

Mécanique des Milieux Continus

Polytech Orléans - 1^{ère} année d'école (3A - ICM) - 2017-2018

Attention, ces notes de cours sont en perpétuelles évolutions et ne sont probablement pas exemptes de coquilles orthographiques, mathématiques ou physiques. Si un passage vous semble peu cohérent ou pour le moins inexact, voire même faux, n'hésitez pas à m'en faire part en m'envoyant un mail à : eric.blond@univ-orleans.fr. Merci pour votre contribution à l'amélioration de ce document.

Plan du cours

1. Introduction
2. Représentation d'un milieu continu
 - 2.1. Notion d'homogénéité et d'isotropie
 - 2.2. Notion de Volume Élémentaire Représentatif et de continuité
 - 2.2.1. Continuité
 - 2.2.2. Volume Élémentaire Représentatif
 - 2.3. Cinématique d'un milieu continu
 - 2.3.1. Description Lagrangienne
 - 2.3.2. Description Eulérienne
 - 2.4. Problème dit de « fermeture » : Loi de Comportement
3. Déformation(s) d'un milieu continu
 - 3.1. Application linéaire tangente ou gradient de la transformation
 - 3.1.1. Variation de volume, de surface
 - 3.2. Déformation(s)
 - 3.2.1. Tenseur des dilatations de Cauchy Green
 - 3.2.1.1. Interprétation des composantes de \mathbb{C}
 - 3.2.1.2. Propriétés de \mathbb{C}
 - 3.2.2. Tenseur des déformations de Green-Lagrange
 - 3.2.3. Tenseur des déformations d'Euler-Almansi
 - 3.2.4. Cas des Petites Déformations (ou Petites Perturbations)
 - 3.2.4.1. Validité de l'hypothèse des Petites Déformations
 - 3.2.4.2. Variation de volume
 - 3.2.4.3. Partition du tenseur des petites déformations
 - 3.2.5. Mesure des déformations
 - 3.2.5.1. Lien entre déformation uni-axiale et tenseur des déformations

- 3.3. Taux de Déformation (\mathbb{D} – Euler)
- 4. Contrainte(s) au sein d'un milieu continu
 - 4.1. Vecteur contrainte
 - 4.2. Composantes du vecteur contrainte
 - 4.3. Tenseur des contraintes
 - 4.4. Champs de contrainte admissible
 - 4.4.1. Conservation de la quantité de mouvement
 - 4.4.2. Conservation du moment cinétique
 - 4.4.3. Champ de contrainte statiquement admissible
 - 4.5. Directions principales des contraintes & contraintes principales
 - 4.6. Partition du tenseur des contraintes
- 5. Relation contrainte / déformation : loi de comportement (i.e. loi d'état)
 - 5.1. Notion de comportement mécanique
 - 5.2. Elasticité linéaire isotrope
 - 5.3. Compressibilité, partition des déformations et des contraintes
- 6. Résolution d'un problème de MMC
 - 6.1. Conditions aux bords
 - 6.1.1. Cas général
 - 6.1.2. Cas de la Mécanique des Milieux Continus
 - 6.1.3. Notion de problème « bien posé »
 - 6.2. Formulation en déplacement
 - 6.3. Formulation en contrainte
 - 6.3.1. Compatibilité des déformations
 - 6.3.2. Résolution
 - 6.4. Approches énergétiques
 - 6.4.1. Energie potentielle
 - 6.4.2. Energie complémentaire
 - 6.4.3. Erreur en relation de comportement
- 7. Caractérisation d'un état de contrainte
 - 7.1. Invariants d'un tenseur d'ordre 2
 - 7.2. Contrainte(s) équivalente(s)
 - 7.2.1. Rankine (1858)
 - 7.2.2. Tresca
 - 7.2.3. Von Mises (1913)

- 7.3. Critère de tenue mécanique
 - 7.3.1. Critère de rupture de Rankine
 - 7.3.2. Critère de plasticité de Tresca
 - 7.3.3. Critère de plasticité de Von Mises
 - 7.3.4. Comparaison des critères
 - 7.3.5. Remarque générale
- 8. Cercles de Mohr (1882)
 - 8.1. Critères dans le diagramme de Mohr
- 9. Initiation à la thermomécanique
 - 9.1. Partition de la déformation
 - 9.2. Dilatation thermique
 - 9.3. Loi de comportement

1. Introduction

La mécanique des milieux continus s'intéresse au comportement de la matière à l'échelle « macroscopique », c'est-à-dire, en première approximation, à l'échelle de l'œil. Il ne s'agit pas ici d'expliquer l'origine physique de la déformation (d'un solide ou d'un fluide) ou bien de la rupture (d'un solide), mais de prévoir la réponse d'une pièce mécanique, d'un gaz, d'un liquide ou encore d'une structure à une sollicitation thermomécanique connue. La mécanique des milieux continus est donc une science de la modélisation et de la prévision.

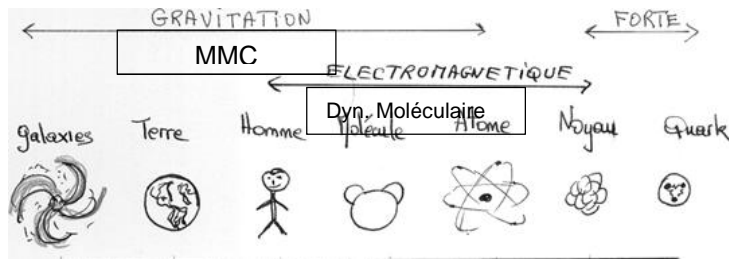


Figure 1 : les différentes forces d'interactions et les échelles associées.

Une autre définition de l'échelle macroscopique, plus rigoureuse, est possible en regardant les échelles d'influences des différents types d'interactions au sein de la matière. L'échelle macroscopique, celle de la mécanique (tant générale que des milieux continus, la Résistance des Matériaux, ...), correspond à l'échelle pour laquelle les liaisons faibles, fortes, covalentes, de Van der Waals (i.e. échelle atomique et liaisons « chimiques ») sont négligeable devant les interactions gravitationnelles. Les interactions atomiques sont des interactions à courtes distances, quelques centaines de picomètres, soit 10^{-10} m. Finalement, les interactions fondamentales sont négligeables devant les interactions gravitationnelles pour des échelles supérieures au nanomètre, soit 10^{-9} mètres. La MMC est donc « valable » à des échelles très faibles. On remarquera utilement que les interactions électromagnétiques ont une plus longue distance de portée que les interactions atomiques et une plus forte amplitude, mais de par l'électroneutralité globale et locale de la matière elles sont le plus souvent prises en compte de façon implicite comme participant à la cohésion du milieu continu (notamment lorsqu'il est solide) sans être explicitement formulées. Dans les cas d'un champ magnétique fort se superposant aux interactions magnétiques intrinsèques à la matière, l'ajout de la notion de « tenseur de Maxwell » induisant une orientation privilégiée des forces de cohésion permet de quantifier explicitement les effets induits. Ce raffinement sera exclu de ce cours qui, de fait, ne considérera pas l'existence de force volumique autre que la gravitation. Cette hypothèse revient à négliger l'influence du champ magnétique terrestre, ce qui est totalement raisonnable à l'échelle du micron (10^{-6}), et donc encore plus à l'échelle usuelle du mécanicien : le millimètre.

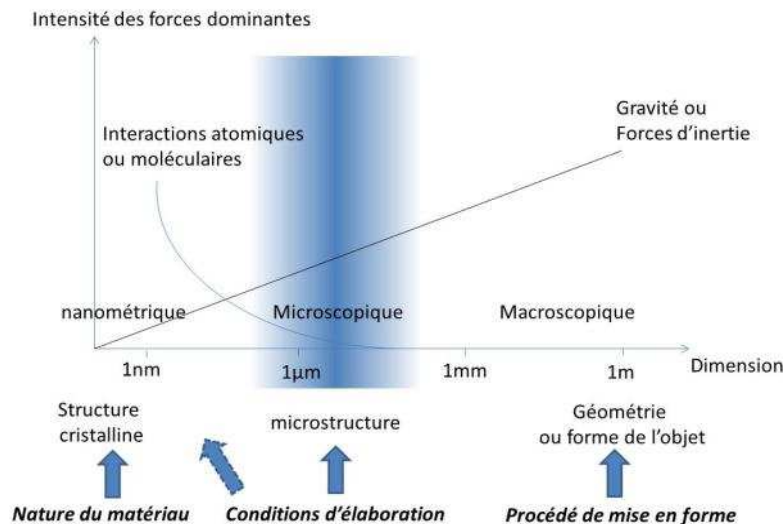


Figure 2 : Les échelles d'influences (interaction magnétique rangée dans le moléculaire) d'après [Geffroy 2014]

L'histoire de la MMC remonte conceptuellement au démon de Pierre-Simon Laplace (1749–1827) qui serait capable de tout déterminer en connaissant les lois intimes de la matière et la position de tous les points de l'espace à un instant donné... Contemporain d'un certain Thomas Young (13 juin 1773-10 mai 1829) il est difficile de savoir qui des deux à réellement initié ces réflexions, d'autant que de nombreuses polémiques de l'époque font état d'une appropriation par Laplace d'idées de ses jeunes collègues (prouvé a posteriori sur certaines...). On citera également Claude Navier (1785–1836) et Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) pour leur usage des notions d'équilibre et la définition des contraintes. Mais c'est à l'anglais Georges Green (1793–1841) que l'on doit l'essentiel de la philosophie de la MMC contemporaine : une « boîte noire » qui anticipe la réponse à une sollicitation sans se soucier de l'organisation intime de la matière (il tue ici le démon de Laplace qui reconstruit tout en partant des équations fondamentales...). Ces 20 dernières années, les théories de l'homogénéisation et la course vers les échelles inférieures constituent in fine un retour au démon de Laplace.

