K)WF(f),$$

(on applique la relation définie par le  $WF'$  à  $WF(f)$ ), on a le deuxième alinéa du théorème 14.1.

## 14.2 L'équation des ondes à l'extérieur d'un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$

Nous souhaitons maintenant présenter un calcul qui utilise toutes les notions introduites dans les chapitres précédents. Il s'agit du calcul de la solution diffractée par une courbe convexe fermée  $\mathcal{C}$  dans le plan. L'ouvert intérieur est noté  $\Omega$ , il est borné. L'ouvert extérieur est noté  $\Omega^c$ . Ce calcul a déjà été effectué par Filippov [37], [99]. Il s'agit d'une généralisation ardue du cas modèle de Friedlander présenté en Section 6.3. Ce travail a été effectué en collaboration avec D. Bouche pour la partie explicite en dimension 2 et avec G. Lebeau pour la partie théorique.

Après transformation de Fourier partielle en temps, le problème s'écrit

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & \text{dans } \Omega^c \\ Lu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u - u_i = 0 & \text{pour } \Im k < 0, \end{cases} \quad (14.2.5)$$

$L$  étant un opérateur différentiel d'ordre 1.

### 14.2.1 Écriture en coordonnées d'Euler

Définissons les coordonnées utilisées. Soit  $A$  un point de  $\mathcal{C}$ , fixé. Un point de  $\mathcal{C}$  est caractérisé par son abscisse curviligne  $s$ , comptée à partir de  $A$ . La longueur de  $\mathcal{C}$  étant  $L$ , on aura  $s \in [0, L]$ , avec condition  $u|_{s=L} = u|_{s=0}$ . On remplace alors le problème par un problème dans  $\mathbb{R}$ . La courbe  $\mathcal{C}$  est caractérisée par la donnée de la fonction  $R(s)$ , rayon de courbure au point  $M(s)$ , supposé strictement positif et fini, ce qui indique une courbe strictement convexe.

A partir d'un point  $M(s)$  de  $\mathcal{C}$ , on considère dans  $\Omega^c$  la distance à  $M(s)$  sur la normale, et on la note  $n$ . Ainsi, un point  $M(s, n)$  dans un voisinage de  $\mathcal{C}$  est donné par

$$\vec{A}M(s, n) = \vec{A}M(s) + n\vec{n}(s).$$

On suppose le voisinage de  $\mathcal{C}$  totalement géodésique.

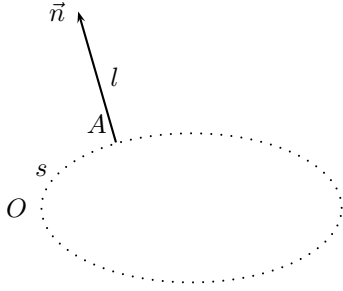


Figure 11

Le Laplacien en coordonnées  $(s, n)$  est noté  $P$ , et donné par :

$$Pu = \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial s} \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial s} + \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial n} \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right) \frac{\partial u}{\partial n} + k^2 u. \quad (14.2.6)$$

Dans le calcul  $k^{-1}$ -pseudo-différentiel, son symbole principal s'écrit

$$p(s, n, \sigma, \xi_2) = 1 - \xi_2^2 - \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right)^{-2} \sigma^2.$$

L'espace  $T^*(]0, L[)$  se décompose en région elliptique, hyperbolique, et *glancing* comme suit :

$$\mathcal{E} = \{(s, \sigma), |\sigma| > 1\}$$

$$\mathcal{H} = \{(s, \sigma), |\sigma| < 1\}$$

$$\mathcal{G} = \{(s, \sigma), |\sigma| = 1\}$$

Remarquons que pour  $n = \xi_2 = 0$ , on retrouve une propagation à vitesse constante sur le bord, donnée par  $\sigma^2 = 1$ , et on reconnaît ici l'équation du cône de lumière classique en dimension 1. La relation  $\sigma^2 = 1$  entraîne  $\sigma = \pm 1$ , ce qui induit que la solution contient un facteur  $e^{\pm iks}$ . Nous étudions la solution diffractée autour du point  $\sigma = 1$ . Pour cela, nous ramenons ce point à  $\sigma = 0$  par une technique de conjugaison. Nous introduisons ainsi l'opérateur  $P_1$  défini par

$$P_1(U)(n, s, k) = e^{-iks} P(e^{iks} U(n, s, k)). \quad (14.2.7)$$

Cet opérateur  $P_1$  est donné par :

$$P_1(U) = \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right)^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial n} \left( \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right) \frac{\partial U}{\partial n} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial U}{\partial s} \right) + ik \left[ \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right)^{-1} U \right) \right] + k^2 U \left(1 - \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right)^{-2}\right) \right]. \quad (14.2.8)$$

Le symbole principal de  $P_1$  est  $p_1(n, s, \xi_2, \sigma) = 1 - \xi_2^2 - \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right)^{-2} (\sigma + 1)^2$ , qui s'annule au voisinage de  $\sigma = 0$  pour :

$$n = \frac{R(s)\sigma}{(1 - \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}} + R(s) \left( (1 - \xi_2^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right). \quad (14.2.9)$$



Nous remarquons que le calcul du symbole principal peut aussi se faire par l'application du résultat de l'exercice 8.3, en introduisant  $s(s, n, k) = ks$ , qui vérifie  $\nabla_s s = k$ .

Introduisons le changement de variable dual, déduit de (14.2.9) par la restriction à  $\xi_2 = 0$  de l'équation de la variété caractéristique, soit  $\tau = R(s)\sigma$ . Il correspond formellement à l'égalité  $\frac{\partial}{\partial s} = R^{-1}(s)\frac{\partial}{\partial \theta}$ . Nous définissons la fonction  $\theta$  par

$$\theta(s) = \int_0^s \frac{du}{R(u)}.$$

Cet angle  $\theta$  est alors l'angle entre une direction fixe et la tangente (au signe près), appelé angle d'Euler de la courbe  $\mathcal{C}$ . Le changement de variable  $s \rightarrow \theta$  est un difféomorphisme, ce qui permet d'écrire l'opérateur  $P_1$  dans le système de variable  $(\theta, n)$ . En notant  $s = s(\theta)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} P_1(U) = & k^2 U \left(1 - \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right)^{-2}\right) + \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right)^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial n} \left( \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right) \frac{\partial U}{\partial n} \right) \right] \\ & + (R(s) + n)^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (n + R(s))^{-1} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \\ & + ik(n + R(s))^{-1} \left[ \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right)^{-1} U \right) \right]. \end{aligned} \quad (14.2.10)$$

Le symbole principal de cet opérateur est :

$$\hat{p}_1(n, \theta, \xi_2, \tau) = 1 - \xi_2^2 - \left(1 + \frac{n}{R(s)}\right)^{-2} \left( \frac{\tau}{R(s(\theta))} + 1 \right)^2. \quad (14.2.11)$$

Nous vérifions que la variété caractéristique a pour équation

$$1 - \xi_2^2 = \left(1 + \frac{n}{R(s(\theta))}\right)^{-2} \left( \frac{\tau}{R(s(\theta))} + 1 \right)^2, \quad (14.2.12)$$

ce qui s'écrit

$$n = \tau + \frac{1}{2} \xi_2^2 (R(s(\theta)) + \tau) + O(\xi_2^4). \quad (14.2.13)$$

Dans une première partie, nous écrivons une solution asymptotique sortante  $u_k$  (dans le sens où elle est définie pour  $\Im k < 0$ ) en utilisant les techniques d'analyse de phase construites dans le chapitre 10, en particulier dans le lemme 10.3. Nous calculons ensuite la trace sur le bord  $Lu_k$  de cette solution asymptotique sortante.

Dans le problème modèle de Friedlander, la relation  $u_k|_{n=0} = 1$  avait permis aisément d'obtenir la solution fondamentale (voir 1) p 72). Ici, cette méthode n'est plus utilisable ; en effet, la trace sur le bord est définie de manière intégrale par l'intermédiaire d'un opérateur non local. Lafitte et Lebeau ont développé des techniques permettant d'inverser cette égalité sur le bord, et de faire le calcul explicite. Cette méthode rejoint la méthode de la couche limite utilisée par Bouche et Molinet.

### 14.2.2 Une autre solution asymptotique sortante.

La méthode que nous présentons dans ce paragraphe est directement inspirée des travaux [64] qui construisent des solutions asymptotiques sortantes d'opérateurs admettant un point strictement diffractif. Elle est en particulier différente de la construction de la solution exhibée dans le chapitre 11, qui est donnée par  $A_+$  ou par  $A_-$ . Elle se rapproche des calculs de Ludwig présentés dans le chapitre 10 dans la section 10.4. Soit  $(n, \xi_2, \theta, \tau) \in T^*(\Omega_c)$ ,  $\beta \in ]0, \theta(l)[$  dans un voisinage d'un point du bord. Nous nous donnons un symbole  $a(n, \xi_2, \theta, \beta, \tau, k)$  et une phase  $\phi(\theta, \tau, \xi_2)$  et nous construisons  $J(f)$ , fonction définie dans un voisinage du bord  $n = 0$  à partir de  $f$  définie sur le bord par

$$J(f)(n, \theta, k) = \int e^{ik[(\theta - \beta) \cdot \tau + n \xi_2 + \phi(\theta, \tau, \xi_2)]} a(n, \xi_2, \theta, \beta, \tau, k) f(\beta, k) d\beta d\tau d\xi_2 \quad (14.2.14)$$

Nous prouvons dans cette section l'existence d'une phase et d'un symbole représentant une solution générale de  $P_1$ . Nous introduisons les opérateurs  $T_0, T_1, T_2$  d'ordre 0, 1, et 2 égaux à :

$$T_0(n, \theta, \xi_2, \tau) = \frac{\xi_2}{n+R} + \partial_\theta \left( \frac{\tau + \partial_\theta \phi}{(n+R)^2} \right) + \frac{R'}{R} \frac{n}{n+R} - \left[ (1 - \xi_2^2) \frac{\partial_{\xi_2}^2 \phi}{R} + 4 \left( 1 - \frac{\partial_{\xi_2} \phi}{R} \right) \xi_2 \right] (n+R)^{-1},$$

$$T_1(n, \theta, \xi_2, \tau, \partial_n, \partial_\theta, \partial_{\xi_2}) = \xi_2 \frac{\partial}{\partial n} + (1 - \xi_2^2) \left( 1 - \frac{\partial_{\xi_2} \phi}{R} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\tau + \partial_\theta \phi + n + R}{(n+R)^2} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$T_2 = (n+R)^{-2} \left[ (1 - \xi_2^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} - 4 \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - 2 \right] - \left[ \frac{\partial^2}{\partial n^2} + (n+R)^{-1} \frac{\partial}{\partial n} + (n+R)^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (n+R)^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right].$$

**Proposition 14.1** *Soit*

$$J(f)(n, \theta, k) = \int e^{ik[(\theta-\beta)\tau + n\xi_2 + \phi(\theta, \tau, \xi_2)]} a(n, \xi_2, \theta, \beta, \tau, k) f(\beta, k) d\beta d\tau d\xi_2.$$

$P_1(J(f)) = O(k^{-M})$  pour tout  $M$  si et seulement si  $\phi$  est solution de

$$\hat{p}_1 \left( -\frac{\partial \phi}{\partial \xi_2}, \theta, \tau + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \xi_2 \right) = 0$$

(équation eikonale) et si le symbole classique  $a$ , développé en puissances inverses de  $ik$ , vérifie :

$$2T_1 a_0 + T_0 a_0 = 0$$

$$2T_1 a_j + T_0 a_j = -T_2 a_{j-1}$$

Nous notons que c'est une représentation intégrale un peu différente de celle utilisée dans le cas de la réflexion transverse, où le comportement en variables  $n, \theta$  était calculé par une fonction  $\phi(\theta, n, \tau)$  telle que  $\phi(\theta, 0, \tau) = \theta\tau$ . Ici, nous changeons de comportement en  $n$  car nous voulons tenir compte de la singularité en  $\sqrt{n}$  qui apparaît dans l'équation de la variété caractéristique.

