

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Statique des Fluides</b>	<b>3</b>
1.1	Hydrostatique . . . . .	3
1.1.1	Les hypothèses de l'hydrostatique . . . . .	3
1.1.2	Principe fondamental de l'hydrostatique . . . . .	3
1.1.3	Poussée d'Archimède . . . . .	4
1.2	Aérostatique . . . . .	4
1.2.1	Les Hypothèses de l'aérostatique . . . . .	4
1.2.2	Disposition par couches isothermes . . . . .	4
1.2.3	Disposition par couches isentropes . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Dynamique des Fluides</b>	<b>6</b>
2.1	Notion de viscosité . . . . .	6
2.1.1	Expérience de couette . . . . .	6
2.1.2	Forces de viscosité . . . . .	7
2.1.3	Fluide parfait . . . . .	7
2.2	Description cinématique d'un écoulement . . . . .	7
2.2.1	Trajectoire . . . . .	7
2.2.2	Ligne de courant . . . . .	8
2.2.3	Ligne d'émission . . . . .	8
2.2.4	Cas du régime stationnaire . . . . .	8
2.3	Notion de débit . . . . .	8
2.3.1	Tube de courant . . . . .	8
2.3.2	Débit massique . . . . .	8
2.3.3	Débit volumique . . . . .	8
2.3.4	Relation débit volumique - débit massique . . . . .	8
2.4	Équation de conservation de la masse . . . . .	8
2.5	Théorème de Bernoulli . . . . .	9
2.5.1	Établissement du théorème . . . . .	9
2.5.2	Théorème de Bernoulli exprimé en charge massique . . . . .	9
2.5.3	Théorème de Bernoulli exprimé en pression . . . . .	9
2.5.4	Théorème de Bernoulli exprimé en hauteur . . . . .	10
2.5.5	Intégration d'autres pertes/gains de puissance . . . . .	10
2.5.6	Cas des fluides parfaits . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Perte de charge</b>	<b>11</b>
3.1	Introduction de la notion de charge . . . . .	11
3.2	Régimes d'écoulement des fluides réels . . . . .	12
3.2.1	Nombre de Reynolds . . . . .	12
3.2.2	Écoulement laminaire / turbulent . . . . .	12
3.3	Perte de charge régulière . . . . .	12
3.3.1	Coefficient de perte de charge en régime laminaire . . . . .	13
3.3.2	Coefficient de perte de charge en régime turbulent . . . . .	13
3.3.3	Expression de la perte de charge régulière en pression . . . . .	13
3.4	Perte de charge singulière . . . . .	14
3.5	Pompe . . . . .	14
3.6	Démarche de dimensionnement d'un réseau hydraulique . . . . .	15

# Statique des Fluides

## Sommaire

<b>1.1 Hydrostatique</b> . . . . .	<b>3</b>
1.1.1 Les hypothèses de l'hydrostatique . . . . .	3
1.1.2 Principe fondamental de l'hydrostatique . . . . .	3
1.1.3 Poussée d'Archimède . . . . .	4
<b>1.2 Aérostatique</b> . . . . .	<b>4</b>
1.2.1 Les Hypothèses de l'aérostatique . . . . .	4
1.2.2 Disposition par couches isothermes . . . . .	4
1.2.3 Disposition par couches isentropes . . . . .	5

La statique des fluides étudie les fluides au repos (ou où l'on peut négliger la vitesse de l'écoulement).  
Le fluide est considéré au repos s'il existe un référentiel où  $\vec{v}(M, t) = \vec{0}$  en tout point  $M$  et à tout instant  $t$ .

## 1.1 Hydrostatique

### 1.1.1 Les hypothèses de l'hydrostatique

L'hydrostatique étudie les fluides statiques incompressibles, c'est-à-dire que  $\rho = C^{te}$ , soumis au champ de la pesanteur. Dans cette section on étudiera par exemple l'évolution du champ de pression dans un lac, dans un réservoir.

Les grandeurs caractéristiques sont alors :

- $p(x, y, z)$  : pression en  $Pa$
- $T = C^{te}$  : Température en  $K$
- $\rho = C^{te}$  : masse volumique en  $kg/s^3$
- $\vec{v} = \vec{0}$  : vitesse en  $m/s$

### 1.1.2 Principe fondamental de l'hydrostatique

Pour établir le principe fondamental de la statique des fluides, on réalise un bilan des forces sur un petit volume de fluide (1.1).  
Deux forces sont en présence : la force de pesanteur et la

force de pression.

On commence par étudier la force de pression :  
Suivant l'axe  $x$  elle s'exprime :

$$dF_x = p(x) dydz - p(x + dx) dydz \quad (1.1)$$

$$= (p(x) - p(x + dx)) dydz \quad (1.2)$$

Or par définition du gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) \cdot \vec{x} = \frac{(p(x + dx) - p(x))}{dx} \quad (1.3)$$

$$p(x) - p(x + dx) = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) \cdot \vec{x} dx \quad (1.4)$$

En injectant 1.4 dans 1.2, on obtient :

$$dF_x = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) \cdot \vec{x} dV \quad (1.5)$$

Où  $dV = dx dy dz$

En réalisant, la même démarche sur les axes  $y$  et  $z$  on définit la force de pression s'appliquant sur un volume élémentaire  $dV$  :

$$d\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) dV \quad (1.6)$$

On notera que la force de pression  $d\vec{F}$  est perpendiculaire aux isobares et orientée dans le sens des pressions décroissantes.

Le volume élémentaire  $dV$  étudié est soumis aussi à la force de pesanteur qui s'exprime :

$$d\vec{P} = \rho dV \vec{g} \quad (1.7)$$

Ce volume élémentaire est donc à l'équilibre :

$$d\vec{P} + d\vec{F} = \vec{0} \quad (1.8)$$

En remplaçant  $d\vec{P}$  et  $d\vec{F}$  par leurs expressions (eq. 1.7 et eq. 1.6) on obtient :

$$\rho dV \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(p) dV = \vec{0} \quad (1.9)$$

Ce qui sous forme développée dans le repère cartésien défini dans la figure (1.1) donne :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{bmatrix}_{x,y,z} - \begin{bmatrix} \frac{dp}{dx} \\ \frac{dp}{dy} \\ \frac{dp}{dz} \end{bmatrix}_{x,y,z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{x,y,z} \quad (1.10)$$