Dans ce cours, nous suivrons la logique de Green, mais en s'offrant le luxe d'une illustration par la physique à l'échelle des polycristaux pour mieux comprendre et appréhender le sens physique des notions et des équations rencontrées. Les exemples traités et les réflexions menées se situeront essentiellement à l'échelle de la mécanique « usuelle », c'est-à-dire entre le millimètre et le mètre.

2. Représentation d'un milieu continu

Un milieu réel, qu'il soit solide (acier, bois, béton,...) ou fluide (c.-à-d. gaz / liquide), peut présenter des propriétés physiques (masse volumique, dilatation, chaleur spécifique...) qui ne soient pas identiques en chaque point du volume considéré. La première étape de modélisation du milieu étudié est donc de qualifier/quantifier cette évolution spatiale des propriétés du domaine étudié, c'est l'étape dite de représentation. C'est à ce niveau qu'interviendront les notions d'homogénéité, d'isotropie et de continuité.

La seconde étape sera celle du choix d'une cinématique pour le milieu étudié, c'est-à-dire le choix d'un type de description des mouvements possibles des points du milieu les uns par rapport aux autres. On parlera ici de description Lagrangienne ou Eulérienne pour ce qui sera du formalisme mathématique

(et du choix des référentiels) et des hypothèses de Cauchy, Saint Venant et consort quant aux mouvements acceptables (mobilité relative des points du milieu).

2.1. Notion d'homogénéité et d'isotropie

Homogène : viens de « homo » (grec : semblable / pareil) et « gène » (grec : naissance / origine → propriétés). Un milieu « homogène » est un milieu qui présente les mêmes propriétés physiques en tout point (masse volumique, module d'Young, etc...). Exemple : l'eau, le beurre, ... contre-exemple : l'os, le bois, le béton (à quelle échelle ?)

Isotrope : viens de « iso » (grec : égale/même) et « trope » (grec : direction). Un milieu « isotrope » est un milieu qui présente les mêmes propriétés dans toutes les directions. Exemple : l'eau, le beurre... Contre-exemples : le bois, le métal des cannettes de coca, ...

Ces définitions sont à connaître par cœur !

Selon l'échelle considérée pour la modélisation, un même matériau pourra être modélisé par un milieu homogène ou hétérogène (grec hétéro : autre). De même, un monocristal sera le plus souvent anisotrope, mais un polycristal, s'il y a suffisamment de cristaux disposés de façon aléatoire, pourra être considéré isotrope...

On comprend que la notion d'échelle d'observation, ou encore d'échelle de modélisation est fondamentale. Le choix de cette échelle est dicté par l'objectif de la modélisation : prévision de tenue mécanique d'une pièce centimétrique, d'un pont, d'une patte de composant électronique ... Selon l'objectif visé, l'échelle doit être adaptée !

2.2. Notion de Volume Élémentaire Représentatif et de continuité

2.2.1. Continuité

Pour un milieu quel qu'il soit il est possible de décrire l'évolution spatiale de chacune de ses propriétés physiques par une fonction telle que :

$$P_i(M) = g_i(x_M, y_M, z_M)$$

Un milieu sera continu au sens de la modélisation si et seulement si la variation spatiale de l'ensemble de ses propriétés physiques peut être modélisé par des fonctions g_i qui soient :

- des bijections différentiables, dont la réciproque est également différentiable, on parle alors de difféomorphisme.
- continus, continûment différentiable et dont les dérivées sont elles-mêmes continus. On parle alors de fonction C^1

Ainsi, le milieu est considéré comme continu si, à l'échelle considérée, les fonctions g_i sont des C^1 -difféomorphisme. Le respect de ces propriétés garanti la validité du recours au calcul différentiel et intégral qui nous sera bien utile, tant en analytique qu'en numérique.

Le(s) bord(s) d'un milieu continu constituera toujours l'unique discontinuité acceptable. Les conditions aux bords définiront de fait les conditions aux limites de chacune des fonctions mathématiques utilisées pour la description du milieu. La présence d'un trou dans un milieu continu ne présentera donc pas de difficulté autre que la définition des valeurs (ou de la valeur des dérivés) des fonctions sur

la surface du perçage par exemple. Dans les cas où une ou plusieurs fonctions ne seraient plus différenciables aux bords, alors les résultats obtenus ne seront valables que suffisamment loin du bord concerné. Ce point sera illustré à plusieurs reprises lors des TDs.

2.2.2. Volume Élémentaire Représentatif

Quel que soit le matériau, il existe une échelle en-deçà de laquelle la microstructure interne du milieu induira une discontinuité des fonctions décrivant la répartition spatiale des propriétés (grains, pores, cristaux...). Il est donc nécessaire de définir une taille critique, un « Volume élémentaire Représentatif », comme borne inférieure raisonnable de l'échelle de modélisation. Les valeurs des propriétés physiques, mais également des déformations ou des contraintes, correspondront alors à la moyenne faite sur le V.E.R. Ce dernier définit donc la précision spatiale de description de l'évolution des propriétés. En deçà de cette échelle, les calculs faits demeurent valables au sens de l'exactitude analytique, mais la marge d'erreur est d'autant plus grande que l'échelle d'analyse est petite par rapport au V.E.R.

L'augmentation de la taille du V.E.R. augmente *in fine* l'erreur en localisation (position précise dans l'espace), mais réduit l'erreur en prévision de la valeur moyenne de la grandeur (erreur en prédictivité). On comprend dès lors que la taille du V.E.R. est un point extrêmement délicat. Il est d'usage de définir la « bonne » taille du V.E.R. comme étant celle pour laquelle un V.E.R. plus grand ne modifie plus la valeur de la grandeur mesurée. Cette définition privilégie de fait la prédictivité par rapport la localisation, comme l'illustre la Figure 3.

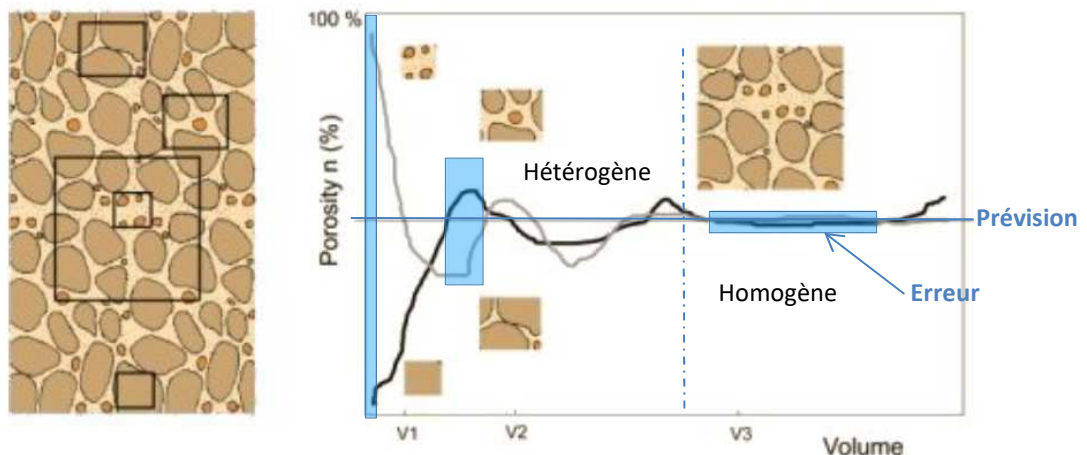


Figure 3 : Choix du V.E.R. et échelle de l'homogénéité (Bear 1972)

Une taille raisonnable de VER est au minimum de 10 fois celle de la plus grande hétérogénéité structurelle. En termes d'ordre de grandeur on peut considérer que le VER à une échelle :

- mm^3 pour l'acier (grains de 0,1 mm) et les céramiques fines (grains $< \mu\text{m}$)
- cm^3 pour un béton HP
- plusieurs cm^3 pour le bois (d'arbre, plus fin pour l'agglomérat et autre recomposé)
- dm^3 pour un béton de base

2.3. Cinématique d'un milieu continu

Afin de décrire le mouvement et les déformations d'un milieu continu, il est nécessaire de définir le référentiel d'étude ainsi que la notion de champ des déplacements des points d'un milieu continu.