**Preuve :** On impose comme condition initiale en  $\xi_2$  sur  $\phi$ ,  $\phi(\theta, \tau, 0) = 0$  (qui était un degré de liberté supplémentaire).

Nous cherchons les conditions sur  $a$  et  $\phi$  telles que  $J(f)$  soit une solution asymptotique sortante de  $P_1$  quelle que soit  $f$  définie sur le bord. Plus précisément, on calcule  $P_1(J(f))$  et on réordonne son expression suivant les puissances de  $k$ . Cette méthode est courante dans les développements asymptotiques et l'annulation du terme d'ordre maximum en  $k$  conduit traditionnellement à l'équation **eikonale**, qui est une équation aux dérivées partielles vérifiée par la phase de l'onde considérée.

Le terme principal de  $P_1(J(f))$ , qui est d'ordre  $k^2$ , s'écrit :

$$k^2 \int \hat{p}_1 \left( n, \theta, \xi_2, \tau + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) a(n, \xi_2, \theta, \beta, \tau, k) f(\beta, k) e^{ik[(\theta-\beta)\tau + n\xi_2 + \phi(\theta, \tau, \xi_2)]} d\beta d\tau d\xi_2$$

Si on employait la démarche traditionnelle utilisée pour les développements asymptotiques, on chercherait  $\phi$  solution de

$$\hat{p}_1 \left( n, \theta, \xi_2, \tau + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Mais, comme le symbole principal dépend de  $n$ , on ne peut pas trouver de phase  $\phi$  indépendante de  $n$  vérifiant cette équation aux dérivées partielles. Pour se débarrasser d'une partie de la

dépendance en  $n$  du symbole principal, on utilisera les deux relations d'intégration par parties écrites ci-dessus, valables pour toute fonction  $A(n, \xi_2, \theta, \beta, \tau, k)$  :

$$\begin{aligned} & \int n A e^{ik[(\theta-\beta)\cdot\tau+n\xi_2+\phi(\theta,\tau,\xi_2)]} d\beta d\tau d\xi_2 \\ &= \\ & - \int \left[ -\frac{\partial\phi}{\partial\xi_2} A + ik^{-1} \frac{\partial A}{\partial\xi_2} \right] e^{ik[(\theta-\beta)\cdot\tau+n\xi_2+\phi(\theta,\tau,\xi_2)]} d\beta d\tau d\xi_2 \end{aligned} \quad (14.2.15)$$

$$\begin{aligned} & \int n^2 A e^{ik[(\theta-\beta)\cdot\tau+n\xi_2+\phi(\theta,\tau,\xi_2)]} d\beta d\tau d\xi_2 \\ &= \\ & \int \left[ \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_2}\right)^2 A - ik^{-1} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi_2^2} A + 2\frac{\partial\phi}{\partial\xi_2} \frac{\partial A}{\partial\xi_2}\right) - k^{-2} \frac{\partial^2 A}{\partial\xi_2^2} \right] e^{ik[(\theta-\beta)\cdot\tau+n\xi_2+\phi(\theta,\tau,\xi_2)]} d\beta d\tau d\xi_2. \end{aligned} \quad (14.2.16)$$

Remarquons que :

$$\hat{p}_1(n, \theta, \xi_2, \tau + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}) = \left(1 + \frac{n}{R(s(\theta))}\right)^{-2} [(1 - \xi_2^2)(1 + 2R^{-1}(s(\theta))n + R^{-2}n^2) - (R^{-1}\tau + 1)^2]$$

Nous vérifions, en utilisant dans la première relation d'intégration par parties (14.2.15) :

$$A_1(n, \xi_2, \theta, \beta, \tau, k) = \frac{2}{R(s(\theta))} \left(1 + \frac{n}{R(s(\theta))}\right)^{-2} (1 - \xi_2^2) a(n, \xi_2, \theta, \beta, \tau, k) f(\beta, k)$$

pour l'expression du terme en  $n$  et

$$A_2(n, \xi_2, \theta, \beta, \tau, k) = R^{-2}(s(\theta)) \left(1 + \frac{n}{R(s(\theta))}\right)^{-2} (1 - \xi_2^2) a(n, \xi_2, \theta, \beta, \tau, k) f(\beta, k)$$

dans (14.2.16) pour le terme en  $n^2$ , que le terme principal en  $k$  de  $P_1(J(f))$  devient :

$$k^2 \int^3 d\beta d\tau d\xi_2 \frac{a}{\left(1 + \frac{n}{R}\right)^2} \left[ (1 - \xi_2^2) \left(1 - \frac{2}{R} \partial_{\xi_2} \phi + \left(\frac{\partial_{\xi_2} \phi}{R}\right)^2\right) - \left(1 + \frac{\tau + \partial_{\theta} \phi}{R}\right)^2 \right] f(\beta, k) e^{ik[(\theta-\beta)\cdot\tau+n\xi_2+\phi(\theta,\tau,\xi_2)]}$$

La nouvelle équation eikonale (obtenue par annulation du terme principal en  $k^2$  pour toute fonction  $f$  et pour tout symbole  $a$ ) revient à remplacer dans l'équation de la variété caractéristique (14.2.12)  $n$  par  $-\frac{\partial\phi}{\partial\xi_2}$  et  $\tau$  par  $\tau + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}$  :

$$-\frac{\partial\phi}{\partial\xi_2} = \frac{\tau + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}}{(1 - \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}} + R((1 - \xi_2^2)^{-\frac{1}{2}} - 1) \quad (14.2.17)$$

Le développement limité (14.2.13) conduit à la relation :

$$-\frac{\partial\phi}{\partial\xi_2} = \tau + \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{1}{2}(R(s(\theta)) + \tau + \frac{\partial\phi}{\partial\theta})\xi_2^2 + O(\xi_2^4)((1 - \xi_2^2)^{-\frac{1}{2}} - 1) \quad (14.2.18)$$

Supposons  $\phi(\theta, \tau, \xi_2) = \phi_0(\theta, \tau) + \xi_2\phi_1(\theta, \tau) + \frac{1}{2}\xi_2^2\phi_2(\theta, \tau) + \frac{1}{3}\xi_2^3\phi_3(\theta, \tau) + O(\xi_2^4)$ . En remplaçant ce développement dans la relation (14.2.18), nous vérifions que la phase  $\phi$  admet le développement suivant au voisinage de  $\xi_2 = 0$  :

$$\phi(\theta, \tau, \xi_2) = -\tau\xi_2 - \frac{1}{6}(R(s(\theta)) + \tau)\xi_2^3 + O(\xi_2^4) \quad (14.2.19)$$

Le symbole  $a$ , quant à lui, vérifie les équations de transport explicites, obtenues en annulant le terme d'ordre  $k$  et le terme constant dans la forme de l'opérateur obtenue après les intégrations par parties utilisant  $A_1$  et  $A_2$ . On trouve ainsi le champ de vecteur  $T_1$ , le symbole  $T_0$  et le terme de reste de l'opérateur  $T_2$  (qui représente en fait l'opérateur  $P_1$  appliqué au symbole  $a$ ).

Ceci achève la preuve de la proposition 14.1.

## 14.3 Expression de la parametrix à l'aide d'opérateurs intégraux de Fourier-Airy

### 14.3.1 Symboles pour la parametrix

La parametrix écrite dans (14.2.14) se représente à l'aide des fonctions d'Airy modifiées :

$$w_1(\xi) = Ai(e^{\frac{2i\pi}{3}}\xi) \quad w_2(\xi) = Ai'(e^{\frac{2i\pi}{3}}\xi). \quad (14.3.20)$$

**Proposition 14.2** *Il existe deux fonctions  $\phi_0(n, \theta, \tau)$  et  $\alpha(n, \theta, \tau)$ , holomorphes au voisinage du point strictement diffractif  $(0, 0, 0)$ , ainsi que deux symboles classiques  $s_0$  et  $s_1$  tels que*

$$J(f)(n, \theta, k) = \int e^{ik((\theta-\beta)\tau + \phi_0(n, \theta, \tau))} f(\beta, k) S(n, \theta, \beta, \tau, k) d\beta d\tau.$$

où le symbole  $S(n, \theta, \beta, \tau, k)$  est égal à

$$S(n, \theta, \beta, \tau, k) = s_0(n, k^{\frac{2}{3}}\alpha, \theta, \beta, \tau, k) \omega_1(k^{\frac{2}{3}}\alpha) + k^{-\frac{1}{3}} s_1(n, k^{\frac{2}{3}}\alpha, \theta, \beta, \tau, k) \omega_1'(k^{\frac{2}{3}}\alpha) + R.$$

Cette proposition s'appuie sur le lemme de représentation de la phase  $\phi$  solution de l'équation eikonale :

**Lemme 14.1** *Il existe deux fonctions  $\gamma(\theta, \tau)$  et  $\rho(\theta, \tau)$ , holomorphes dans un voisinage de  $(\theta, \tau) = (0, 0)$ , telles que  $\phi_0(0, \theta, \tau) = \tau^2 \gamma(\theta, \tau)$  et  $\alpha(0, \theta, \tau) = -\tau \rho(\theta, \tau)$ , tel que  $\rho(\theta, 0) = (\frac{2}{R(s(\theta))})^{\frac{1}{3}}$ .*

**Corollaire 14.1** *Notons  $\xi_0 = k^{\frac{2}{3}} k^{\frac{2}{3}} (\frac{2}{R})^{\frac{1}{3}} \tau$  et notons  $\nu = k^{\frac{2}{3}} (\frac{2}{R(s(\theta))})^{\frac{1}{3}} n$  (qui est donc la variable  $n$  étirée en fonction de la fréquence). On vérifie que*

$$\begin{aligned} k^{\frac{2}{3}} \alpha(n, \tau, \theta) &= k^{\frac{2}{3}} (\frac{2}{R(s(\theta))})^{\frac{1}{3}} n - k^{\frac{2}{3}} (\frac{2}{R(s(\theta))})^{\frac{1}{3}} \tau + \beta(n, \theta, \tau, k) \\ &= \nu - \xi_0 + \beta(n, \theta, \tau, k). \end{aligned} \quad (14.3.21)$$

**Preuve du lemme 14.1** Nous notons que la phase  $\phi(\theta, \tau, \xi_2) + n\xi_2$  admet deux points critiques (c'est-à-dire deux valeurs de  $\xi_2$  telles que  $\partial_{\xi_2}(\phi(\theta, \tau, \xi_2) + n\xi_2) = 0$  dans un voisinage de  $(\tau, \xi_2) = (0, 0)$ ). Ces points critiques, notés  $\xi_2^c$ , sont solution de  $n - \tau - \frac{1}{2}(R(s(\theta)) + \tau)(\xi_2^c)^2 + O((\xi_2^c)^3) = 0$ . La phase considérée admet donc deux valeurs critiques que l'on note  $\phi_+(n, \theta, \tau)$  et  $\phi_-(n, \theta, \tau)$ . Il existe deux fonctions  $\phi_0(n, \theta, \tau)$  et  $\alpha(n, \theta, \tau)$  et un changement de variable holomorphe  $z \leftrightarrow \xi_2$  (déjà obtenu dans la section 10.4) tels que on ait

$$\phi(\theta, \tau, \xi_2) + n\xi_2 = \phi_0(n, \theta, \tau) - \frac{1}{3}z^3 - \alpha(n, \theta, \tau)z. \quad (14.3.22)$$