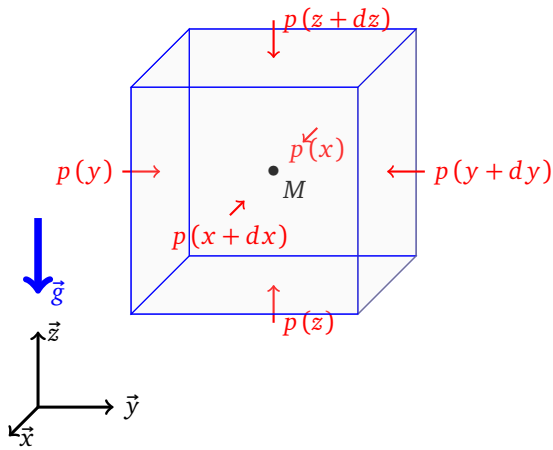


FIGURE 1.1 – Point matériel  $M$  soumis à une pression hydrostatique dans le champ de pesanteur

La composante suivant l'axe  $z$  donne donc :

$$\frac{dp}{dz} + \rho g = 0 \quad (1.11)$$

Qui par intégration permet d'établir le principe fondamental de la statique des fluides en hydrostatique :

$$p + \rho g z = C^{te} \quad (1.12)$$

Attention cette équation est écrite dans le cas d'un vecteur  $\vec{z}$  ascendant comme indiqué dans la figure 1.1. Et  $g$  est la constante de gravité.

**Principe fondamental de la statique des fluides**

$$p + \rho g z = C^{te} \quad (1.13)$$

N.B. : vecteur  $\vec{z}$  ascendant.

**1.1.3 Poussée d'Archimède**

Énoncé : Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps).

À partir de cet énoncé, on peut définir la poussée d'Archimède  $P_a$  :

**Poussée d'Archimède**

$$\vec{P}_a = -\rho V_{immerg} \vec{g} \quad (1.14)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du fluide immergeant,  $V_{immerg}$  le volume de immergé du corps (ou le volume de fluide déplacé), et  $\vec{g}$  le vecteur gravité.

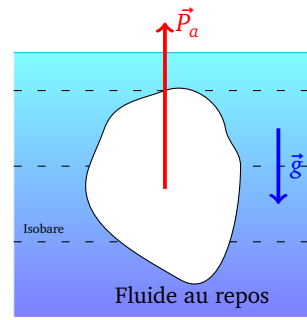


FIGURE 1.2 – Poussée d'Archimède : cas d'un solide totalement immergé

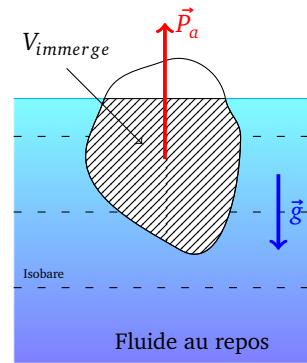


FIGURE 1.3 – Poussée d'Archimède : cas d'un solide partiellement immergé

La poussée d'Archimède  $P_a$  s'applique au centre de poussée qui est le centre de gravité du volume de fluide déplacé. Voir figure 1.3

On notera bien que dans le cas d'un solide partiellement immergé le volume  $V_{immerg}$  est différent du volume de la pièce. Voir figure 1.3

**1.2 Aérostatique**

**1.2.1 Les Hypothèses de l'aérostatique**

L'aérostatique étudie les fluides statiques compressibles soumis au champ de la pesanteur, c'est-à-dire que la masse volumique n'est plus constante, elle dépend alors des autres grandeurs caractéristiques  $\rho = f(p, T, \dots)$ . Dans cette section on étudiera par exemple l'évolution du champ dans l'atmosphère. Les modèles présentés ici sont des modèles très simplistes pouvant déboucher sur les modèles météorologiques.

Les grandeurs caractéristiques sont alors :

- $p(x, y, z)$  : pression en Pa
- $T(x, y, z)$  : Température en K
- $\rho = f(p, T, \dots)$  : masse volumique en  $kg/s^3$
- $\vec{v} = \vec{0}$  : vitesse en  $m/s$

**1.2.2 Disposition par couches isothermes**

Sous l'hypothèse de couche isotherme on utilise le modèle des gaz parfaits  $pV = nRT$  et sachant que  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V}$ .

Ce modèle permet alors d'exprimer la pression  $p$  en fonction de  $\rho$  :

$$p = \frac{\rho RT}{M} \quad (1.15)$$

Or d'après le principe fondamental de la statique des fluides :  $dp = -\rho g dz$ .

Par intégration on obtient alors la loi d'évolution de la pression avec l'altitude :

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} z} \quad (1.16)$$

Où  $p_0$  et  $\rho_0$  sont la pression et la masse volumique dans des conditions normales de température soit à  $T_0 = 273K$ .

### 1.2.3 Disposition par couches isentropes

Sous l'hypothèse de couche isentrope, on utilise le modèle des gaz parfaits de Laplace  $pV^\gamma = C^{te}$ . Par intégration du principe fondamental de la statique des fluides ( $dp = -\rho g dz$ ), on obtient :

$$p(z) = p_0 \left( 1 - z \frac{\rho_0 g}{p_0} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (1.17)$$

# Dynamique des Fluides

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Notion de viscosité . . . . .</b>	<b>6</b>
2.1.1	Expérience de couette . . . . .	6
2.1.2	Forces de viscosité . . . . .	7
2.1.3	Fluide parfait . . . . .	7
<b>2.2</b>	<b>Description cinématique d'un écoulement . . . . .</b>	<b>7</b>
2.2.1	Trajectoire . . . . .	7
2.2.2	Ligne de courant . . . . .	8
2.2.3	Ligne d'émission . . . . .	8
2.2.4	Cas du régime stationnaire . . . . .	8
<b>2.3</b>	<b>Notion de débit . . . . .</b>	<b>8</b>
2.3.1	Tube de courant . . . . .	8
2.3.2	Débit massique . . . . .	8
2.3.3	Débit volumique . . . . .	8
2.3.4	Relation débit volumique - débit massique . . . . .	8
<b>2.4</b>	<b>Équation de conservation de la masse . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>2.5</b>	<b>Théorème de Bernoulli . . . . .</b>	<b>9</b>
2.5.1	Établissement du théorème . . . . .	9
2.5.2	Théorème de Bernoulli exprimé en charge massique . . . . .	9
2.5.3	Théorème de Bernoulli exprimé en pression . . . . .	9
2.5.4	Théorème de Bernoulli exprimé en hauteur . . . . .	10
2.5.5	Intégration d'autres pertes/gains de puissance . . . . .	10
2.5.6	Cas des fluides parfaits . . . . .	10

## 2.1 Notion de viscosité

Dans un fluide réel en mouvement des forces de frottement apparaissent entre le fluide et la paroi ou entre les différentes couches du fluide.

Cette imperfection à la fluidité est appelée la viscosité, ces forces de frottement sont appelées forces de viscosité.