On rappelle qu'un référentiel est composé d'une origine de l'espace, d'une base vectorielle et d'une origine des temps. Selon le type de milieu étudié et le problème traité en MMC, on peut avoir recourt à deux types de description : la description Lagrangienne et la description Eulérienne.

2.3.1. Description Lagrangienne

Le fondement de la description Lagrangienne est de faire correspondre les points « géométriques/mathématique » servant de repère pour l'observateur avec les points matériels. Ainsi, dans la description Lagrangienne du mouvement, la configuration initiale Ω_0 est connue et est prise comme configuration de référence. On décrit alors la position d'un point à l'instant t en fonction de sa position initiale :

$$\underline{M} = \underline{\Phi}(\underline{M}_0, t)$$

Ou encore, en coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x_M = \Phi_x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y_M = \Phi_y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z_M = \Phi_z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

Où M_0 est la position du point M à l'instant initiale.

Si le milieu est continu, alors la fonction $\underline{\Phi}$, appelé « positionnement », est un C^1 difféomorphisme. $\underline{\Phi}$. L'ensemble des positions successives d'un point constitue bien évidemment sa trajectoire.

Remarque sur les notations : la fonction « positionnement » est de fait un objet mathématique d'ordre 1, mais ce n'est pas pour autant un vecteur... On notera le plus souvent les objets d'ordre 1 avec un trait en dessous.

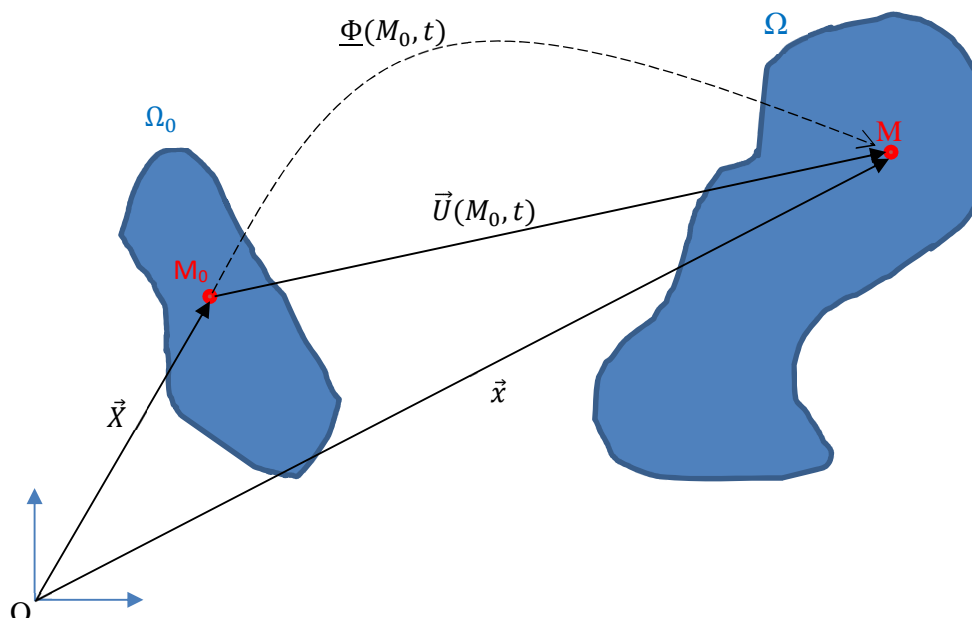


Figure 4 : Description Lagrangienne

De même qu'en cinématique, il est alors possible de définir le déplacement du point M à l'instant t $\underline{U}(M_0, t)$ par :

$$\vec{U}(M_0, t) = \vec{x} - \vec{X}$$

Où \vec{X} est le vecteur position du point M_0 et \vec{x} le vecteur position du point M à l'instant t :

$$\underline{x} = \underline{X} + \underline{U}(M_0, t)$$

L'ensemble des vecteurs déplacements de chacun des points du milieu étudié constitue ce que l'on appelle le champ de déplacement.

Dans la suite du cours, afin de « coller » aux us et coutumes (voir internet...) l'indice 0 de la position initiale sera omis. Les grandes lettres feront toujours référence à l'initiale et les petites à l'instant t .

Comme on l'a déjà dit, dans la description Lagrangienne, points « géométrique » et points « matériels » correspondent. On dit souvent que l'on suit le point dans son mouvement par rapport à un référentiel supposé fixe. C'est ce qui en fait sa simplicité (relative), mais aussi sa limite principale, notamment pour étudier les grands déplacements et les grandes déformations. En effet, dans ces cas, la taille du domaine d'étude est condamnée à évoluer avec le milieu ce qui rend pour le moins délicat les calculs différentiels et intégrale.

La description lagrangienne sera très utilisée en mécanique des solides déformable dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations et des petits déplacements où il est raisonnable de négliger la variation de taille du domaine étudié.

2.3.2. Description Eulérienne

Le fondement de la description Eulérienne est de palier aux difficultés rencontrées avec la description Lagrangienne dans les cas de grand déplacement, à savoir la fluctuation importante (donc non négligeable dans les calculs) de la taille du domaine d'étude avec le milieu. Pour pallier ce problème, les points géométriques qui définissent le domaine d'études ne correspondent plus avec les points matériels : on utilise ici pleinement la notion de point coïncident de la cinématique des corps rigide (i.e. mécanique générale et plus particulièrement cinématique).

La description Eulérienne repose donc sur la définition d'un domaine d'étude fixe au travers duquel passent des points mobiles. De fait, la configuration initiale, au sens de la position respective des points matériels n'a ici plus de sens, car les points matériels présents à l'instant t ne sont pas les mêmes que ceux à l'instant $t-1$ ou $t+1$.

Les particules matérielles coïncidant avec les points du domaine d'étude changeant en permanence, on comprend que seules les grandeurs instantanées prennent sens, il n'est donc plus possible de parler de trajectoire, ni même de déplacement (qu'est-ce qu'un déplacement instantané ?, si ce n'est une vitesse ??). La cinématique du milieu sera donc décrite par la donnée du champ des vitesses instantanées des particules lorsqu'elles passent au point fixe d'étude M :

$$\underline{V}(M) = \underline{\Psi}(M, t)$$

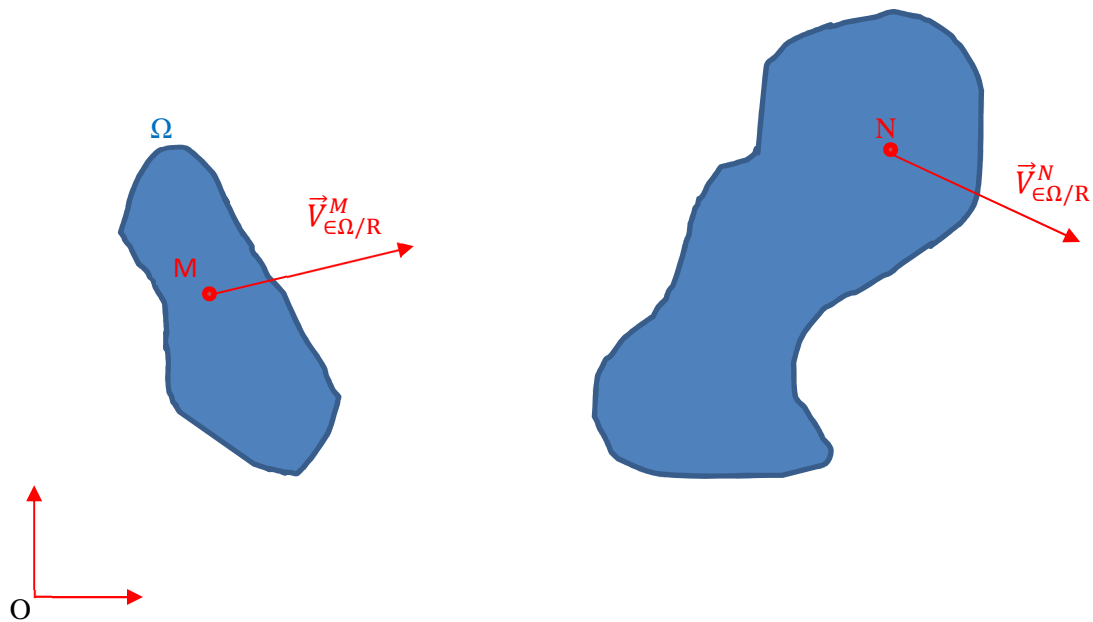


Figure 5 : Description Eulérienne

Naturellement la description Eulérienne sera quasiment toujours utilisée en mécanique des fluides (i.e. grand déplacement) et parfois en mécanique des solides (grandes déformations, contact ...).