Les deux valeurs critiques de la phase en  $z$  écrite en (14.3.22) sont égales à  $\phi_0(n, \theta, \tau) \pm \frac{2}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}$ . Par invariance des **valeurs** critiques lors d'un changement de variable, on trouve :

$$\begin{cases} \phi_0(n, \theta, \tau) = \frac{1}{2}(\phi_+ + \phi_-) \\ \alpha(n, \theta, \tau) = (-\frac{3}{4}(\phi_+ - \phi_-))^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

En utilisant le résultat déjà employé pour l'étude des singularités de type pli pour la variété lagrangienne (Proposition 10.7), le changement de variable exact  $\xi_2 \leftrightarrow z$  dans (14.2.14) conduit à :

$$J(f)(n, \theta, k) = \int e^{ik[(\theta-\beta)\tau + \phi_0(n, \theta, \tau) - \frac{1}{3}z^3 - \alpha(n, \theta, \tau)z]} a(n, \xi_2(z), \theta, \beta, \tau, k) \frac{d\xi_2}{dz} f(\beta, k) d\beta d\tau dz \quad (14.3.23)$$

Nous utilisons le lemme de division de Boutet de Monvel [17], et nous obtenons l'existence de  $s_0, s_1, h$  tels que :

$$\begin{aligned} a(n, \xi_2(z), \theta, \beta, \tau, k) \frac{d\xi_2}{dz} = \\ s_0(n, k^{\frac{2}{3}}\alpha, \theta, \beta, \tau, k) + zs_1(n, k^{\frac{2}{3}}\alpha, \theta, \beta, \tau, k) + [\partial_z h + ikh(-z^2 - \alpha(n, \theta, \tau))]. \end{aligned} \quad (14.3.24)$$

Nous remarquons que l'intégrale précédente se scinde en trois termes.

Le dernier terme est exactement nul (on intègre une différentielle exacte).

Le premier terme fait intervenir l'intégrale  $\int dz e^{-ik(\frac{1}{3}z^3 + \alpha(n, \theta, \tau)z)}$ , qui est une fonction d'Airy car c'est la transformée de Fourier inverse de  $e^{i\frac{1}{3}t^3}$ . Le deuxième terme est la dérivée par rapport à son argument de la fonction d'Airy précédente. Nous aboutissons à :

$$\begin{aligned} J(f)(n, \theta, k) = \int e^{ik[(\theta-\beta)\cdot\tau + \phi_0(n, \theta, \tau)]} k^{-\frac{1}{3}} [s_0(n, k^{\frac{2}{3}}\alpha, \theta, \beta, \tau, k) w_1(k^{\frac{2}{3}}\alpha) \\ + k^{-\frac{1}{3}} s_1(n, k^{\frac{2}{3}}\alpha, \theta, \beta, \tau, k) w'_1(k^{\frac{2}{3}}\alpha)] f(\beta, k) d\beta d\tau + R \end{aligned} \quad (14.3.25)$$

L'égalité de définition des points critiques entraî ne  $\xi_2^c = \pm((\frac{2}{R(s(\theta))+\tau})(n-\tau))^{\frac{1}{2}} + O(n-\tau)$ , d'où  $\phi_{\pm} = O((n-\tau)^2) \pm \frac{2}{3}(\frac{2}{R(s(\theta))+\tau})^{\frac{1}{2}}(n-\tau)^{\frac{3}{2}}$ .

On en déduit  $\phi_0(n, \theta, \tau) = O((n-\tau)^2)$  et  $\alpha(n, \theta, \tau) = (\frac{2}{\rho})^{\frac{1}{3}}(n-\tau) + O(\tau) + O((n-\tau)^{\frac{3}{2}})$ . Nous vérifions que la fonction  $\phi_0(0, \theta, \tau)$  s'écrit  $O(\tau^2)$  et que  $\alpha(0, \theta, \tau) = O(\tau)$ . Ceci achève la preuve du lemme. Le reste  $R$  que nous avons écrit dans la proposition provient du fait que les intégrales sont calculées sur  $(-\infty, +\infty)$  lorsque nous voulons obtenir les fonctions d'Airy, alors que l'intégrale considérée ici est une intégrale locale en  $\xi_2$ , sur un contour reliant  $-\delta_0 - i\delta_0^2\delta_2$  à  $i\delta_0 + \delta_1\delta_0^{\frac{3}{2}}$ . La proposition 3.1 p 1451 de [64] permet de vérifier que le reste est contrôlé lorsque  $0 < \delta_0 < D_1$  et lorsque  $|\delta_1|, \delta_2$  sont majorés par  $D_0$ .

### 14.3.2 Opérateur de Fourier-Airy au bord associé à la condition de Dirichlet

Le symbole de l'opérateur de Fourier intégral (14.3.25) s'exprime à l'aide de la fonction  $w_1$ , qui est divergente à l'infini. Nous introduisons dans ce paragraphe le domaine du plan complexe  $\mathbb{C}^M$  complémentaire de

$$\{z, |z - Me^{\frac{i\pi}{3}}| < \varepsilon, |\Im(e^{-\frac{i\pi}{3}}z)| \leq \varepsilon(\operatorname{Re}(e^{-\frac{i\pi}{3}}z) - M)\}$$

Nous introduisons les fonctions, notées  $w_1^M$  et  $w_2^M$ , bornées dans  $\mathbb{C}^M$ , égales à

$$\begin{cases} w_1^M(\theta) = (e^{\frac{2i\pi}{3}\theta} + M)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(e^{\frac{2i\pi}{3}\theta} + M)^{\frac{1}{2}}(e^{\frac{2i\pi}{3}\theta} - M/2)} w_1(\theta) \\ w_2^M(\theta) = (e^{\frac{2i\pi}{3}\theta} + M)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2i\pi}{3}\theta} e^{-\frac{2}{3}(e^{\frac{2i\pi}{3}\theta} + M)^{\frac{1}{2}}(e^{\frac{2i\pi}{3}\theta} - M/2)} w_1(\theta). \end{cases} \quad (14.3.26)$$

Ces fonctions sont les fonctions  $A_1^M$  et  $A_2^M$  calculées en  $e^{\frac{2i\pi}{3}\theta}$  introduites dans [64].

**Variété canonique associée à l'opérateur au bord, espaces de Sjostrand.** Les notations et espaces introduits dans ce paragraphe sont écrits en détail dans [88], auquel nous renvoyons le lecteur. Nous introduisons les fonctions sous-harmoniques sur  $\mathbb{C}$  suivantes :

$$\begin{cases} \psi_0(\theta) = \frac{1}{2}(\Im\theta)^2 \\ \psi_r(\theta) = \psi_0(\theta) - \frac{1}{4}(\sup|\operatorname{Re}\theta| - r, 0)^2 \end{cases}$$

En utilisant la phase  $\phi_0$  nous définissons une fonction sous-harmonique spéciale  $l_0$  comme dans [64]. Par application du théorème 9.1, nous savons que la variété canonique  $\Lambda_{l_0} = \{(\beta, \frac{2}{i} \frac{dl_0}{d\beta})\}$  permettant de la calculer est

$$\{(\partial_\tau \phi(\theta, \tau, \xi_2^*), \tau)\},$$

les conditions suivantes sur  $\xi_2^*$  étant réunies :

$$\begin{cases} \partial_{\xi_2} \phi(\theta, \tau, \xi_2^*) = 0 \\ \partial_{\theta} \phi(\theta, \tau, \xi_2^*) = -\Im \theta. \end{cases}$$

Grâce au changement de variable, on constate que ceci est équivalent à

$$\begin{cases} z^2(\theta, \tau, \xi_2^*) = -\alpha(0, \theta, \tau) \\ \tau^2 \partial_{\theta} \gamma(\theta, \tau) = z(\theta, \tau, \xi_2^*) \partial_{\theta} \alpha(0, \theta, \tau) - \Im \theta. \end{cases}$$

La variété canonique s'écrit

$$\{(\partial_{\tau}(\tau^2 \gamma) - \partial_{\tau} \alpha z, \tau)\} = \{(\partial_{\tau}(\tau^2 \gamma) - \partial_{\tau} \alpha / \partial_{\theta} \alpha [\tau^2 \partial_{\theta} \gamma(\theta, \tau) + \Im \theta], \tau)\}.$$

Lebeau a utilisé le développement limité de la phase  $\phi$  pour donner la preuve de l'existence de  $l_0$ . Nous nous bornons ici à donner une méthode explicite de construction, mais qui ne peut pas être appliquée dans l'état. Cette phase sous-harmonique définit l'espace de Sjostrand sur lequel l'opérateur de Fourier intégral donné par 914.3.25) s'étend naturellement.

Nous rappelons donc, suivant [64] p 1439-1440, que  $H_{l_0}(|\theta| < a)$  est l'ensemble des fonctions  $f(\theta, k)$ , holomorphes en  $\theta \in \mathbb{C}$  sur  $|\theta| < a$ , telles que

$$\forall K \subset \{|\theta| < a\}, \forall \varepsilon, \exists C_{\varepsilon, K} \text{ tel que } \forall x \in K, \forall k \geq 1, |f(\theta, k)| \leq C_{\varepsilon, k} e^{k(l_0(\theta) + \varepsilon)}.$$

De même,  $H_{\phi_0}^{+, \kappa}(|\theta| < a)$  est l'ensemble des fonctions  $f(n, \theta, k)$ , holomorphes pour  $\theta \in X = \{|\theta| < a\}$  et pour  $n$  dans un voisinage  $U$  dans  $CC$  de  $[0, \kappa]$ , telles que  $f$  soit uniformément majorée par  $e^{kC}$  sur  $(n, \theta) \in U \times X$ ,  $k \geq 1$  et dont la  $p$ -ième dérivée en  $n$  est majorée sur tout compact  $K$  dans  $X$  et sur  $n \in [0, \kappa[$  par  $C_{\varepsilon, p, K} e^{k(\varepsilon + \phi_0(\theta))}$ . Le spectre analytique de  $f$  dans  $T^*(]0, \kappa[ \times \Lambda_{\phi_0})$  est alors noté  $SS_{\delta, \phi_0}^{w, \kappa}$ .

**Symbole de l'opérateur non local** Introduisons donc le symbole

$$\sigma^M(\theta, t, k) = (M - k^{\frac{2}{3}} t^2 \rho(\theta, t^2))^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3} k t^3 \rho^{\frac{3}{2}}(\theta, t^2) + \frac{2}{3} (M - k^{\frac{2}{3}} t^2 \rho(\theta, t^2))^{\frac{1}{2}} (k^{\frac{2}{3}} t^2 \rho(\theta, t^2) + M/2)}$$

et la phase  $F(\theta, t) = t^4 \gamma(\theta, t^2) + \frac{2}{3} t^3 \rho^{\frac{3}{2}}(\theta, t^2)$ .

L'opérateur non local qui définit la parametrix est

$$I(h)(\theta, k) = \int d\beta \int 2t dt e^{ik[(\theta - \beta)t^2 + F(\theta, t)]} \sigma^M(\theta, t, k) h(\beta, k).$$

On écrit le résultat de la Proposition 3.2 de [64] :

**Lemme 14.2** *Si  $X$  définit le disque de rayon  $D_2 r^2$  et si les bornes d'intégration dans  $I$  sont minorées par  $r/D_2$ , alors  $h \in H_{\psi_r}(B_d) \Rightarrow I(h) \in H_{l_0}(X)$ .*

Ce lemme permet de définir la parametrix utilisée  $J \circ I$ . On a alors la Proposition ([64], propositions 3.1 et 3.2).