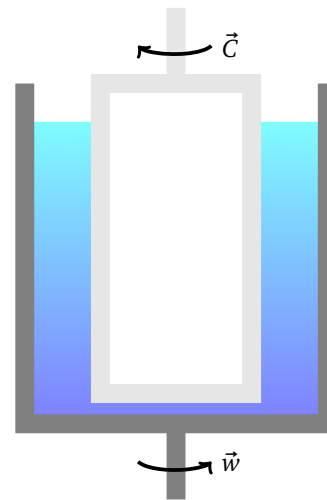


FIGURE 2.1 – Expérience de couette

### 2.1.1 Expérience de couette

Considérons un fluide enfermé entre deux cylindres, l'un mobile, l'autre fixé à un couple-mètre comme illustré en figure 2.2.

On constate que lorsque la cavité cylindrique extérieure est mise en rotation à la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ , sur le cylindre intérieur un couple résistant  $\vec{C}$  est mesuré.

#### Analyse du phénomène :

- L'observation d'un couple sur le cylindre intérieur ne peut pas être expliquée par les forces de pression. On est donc obligé d'admettre l'existence d'efforts tangentiels pour expliquer ce couple.
- On observe que les particules de fluide adhèrent aux parois. Il existe donc un gradient de vitesse au sein de l'écoulement.
- Pour les fluides simples, le couple  $\vec{C}$  augmente proportionnellement à  $\vec{\omega}$ . Les efforts tangentiels augmentent donc proportionnellement au gradient de vitesse.

**Interprétation :** L'expérience montre que, lors de l'écoulement d'un fluide, la pression ne suffit pas à expliquer les phénomènes observés. Il faut donc introduire des forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide. Ces forces, de type frottement, dûs aux interactions entre mo-

lécules du fluide, sont appelées **forces de viscosité**.

### 2.1.2 Forces de viscosité

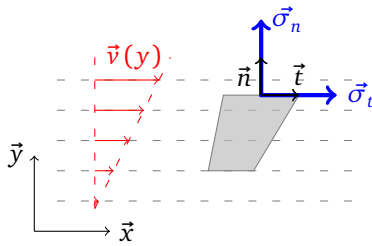


FIGURE 2.2 – Principe des forces de viscosité

Pour mettre en évidence ces forces de viscosité considérons un écoulement non homogène où la vitesse du fluide  $\vec{v}$  est portée par  $\vec{x}$  et fonction de  $\vec{y}$ , la vitesse est alors de la forme  $\vec{v}(\vec{y})$  comme indiqué sur la figure 2.2.

Observons maintenant un volume élémentaire de fluide dans cet écoulement.

La force qui s'applique sur la face supérieure de ce volume élémentaire vaut :

$$\frac{dF}{dS} = \sigma_n \vec{n} + \sigma_t \vec{t} \quad (2.1)$$

Où  $\sigma_n = -p$ .

La contrainte tangentielle  $\sigma_t$  apparait entre deux couches successives de fluide qui ont des vitesses différentes.

Ces contraintes tangentielles à l'écoulement entraînent la couche la plus lente et ralentissent la couche la plus rapide.

Par définition d'un fluide newtonien, les forces visqueuses sont proportionnelles à la différence de vitesse entre ces deux couches. Le gradient de vitesse exprime cette différence.

Pour un **fluide newtonien**, on peut alors écrire :

$$\sigma_t = \mu \frac{dv}{dn} \quad (2.2)$$

Où  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide et  $\frac{dv}{dn}$  est le gradient vitesse dans la direction normale à la surface du volume élémentaire.

**La viscosité dynamique  $\mu$**   
Elle s'exprime en  $Pa.s$

$$\sigma_t = \mu \frac{dv}{dn} \quad (2.3)$$

Il existe d'autres unités pour exprimer la viscosité dynamique :

- le poiseuille  $1Pl = 1Pa.s$
- la poise  $10Po = 1Pa.s$

Liquide (20 C)	$\mu[Pa.s]$
Eau	0.0010
Mercure	0.0015
Huile d'olive	0.840
Glycérine pure	1.5

De la même manière on définit la viscosité cinématique  $\nu$  qui s'exprime en  $m^2.s^{-1}$ . Elle peut aussi s'exprimer en stokes  $10^4St = 1m^2.s^{-1}$

**Viscosité cinématique  $\nu$**   
Elle s'exprime en  $m^2.s^{-1}$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.4)$$

### 2.1.3 Fluide parfait

**Fluide parfait**  
Un fluide est dit parfait si sa viscosité est nulle ( $\mu = 0$ )

En toute rigueur aucun fluide n'est parfait, cependant cette hypothèse simplificatrice est admissible si :

- La vitesse de l'écoulement est faible
- La viscosité du fluide est faible

## 2.2 Description cinématique d'un écoulement

En tout point d'un écoulement et à tout instant on peut définir la vitesse du fluide  $\vec{v}(x, y, z, t)$ . La donnée de l'ensemble de ces vecteurs vitesse est appelée champs de vitesse.

### 2.2.1 Trajectoire

**Définition** : une trajectoire constitue l'ensemble des positions occupées au cours du temps par un même élément du fluide. **Visualisation** : paillettes + photos avec un temps de pose long.

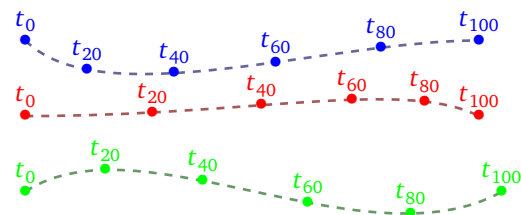


FIGURE 2.3 – Trajectoire

### 2.2.2 Ligne de courant

**Définition :** À un instant donné, la courbe tangente au vecteur vitesse forme la ligne de courant.  
 Les lignes de courant sont les enveloppes du champ de vitesse à l'instant t. **Visualisation :** photos + clichées avec un temps de pose court

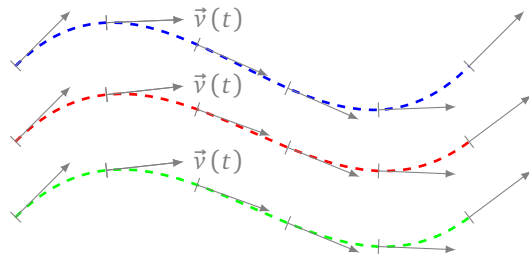


FIGURE 2.4 – Lignes de courant

### 2.2.3 Ligne d'émission

**Définition :** une ligne d'émission est le lieu à un instant t donné des particules fluides étant passées par un point M donné à un instant quelconque. **Visualisation :** source de colorant fixe - le filet fluide trace alors la ligne d'émission.