2.4. Problème dit de « fermeture » : Loi de Comportement

Le mouvement de corps rigide, composition d'une rotation et d'une translation, est un exemple de transformation simple du milieu continu. Il conserve bien entendu les longueurs et les angles. Le mouvement de corps rigide dans son ensemble est entièrement décrit par 6 degrés de liberté : 3 composantes de translation et 3 angles de rotation. Ces grandeurs interviennent alors explicitement dans les équations de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique, i.e. 6 équations scalaires. Lorsque le torseur des efforts appliqués est connu, on est donc en mesure de déterminer sans ambiguïté le mouvement du corps rigide. Ces mouvements sont les seuls possibles pour les solides indéformables et la théorie mécanique correspondante est donc « fermée ».

Il n'en va pas de même lorsque les corps sont déformables. En effet, l'expérience courante nous apprend qu'une même action mécanique extérieure appliquée à deux solides de géométrie identique, mais constitués de matériaux différents (caoutchouc et acier pour fixer les idées) ne conduit pas au même mouvement et/ou changements de forme. On en déduit que les équations de bilan (quantité de mouvement et moment cinétique, bilans de masse et d'énergie) ne suffisent pas pour déterminer le mouvement et la déformation du milieu continu déformable. C'est le problème dit de fermeture de la mécanique des milieux continus. Les équations manquantes sont appelées « lois de comportement » du matériau, elles établissent le lien entre les actions mécaniques et le changement de forme du milieu considéré.

3. Déformation(s) d'un milieu continu

La notion de solide rigide est entièrement définie par l'invariance de la distance séparant deux points d'un solide. Cette invariance implique la conservation des distances et des angles de même que la relation de Varignon (alias Babar). Par essence, dans un milieu déformable, les distances entre les points ne peuvent plus être supposées constantes. Il en découle que l'angle entre deux vecteurs « matériels » (i.e. défini par des points du milieu pas par des points géométriques) est également

variable. Les outils classiques de description du champ des vitesses (Varignon) et autres habitudes sont dès lors caducs.

Si le sens commun du mot déformation recouvre bien l'idée de changement globale de forme, la quantification « intuitive » de type unidimensionnelle (comme vue en Résistance des Matériaux) ne permet pas de quantifier les variations d'angles ni les déformations « réelle » qui par nature sont pleinement tridimensionnelles. C'est pour répondre à ce besoin de quantification (en vue de prédiction) que nous allons introduire de nouveaux outils tels que le gradient de la transformation (également appelé application linéaire tangente) ou encore le tenseur des déformations.

3.1. Application linéaire tangente ou gradient de la transformation

On se place ici dans le cadre d'une description Lagrangienne. On fait donc correspondre à chaque point matériel un point géométrique/mathématique. Nous avons vu que la connaissance de la fonction $\underline{\Phi}(M_0, t)$ donne accès à chaque instant à la position du point M initialement situé en M_0 , d'où son nom de positionnement. Ainsi la fonction $\underline{\Phi}$ permet de passer de la position initiale à la position actuelle, pour chaque point du milieu. Cependant, en soi, cette fonction ne renseigne pas de manière directe sur la déformation subie par le milieu.

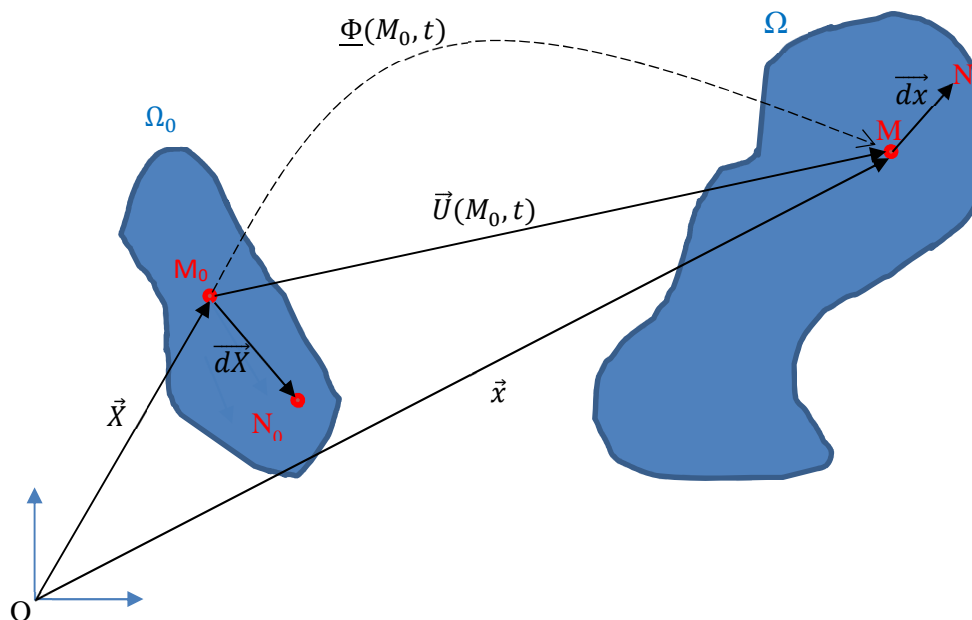


Figure 6 : passage de la configuration initiale Ω_0 à la configuration actuelle Ω

La déformation correspond à une variation d'angle et de distance, ce sont in fine les grandeurs caractéristiques d'un vecteur (direction, norme). Considérons donc un vecteur \overline{dX} à l'instant t , d'extrémité M_0 et N_0 , devenu \overline{dx} à l'instant $t+dt$, d'extrémité M et N .

$$\begin{cases} \underline{N} = \underline{\Phi}(N_0, t) \\ \underline{M} = \underline{\Phi}(M_0, t) \end{cases}$$

$$\overline{dx} = \overline{MN} = \underline{\Phi}(\underline{N_0}, t) - \underline{\Phi}(\underline{M_0}, t)$$

D'où, en exploitant la définition des points :

$$\overline{dx} = \underline{\Phi}(\underline{M_0} + \overline{dX}, t) - \underline{\Phi}(\underline{M_0}, t)$$

Ainsi, si on considère le passage à la limite pour de toutes petites variations de position du point initiale, donc un tout petit \vec{dX} :

$$\lim_{\vec{dX} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{\vec{dx}}{\vec{dX}} \right) = \lim_{\vec{dX} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{\Phi(\underline{M}_0 + \vec{dX}, t) - \Phi(\underline{M}_0, t)}{\vec{dX}} \right) = \underline{\underline{grad_{M_0}(\Phi)}}$$

On note

$$\mathbb{F} = \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{grad_o \Phi}} = \Phi_{i,j} \underline{e_i} \otimes \underline{e_j} = \begin{pmatrix} \Phi_{1,1} & \Phi_{1,2} & \Phi_{1,3} \\ \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} & \Phi_{2,3} \\ \Phi_{3,1} & \Phi_{3,2} & \Phi_{3,3} \end{pmatrix}$$

On rappelle que, pour ce qui est des notations, si on considère un objet d'ordre 1 noté $\underline{f} = f_i \underline{e_i}$, alors, par définition :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = f_{i,j}$$

L'application linéaire tangente \mathbb{F} est également appelée gradient de la transformation. On notera que c'est le gradient par rapport à la position initiale.

La fonction $\underline{\Phi}$ définis le point M connaissant M_0 , donc :

$$\mathbb{F} = \frac{\partial M}{\partial M_0} = \underline{\underline{grad_{M_0}(\Phi)}}$$

On peut également écrire, en posant \vec{x} le vecteur position du point M (configuration actuelle) et \vec{X} le vecteur position du point dans sa configuration initiale :

$$\mathbb{F} = F_{ij} \underline{e_i} \otimes \underline{e_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \underline{e_i} \otimes \underline{e_j}$$

Cet opérateur est la dérivée dans l'espace de la transformation $\underline{\Phi}$, mais il peut également être interprété comme la dérivée du vecteur position actuel par rapport à la configuration initiale. Il renseigne sur la différence d'évolution du vecteur position depuis la position initiale.

Ainsi, le gradient de la transformation, ou application linéaire tangente, caractérise la transformation réellement « vécue » par le vecteur position : allongement/rétrécissement et changement d'orientation. C'est pour cela que, souvent, on préfère retenir la définition suivante :

$$\vec{dx} = \mathbb{F} \vec{dX}$$

\mathbb{F} est sans unité, car cet opérateur résulte du rapport entre la différence de déplacement (mètre) entre deux-points proche avant la transformation et la distance qui sépare ces deux points (mètre) après.