**Proposition 14.3** *Soit  $h \in H_{\psi_r}(B_d)$ . Alors  $I(h) \in H_{l_0}(X)$ , et on peut calculer  $J(h)$  pour  $Dr^2 \leq d_0$ .*

- i) *La distribution  $J \circ I(h)$  appartient à  $H_{\phi_0}^{+, \kappa}(|\theta| < d_2)$  pour  $d_2$  et  $\kappa$  assez petits.*
- ii)  *$J \circ I(h)$  est solution asymptotique de  $P$ , c'est-à-dire*

$$SS_{\partial, \phi_0}^{w, \kappa}(P(J \circ I(h))) = \emptyset.$$

Nous obtenons une solution dépendant d'un opérateur de Fourier intégral de symbole borné dans les variables  $(\nu, \xi_0)$ . Ceci impose que l'on se restreigne aux zones où  $\xi_0$  est contrôlé; plus précisément l'analyse mathématique de [64] impose la majoration  $\Im \xi_0 \leq c + \delta |\operatorname{Re} \xi_0|$ , cette majoration sera précisée ci-après. En revanche, on conserve la variable  $\nu$  comme notation pour l'étirement de la variable  $n$  de la section précédente. Le résultat est une expression uniforme et bornée en  $\nu$ , ce qui donne la taille de la zone de transition. Les majorations des fonctions d'Airy permettent de donner une expression uniforme mais oscillante dans le voisinage  $V = \{(n, \theta, \tau), |k^{\frac{2}{3}} \alpha(n, \theta, \tau)| \leq C\}$ . Le calcul,  $\phi_0$  et  $\alpha$  étant connues, de la solution  $J(f)(n, \theta, k)$  est exact. C'est l'action d'un opérateur de Fourier intégral classique dont on connaît le symbole

$$[s_0(n, k^{\frac{2}{3}} \alpha, \theta, \beta, \tau, k) w_1(k^{\frac{2}{3}} \alpha) + k^{-\frac{1}{3}} s_1(n, k^{\frac{2}{3}} \alpha, \theta, \beta, \tau, k) w_1'(k^{\frac{2}{3}} \alpha)]$$

et la phase  $e^{ik[(\theta-\beta)\cdot\tau+\phi_0(n,\theta,\tau)]}$ .

### 14.3.3 Opérateur intégral de Fourier pour la condition d'impédance

En nous inspirant du chapitre 13.2, nous introduisons l'opérateur  $L$  d'impédance. Il s'agit de

$$Lu(\theta, k) = \partial_n u(0, \theta, k) + ikZ(\theta)u(0, \theta, k). \quad (14.3.27)$$

L'application de (14.3.27) à (14.2.14) conduit à :

$$L(J(f))(n, \theta, k) = \int e^{ik[(\theta-\beta)\cdot\tau+\phi(\theta,\tau,\xi_2)]} [\partial_n a + ik\xi_2 a + ikZa] f(\beta, k)|_{n=0} d\beta d\tau d\xi_2 \quad (14.3.28)$$

Cette intégrale se traite de la même façon que l'intégrale donnant  $J$ , en particulier elle s'exprime avec les mêmes changements de variable. Nous devons calculer le symbole

$$s_Z(\xi_2, \theta, \beta, \tau, k) = \partial_n a(0, \xi_2, \theta, \beta, \tau, k) + ik\xi_2 a(0, \xi_2, \theta, \beta, \tau, k) + ikZa(0, \xi_2, \theta, \beta, \tau, k).$$

On effectue le changement de variable  $\xi_2(z)$  et on exprime  $s_Z(\xi_2(z), \theta, \beta, \tau, k) d\xi_2/dz(z)$  en utilisant le théorème de division de Boutet de Monvel, sous la forme (on omet toutes les variables non significatives) :

$$s \frac{d\xi_2}{dz} = ik(s_0^L + z s_1^L + (\partial_z h^L + ikh^L(-z^2 - \alpha))).$$

Les deux termes  $s_0^L$  et  $s_1^L$  associés à ce nouveau symbole peuvent être évalués grâce au développement limité de  $\xi_2(z)$ , et nous reprenons ainsi le développement des pages 479-481 de [55]. Le lemme 16 de [55] indique que, pour  $n = 0$  (qui est la seule condition qui nous intéresse lorsque nous étudions l'opérateur au bord)

$$\xi_2(z) = \tilde{a}(\theta, \tau) + bz + c \frac{z^2}{2} + d \frac{z^3}{6} O(z^4),$$

les fonctions  $\tilde{a}, b, c$  vérifiant

$$\begin{cases} \phi(\theta, \tau, \tilde{a}) = \tau^2 \gamma(\theta, \tau) \\ b \partial_{\xi_2} \phi(\theta, \tau, \tilde{a}) = -\tau \rho(\theta, \tau) \\ c \partial_{\xi_2}^2 \phi(\theta, \tau, \tilde{a}) = -b^2 \partial_{\xi_2}^2 \phi(\theta, \tau, \tilde{a}). \end{cases}$$

Notons alors  $\sigma_Z^j(\theta, \tau, k) = \partial_{\xi_2}^j (s_Z \frac{d\xi_2}{dz})(\theta, \tau, \tilde{a}, k)$  et  $\xi^0 = k^{\frac{2}{3}} \alpha(0, \theta, \tau) = k^{\frac{2}{3}} \tau \rho(\theta, \tau)$ . On peut exprimer simplement le symbole  $s_0^L w_1(\xi^0) + k^{-\frac{1}{3}} s_1^L w_1'(\xi^0)$ , et on obtient

$$2\pi e^{\frac{i\pi}{3}} k^{-\frac{1}{3}} [(b\sigma_Z^0 - k^{-\frac{2}{3}} \xi^0 (d\sigma_Z^0 + bc\sigma_Z^1 + \frac{1}{2} b^3 \sigma_Z^2)) w_1(\xi^0) + ik^{-\frac{1}{3}} [\sigma_Z^0 c + b^2 \sigma_Z^1 + O(k^{-\frac{2}{3}} \xi_0)] w_1'(\xi^0)].$$

On vérifie que le terme principal du symbole est

$$2\pi e^{\frac{i\pi}{3}} k^{-\frac{1}{3}} a(0, 0, \theta, \beta, 0, k) [\rho(\theta, 0) \omega_1(\xi^0) + k^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{i\pi}{6}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} \rho^2(\theta, 0) [Z(\theta) + \frac{1}{2} \frac{\partial_{\theta} \rho}{\rho}(\theta, 0) \frac{\partial_{\xi_2} a}{a} |_{\beta=\theta, \tau=0} \omega_1'(\xi^0)].$$

Le terme principal du symbole s'annule pour les  $\xi^0$  vérifiant  $\omega_1(\xi^0) = 0$ .

## 14.4 Calcul 2-microlocal de l'onde diffractée

### 14.4.1 Les zéros du symbole de l'opérateur aux limites.

Cette section n'est pas, contrairement à ce qui précède, "self contained". Il faut en effet se reporter de manière importante aux deux articles ayant permis le calcul de l'amplitude du rayon rampant : l'article de G. Lebeau [64] qui a mis en place l'algèbre des **opérateurs unilatéraux** et qui a construit le calcul pseudo-différentiel 2-microlocal permettant le calcul de l'inverse d'un opérateur unilatéral et l'article de l'auteur [55] qui a construit explicitement l'inverse de l'opérateur unilatéral au bord obtenu ici.

On introduit l'ouvert  $\Omega(r, \delta, \gamma_1, k)$  de  $(\mathbb{C} \cap B(0, r))^2$  des points  $(\theta, \tau)$  vérifiant  $\Im \tau - \gamma_1 k^{-\frac{2}{3}} < \delta |\Re \tau|$ . Soit

On vérifie que, pour tout  $M$ , il existe  $\gamma_1(M, \delta, r)$  tel que les deux fonctions  $w_1^M$  et  $w_2^M$  sont bornés dans  $\Omega(r, \delta, \gamma_1(M, \delta, r), k)$ . Introduisons l'ouvert  $V_{M, \varepsilon_0}$ , complémentaire de  $\{|\Im(e^{\frac{2i\pi}{3}} z)| < -\varepsilon_0 (\Re(e^{\frac{2i\pi}{3}} z) + M)\} \cup \{|e^{\frac{2i\pi}{3}} z + M| \leq \varepsilon_0\}$ . Nous avons le lemme :

**Lemme 14.3** *Il existe deux constantes  $C$  et  $\alpha_0$  tel que si  $P$  est le nombre de zéros de  $w_1$  dans  $V_{M, \varepsilon_0}$ , il existe  $P$  fonctions analytiques  $\xi_1, \dots, \xi_p$  vérifiant :*

$$\forall \alpha' \leq \alpha, |w_1^m(\xi^0)| \leq \alpha', \xi^0 \in V_{M, \varepsilon_0} \Rightarrow \exists p \leq P \quad \text{tel que} \quad |\xi^0 - \xi_p| \leq C\alpha'.$$

Les zéros de  $s_0^L \omega_1(\xi^0) + k^{-\frac{1}{3}} s_1^L \omega_1'(\xi^0)$  sont les zéros de  $w_1$ .

**Preuve** Il s'agit du résultat du lemme 4 de [55] p 433. Nous énonçons les résultats de [55].

**Réduction de la phase** Nous vérifions par un calcul de phase stationnaire que l'opérateur  $I$  introduit un terme de phase égal à  $-ik\tau^2\gamma(\theta, \tau) + f(M, \xi^0)$ , et que l'opérateur  $J$  présente d'ores et déjà un terme de la forme  $ik\tau^2\gamma(\beta, \tau) - f(M, k^{\frac{2}{3}}\tau\rho(\beta, \tau))$ , où  $f$  est la fonction  $\frac{2}{3}(x+M)^{\frac{1}{2}}(x-M/2) + 1/4 \text{Log}(x+M)$ . Soit  $W(\theta, \beta, \tau, k)$  la fonction définie par

$$(\theta - \beta)\tau W = \tau^2[\gamma(\beta, \tau) - \gamma(\theta, \tau)] + (ik)^{-1}[f(M, k^{\frac{2}{3}}\tau\rho(\theta, \tau)) - f(M, k^{\frac{2}{3}}\tau\rho(\beta, \tau))].$$

Le changement de variable  $\eta = \tau(1 - W)$  permet d'obtenir dans l'intégrale de définition de  $L(J \circ I(h))$  une phase égale à  $ik(\theta - \beta)\eta$  sans changer de manière significative le symbole. Ceci est démontré rigoureusement en dimension quelconque par le Lemme 7 p 448 de [55]. Il existe alors un symbole  $E(\theta, \beta, \eta, k)$  tel que

$$L(J \circ I(f))(\theta, k) = \int e^{i(\theta - \beta)\eta} E(\theta, \beta, \eta, k) f(\beta, k) d\beta d\eta.$$

Le symbole  $E$  s'écrit

$$E(\theta, \beta, \eta, k) = E_1(\theta, \beta, \eta, k) \omega_1^M(k^{\frac{2}{3}} \alpha(0, \theta, \tau(\theta, \beta, \eta))) + k^{-\frac{1}{3}} E_2(\theta, \beta, \eta, k) \omega_2^M(k^{\frac{2}{3}} \alpha(0, \theta, \tau(\theta, \beta, \eta))).$$



**Conjugaison par le terme Gevrey 3** Les zéros du symbole  $E$  sont donnés par la relation

$$\tau = k^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} \xi_p \left( \frac{R(s(\theta))}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + O(k^{-1}). \quad (14.4.29)$$