### 2.2.4 Cas du régime stationnaire

Il est à noter que dans le cas d'un écoulement en régime stationnaire ces 3 lignes se confondent.  
 Pour rappel un écoulement en régime stationnaire est un écoulement dont le champ de vitesse  $\vec{v}$  ne dépend pas du temps.

## 2.3 Notion de débit

### 2.3.1 Tube de courant

Si l'on réunit les lignes de courant traversant une surface délimitée par une courbe fermée (un cercle dans la figure 2.5), on obtient un tube de courant.

### 2.3.2 Débit massique

**Définition :** le débit massique  $Q_m$  d'un fluide est la masse de fluide qui traverse une section droite d'un tube de courant par unité de temps.

$$Q_m = \frac{dm}{dt} \quad (2.5)$$

### 2.3.3 Débit volumique

**Définition :** le débit volumique  $Q_v$  d'un fluide est le volume de fluide qui traverse une section droite d'un tube

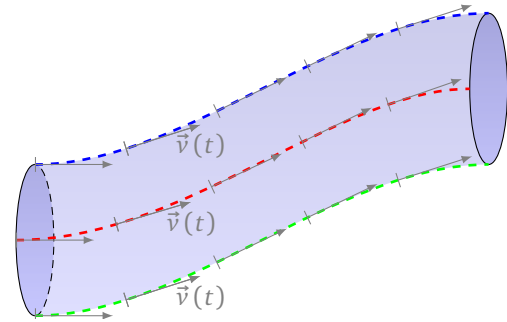


FIGURE 2.5 – Tube de courant

de courant par unité de temps.

$$Q_v = \frac{dV}{dt} \quad (2.6)$$

### 2.3.4 Relation débit volumique - débit massique

$$Q_m = \rho Q_v \quad (2.7)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du fluide.

## 2.4 Équation de conservation de la masse

L'expression de la conservation de la masse permet d'établir la loi de conservation du débit massique, et sous certaines hypothèses la loi de conservation du débit volumique. Pour établir ces relations, on observe une portion de fluide dans un tube de courant : enveloppe rouge  $\Sigma$  dans la figure 2.6. Cette portion de fluide se déplace dans l'écoulement, après une durée  $dt$  cette portion de fluide est repérable par l'enveloppe verte  $\Sigma'$  dans la figure 2.6. Par conservation de la masse, la masse du volume  $V_1$  est égale à la masse du volume  $V_2$ , soit :

$$V_1 \rho_1 = V_2 \rho_2 \quad (2.8)$$

$$M_1 M'_1 dS_1 \rho_1 = M_2 M'_2 dS_2 \rho_2 \quad (2.9)$$

Or les distances  $M_1 M'_1 = v_1 dt$  et  $M_2 M'_2 = v_2 dt$ , où  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont les vitesses d'écoulement dans la section  $dS_1$  et  $dS_2$ . l'équation 2.9 devient :

$$v_1 dS_1 \rho_1 dt = v_2 dS_2 \rho_2 dt \quad (2.10)$$

$$\frac{v_1 dS_1 \rho_1}{dt} = \frac{v_2 dS_2 \rho_2}{dt} \quad (2.11)$$

Ce qui d'après la définition du débit massique 2.5 permet d'écrire :

$$dQ_{m1} = dQ_{m2} \quad (2.12)$$

On en conclut alors que  $dQ_m = C^{te}$  dans un tube de courant. Dans le cas d'un **écoulement incompressible**

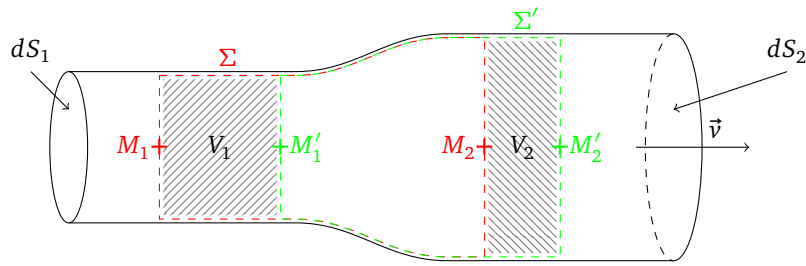


FIGURE 2.6 – Conservation de la masse

( $\rho = C^{te}$ ), il vient d'après l'équation 2.11 que le débit volumique est constant :  $dQ_v = C^{te}$ . Que l'on peut encore exprimer sous la forme :

$$Q_v = vS \quad (2.13)$$

Où  $v$  est la vitesse moyenne de l'écoulement dans la section  $S$ .

**Conservation du débit**

Le **débit massique** est toujours conservé ( $Q_m = C^{te}$ ) dans un tube de courant. Le **débit volumique** est conservé si l'écoulement est incompressible ( $\rho = C^{te}$ ), alors

$$Q_v = vS \quad (2.14)$$

Dans toute section  $S$  du tube de courant.

## 2.5 Théorème de Bernoulli

### 2.5.1 Établissement du théorème

Pour établir le théorème de Bernoulli, on réalise un bilan d'énergie entre un état 1 et un état 2 d'un volume de fluide que l'on suit dans un écoulement (voir figure 2.7). Le théorème de Bernoulli est établi dans l'hypothèse d'un **écoulement incompressible** ( $\rho = C^{te}$ ).

Les différentes variations d'énergie sont :

— Variation d'énergie potentielle :

$$\Delta E_p = mg(z_2 - z_1) \quad (2.15)$$

— Variation de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \quad (2.16)$$

— Travail des forces de pression :

$$W_{pression} = -V(p_2 - p_1) = -\frac{m}{\rho}(p_2 - p_1) \quad (2.17)$$

— Travail des forces de frottement :

$$-W_f \quad (2.18)$$

Le bilan d'énergie s'écrit alors :

$$\Delta E_p + \Delta E_c = \sum W_{ext} \quad (2.19)$$

$$mg(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = -\frac{m}{\rho}(p_2 - p_1) - W_f \quad (2.20)$$

Ce qui après réorganisation des termes devient :

$$\left(\frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}\right) - \left(\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho}\right) = -\frac{W_f}{m} \quad (2.21)$$

Le terme  $\frac{W_f}{m}$  de travail des forces de frottement par unité de masse peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{W_f}{m} = \frac{W_f}{t} \frac{t}{m} \quad (2.22)$$

Où  $\frac{W_f}{t}$  n'est autre que la puissance perdue par frottement  $P_f$  et  $\frac{t}{m}$  l'inverse du débit massique  $Q_m$ .