Comme on l'a vu au §2.3.1, la transformation et le déplacement sont liés, en effet:

$$\underline{x} = \underline{X} + \underline{U}(M_0, t) = \underline{X} + \underline{U}(M)$$

$$\underline{\Phi}(\underline{X}) = \underline{X} + \underline{U}(M)$$

Donc,

$$\underline{\mathbb{F}} = \underline{\mathbb{I}} + \underline{\text{grad}}_0 \underline{U}(M)$$

Ici, l'identité matricielle est notée :

$$\underline{\mathbb{I}} = \underline{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'expression du gradient de la transformation en fonction du champ de déplacement peut également être établie d'une autre façon, toujours en exploitant le lien entre \underline{x} , \underline{X} et \underline{U} :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = 1 + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = 1 + U_{i,j}$$

L'opérateur gradient de la transformation, ou opérateur linéaire tangent, donne donc une information sur la différence de déplacement des points voisins par rapport à leurs positions respectives initiales.

L'ensemble des interprétations de l'opérateur linéaire tangent ainsi que sa définition et ses différentes écritures sont à connaître par cœur.

3.1.1. Variation de volume, de surface

Lors de la transformation, les points d'un milieu continu ne subissent pas nécessairement tous le même déplacement. Le milieu peut subir une variation de volume. Celle-ci peut être déterminée en considérant un trièdre initial $(\overrightarrow{dX}_1, \overrightarrow{dX}_2, \overrightarrow{dX}_3)$ et son transformé $(\overrightarrow{dx}_1, \overrightarrow{dx}_2, \overrightarrow{dx}_3)$.

$$dv = \overrightarrow{dx}_1 \cdot (\overrightarrow{dx}_2 \wedge \overrightarrow{dx}_3) = [\overrightarrow{dx}_1, \overrightarrow{dx}_2, \overrightarrow{dx}_3] = [\underline{\mathbb{F}} \overrightarrow{dX}_1, \underline{\mathbb{F}} \overrightarrow{dX}_2, \underline{\mathbb{F}} \overrightarrow{dX}_3] = (\det \underline{\mathbb{F}}) [\overrightarrow{dX}_1, \overrightarrow{dX}_2, \overrightarrow{dX}_3]$$

D'où

$$dv = (\det \underline{\mathbb{F}}) dV = J dV$$

Où J est le Jacobien de la transformation. Ainsi, le déterminant du gradient de la transformation est égal à la variation relative de volume.

$$J = (\det \underline{\mathbb{F}}) = \frac{dv}{dV}$$

Avec un calcul similaire, mais un poil plus long, on établit la variation relative de surface :

$$\overrightarrow{dx}_1 \cdot \overrightarrow{ds} = \overrightarrow{dx}_1 \cdot (\overrightarrow{dx}_2 \wedge \overrightarrow{dx}_3) = J \overrightarrow{dX}_1 \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$\underline{\mathbb{F}} \overrightarrow{dX}_1 \cdot \overrightarrow{ds} = J \overrightarrow{dX}_1 \cdot \overrightarrow{dS}$$

On utilise ici le passage d'écriture entre vecteur et tenseur qui permet d'écrire que :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \underline{U}^T \cdot \underline{V}$$

Attention ici à ne pas confondre le point qui représente le produit scalaire entre deux vecteurs dans la partie gauche de l'égalité, avec le point qui représente le produit contracté (ou produit « matriciel ») à droite de l'égalité. Alors

$$(\mathbb{F}d\underline{X}_1)^T d\underline{s} = Jd\underline{X}_1^T d\underline{S}$$

D'où

$$d\underline{s} = \mathbb{F}^{-T} J d\underline{S}$$

soit

$$\overline{d\underline{s}} = J\mathbb{F}^{-T}\overline{d\underline{S}}$$

L'intervention de la transposé de l'opérateur gradient s'explique par la dimension vectorielle de l'élément de surface qui résulte du produit vectoriel des deux vecteurs du plan.

Ainsi, la connaissance de l'opérateur tangent suffit pour déterminer la variation de volume relatif et la variation relative de surface.

Remarque : la transposé se note par un T en haut à droite d'après la norme ISO 31-11, remplacée par ISO 80000-2 :9 mais qui ne change pas sur ce point.

3.2. Déformation(s)

La « déformation » usuelle unidimensionnelle de type Résistance des Matériaux à l'avantage de la simplicité, mais elle ne permet pas de transcrire des déformations volumiques complètes comme celle d'une gomme sous l'action combinée de la main et de la feuille. Il convient donc de donner une définition plus générale de la déformation.

Pour « mesurer » les déformations, tout n'est qu'affaire de convention. Il existe une multitude de façons de « quantifier » (plutôt que mesurer, puisque la déformation n'a pas d'unité) la déformation des corps matériels. Il est par contre essentiel dans la pratique de bien préciser ce qu'on entend par « déformation » en particulier lorsque l'on utilise des données expérimentales concernant un matériau particulier, au risque d'encourir des malentendus aux conséquences désastreuses (dimensionnement erroné d'une pièce, d'une structure ou d'un procédé de fabrication...) ! Toutefois, on convient d'appeler mesure de déformation un tenseur ayant les propriétés suivantes :

- sans dimensions physiques (rapport de longueurs ou d'angles)
- il est nul pour un mouvement de corps rigide (pas de déformation)
- il est défini et symétrique (inversible, donc déterminant non nul)

3.2.1. Tenseur des dilatations de Cauchy Green

Par « déformation » on entend variation de forme, donc de longueur et/ou d'angle. Ces variations induiront nécessairement une variation du produit scalaire entre deux vecteurs « Matériels ». C'est cette caractéristique qui va ici être exploitée.

Soit \vec{X} et \vec{Y} , deux vecteurs matériels, \vec{x} et \vec{y} leurs déformés, alors :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \mathbb{F}\vec{X} \cdot \mathbb{F}\vec{Y} = \underline{X}^T \mathbb{F}^T \mathbb{F} \underline{Y} = \underline{X} \cdot \underline{C}\vec{Y}$$

Où

$$\mathbb{C} = \mathbb{F}^T \mathbb{F}$$

Soit également

$$\mathbb{C} = \mathbb{F}^T \mathbb{F} = C_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = F_{pi} F_{pj} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial x_p}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

\mathbb{C} est le **tenseur de Cauchy-Green-droit**. On l'appelle également **tenseur des dilatations**. Ce tenseur est Lagrangien, car défini par rapport à la configuration de départ. Il caractérise la variation du produit scalaire de deux vecteurs lors de la transformation.

3.2.1.1. Interprétation des composantes de \mathbb{C}

Si on considère une base vectorielle quelconque (non nécessairement orthonormé) $(\vec{e}_i)_{i=1,3}$ qui après déformation devient une base $(\vec{e}'_i)_{i=1,3}$ alors on obtient :

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \vec{e}_i \cdot \mathbb{C} \vec{e}_j$$

$$\|\vec{e}'_i\| \cdot \|\vec{e}'_j\| \cos(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j) = \|\vec{e}_i\| \|\vec{n}_i\| C_{ij} \|\vec{e}_j\| \|\vec{n}_j\|$$

Où \vec{n}_i est un vecteur normé (i.e. unitaire) colinéaire à \vec{e}_i

$$\frac{\|\vec{e}'_i\| \cdot \|\vec{e}'_j\|}{\|\vec{e}_i\| \|\vec{e}_j\|} \cos(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j) = \vec{n}_i \cdot C_{ij} \vec{n}_j$$

$$\frac{\|\vec{e}'_i\| \cdot \|\vec{e}'_j\|}{\|\vec{e}_i\| \|\vec{e}_j\|} \cos(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j) = C_{ij}$$

Et donc

$$C_{ii} = \left(\frac{\|\vec{e}'_i\|}{\|\vec{e}_i\|} \right)^2$$

Les termes diagonaux correspondent aux carrés du rapport des dimensions initiales / finales, d'où la définition de « dilatation ». En effet, on a une information sur la multiplication de la longueur. Une valeur de 1 correspond à l'absence de déformation.

Pour les termes hors diagonale, en prenant en compte la définition précédente des termes diagonaux :

$$C_{ij} = \sqrt{C_{ii} C_{jj}} \cos(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j)$$

On appelle **glissement** le demi-angle complémentaire qui permet de retrouver l'angle initial entre les deux vecteurs. Le glissement est usuellement noté γ .