En effet, résoudre  $k^{\frac{2}{3}} \tau \rho(\theta, \tau) = \xi_p$  équivaut à trouver  $\tau = k^{-\frac{2}{3}} g(\theta, k)$  et donc  $g(\theta, k) \rho(\theta, k^{-\frac{2}{3}} g(\theta, k)) = \xi_p$ , d'où, en supposant  $g$  borné pour  $k \geq 1$ ,  $\rho(\theta, k^{-\frac{2}{3}} g) = \rho(\theta, 0) + O(k^{-\frac{2}{3}})$ . Heuristiquement, le facteur de phase obtenu "ressemble alors à" :

$$ik\tau\theta = ikk^{-\frac{2}{3}} \theta e^{-\frac{2i\pi}{3}} \xi_p \left( \frac{R}{2} \right)^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{1}{3}} [e^{-\frac{i\pi}{6}} \theta \xi_p \left( \frac{R}{2} \right)^{\frac{1}{3}}].$$

Ceci donne l'idée de conjuguer l'opérateur  $L(J \circ I)$  par un opérateur de la forme  $e^{ik^{\frac{1}{3}} H(\theta)}$ , pour obtenir une puissance  $k^{\frac{1}{3}}$ . Soit  $Op(T)$  l'opérateur

$$Op(T)(f)(\theta, k) = Op(e^{ik^{\frac{1}{3}} H(\theta)}) L[e^{-ik^{\frac{1}{3}} H(\beta)} f(\beta, k)]. \quad (14.4.30)$$

Par application du lemme 8.7 (Astuce de Kuranishi), ceci correspond au **changement de variable dual** donné par :

$$\Sigma = \eta + k^{-\frac{2}{3}} H'(\theta). \quad (14.4.31)$$

**Nous considérons à compter de ce point la fonction  $H$  associée au premier zéro de la fonction  $\omega_1$ .** Utilisant le premier zéro de la fonction d'Airy  $\omega$  (tel que  $Ai(-\omega) = 0$  et  $Ai(x) \neq 0$  pour  $x > -\omega$ ), on voit que  $\xi_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} \omega$ . Choisissons alors  $H'(\theta) = -e^{\frac{i\pi}{3}} \xi_1 \left( \frac{R(s(\theta))}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$  et  $H(0) = 0$ . Le symbole  $E$  est nul pour  $\eta = -k^{-\frac{2}{3}} H'(\theta)$ . Le symbole principal de l'opérateur  $Op(T)$  s'annule donc pour  $\Sigma = 0^2$ . Le changement de variable (14.4.31) correspond à  $\xi^0 = \xi_1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} k^{\frac{2}{3}} \left( \frac{2}{R(s(\theta))} \right)^{\frac{1}{3}} \Sigma$ , ce qui donne :

$$Op(T)(f)(\theta, k) = \int \int e^{ik(\theta-\beta) \cdot \Sigma} S_1(\theta, \beta, \Sigma, k) f(\beta, k) d\beta d\Sigma$$

où :

$$S_1(\theta, \beta, \Sigma, k) = 2\pi k^{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{R(s(\theta))} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{kR(s(\theta))}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} w_1'(\xi_1) [Z(ik\Sigma) e^{\frac{i\pi}{6}} - 1 + k^{-\frac{1}{3}} r_1].$$

## 14.4.2 Algèbre des opérateurs unilatéraux

Rappelons que nous avons introduit les ouverts  $\Omega(r, \delta, \gamma_1, k)$  et nous avons rappelé que les symboles  $w_1^M$  et  $w_2^M$  sont bornés sur ces ouverts. Remarquons que le comportement en  $\Sigma$  est le même que le comportement de  $w_1^M(\xi^0)$  en  $\tau$  pourvu que l'on choisisse au départ  $M$  suffisamment grand par rapport à  $\xi_1$ , et que l'on modifie le  $\gamma_1$  tel que le symbole  $w_1^M(\xi^0)$  soit borné dans  $\Omega(\dots, \gamma_1)$  dans la variable  $\tau$ , et soit borné dans  $\Omega(\dots, \gamma_2)$ ,  $0 < \gamma_2 < \gamma_1$  dans la variable  $\Sigma$ .

Nous définissons un espace de symboles associé à ces ouverts, qui doit être muni d'une structure d'algèbre. Cet espace est  $\mathcal{E}_{\gamma_2}^+$ , ensemble des suites de symboles  $p_n(\Sigma, \theta, k)$  tels que

$$\sup_{\Omega(r, \delta, \gamma_2, k)} |(\Sigma - i\gamma_2 k^{-\frac{2}{3}})^n p_n(\Sigma, \theta, k)| \leq AB^n n!$$

muni de la loi de composition associée à la représentation formelle

$$p(\Sigma, \theta, k) = \sum_n p_n(\Sigma, \theta, k) (\Sigma - i\gamma_2 k^{-\frac{2}{3}})^{-n} (ik)^{-n}.$$

<sup>2</sup>Cette démarche, qui est facilitée par le fait que le bord est de dimension 1, est la même que celle du Lemme 8 de [55] p 449-450.

En particulier,

$$(p \circ q)_n(\Sigma, \theta, k) = \sum_{m+m'+j=n} \partial_{\Sigma}^j p_m(\Sigma, \theta, k) \partial_{\theta}^j q_{m'}(\Sigma, \theta, k).$$

Nous vérifions qu'un élément elliptique (dont le symbole principal est borné inférieurement sur  $\Omega(r, \delta, \gamma_2, k)$ ) est inversible dans cet espace (Proposition 4.1.3 de [64] p 1465).

Nous définissons l'opérateur

$$D_{\gamma_2}^{-n} v(\theta) = \int_{-A}^{\theta} e^{-\gamma_2 k^{\frac{1}{3}}(\theta-\beta)} \frac{(\theta-\beta)^{n-1}}{(n-1)!} v(\beta, k) d\beta, \quad (14.4.32)$$

et l'opérateur associé à un symbole  $p$  de l'espace est

$$Op(p)(u) = \sum_n Op^c(p_n)(D_{\gamma_2}^{-n}(u)).$$

le signe  $^c$  désignant l'action d'un symbole classique en variable  $(\theta, \Sigma)$ .

On a montré que

$$S_1(\theta, \beta, \Sigma, k) = ik2\pi \left(\frac{kR}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} e^{\frac{i\pi}{6}} \omega'_1(\xi_1) [ikZ\Sigma - e^{-\frac{i\pi}{6}} + k^{-\frac{1}{3}} r_1(\theta, \beta, \Sigma, k)].$$

Le lemme de réduction 8.3 permet d'écrire

$$Op(S_1) = Op(S_2)$$

avec

$$S_2(\theta, \Sigma, k) = ik2\pi \left(\frac{kR(s(\theta))}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} e^{\frac{i\pi}{6}} \omega'_1(\xi_1) [ikZ\Sigma - e^{-\frac{i\pi}{6}} + k^{-\frac{1}{3}} r_2(\theta, \Sigma, k)].$$

**Lemme 14.4** *Soit*

$$e_0(\theta, k) = k^{-\frac{2}{3}} 2\pi (ik)^2 \left(\frac{kR(s(\theta))}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} Z(\theta) e^{\frac{i\pi}{6}} \omega'_1(\xi_1).$$

*Soit*

$$r(\theta, \Sigma, k) = Z^{-1}(\theta) [-e^{-\frac{i\pi}{6}} + k^{-\frac{1}{3}} r_2(\theta, \Sigma, k)].$$

*On écrit*

$$S_2(\theta, \Sigma, k) = k^{\frac{2}{3}} e_0(\theta, \Sigma, k) [\Sigma_1 + (ik)^{-1} r(\theta, \Sigma, k)].$$

Introduisons  $\tilde{e}_0^{\gamma_2}(\theta, k) = e_0(\theta, \Sigma, k)(\Sigma - i\gamma_2 k^{-\frac{2}{3}})$ . Le symbole  $\tilde{e}_0^{\gamma_2}$  est elliptique dans  $\mathcal{E}_{\gamma'}^+$ ,  $\gamma' < 0$ . On a la relation

$$(\Sigma - i\gamma_2 k^{-\frac{2}{3}})(\tilde{e}_0^{\gamma_2})^{-1} \circ S_2 = \Sigma + (ik)^{-1} \tilde{r}(\theta, \Sigma, k),$$

le symbole  $\tilde{r}$  vérifiant  $\tilde{r}(\theta, 0, k) - r(\theta, 0, k) = O(k^{-\frac{1}{3}})$ . On introduit le symbole  $h(\theta, \sigma, k)$  défini par le système (on retrouve une méthode utilisée par exemple pour l'inversion d'un opérateur elliptique)

$$\begin{cases} \partial_{\theta} h(\theta, \Sigma, k) = (h \circ \tilde{r})(\theta, \Sigma, k) \\ h(\theta_0, \Sigma, k) = 0. \end{cases}$$

Il vient

$$h_0(\theta, \Sigma, k) = \exp\left(\int_{\theta_0}^{\theta} \tilde{r}(u, \Sigma, k) du\right) = (1 + O(k^{-\frac{1}{3}})) \exp\left(\int_{\theta_0}^{\theta} r(u, \Sigma, k) du\right). \quad (14.4.33)$$

Soit  $R_0^0(\theta, \Sigma, k)$  le symbole égal à  $\int_0^1 \partial_{\Sigma} h_0(\theta, u\Sigma, k) du$ .

**Lemme 14.5** • *L'inverse de l'opérateur*

$$\frac{\Sigma}{\Sigma - i\gamma_2 k^{-\frac{2}{3}}} + \frac{1}{ik} \frac{\tilde{r}(\theta, \Sigma, k)}{\Sigma - i\gamma_2 k^{-\frac{2}{3}}}$$

dans  $\mathcal{E}_{\gamma'}^+$ ,  $\gamma' < 0$ , s'écrit

$$(\Sigma - i\gamma_2 k^{-\frac{2}{3}}) \circ h^{-1} \circ [R_0^0(\theta, \Sigma, k) + ikD_0^{-1} \circ h_0(\theta, 0, k) + R^0(\theta, \Sigma, k)],$$

où  $R^0$  est un symbole d'ordre  $k^{-\frac{2}{3}}$ .

- L'égalité  $Op(S_2)f = g$  est équivalente à

$$f = (\Sigma - i\gamma_2 k^{-\frac{2}{3}}) \circ h^{-1} \circ [R_0^0 + ikD_0^{-1} \circ h_0 + R^0] \circ Op((\tilde{\epsilon}_0^{\gamma_2})^{-1})(k^{-\frac{2}{3}}g).$$

La preuve de ce lemme est une conséquence de la proposition 6 pp 443 de [55].