### 2.5.2 Théorème de Bernoulli exprimé en charge massique

L'équation 2.21 prend alors la forme suivante qui est le théorème de Bernoulli exprimé en charge massique :

**Th. de Bernoulli exprimé en charge massique**

$$\left(\frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}\right) - \left(\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho}\right) = -\frac{P_f}{Q_m} \quad (2.23)$$

### 2.5.3 Théorème de Bernoulli exprimé en pression

Le théorème de Bernoulli peut aussi s'exprimer en pression (l'équation 2.23 est multipliée par  $\rho$ ) :

**Th. de Bernoulli exprimé en pression**

$$\left(\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gz_2 + p_2\right) - \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gz_1 + p_1\right) = -\frac{P_f}{Q_v} \quad (2.24)$$



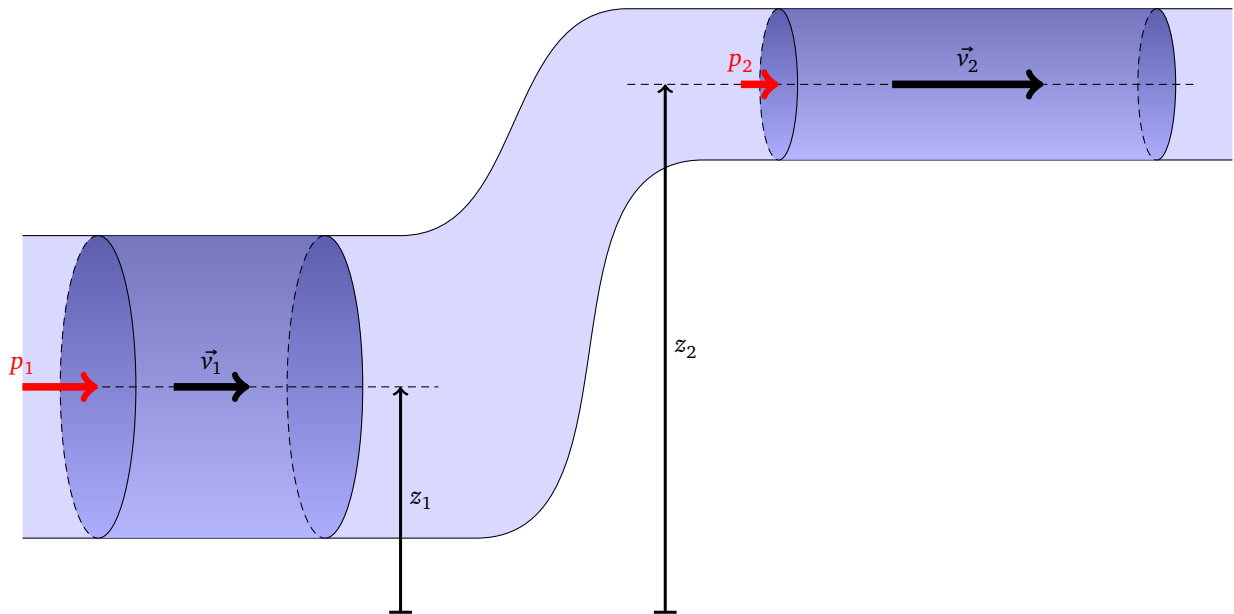


FIGURE 2.7 – Écriture de la conservation de l'énergie d'un système (ici le volume bleu foncé de fluide entre un état 1 et un état 2) permet d'établir le théorème de Bernoulli.

Il est à noter que dans cette formule le débit volumique intervient  $Q_v$  et non plus le débit massique  $Q_m$  (voir équation 2.7). Cette expression permet d'identifier la pression statique :  $p + \rho g z$  ; que l'on retrouve en statique des fluides et donc de définir la **pression dynamique** :  $\frac{\rho v^2}{2}$ .



**Pression dynamique**

$$p_{dynamique} = \frac{\rho v^2}{2} \quad (2.25)$$

**2.5.4 Théorème de Bernoulli exprimé en hauteur**

Il peut aussi s'exprimer en hauteur (l'équation 2.23 est divisée par  $g$ ) :



**Th. de Bernoulli exprimé en hauteur**

$$\left( \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) - \left( \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) = -\frac{P_f}{gQ_m} \quad (2.26)$$

**2.5.5 Intégration d'autres pertes/gains de puissance**

Il est à noter que le terme  $P_f$  de puissance perdue par frottement par le fluide peut être enrichi pour intégrer les gains ou pertes de puissance du fluide associés à la présence d'une pompe  $P_R$  (puissance reçue) ou d'une turbine  $P_P$  (puissance perdue) par exemple. L'équation 2.23

s'écrit alors :

$$\left( \frac{v_2^2}{2} + g z_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) - \left( \frac{v_1^2}{2} + g z_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) = \frac{-P_f + P_R - P_P}{Q_m} \quad (2.27)$$

**2.5.6 Cas des fluides parfaits**

Dans le cas des fluides parfaits la viscosité est nulle, il n'y a donc pas de perte de puissance du fluide due aux frottements internes, on a donc  $P_f = 0$ . Le théorème de Bernoulli pour un fluide parfait s'écrit alors (en pression), d'après l'équation 2.24.

$$\left( \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2 + p_2 \right) - \left( \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 + p_1 \right) = 0 \quad (2.28)$$



**Th. de Bernoulli pour un fluide parfait**

En tout point de l'écoulement :

$$p + \rho g z + \frac{\rho v^2}{2} = C^{te} \quad (2.29)$$

**Remarque** : si  $v = 0$  on retrouve le principe fondamental de la statique des fluides  $p + \rho g z = C^{te}$ .

# Perte de charge

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Introduction de la notion de charge</b>	<b>11</b>
<b>3.2</b>	<b>Régimes d'écoulement des fluides réels</b>	<b>12</b>
3.2.1	Nombre de Reynolds	12
3.2.2	Écoulement laminaire / turbulent	12
<b>3.3</b>	<b>Perte de charge régulière</b>	<b>12</b>
3.3.1	Coefficient de perte de charge en régime laminaire	13
3.3.2	Coefficient de perte de charge en régime turbulent	13
3.3.3	Expression de la perte de charge régulière en pression	13
<b>3.4</b>	<b>Perte de charge singulière</b>	<b>14</b>
<b>3.5</b>	<b>Pompe</b>	<b>14</b>
<b>3.6</b>	<b>Démarche de dimensionnement d'un réseau hydraulique</b>	<b>15</b>

## 3.1 Introduction de la notion de charge

La charge  $H_i$  en un point  $i$  d'un écoulement est définie à partir du théorème de Bernoulli exprimé en hauteur :

$$H_i = \left( \frac{v_i^2}{2g} + z_i + \frac{p_i}{\rho g} \right) \quad (3.1)$$

En pratique on étudie la variation de charge  $\Delta H$  entre deux points d'un écoulement d'un même fluide :

$$\left( \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) - \left( \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) = -\frac{P_f}{gQ_m} = -\Delta H \quad (3.2)$$

Cette notion de charge est largement utilisée dans l'étude des écoulements, elle fait l'objet de ce chapitre. Elle permet de quantifier l'énergie disponible dans un fluide et de voir son évolution comme présentée en figure 3.1.