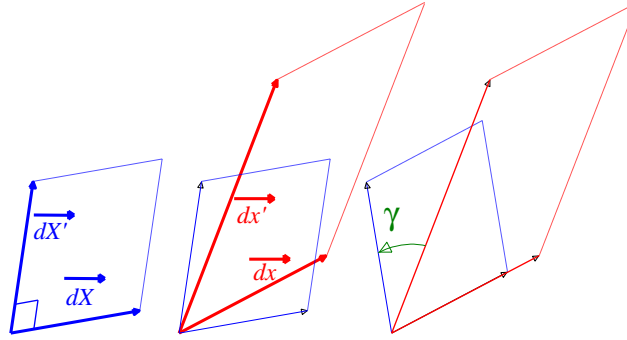


Figure 7 : définition de l'angle de glissement

On note alors :

$$C_{ij} = \sqrt{C_{ii}C_{jj}} \cos(\beta_{ij} - \gamma_{ij})$$

Avec β_{ij} l'angle initial entre les vecteurs de base \vec{e}_i et \vec{e}_j . Dans le cas usuel d'une base initialement orthogonale, on a $\beta_{ij} = \frac{\pi}{2}$ d'où :

$$C_{ij} = \sqrt{C_{ii}C_{jj}} \sin(\gamma_{ij})$$

Les termes hors diagonale renseignent donc sur l'angle final entre les vecteurs si on connaît les normes initiales et finales.

Finalement

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\|\vec{e}'_1\|}{\|\vec{e}_1\|}\right)^2 & \left(\frac{\|\vec{e}'_1\|\|\vec{e}'_2\|}{\|\vec{e}_1\|\|\vec{e}_2\|}\right) \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) & \left(\frac{\|\vec{e}'_1\|\|\vec{e}'_3\|}{\|\vec{e}_1\|\|\vec{e}_3\|}\right) \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}'_3) \\ \left(\frac{\|\vec{e}'_2\|\|\vec{e}'_1\|}{\|\vec{e}_2\|\|\vec{e}_1\|}\right) \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}'_1) & \left(\frac{\|\vec{e}'_2\|}{\|\vec{e}_2\|}\right)^2 & \left(\frac{\|\vec{e}'_2\|\|\vec{e}'_3\|}{\|\vec{e}_2\|\|\vec{e}_3\|}\right) \cos(\vec{e}'_2, \vec{e}'_3) \\ \left(\frac{\|\vec{e}'_3\|\|\vec{e}'_1\|}{\|\vec{e}_3\|\|\vec{e}_1\|}\right) \cos(\vec{e}'_3, \vec{e}'_1) & \left(\frac{\|\vec{e}'_3\|\|\vec{e}'_2\|}{\|\vec{e}_3\|\|\vec{e}_2\|}\right) \cos(\vec{e}'_3, \vec{e}'_2) & \left(\frac{\|\vec{e}'_3\|}{\|\vec{e}_3\|}\right)^2 \end{pmatrix}$$

3.2.1.2. Propriétés de \mathbb{C}

Le cosinus est une fonction paire ($\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$) donc le tenseur des dilatations est symétrique, il est donc diagonalisable. Il existe donc une base propre $(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)$ tel que :

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

La base propre correspond à la base principale des dilatations.

Enfin, le déterminant de \mathbb{C} est évidemment positif et non nul, car

$$\det \mathbb{C} = \det \mathbb{F} \mathbb{F}^T = (\det \mathbb{F})^2 = J^2$$

J est non nul car $J = \frac{dv}{dV}$ et donc il vaut 1 si le volume ne varie pas.

Donc, le tenseur des dilatations est défini. De plus, ce tenseur est sans dimension physique (rapport de longueurs). Cependant, en l'absence de déformation le tenseur de Cauchy Green Droit est égal à l'identité. Il n'est donc pas nul pour un mouvement de corps rigide, **il ne définit donc pas une mesure de déformation**. Ainsi, bien qu'il permette de prévoir la configuration finale pour une configuration initiale connue, il ne constitue pas à proprement parler un tenseur de déformation.

3.2.2. Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Le tenseur des dilatations présente toutes les propriétés nécessaires sauf une, être nul pour un mouvement de corps rigide. La solution la plus simple afin d'assurer la nullité lorsqu'il n'y a pas de déformation et de soustraire le produit scalaire initial du produit scalaire actuel, cette différence sera toujours nulle en l'absence de déformation. Ce raisonnement mène logiquement à :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} - \vec{X} \cdot \vec{Y} = \vec{X} \cdot \mathbb{C} \vec{Y} - \vec{X} \cdot \vec{Y} = \vec{X} \cdot (\mathbb{C} - \mathbb{I}) \vec{Y}$$

Le tenseur $(\mathbb{C} - \mathbb{I})$ conserve toutes les propriétés de \mathbb{C} et, en plus, est bien nul pour un mouvement de corps rigide. Donc il définit une mesure (possible) de déformation dans l'espace.

Si on considère des vecteurs de base de longueur initiale l_i qui après déformation présentent un allongement dl_i , alors:

$$C_{ii} = \left(\frac{\|\vec{e}'_i\|}{\|\vec{e}_i\|} \right)^2 = \left(\frac{l_i + dl_i}{l_i} \right)^2 = \left(1 + \frac{dl_i}{l_i} \right)^2$$

Donc, assez facilement

$$(\mathbb{C} - \mathbb{I})_{ii} = C_{ii} - 1 = \left(1 + \frac{dl_i}{l_i} \right)^2 - 1$$

Et les termes diagonaux sont :

$$(\mathbb{C} - \mathbb{I})_{ij} = C_{ij} = \sqrt{C_{ii} C_{jj}} \cos(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j)$$

Les termes diagonaux sont bien nuls pour un mouvement de corps rigide ($\frac{dl_i}{l_i} = 0$) et de fait les termes hors diagonale le sont alors également. Cependant, si nous considérons un développement limité au premier ordre lorsque dl_i tends vers 0 (pas de déformation), nous obtenons :

$$C_{ii} - 1 \xrightarrow{dl_i \rightarrow 0} 1 + 2 \frac{dl_i}{l_i} - 1 = 2 \frac{dl_i}{l_i}$$

On comprendra donc que, pour retrouver l'expression usuelle de la déformation unidimensionnelle lorsque l'on tend vers une déformation nulle (petites déformations), le tenseur de Green-Lagrange des déformations soit défini par :

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbb{C} - \mathbb{I}) = \frac{1}{2}(\mathbb{F}^T \mathbb{F} - \mathbb{I})$$

Cette définition est à connaître par cœur

Pour ce qui est de l'expression de ces composantes, lorsque l'on considère des vecteurs de base initiaux quelconques (comme précédemment) on obtient :

$$E_{ii} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\|\vec{e}_i'\|}{\|\vec{e}_i\|} \right)^2 - 1 \right)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\|\vec{e}_i'\| \|\vec{e}_j'\|}{\|\vec{e}_i\| \|\vec{e}_j\|} \cos(\vec{e}_i', \vec{e}_j')$$

Cette écriture du tenseur de Green Lagrange est utile pour comprendre la signification des termes et faire le lien avec une mesure sur un échantillon. Ce qui sera fait par exemple en TD sur un cas simple.

Une autre façon de calculer la déformation est d'utiliser le champ de déplacement, lorsqu'il est connu. Il est aisé, en utilisant les définitions de \mathbb{C} et de \mathbb{F} de démontrer que :

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbb{C} - \mathbb{I}) = \frac{1}{2}(\mathbb{F}^T \mathbb{F} - \mathbb{I})$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{grad \vec{U}}} + \left(\underline{\underline{grad \vec{U}}} \right)^T + \left(\underline{\underline{grad \vec{U}}} \right)^T \cdot \underline{\underline{grad \vec{U}}} \right]$$

Cette définition est à connaître par cœur (ou à savoir retrouver !)

Ainsi, connaissant le champ de déplacement, il est possible de définir la déformation en tout point et dans toutes les directions. C'est très exactement ce qui sera fait par corrélation d'image en TP par exemple. C'est également ce qui sera souvent fait en TD pour résoudre les problèmes qui présenteront des conditions aux bords en déplacement (encastrement par exemple).

\mathbb{E} conserve toutes les propriétés de \mathbb{C} et donc, par conséquent, il est diagonalisable. Les vecteurs propres définissent **les directions principales de déformation** et les valeurs propres (pour une base propre normée) constituent les **déformations principales**.

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} E_I & 0 & 0 \\ 0 & E_{II} & 0 \\ 0 & 0 & E_{III} \end{pmatrix}$$

Pour une sollicitation simple d'un matériau homogène isotrope, de type traction-compression uniaxiale ou encore flexion simple, la base propre des déformations correspond aux directions principales de sollicitations. Cependant, il n'y a aucune raison pour que la base propre des déformations soit la même en tout point !

Ce tenseur des déformations est un tenseur Lagrangien, car il prend pour référence la configuration initiale. Ce sera le tenseur que nous utiliserons le plus souvent pour l'étude des solides déformables.

La définition du tenseur de Green Lagrange et tous les moyens de le calculer doivent être parfaitement connus par cœur.