### 14.4.3 Calcul de la trace de la dérivée normale de l'onde diffractée

Nous utilisons la conséquence suivante du lemme précédent :

**Corollaire 14.2** *On se donne  $g \in H_{\phi_0}$ . Soit  $f$  définie par  $Op(T)f = g$ . Alors*

$$f(\theta, k) = \frac{1}{2\pi ik^{\frac{1}{3}} \omega_1'(\xi_1) \times e^{\frac{i\pi}{6}} Z(\theta)} \int_{-A}^{\theta} \left( \frac{R(s(\beta))}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \exp\left(e^{-\frac{i\pi}{6}} \int_{\beta}^{\theta} \frac{du}{Z(u)}\right) g_0(\beta, k) d\beta.$$

**Preuve du corollaire 14.2** On vérifie l'égalité, dans  $\mathcal{E}_{\gamma'}^+$ ,  $\gamma' < 0$  :

$$Op((\tilde{\epsilon}_0^{\gamma_2})^{-1})(k^{\frac{2}{3}}g) = e^{-1}(\theta, 0, k)(-i\gamma_2 k^{-\frac{2}{3}})^{-1}(1 + O(k^{-\frac{1}{3}}))g(\theta, k)$$

soit

$$Op((\tilde{\epsilon}_0^{\gamma_2})^{-1})g = [2\pi(ik)^2 Z(\theta) e^{\frac{i\pi}{6}} \omega_1'(\xi_1) (-i\gamma_2 k^{-\frac{2}{3}})]^{-1} \left( \frac{kR(s(\theta))}{2} \right)^{\frac{2}{3}} g_0(\theta, k) (1 + O(k^{-\frac{1}{3}})).$$

Appliquant (14.4.32), on trouve

$$ikD_0^{-1} h_0(\tilde{\epsilon}_0^{\gamma_2})^{-1} g = \frac{(1 + O(k^{-\frac{1}{3}}))}{2\pi(ik)^2 e^{\frac{i\pi}{6}} \omega_1'(\xi_1) (-i\gamma_2 k^{-\frac{2}{3}})} \int_{-A}^{\theta} \left( \frac{kR(s(\beta))}{2} \right)^{\frac{2}{3}} (Z(\beta))^{-1} g_0(\beta, k) h_0(\beta, k) d\beta.$$

La deuxième relation du lemme 14.5 donne

$$f(\theta, k) = Op(\Sigma - i\gamma_2 k^{-\frac{2}{3}}) \left[ \frac{(1 + O(k^{-\frac{1}{3}}))}{2\pi(ik)^2 e^{\frac{i\pi}{6}} \omega_1'(\xi_1) (-i\gamma_2 k^{-\frac{2}{3}})} \int_{-A}^{\theta} \left( \frac{kR(s(\beta))}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{g_0(\beta, k)}{Z(\beta)} \frac{h_0(\beta, k)}{h_0(\theta, k)} d\beta \right].$$

Le symbole  $\Sigma - i\gamma_2 k^{-\frac{2}{3}}$  est un symbole classique, que l'on calcule en  $\Sigma = 0$ . On remplace  $h_0$  par l'expression (14.4.33) et les termes  $-i\gamma_2 k^{-\frac{2}{3}}$  se simplifient :

$$f(\theta, k) = \frac{(1 + O(k^{-\frac{1}{3}}))}{2\pi(ik)^2 e^{\frac{i\pi}{6}} \omega_1'(\xi_1)} \int_{-A}^{\theta} \left( \frac{kR(s(\beta))}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{g_0(\beta, k)}{Z(\beta)} e^{\int_{\theta}^{\beta} r(u, 0, k) du} d\beta.$$

Le terme  $\gamma_2$ , qui indique dans quel espace de symbole l'opérateur  $S_1$  est elliptique, s'est simplifié dans l'expression. Ceci est naturel puisque le résultat ne doit pas dépendre de l'espace dans lequel on effectue le calcul. La définition de  $r$  dans le lemme 14.4 permet d'obtenir

$$\exp\left(\int_{\theta}^{\beta} r(u, 0, k) du\right) = \exp\left(e^{-\frac{i\pi}{6}} \int_{\beta}^{\theta} \frac{du}{Z(u)}\right) (1 + O(k^{-\frac{1}{3}})).$$

Ceci achève la preuve du corollaire.

Pour continuer le calcul, nous remarquons que  $Op(T)$  et  $L(J \circ I)$  sont liés par (14.4.30). On définit  $F(\theta, k) = [(Op(e^{-ik^{\frac{1}{3}}H(\beta)}))^{-1}f](\theta, k)$ . Alors

$$f(\theta, k) = [Op(e^{-ik^{\frac{1}{3}}H(\beta)})F](\theta, k).$$

L'équation (14.3.27) équivaut à

$$Op(e^{ik^{\frac{1}{3}}H(\theta)})[L(J \circ I)[Op(e^{-ik^{\frac{1}{3}}H(\beta)})F] = -[Op(e^{ik^{\frac{1}{3}}H(\theta)})Lu_i](\theta, k).$$

La fonction  $u_i$  est une solution de l'équation des ondes dans le vide. On sait que son front d'onde rencontre le bord  $\mathcal{C}$  en un point strictement diffractif, caractérisé par son angle d'Euler  $\theta_0$ . Tous les points du bord atteints par un rayon tangent sont strictement diffractifs car le bord est strictement convexe.

On écrit alors

$$u_i(\theta, n, k) = e^{ik\phi(n, \theta)} a_i(n, \theta, k).$$

La phase  $\phi$ , solution de l'équation eikonale, vérifie  $\partial_n \phi(0, \theta_0) = 0$ .

Il vient ainsi ( $Y$  désigne la fonction de Heaviside  $\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$ )

$$Lu_i(\theta, k) = ik[Z(\theta)a_i(0, \theta, k) + \partial_n \phi(0, \theta)a_i(0, \theta, k) + \frac{1}{ik} \frac{\partial a_i}{\partial n}(0, \theta, k)]e^{ik\phi(0, \theta)}(1 - Y(\theta - \theta_0)).$$

L'application du corollaire 14.2 permet d'obtenir

$$F(\theta, k) = \frac{-k}{2\pi e^{\frac{i\pi}{6}} k^{\frac{1}{3}} \omega'_1(\xi_1)} \int_{-A}^{\theta} \left(\frac{R(s(\beta))}{2}\right)^{\frac{2}{3}} e^{\int_{\beta}^{\theta} \frac{e^{-\frac{i\pi}{6}} du}{Z(u)} + ik\phi(0, \beta) - ik^{\frac{1}{3}}H(\beta)} a_i(0, \beta, k) \left[1 + \frac{\partial_n \phi(0, \beta)}{Z(\beta)}\right] (1 - Y(\beta - \theta_0)) d\beta.$$

Remarquons que, par la relation permettant de calculer  $\phi$  dans le lemme 10 p 463 de [55]

$$\phi(0, \beta) = \phi(0, \theta_0) + \frac{1}{6}R(s(\theta_0))(\beta - \theta_0)^3 + O(\beta - \theta_0)^4$$

et que

$$H(\beta) = H(\theta_0) - e^{\frac{i\pi}{3}} \xi_1 \left(\frac{R(s(\theta_0))}{2}\right)^{\frac{1}{3}} (\beta - \theta_0) + O((\beta - \theta_0)^2)$$

il reste, avec  $m = k^{\frac{1}{3}}(\beta - \theta_0) \left(\frac{R(s(\theta_0))}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$e^{ik\phi(0, \beta) + ik^{\frac{1}{3}}H(\beta)} = e^{ik\phi(0, \theta_0) + ik^{\frac{1}{3}}H(\theta_0)} e^{i\frac{m^3}{3} - e^{\frac{i\pi}{3}} \xi_1 m + k^{-\frac{1}{3}} \psi(m, k^{-\frac{1}{3}})}.$$

Nous notons que l'intégration en  $\beta$  permettra, pour tout  $\theta > \theta_0$ , d'assigner une valeur à  $F(\theta, k)$ . En effet, l'intégrale de  $-A$  à  $\theta$  contiendra alors  $\theta_0$ . Effectuant le changement de variable  $\beta \rightarrow m$ , on vérifie que les nouvelles bornes de l'intégrale sont  $k^{\frac{1}{3}}(\theta - \theta_0) \left(\frac{R(s(\theta_0))}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$  et  $k^{\frac{1}{3}}(-A - \theta_0) \left(\frac{R(s(\theta_0))}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ . Lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ , ces bornes respectives tendent vers  $\pm\infty$ , ce qui implique que le terme d'écart entre l'intégrale sur  $\mathbf{R}$  et l'intégrale étudiée est uniformément décroissant en  $k$ , de la forme  $e^{-ck}$  pour  $\theta - \theta_0$  borné. Après utilisation du changement de variable, des approximations  $l(\beta, k) = (1 + O(k^{-\frac{1}{3}}))l(\theta_0, k)$  pour les termes du symbole, on trouve

$$F(\theta, k) - O(e^{-ck}) = -k^{\frac{1}{3}} \frac{(1 + O(k^{-\frac{1}{3}}))}{e^{\frac{i\pi}{6}}} \left(\frac{2}{R(s(\theta_0))}\right)^{\frac{1}{3}} a_i(0, \theta_0) \exp\left(\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{du}{e^{\frac{i\pi}{6}} Z(u)}\right) \frac{\omega_1(e^{-\frac{2i\pi}{3}} \xi_1)}{\omega'_1(\xi_1)}.$$

Utilisant alors  $2\pi Ai(\omega e^{-\frac{i\pi}{3}}) = \frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{Ai'(-\omega)}$  et  $\xi_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} \omega$ , on en déduit

$$\frac{\omega_1(e^{-\frac{2i\pi}{3}}\xi_1)}{\omega'_1(\xi_1)} = \frac{1}{2\pi i}(Ai'(-\omega))^{-2}.$$

On a alors

$$F(\theta, k) = \left(\frac{kR(s(\theta_0))}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\pi}{3}} a_i(0, \theta_0) \exp\left(e^{-\frac{i\pi}{6}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{du}{Z(u)}\right) e^{ik\phi(0, \theta_0) + ik\frac{1}{3}H(\theta_0)} \frac{(1 + O(k^{-\frac{1}{3}}))}{2\pi(Ai'(-\omega))^{21}}.$$

On en déduit aisément  $f(\theta, k) = e^{-ik\frac{1}{3}H(\theta)} F(\theta, k)(1 + O(k^{-\frac{1}{3}}))$ . Enfin, on peut calculer la solution en tout point par la relation

$$(J \circ I)(f) = u_d(n, \theta, k).$$

On a ainsi démontré le

**Théorème 14.2** *La solution explicite, dans un voisinage de la zone d'ombre, définie pour  $\theta > \theta_0$  et  $0 \leq n \leq g(\theta)$ ,  $g$  strictement croissante, est donnée par*

$$u_d(n, \theta, k) = \frac{a_i(0, \theta_0, k) e^{ik\phi(0, \theta_0)} e^{\frac{i\pi}{3}}}{2\pi(Ai'(-\omega))^2} \int e^{ik[(\theta-\beta)\tau + \phi_0(n, \theta, \tau)] + ik\frac{1}{3}(H(\theta_0) - H(\beta))} \\ \times \left(\frac{kR(s(\theta_0))}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\int_{\theta_0}^{\beta} \frac{du}{e^{\frac{i\pi}{6}} Z(u)}} S(\theta, \beta, n, \tau, k) d\tau d\beta.$$

où  $S$  est donné dans la proposition 14.2. L'obtention de la solution de  $P$  se fait en multipliant par le facteur  $e^{ik(s-s(\theta_0))}$ . L'onde obtenue se propage à la vitesse 1 sur le bord.

On voit, dans l'expression de cette solution dans la zone d'ombre, que la courbe  $n = g(\theta)$  est l'expression en coordonnées  $(n, \theta)$  de la demi-droite issue du point  $M(s(\theta_0))$  dirigée par le vecteur  $\vec{t}(s(\theta_0)) = \nabla\phi(0, \theta_0)$ . En effet, les bicaractéristiques de l'opérateur des ondes classique sont des droites, et le changement de variable ne transforme pas ces objets géométriques.

Ensuite, on peut noter que  $\operatorname{Re}(-iH(\theta)) = (\operatorname{Re}ie^{\frac{2i\pi}{3}}\omega)\left(\frac{R(s(\theta))}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ . Comme  $\operatorname{Re}(ie^{\frac{2i\pi}{3}}) = -\operatorname{Re}e^{\frac{i\pi}{3}} = -\cos\frac{\pi}{6}$ , on peut vérifier que, pour  $\theta_0 + 2\delta_0 > \theta > \theta_0 + \delta_0$ , il existe une constante  $C(\delta_0)$ , que l'on peut prendre égale à

$$\delta_0 \min_{\theta \in [\theta_0 + \delta_0, \theta_0 + 2\delta_0]} \left(\frac{R(s(\theta))}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \omega \cos\frac{\pi}{6}$$

telle que, pour  $n > g(\theta) - c'\delta_0$ ,

$$|u_d(n, \theta, k)| \leq C e^{-k\frac{1}{3}C(\delta_0)}.$$

Ceci indique ainsi que, dans la région  $n > g(\theta)$ , l'onde calculée décroît plus vite que toute puissance inverse de  $k$ . Elle est donc  $C^\infty$  dans cette région. On démontre (voir [64] ou [55]) qu'il y a propagation des singularités analytiques.