Analyse qualitative du réseau hydraulique présenté en figure 3.1 :

- Section droite de grand diamètre :

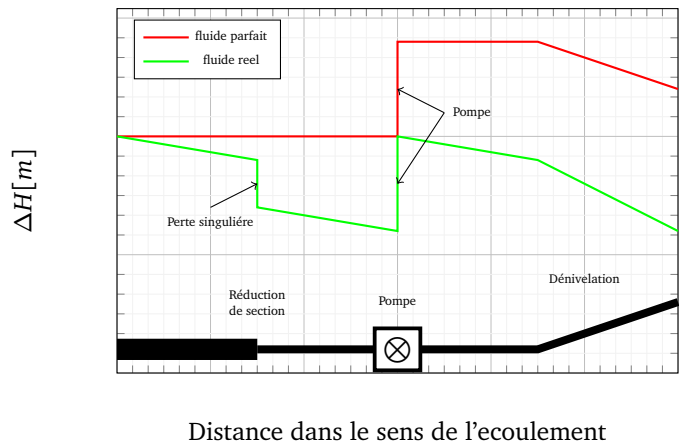


FIGURE 3.1 – Évolution de la charge dans un réseau hydraulique. Le réseau est constitué d'un rétrécissement de section, d'une pompe et d'une partie en dénivellation positive. La charge est tracée pour le cas d'un fluide parfait et pour le cas d'un fluide réel.

- **fluide parfait** : pas de frottement interne au fluide, donc pas de perte de charge.
- **fluide réel** : frottement interne au fluide et avec la paroi, il y a donc une perte d'énergie qui se traduit par une perte de charge dite régulière.
- Réduction de diamètre :
  - **fluide parfait** : pas de frottement interne au fluide, donc pas de perte de charge.
  - **fluide réel** : frottement interne au fluide et avec la paroi, il y a donc une perte d'énergie qui se traduit par une perte de charge dite singulière.
- Section droite de petit diamètre :
  - **fluide parfait** : pas de perte de charge.
  - **fluide réel** : perte de charge régulière.
- Pompe :
  - **fluide parfait** : Apport d'énergie au fluide, cet apport se traduit par un gain de charge.
  - **fluide réel** : Apport d'énergie au fluide, cet apport se traduit par un gain de charge.

- Section droite de petit diamètre :
  - **fluide parfait** : pas de perte de charge.
  - **fluide réel** : perte de charge régulière.
- Section droite de petit diamètre avec dénivelé positif :
  - **fluide parfait** : la perte de charge correspond à la variation d'énergie potentielle due au dénivelé.
  - **fluide réel** : à la perte de charge due au dénivelé vient s'ajouter la perte de charge régulière.

### Types de variation de charge

- Une pompe permet d'augmenter la charge disponible dans le fluide.
- Un dénivelé positif induit une perte de charge, un dénivelé négatif induit un gain de charge.
- Dans une canalisation, la charge diminue proportionnellement à la longueur de la canalisation dans le cas d'un **fluide réel**, elle reste constante dans le cas d'un **fluide parfait**.
- Lorsque le réseau présente une singularité (coude, changement de section, obstacle) la charge diminue au passage de cette singularité dans le cas d'un **fluide réel**, elle reste constante dans le cas d'un **fluide parfait**.

La suite du chapitre est consacrée au calcul de ces pertes de charge. En préalable du calcul des pertes de charge, il est nécessaire de caractériser le régime de l'écoulement.

## 3.2 Régimes d'écoulement des fluides réels

Pour étudier le régime d'un écoulement, on étudie le rapport (eq. 3.1) entre les forces d'inertie (qui ont tendance à rendre l'écoulement instable) et les forces de viscosité (qui ont tendance à stabiliser l'écoulement). Si les forces d'inertie sont prépondérantes, l'écoulement est turbulent, si les forces de viscosité sont prépondérantes l'écoulement est laminaire. (voir figure 3.2)

### 3.2.1 Nombre de Reynolds

Pour discriminer le régime laminaire du régime turbulent on utilise le nombre sans dimension de Reynolds ( $Re$ ). Osborne Reynolds était un physicien anglais (1842-1912).

$$Re = \frac{\text{Force Inertie}}{\text{Force De Viscosité}} \quad (3.3)$$

$$= \frac{\rho \langle V \rangle D}{\mu} \quad (3.4)$$

$$= \frac{\langle V \rangle D}{\nu} \quad (3.5)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique,  $\mu$  la viscosité dynamique,  $\nu$  la viscosité cinématique ( $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ),  $\langle V \rangle$  la vitesse moyenne de l'écoulement et  $D$  la longueur caractéristique de la section de l'écoulement (par exemple le diamètre de la canalisation).

### Nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\rho \langle V \rangle D}{\mu} \quad (3.6)$$

avec :

$\rho$  : masse volumique

$\mu$  : viscosité dynamique

$\langle V \rangle$  : vitesse moyenne de l'écoulement

$D$  : longueur caractéristique de la section de l'écoulement (par exemple le diamètre de la canalisation).

Remarque : le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension.

### 3.2.2 Écoulement laminaire / turbulent

#### Type de régime en fonction de $Re$

Le calcul du nombre de Reynolds d'un écoulement permet d'identifier le régime de l'écoulement.

On distingue 3 régimes (figure 3.2) :

- le régime laminaire :  $Re < 2000$
- le régime transitoire :  $2000 < Re < 2500$
- le régime turbulent :  $2500 < Re$ .

**Dans le cas d'un régime laminaire**, les couches de fluides restent bien parallèles les unes aux autres. Dans un écoulement entre deux plans statiques le profil de vitesse est de forme parabolique (figure 3.3), la vitesse est nulle au contact des parois, elle est maximale au centre de l'écoulement.

**Dans le cas d'un écoulement turbulent**, les couches de fluide se mélangent. Dans un écoulement entre deux plans statiques le profil de vitesse est constant dans la partie centrale de l'écoulement (figure 3.4), la vitesse devient tout de même nulle au contact des parois, mais cette zone est appelée **couche limite** (figure 3.4).