3.2.3. Tenseur des déformations d'Euler-Almansi

Si on exprime la variation du produit scalaire en utilisant la configuration d'arrivée comme référence, alors on définit le tenseur de **Cauchy-Green-gauche** :

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = \mathbb{F}^{-1} \vec{x} \cdot \mathbb{F}^{-1} \vec{y} = \vec{x}^T \mathbb{F}^{-T} \mathbb{F}^{-1} \vec{y} = \vec{x} \cdot (\mathbb{F} \mathbb{F}^T)^{-1} \vec{y} = \vec{x} \cdot \mathbb{B}^{-1} \vec{y}$$

$$\mathbb{B} = \mathbb{F} \mathbb{F}^T$$

Celui-ci a les mêmes propriétés que le tenseur de Cauchy Green droit, mais il est exprimé en fonction de la configuration finale.

Les tenseurs de Cauchy Green droit et gauche donnent accès à une vision homothétique de la déformation (i.e. multiplication des distances et rotation des vecteurs) d'où leur nom de dilatation (/par rapport à un point fixe, point initial ou finale)

De même que nous avons exprimé la variation du produit scalaire par rapport à la configuration d'origine, il est possible de l'exprimer en fonction des vecteurs déformés, donc en fonction de la configuration actuelle. Cela donne :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} - \vec{X} \cdot \vec{Y} = \vec{x} \cdot \vec{y} - \vec{x} \cdot \mathbb{B}^{-1} \vec{y} = \vec{x} \cdot (\mathbb{I} - \mathbb{B}^{-1}) \vec{y}$$

On définit alors le tenseur des déformations d'Euler-Almansi :

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \mathbb{B}^{-1})$$

Ce tenseur est dit Eulérien, car il se réfère à la configuration actuelle. Il ne nécessite donc pas de connaître la configuration initiale. Il présente les mêmes propriétés que \mathbb{E} . Il sera très peu utilisé dans la suite de cette U.E., car, pour les solides déformables, la vision Lagrangienne sera privilégiée.

3.2.4. Cas des Petites Déformations (ou Petites Perturbations)

L'hypothèse des petites déformations, ou encore des petites perturbations (HPP / HPD) revient à considérer que les configurations initiales et finales sont très proches, voire confondues. On considère donc ici que les termes du premier ordre sont négligeables devant l'unité et que les termes du second ordre sont négligeables devant ceux du premier ordre. Ainsi :

$$\left(\frac{dl_i}{l_i}\right)^2 \ll \frac{dl_i}{l_i} \ll 1$$

Alors

$$E_{ii} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\|\vec{e}'_i\|}{\|\vec{e}_i\|} \right)^2 - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{dl_i}{l_i} \right)^2 - 1 \right) \cong \frac{dl_i}{l_i}$$

On notera la déformation du tenseur de Green-Lagrange linéarisé

$$\varepsilon_{ii} = \frac{dl_i}{l_i}$$

Pour les termes hors diagonal

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\|\vec{e}'_i\| \|\vec{e}'_j\|}{\|\vec{e}_i\| \|\vec{e}_j\|} \cos(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j) = \frac{1}{2} \sqrt{C_{ii} C_{jj}} \cos(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j)$$

Or

$$C_{ii} = \left(\frac{\|\vec{e}'_i\|}{\|\vec{e}_i\|} \right)^2 = \left(\frac{l_i + dl_i}{l_i} \right)^2 = \left(1 + \frac{dl_i}{l_i} \right)^2 \cong 1$$

Donc

$$E_{ij} \cong \frac{1}{2} \cos(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j)$$

On notera ces termes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cos(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j)$$

En considérant des vecteurs de base initialement orthogonaux pour pouvoir passer au $\sin\gamma$, **également appelé angle de glissement** (voir plus haut Figure 7), on obtient :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sin(\gamma_{ij})$$

Ainsi, le tenseur des déformations de Green-Lagrange linéarisé, également appelé tenseur des petites déformations, est défini par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{dl_1}{l_1} & \frac{1}{2}\sin(\gamma_{12}) & \frac{1}{2}\sin(\gamma_{13}) \\ \frac{1}{2}\sin(\gamma_{12}) & \frac{dl_2}{l_2} & \frac{1}{2}\sin(\gamma_{23}) \\ \frac{1}{2}\sin(\gamma_{13}) & \frac{1}{2}\sin(\gamma_{23}) & \frac{dl_3}{l_3} \end{pmatrix}$$

Cette formulation permet une bonne compréhension des termes et, dans les cas où il est possible de mesurer les allongements et variations d'angles (en 3D !!) elle permet de calculer la déformation en HPP. **Il est plus que souhaitable de connaître cette expression.**

Il est également possible d'établir une formulation du tenseur de Green-Lagrange linéarisé en fonction du champ de déplacement. En effet, il a été établi que :

$$\underline{\underline{\mathbb{E}}} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\text{grad}\vec{U}}} + \left(\underline{\underline{\text{grad}\vec{U}}} \right)^T + \left(\underline{\underline{\text{grad}\vec{U}}} \right)^T \cdot \underline{\underline{\text{grad}\vec{U}}} \right]$$

D'où, en négligeant les termes du second ordre :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\text{grad}\vec{U}}} + \left(\underline{\underline{\text{grad}\vec{U}}} \right)^T \right]$$

Cette dernière expression est à connaître par cœur.

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange linéarisé conserve toutes les propriétés du tenseur de Green Lagrange, il est donc diagonalisable. Les vecteurs propres définissent **les directions principales de déformation** et les valeurs propres (pour une base propre normée) constituent les **déformations principales**.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix}$$

La définition du tenseur de Green Lagrange linéarisé (Hypothèse des Petites Perturbations) et tous les moyens de le calculer doivent être parfaitement connue par cœur.

3.2.4.1. Validité de l'hypothèse des Petites Déformations

Pour que les termes de second ordre soient négligeables, il faut que les termes de premier ordre soient faibles devant 1 :

$$\left(\frac{dl_1}{l_1}\right)^2 \ll \frac{dl_1}{l_1} \ll 1$$

Pour qu'un terme soit négligeable devant un autre, il faut, à minima, un rapport 100. Cela correspond à négliger le second terme après la virgule. Donc, pour que les termes du second ordre soient négligeables il faut que

$$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} < 10^{-2}$$

Donc que

$$\varepsilon < 10^{-2}$$

Donc l'hypothèse des petites déformations est acceptable pour des déformations inférieures à quelques %. On tolère en général de 3 à 5%.

Pour 1 m, cela fait une déformation de maximum 0,05 m soit un allongement/raccourcissement de 5 cm pour 1 m.

Le plus souvent on travaille entre quelques 10^{-6} ($\mu\text{m}/\text{m}.. \text{sic}$) et quelques 10^{-3}

Cette hypothèse de petite déformation revient à considérer que la configuration initiale et la configuration finale sont tellement proches qu'elles peuvent être confondues. La description Lagrangienne est alors particulièrement bien adaptée...

3.2.4.2. Variation de volume

La variation relative de volume se définit comme une grandeur sans unité (d'où le relatif) telle que :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0}$$

Or, nous avons vu que :

$$dv = (\det \mathbb{F}) dV = J dV$$

D'où :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{JV_0 - V_0}{V_0} = J - 1 = \det \mathbb{F} - 1$$

Par définition

$$\det \mathbb{F} = \det \left(\mathbb{I} + \underline{\underline{\text{grad} \vec{U}}} \right)$$

Le développement limité au premier ordre du déterminant (voir maths) est :

$$\det(\mathbb{I} + \underline{\underline{\text{grad}\vec{U}}}) \cong 1 + \text{Tr}(\underline{\underline{\text{grad}\vec{U}}}) + o(\underline{\underline{\text{grad}\vec{U}}})$$

Ici le terme en $o()$ correspond aux termes de second ordre.

Nous obtenons donc :

$$\det \mathbb{F} \cong 1 + \text{Tr}(\underline{\underline{\text{grad}\vec{U}}})$$

D'où, finalement

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{JV_0 - V_0}{V_0} = J - 1 = \det \mathbb{F} - 1 \cong 1 + \text{Tr}(\underline{\underline{\text{grad}\vec{U}}}) - 1$$

Donc, au premier ordre

$$\frac{\Delta V}{V_0} \cong \text{Tr}(\underline{\underline{\text{grad}\vec{U}}}) = \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Il est également possible d'obtenir ce résultat en considérant l'expression du tenseur des petites déformations dans sa base principale :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dy}{y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dz}{z} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$$

Or

$$V = xyz$$

Donc en exploitant une dérivée logarithmique on obtient bien :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$$

D'où le résultat.

3.2.4.3. Partition du tenseur des petites déformations

La trace constitue un invariant et, ici, la trace du tenseur des petites déformations est égale à la variation de volume. On appelle donc partie sphérique, ou encore déformation hydrostatique, le terme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^h = \frac{e}{3} \mathbb{I}$$

Avec $e = \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}$

Ce terme représente in *fine* la variation volumique sans changement de forme, on parle de composante **sphérique** de la déformation. Le sphérique fait ici référence à une bulle...