Ceci généralise le résultat de Friedlander (Théorème 14.1) pour la propagation des singularités  $C^\infty$  pour les rayons *glancing* à une propagation analytique des singularités sur les rayons analytiques généralisés, qui sont l'union d'une bicaractéristique de l'opérateur des ondes dans le vide jusqu'au point  $M(s(\theta_0))$ , qui sont ensuite une courbe intégrale de l'opérateur des ondes réduit sur le bord (sur  $\mathcal{C}$ ) et enfin à nouveau une courbe bicaractéristique de l'opérateur des ondes dans le vide.

Le rayon généralisé de l'opérateur  $P - \partial_{t^2}^2$ ,  $P = \partial_{n^2}^2 + R(n, s, \partial_s)$  s'écrit

$$\gamma_- \cup \tilde{\gamma} \cup \tilde{\gamma}_+$$

où  $\gamma_-$  est une bicaractéristique de  $P - \partial_{t^2}^2$  dans  $T^*(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_t)$ ,  $\gamma_- \cap \tilde{\gamma} = \{\rho_0\} \subset \mathcal{G}$ ,  $\tilde{\gamma}$  est la bicaractéristique, dans  $T^*(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_t)$ , de l'opérateur  $R(0, s, \partial_s) - \partial_{t^2}^2$ , passant par  $\rho_0$ , et  $\gamma_+$  est la bicaractéristique, dans  $T^*(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_t)$ , de l'opérateur  $P - \partial_{t^2}^2$ , passant par le point  $\tilde{\gamma} \cap \gamma_-$ .

Il existe donc une infinité de bicaractéristiques généralisées passant par  $\rho_0$ . Notons enfin que nous avons utilisé constamment l'hypothèse  $R \neq 0$ , qui est exactement équivalent à la stricte convexité de  $\mathcal{C}$ . Les points de  $\mathcal{G}$  sont alors appelés points strictement diffractifs. Le théorème de propagation des singularités s'écrit, dans ce cas :

**Théorème 14.3** *Soit  $P$  un opérateur différentiel hyperbolique d'ordre 2. Soit  $\Omega$  un ouvert régulier. On suppose que la variété glancing de  $P$  par rapport à  $\Omega^c$ ,  $\mathcal{G}$ , ne comporte que des points strictement diffractifs, c'est-à-dire si  $\psi$  est une équation de  $\partial\Omega$  tel que  $\Omega^c = \{\psi > 0\}$ , alors*

$$\frac{\{\{\psi, p\}, p\}}{\{\psi, p\}, \psi} \Big|_{p=\psi=0} > 0$$

*Il y a propagation des singularités analytiques sur les bicaractéristiques généralisées. Le calcul ci-dessus prouve que l'opérateur de transfert est explicite dans le cas d'un opérateur différentiel d'ordre 2 n'admettant dans la variété Glancing que des points strictement diffractifs.*

## 14.5 Conclusion sur les rayons

Il y a trois types de bicaractéristiques généralisées de l'opérateur  $P_0 - \partial_{t^2}^2$  étudiées dans cet ouvrage :

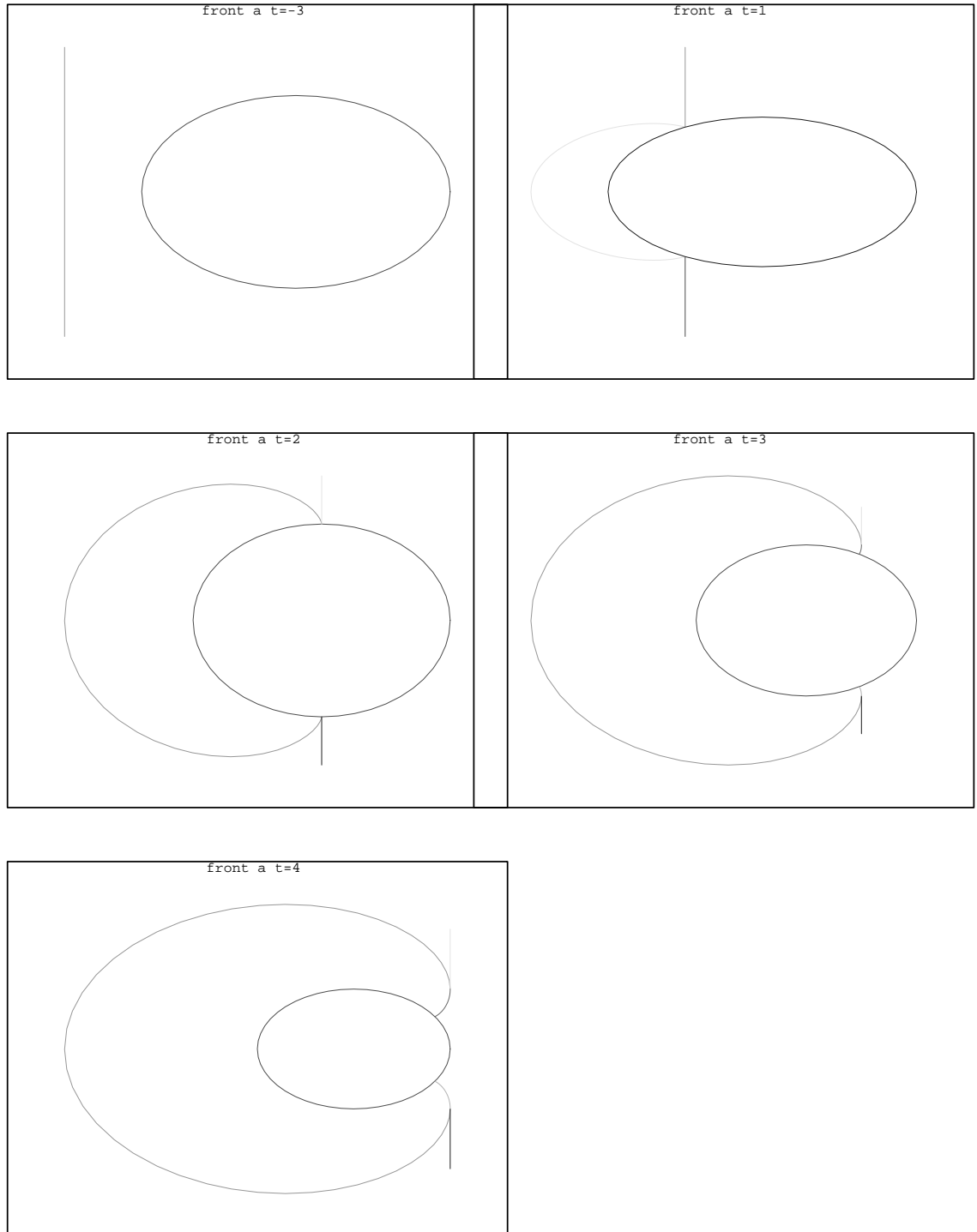
- les bicaractéristiques "elliptiques", qui coïncident avec les bicaractéristiques usuelles dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_t$  de  $P_0 - \partial_{t^2}^2$ . Le calcul de l'onde propagée fait l'objet du chapitre 3, la démonstration du théorème de propagation des singularités (Théorème 11.1) dans le chapitre 11.

- les bicaractéristiques hyperboliques, qui sont l'union d'un rayon qui intersecte le bord de manière transverse et du rayon réfléchi engendré par ce point d'intersection (on considère l'autre solution du problème  $\xi_n^2 = r(0, x', \xi')$ ). Le calcul du coefficient de réflexion est l'objet de la proposition 11.5, et le théorème de réflexion des singularités est le théorème 11.2.

- les bicaractéristiques diffractives, qui sont l'union d'une bicaractéristique rencontrant le bord en un point diffractif, d'un segment de longueur quelconque sur le bord en dimension 2, puis d'une bicaractéristique qui sort de manière diffractive (autrement dit tangente) du bord à l'extrémité du segment, ce qui a fait l'objet de ce chapitre. Nous avons pu voir que **toutes les bicaractéristiques généralisées portent de l'information**. C'est ce principe qui s'appelle la diffraction (ce qui se passe pour l'onde incidente en un point est répercuté sur une infinité de rayons pour l'onde diffractée). Les segments du bord s'appellent les rayons rampants.

Terminons par les figures représentant le front qui tiennent compte de la propagation usuelle, de la réflexion transverse, et de la diffraction :

Figure 12







# Bibliographie

- [1] R. Abgrall, Numerical Discretisation of First order Hamilton-Jacobi Equations on Triangular Meshes. *Comm. Pure and Appl. Maths* 49 (1996), no 12, 1339-1373
- [2] Airy, G. B., On the intensity of light in a neighborhood of a caustic *Trans. Cambr. Philos. Soc., Vol. 6, 1838, pp 379-403*
- [3] S. Alinhac et P. Gérard : Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser *InterEditions/ Editions du C.N.R.S. 1991*
- [4] V.M. Babic and N. S. Grigoreva : The analytic continuation of the resolvent of the exterior problem for the Laplace operator to second sheet *Functional Analysis i Prolophen* 8 1-74 (1974)
- [5] V. M. Babitch and V.S. Buldyrev : Short Wavelength Diffraction Theory. Asymptotic methods *Springer-Verlag, 1991*
- [6] M. Balabane, C. Bardos, O. Lafitte, G. Lebeau : Approximation de la solution de l'équation des ondes par la théorie géométrique de la diffraction *Rapport Science et Tec* 1705, Juillet 1989
- [7] R. Balian et C. Bloch : Distributions of Eigenfrequencies for the Wave Equation in a Finite Domain. Three Dimensionnal Problem with Smooth Boundary Surface. *Annals of Physics*, 160 (2) October 1970, 401-447 Eigenfrequency Density Oscillations. *Annals of Physics* 69 (1) January 1972 76-160
- [8] C. Bardos, J.C. Guillot and J. Ralston : La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application à la théorie de la diffusion *Comm. in Partial Diff. Eq.* 908-958 (1982)
- [9] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch : Scattering Frequencies and Gevrey 3 singularities *Invent, Math* 90 pp 77-114 (1987)
- [10] M. I. Belyshev : A problem of M. Kac concerning recovery of the shape of a domain from the spectrum of a Dirichlet problem. *J. Sov. Math.* 55 (3) pp 1663-1672 (1991)
- [11] J. D. Benamou, Direct Computation of Multi Valued Phase Space Solutions fo Hamilton-Jacobi Equations *Rapport Technique INRIA, 04/98*
- [12] J. D. Benamou, O. Lafitte, R. Sentis, I. Sollic, A geometrical optics based numerical method for high frequency electromagnetic fields computations near fold caustics I, II, *J. Comput. Appl. Math* 156 (2003) no 1 93-125
- [13] G. Benarous *in Proceedings des Journées E.D.P. de St Jean de Monts, 1997*
- [14] A. Bossavit : Electromagnétisme en vue de la modélisation *Mathématiques et Applications, Springer-Verlag 1994*
- [15] D. Bouche et F. Molinet : Méthodes asymptotiques en électromagnétisme *Mathématiques et applications, vol. 16, Springer 1996*
- [16] L. Boutet de Monvel : A course on Pseudo Differential Operators and their Applications *Duke University Mathematical Series II, 1976.*
- [17] L. Boutet de Monvel : Opérateurs Pseudodifférentiels Analytiques *Séminaire 'Opérateurs différentiels et pseudo-différentiels, Université de Grenoble, 1975-1976*