**Le régime transitoire** est comme son nom l'indique l'état transitoire entre le régime laminaire et turbulent. Les couches de fluide commencent à devenir instables. (voir figure 3.2)

## 3.3 Perte de charge régulière

La perte de charge régulière dans une canalisation de diamètre  $D$  et de longueur  $L$  s'exprime :

$$\Delta H = \lambda \frac{L}{D} \frac{\langle V \rangle^2}{2g} \quad (3.7)$$

Où  $\langle V \rangle$  est la vitesse moyenne de l'écoulement,  $g$  la gravité et  $\lambda$  le coefficient de perte de charge. Le coefficient de perte de charge  $\lambda$  est une fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité  $\varepsilon$ .

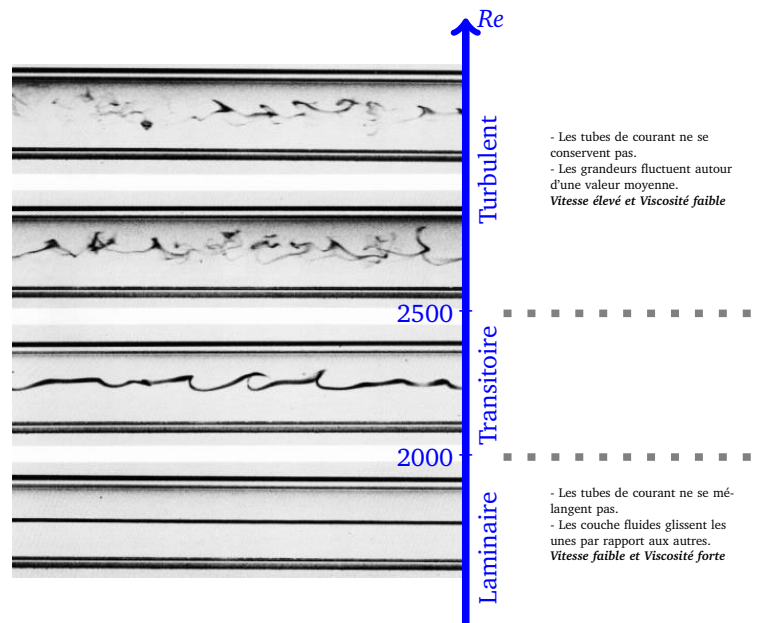
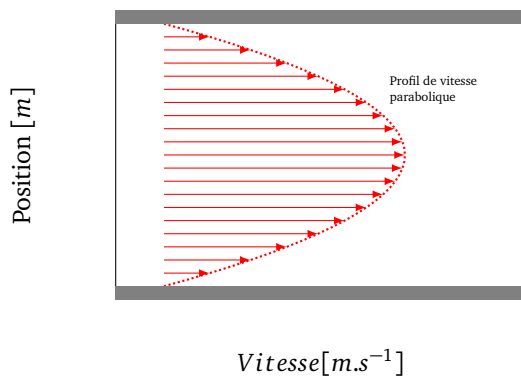
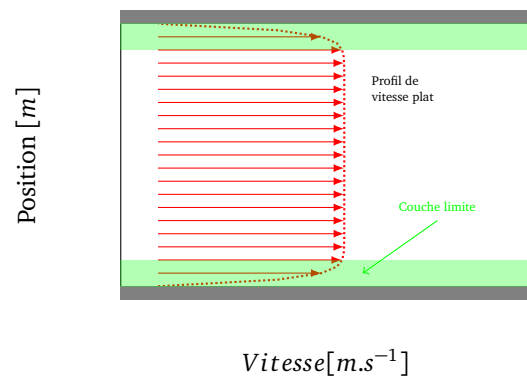


FIGURE 3.2 – Type d'écoulement - en fonction du nombre de Reynolds



Vitesse[m.s<sup>-1</sup>]



Vitesse[m.s<sup>-1</sup>]

FIGURE 3.3 – Forme du profil de vitesse d'un écoulement laminaire entre deux plans pour un fluide réel

FIGURE 3.4 – Forme du profil de vitesse d'un écoulement turbulent entre deux plans pour un fluide réel

### 3.3.1 Coefficient de perte de charge en régime laminaire

Dans le cas d'un régime laminaire ( $Re < 200$ ) le coefficient de perte de charge suit la loi de Pouseuille :

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (3.8)$$

### 3.3.2 Coefficient de perte de charge en régime turbulent

Dans le cas d'un régime turbulent, le coefficient de perte de charge est donné par des expressions analytiques déterminées expérimentalement.

Pour un écoulement en conduite, lisse ( $\varepsilon = 0$ ) et  $2000 < Re < 10^5$ ,  $\lambda$  suit la formule de Blasius :

$$\lambda = 0.316Re^{-0.25} \quad (3.9)$$

Pour un écoulement en conduite rugueuse de rugosité  $\varepsilon$

et  $Re < 10^5$ ,  $\lambda$  suit la formule de Nikuradse :

$$\frac{1}{\lambda} = 2 \log \left( \frac{D}{\varepsilon} \right) + 1.14 \quad (3.10)$$

Si  $Re > 10^5$  alors  $\lambda$  suit la formule de Moody :

$$\lambda = 0.0055 + 0.15 \left( \frac{\varepsilon}{D} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.11)$$

Il est aussi possible de se référer au diagramme de Moody (figure 3.5) pour calculer  $\lambda$  en fonction de la rugosité et de  $Re$ .

### 3.3.3 Expression de la perte de charge régulière en pression

En utilisant le théorème de Bernoulli en pression il est possible d'exprimer la perte de charge régulière en pression :