- [18] N. Burq : Décroissance locale de l'énergie *preprint 1140, CMAT, Ecole Polytechnique, URA 169 du C.N.R.S.*
- [19] P. Buser et P. Bérard : Transplantation, cocotte et flèche *Bloc Notes, Pour la Science 234, Avril 1997, p 72*
- [20] Caratheodory, L : Variationsrechnung un partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung, *Tabner, Berlin, 1935*
- [21] M. Cessenat : Mathematical methods in electromagnetism (linear theory and applications). *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences Vol. 41, World Scinetific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ,1996*
- [22] J. Chazarain : Propagation des singularités pour une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples et résolubilité locale *Ann, Inst. Fourier Grenoble 24 (1974), 203-223*
- [23] J. Chazarain et A. Piriou : Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires *Gauthier-Villars, Paris, 1981*
- [24] H.W. Chen : The Poisson formula revisited *Siam Rew. 40, 2, 353-355, 1998*
- [25] S.S. Chen : A simple intrinsic proof of the Gauss Bonnet formula for closed Riemannian manifolds *Ann. Math, 45 (1944) pp 747-752*
- [26] Y. Colin de Verdière : Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II *Comp. Math. 27, 159-184*
- [27] R. Courant, P. Friedrichs et Lewy : Uber die parteillen Differenzengleichungen der Physik *Math. Ann. 100, 1928, p 32*
- [28] R. Courant et P. D. Lax : The propagation of discontinuities in wave motion *Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 42 (1956), 872-876*
- [29] J.J. Duistermaat : Oscillatory integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities *C.P.A.M. (27) 207-281 (1974)*
- [30] Y. Dokshitzer, D.I. Dyakonov and S.I. Troyan, *Phys. Rep. 58 (1980) 269*
- [31] J. J. Duistermaat and L. Hörmander : Fourier Integral Operators II *Acta Math. 128 (1972) p 183-269*
- [32] J. J. Duistermaat and V. Guillemin : The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics *Invent. Math. 29 (1975), pp 39-79*
- [33] Yu.V. Egorov : On canonical transformations of pseudodifferential operators *Uspekhi Mat. Nauk 25 (1969), 235-236*
- [34] R.K. Ellis, *An introduction to the QCD Parton Model, FERMILAB-CONF-88/60-T, May 1988*
- [35] R.K. Ellis and W.J. Stirling, *QCD and Collider Physics, 1990-1991 CERN Academic Training Program.*
- [36] A. Erdelyi : Asymptotic Expansions *Dover Publ. Co., New York, 1956*
- [37] V. Filippov, Sur une asymptotique correcte pour la solution de la diffraction de la zone d'ombre (en russe) *Séminaire du LOMI, 1973, 34 pp 142-205*
- [38] F. G. Friedlander and J. B. Keller : Asymptotic expansions of solutions of  $(\Delta + k^2)u = 0$ . *Comm. Pure. Appl. Maths 8 (3) (1955) 387-394*
- [39] F.G. Friedlander : Sound Pulses *Cambridge University Press, New York 1958*
- [40] F.G. Friedlander : The wave equation on a curved space-time *Cambridge University Press, 1975*
- [41] F. G. Friedlander : The wave front set of the solution of a simple initial-boundary value problem with *glancing rays Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1976), 79-145*
- [42] A. Grigis et J. Sjostrand : Microlocal analysis for Differential Operators An introduction *London Mathematical Society, Lecture Note Series 196, Cambridge University Press 1994*

- [43] V. Guillemin and D. Schaeffer : Remarks on a paper of D. Ludwig *Bulletin of the A. M. S.* 79 (2) 1973, pp382-385
- [44] J. Hadamard : le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques *Hermann, Paris 1932*
- [45] L. Hörmander : The spectral function of an elliptic operator *Acta Math.* 121, (1968)193-218
- [46] L. Hörmander : Fourier integral operators I, *Acta mathematicae*, 127 (1971) 79-183
- [47] L. Hörmander : The analysis of linear partial differential operators I, II, III, IV *Grundlehren, Springer*, 256 (1983), 257 (1983), 274 (1985), 275 (1985).
- [48] M. Ikawa : On the distribution of poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles. *Hokkaido Math. Journal*, 12, pp 313-359 (1983)
- [49] M. Ikawa : Trapping obstacles with a sequence of poles converging to the real axis. *Osaka Math. Journal*, 22, pp 657-689 (1985)
- [50] J.L. Joly, G. Metivier, J. Rauch : Coherent and focusing multidimensional nonlinear geometric optics *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4eme série, tome 28, 1995, pp 51-113*
- [51] M. Kac : Can we hear the shape of a drum? *Am. Math. Mon.* 73, 4, II, pp 1-23, (1966)
- [52] J. Karamata : Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Satze welche die Laplacesche und Stieltjes Transformation betreffen *J. Reune. Ang. Math* 164 (1931) p 27-39
- [53] J.B. Keller et S. I. Rubinow : Asymptotic solution of eigenvalue problems. *Annals of Physics* 9, pp 24-75, (1960)
- [54] J.J. Kohn and L. Nirenberg : An algebra of Pseudodifferential Operators *Comm. Pure. Appl. Maths* 18 (1965) 269-305
- [55] O. Lafitte : The Kernel of the Neumann operator for a strictly diffractive analytic problem *Comm. Partial Diff. Eq., Vol. 20 (3/4) 1995, pp 419-483*
- [56] O. Lafitte : Sur la diffraction pour les équations de Maxwell *Thèse de doctorat de l'université de Paris-Sud, sous la direction de Gilles LEBEAU, 1992*
- [57] P.S. Laplace *Théorie analytique des probabilités, Livre I : Du calcul des fonctions génératrices, réédition de l'édition de 1820, Editions Jacquest Gabay, Paris, 1995*
- [58] P. D. Lax : Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems *Duke Math Journal* 24 (1957) 627-646
- [59] P. D. Lax and R. S. Phillips : Scattering theory *Academic Press, N. Y. 1967*
- [60] P. D. Lax and Phillips : Decaying modes of the wave equation *Comm. Pure and Appl. Maths* 22 737-787, 1969
- [61] P.D. Lax et Phillips : The asymptotic Distribution of Lattice points in Euclidean and Non Euclidean Spaces. *Journal of Funct. Analysis* 46, pp 280-350 (1982)
- [62] B. M. Levitan : On the asymptotic behavior of the spectral function of a self adjoint differential equation of the second order I, II *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math.* 16 (1952) 325-352, 19 (1955) 33-58
- [63] B. M. Levitan : Asymptotic behavior of the spectral function of a elliptic equation *Uspekhi Mat Nauk* 26 (6) (1971) 151-212
- [64] G. Lebeau : Régularité Gevrey 3 pour la diffraction *Comm. Part. Diff. Eq. Vol. 9 (15), 1984, 1437-1494*
- [65] G. Lebeau : Diffraction d'un paquet d'ondes dans un antichenal *Revue du CETHEDEC*, 17 (2) 1980 245-249
- [66] G. Lebeau Control for hyperbolic equations. Journées Equations qux Dérivées Partielles Saint Jean de Monts 1992 (XX, 24 p)
- [67] P. Legendre : Travaux

- [68] D. Ludwig : Uniform asymptotic expansion at a caustic, *Comm. Pure. Appl. Math.*, Vol 19, 1966, pp215-250
- [69] D. Ludwig : Uniform asymptotic expansions for wave propagation and diffraction problems *SIAM Review* 12 (3), 1970, 325-331
- [70] H. Mc Kean : Integrable systems and Algebraic Curves. *Lecture Notes in Maths* 755 83-200
- [71] H. McKean and I. Singer : Curvature and the eigenvalues of the Laplacian *J. Diff. Geom.* 1 (1967), 43-69
- [72] V.P. Maslov Perturbation Theory and Asymptotic Methods, Moskov. Gos. Univ. *Moscou*, 1965
- [73] H. Mc Kean : Selberg trace formula as applied to a Compact Riemann surface *Comm. Pure. Appl. Math.* 25, pp 225-246 (1972)
- [74] R.B. Melrose : Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems *Duke Math. Journal*, 42 (4) 1975, pp605-635.
- [75] R. B. Melrose : Polynomial bound on the number of scattering poles *J. Funct. Anal.* 53 pp 287-303, (1983)
- [76] R.B. Melrose and J. Sjostrand : Propagation of singularities for second order Dirichlet problems *C.P.A. M.* 31 (1978), 593-617
- [77] R.B. Melrose : Geometric Scattering Lectures *Stanford Letures Cambridge University Press, Cambridge*, 1995
- [78] S. Minakshishundaram and A. Pleijel : Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds *Canad. J. Math.* 1 (1949), pp 242-256
- [79] A. H. Nayfeh : Asymptotic solutions of linear equations (7.4 Wave equations) *John Wiley and sons*, 1973
- [80] L. Nirenberg and F. Trèves : Local solvability of linear partial differential equations II *Comm. Pure and Applied Maths* 1970 (23) pp 459-509
- [81] L. Nirenberg : Lectures on linear partial differential equations. *Regional Conference Series* 17, A.M.S., 1973
- [82] E. Pilon, *Quelques Eléments de Chromodynamique*, actes de l'Ecole d'automne de Physique des Particules de Gif 95 *L'Interaction Forte sous toutes ses Couleurs* ( cours en français ).
- [83] G. Polya and G. Szego : Problems and theorems in analysis I (translated from the German) *Classics in mathematics, Springer-Verlag, Berlin*, 1998.
- [84] J. Ralston : Solutions of the wave equation with localized energy *Comm. Pure Appl. Math.* 22, (1969) pp 807-824
- [85] J. Rauch : Lectures on Geometric Optics *IAS, Park City lectures, July 1995*, <http://www.math.lsa.umich.edu/rauch>
- [86] J. Sylvester and G. Uhlmann : The Dirichlet to Neumann map and Applications. in *Inverse Problems in Partial Differential Equations. Proc. Conf., Pt Summer Res. Conf. Math. Sci, Arcata, CA (USA) 1989, pp 101-139 (1990)*
- [87] B. Simon : Functional Integrals and Quantum Physics *Mathematics* 86, *Academic press* 1979
- [88] J. Sjostrand : Singularités analytiques microlocales *Asterisque* 95 *Masson, Paris*, 1982
- [89] J. Sjostrand and M. Zworski : Estimates of the number of scattering poles near the real axis for strictly convex obstacles *Ann. de l'Inst. Fourier* (43), 3 (1993), 769-790
- [90] I. Sollicec : Optique géométrique eulérienne et calcul d'énergie électromagnétique en présence de caustiques de type pli *Thèse de doctorat de l'université de Pierre et Marie Curie*, 2003

- [91] S. Stenberg : Lectures on Differential Geometry *Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964*
- [92] W.A. Strauss : Partial Differential Equations *John Wiley, New York, 1992*
- [93] M. Taylor : Pseudodifferential operators *Princeton University Press, 1981*
- [94] R. Thom : Stabilité structurelle et morphogénèse, *W.A. Benjamin Inc., Reading, Mass., 1972.*
- [95] F. Trèves : Basic linear partial differential equations *Academic Press Mathematics 62*
- [96] W. Wasow : Asymptotic expansions for ordinary differential equations *Krieger, New York, 1976*
- [97] G.N. Watson : A Treatise on the theory of Bessel functions. *Cambridge University Press, Cambridge, 1958*
- [98] H. Weyl : The classical groups *Princeton University Press, Princeton, 1946*
- [99] Zaiiev : Asymptotique exacte de la fonction de Green dans la zone d'ombre (en russe) *Dissertation pour le titre de docteur en physique-mathématique, Leningrad 1986*