$$\Delta p = \omega L = \rho g \Delta H \quad (3.12)$$

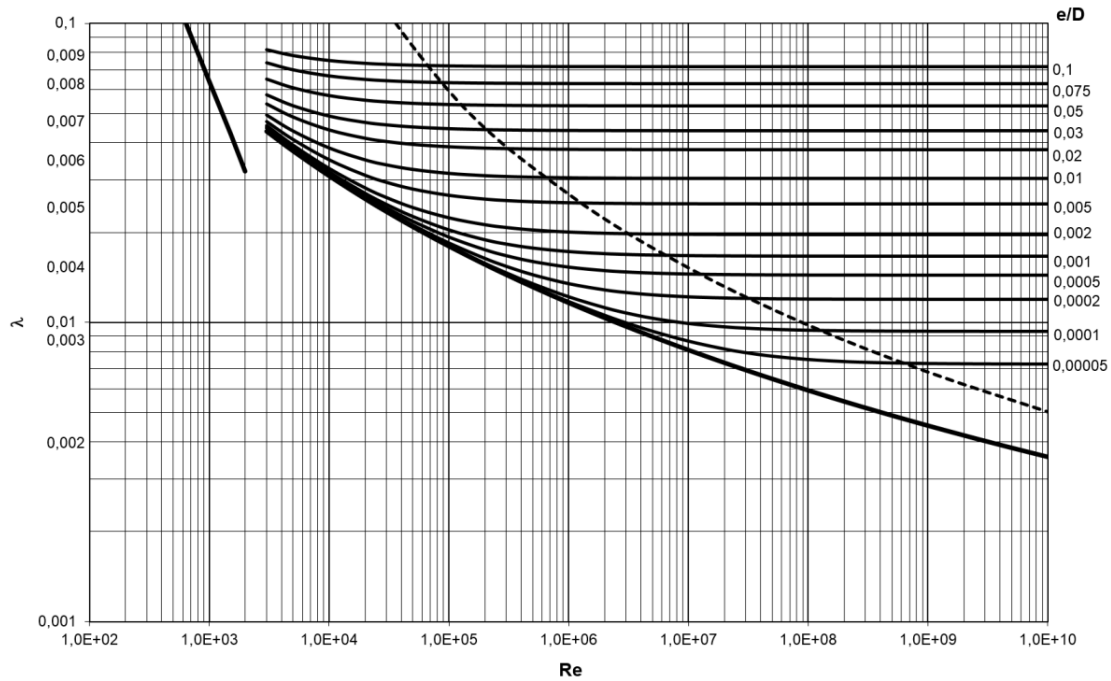


FIGURE 3.5 – calcul de  $\lambda$  - Diagramme de Moody ( $e$  est la rugosité) (lien vers la source)

Où  $\omega$  est le coefficient de perte de charge linéique exprimé en pression.

**Perte de charge régulière**

$$\Delta H = \lambda (Re, \varepsilon) \frac{L}{D} \frac{\langle V \rangle^2}{2g} \quad (3.13)$$

avec

- $Re < 2000$  (laminaire)

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (3.14)$$

- Conduite lisse et  $2000 < Re < 10^5$

$$\lambda = 0.316 Re^{-0.25} \quad (3.15)$$

- Conduite rugueuse et nombre de Reynolds plus élevé : voir diagramme de Moody (figure 3.5)

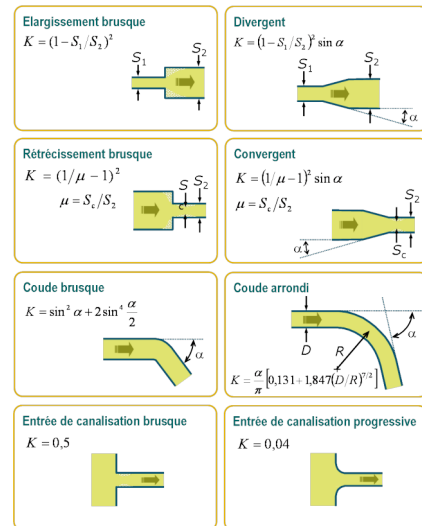


FIGURE 3.6 – Abaques pour le calcul du coefficient de perte de charge singulière  $k$  (lien vers la source)

### 3.4 Perte de charge singulière

Au passage d'une singularité dans le réseau (changement de section, coude, vanne entre-ouverte, sonde ...) la charge du fluide diminue. Cette perte de charge est dite singulière, elle s'exprime en hauteur :

$$\Delta H = k \frac{\langle V \rangle^2}{2g} \quad (3.16)$$

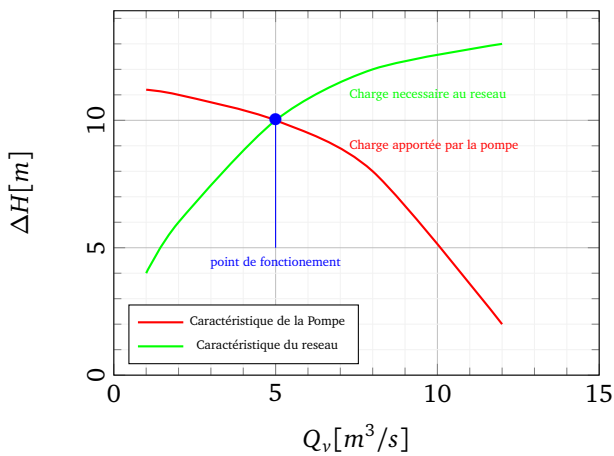
Ou encore avec la formulation en pression :

$$\Delta p = k \rho \frac{\langle V \rangle^2}{2} \quad (3.17)$$

Où  $k$  est le coefficient de perte de charge singulière, il se détermine sur la base d'abaques (voir figure 3.6).

### 3.5 Pompe

Une pompe apporte de la charge au réseau  $\Delta H_m$ , qui peut aussi s'exprimer en pression  $\Delta p_{pompe} = \rho g \Delta H$ . La plupart des pompes sont capables de produire une charge qui est décroissante avec le débit fourni. La courbe de la charge disponible en fonction du débit est appelée courbe caractéristique de la pompe (figure 3.7).



l'exemple donné en figure 3.7, le point de fonctionnement est obtenu pour un débit de  $5\text{ m}^3/\text{s}$  et une perte de charge  $\Delta H = 10\text{ m}$ . Dans ce réseau l'eau circulera donc avec un débit de  $5\text{ m}^3/\text{s}$ .

FIGURE 3.7 – Courbe caractéristique d'une pompe et d'un réseau en fonction du débit. Le point de fonction se trouve à l'intersection des deux courbes.

### 3.6 Démarche de dimensionnement d'un réseau hydraulique

Pour dimensionner un réseau hydraulique il faut d'abord évaluer la charge nécessaire à son fonctionnement, en suivant la méthode suivante :

#### Démarche du calcul de la charge nécessaire au fonctionnement d'un réseau

Pour un débit  $Q_v$  donné :

1. Identifier les différentes sections droites et les singularités du réseau
2. Pour chaque section droite :
  - (a) Calculer la vitesse moyenne  $\langle V \rangle$  dans la section
  - (b) Calculer le nombre de Reynolds
  - (c) Calculer la perte de charge régulière induite par cette section
3. Pour chaque singularité :
  - (a) Calculer la vitesse moyenne  $\langle V \rangle$  dans la singularité
  - (b) Calculer le nombre de Reynolds
  - (c) Calculer la perte de charge régulière induite par cette singularité
4. Sommer toutes les pertes de charge identifiées. On obtient ainsi la charge  $\Delta H$  nécessaire au fonctionnement du réseau pour un débit  $Q_v$ .

On répète ensuite cette démarche  $n$  fois pour différents débits  $Q_v$ . Cela permet d'établir la courbe caractéristique du réseau (figure 3.7, courbe verte). Une fois la courbe caractéristique du réseau connue, on superpose sur le même graphe la courbe caractéristique de la pompe (figure 3.7, courbe rouge).

À l'intersection de ces deux courbes, on trouve le point de fonctionnement du réseau (figure 3.7, point bleu). Dans