Le complémentaire de cette part sphérique des déformations est la partie dite **déviatorique** :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^D = \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{e}{3} \mathbb{I}$$

La trace de la partie déviatorique est nulle, c'est donc une déformation à volume constant. On parle de changement de forme sans changement de volume (isochore). Finalement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^h + \underline{\underline{\varepsilon}}^D = \frac{1}{3}(\text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \mathbb{I} + \left[\underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3}(\text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \mathbb{I} \right]$$

Nous retrouverons cette partition sphérique / déviatorique lors de l'étude des contraintes. ... On parlera de pression hydrostatique et de contrainte déviatorique ...

3.2.5. Mesure des déformations

La mesure des déformations se fait principalement par 3 méthodes :

- Extensomètre avec ou sans contact
- Jauges de déformations
- Corrélation d'images

Le principe de l'extensomètre consiste à suivre le déplacement de deux points par rapport à leurs positions respectives d'origine. Il est alors possible de calculer la déformation moyenne sur la longueur de l'extensomètre en considérant une déformation homogène. Cette mesure est unidimensionnelle. Moyennant une bonne expertise il est possible d'atteindre des déformations de l'ordre de quelques dizaines de 10^{-6}

La jauge de déformation donne un accès à une déformation moyenne sur une toute petite zone : la surface couverte par la jauge. Le principe exploite le lien entre résistivité et allongement (voir fascicule de TP). Un expérimentateur moyen mesure aisément des déformations de quelques dizaine de 10^{-6} . Avec un peu de rigueur on atteint le micron.

La corrélation d'images (voir TP) permet d'accéder au champ de déplacement (sous forme discrète) et par la suite d'en déduire le champ de déformation correspondant, avec une hypothèse d'homogénéité par zone de corrélation. Actuellement il est possible sans difficulté majeur de mesurer des déformations de l'ordre de 10^{-4} . Cependant cette technique est encore en plein développement et le progrès des caméras numérique et des algorithmes laissent espérer un gain de précision substantiel dans les années à venir.

3.2.5.1. Lien entre déformation uni-axiale et tenseur des déformations

Quel que soit la base d'expression d'un tenseur d'ordre 2, par définition, la composante ij est telle que :

$$M_{ij} = \underline{\underline{i}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{j}}$$

Il en découle que si on considère une direction de mesure \vec{b} alors la déformation dans cette direction (avec \vec{b} vecteur unitaire) :

$$\varepsilon_{\vec{b}} = \underline{b}^T \mathbb{M} \underline{b}$$

La combinaison de plusieurs axes de mesures permet alors de reconstruire le tenseur de déformation locale (voir TD et TP) par résolution d'un système d'équations linéaires dont les inconnus sont les composantes du tenseur des déformations. Dans le plan, le tenseur des déformations présente trois inconnus ($\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$), il faut donc trois équations, soit trois direction de mesure ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) qui permettent d'écrire le système :

$$\begin{cases} \varepsilon_a = a_i \varepsilon_{ij} a_j \\ \varepsilon_b = b_i \varepsilon_{ij} b_j \\ \varepsilon_c = c_i \varepsilon_{ij} c_j \end{cases}$$

3.3. Taux de Déformation (\mathbb{D} - Euler)

On a étudié jusqu'ici la déformation entre deux configurations sans se soucier du chemin de déformations entre ces deux états. Dans nombres de cas, pour une modélisation plus fine, prenant en compte l'histoire de la déformation, il est souhaitable de s'intéresser à ce qui se passe entre deux états très voisins sur un petit incrément de temps, et donc de s'intéresser à la vitesse de déformation.

Vitesse de déformation en configuration lagrangienne:

De même que nous avons étudié la variation du produit scalaire entre une configuration initiale et une configuration déformée, la vitesse de déformation peut être exprimée comme la dérivée par rapport au temps du produit scalaire des vecteurs déformés.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{dx} \cdot \vec{dy}) &= \frac{d}{dt}(\mathbb{F}d\vec{X} \cdot \mathbb{F}d\vec{Y}) = \frac{d}{dt}(\vec{dX} \mathbb{F}^T \cdot \mathbb{F}d\vec{Y}) = \frac{d}{dt}(\vec{dX}(2\mathbb{E} + \mathbb{I})d\vec{Y}) \\ &= 2 \frac{d}{dt}(\vec{dX} \mathbb{E} d\vec{Y}) + \frac{d}{dt}(\vec{dX} \cdot d\vec{Y}) \\ \frac{d}{dt}(\vec{dx} \cdot \vec{dy}) &= 2 \frac{d}{dt}(\vec{dX} \mathbb{E} d\vec{Y}) = 2 \vec{dX} \frac{d\mathbb{E}}{dt} d\vec{Y} = 2 \vec{dX} \mathbb{E} d\vec{Y} \end{aligned}$$

\mathbb{E} est le tenseur lagrangien des taux de déformations. Il mesure la vitesse de déformation à l'instant t.

Vitesse de déformation en configuration eulérienne:

Puisque l'on s'intéresse à la vitesse de déformation en un point donné on peut également utiliser une approche eulérienne, qui permet de rendre de compte de la vitesse instantanée de déformation dans la configuration actuelle.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{dx} \cdot \vec{dy}) &= \frac{d}{dt}(\vec{dx}) \cdot \vec{dy} + \vec{dx} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{dy}) \\ \frac{d}{dt}(\vec{dx}) &= \frac{d}{dt}(\mathbb{F}d\vec{X}) = \dot{\mathbb{F}}d\vec{X} = \dot{\mathbb{F}}\mathbb{F}^{-1}d\vec{x} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{dx} \cdot \vec{dy}) = \frac{d}{dt}(\vec{dx}) \cdot \vec{dy} + \vec{dx} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{dy}) = (\dot{\mathbb{F}}\mathbb{F}^{-1}\vec{dx}) \cdot \vec{dy} + \vec{dx} \cdot (\dot{\mathbb{F}}\mathbb{F}^{-1}\vec{dy})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{dx} \cdot \vec{dy}) = \underline{dx}^T \cdot (\dot{\mathbb{F}}\mathbb{F}^{-1})^T \cdot \underline{dy} + \underline{dx}^T \cdot \dot{\mathbb{F}}\mathbb{F}^{-1} \cdot \underline{dy} = \underline{dx}^T \cdot \left((\dot{\mathbb{F}}\mathbb{F}^{-1})^T + \dot{\mathbb{F}}\mathbb{F}^{-1} \right) \cdot \underline{dy}$$

On pose

$$\mathbb{L} = \dot{\mathbb{F}}\mathbb{F}^{-1}$$

$$L_{ij} = (\dot{\mathbb{F}}\mathbb{F}^{-1})_{ij} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_k} \right) \cdot \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \frac{\partial V_i}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

$$\mathbb{L} = \underline{\underline{\text{grad } \vec{V}}} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial M}$$

\mathbb{L} est donc le tenseur gradient des vitesses.

On peut alors récrire :

$$\vec{dx} \cdot \left((\dot{\mathbb{F}}\mathbb{F}^{-1})^T + \dot{\mathbb{F}}\mathbb{F}^{-1} \right) \cdot \vec{dy} = \vec{dx} \cdot (\mathbb{L}^T + \mathbb{L}) \cdot \vec{dy}$$

On définit alors le tenseur eulérien des taux de déformation :

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2}(\mathbb{L} + \mathbb{L}^T)$$

Ce tenseur correspond à la partie symétrique du gradient des vitesses de déformation. Le tenseur des taux de rotations correspond à la partie antisymétrique du champ de gradient des vitesses :

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}(\mathbb{L} - \mathbb{L}^T)$$

Relation entre les description Lagrangienne et Eulérienne

Conceptuellement, le tenseur Eulérien \mathbb{L} , gradient du champ de vitesse, est l'analogue du tenseur Lagrangien \mathbb{F} , gradient du champ de déplacement. De même, le taux de déformation \mathbb{D} est l'analogue du tenseur des déformations de Green-Lagrange \mathbb{E}

Il existe bien sur un lien entre description Eulérienne et Lagrangienne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{dx} \cdot \vec{dy}) &= \frac{d}{dt}(\mathbb{F}\vec{dX} \cdot \mathbb{F}\vec{dY}) = \frac{d}{dt}(\vec{dX}\mathbb{F}^T \cdot \mathbb{F}\vec{dY}) = \frac{d}{dt}(\vec{dX}(2\mathbb{E} + \mathbb{I})\vec{dY}) \\ &= 2 \frac{d}{dt}(\vec{dX}\mathbb{E}\vec{dY}) + \frac{d}{dt}(\vec{dX} \cdot \vec{dY}) = 2\vec{dX}\dot{\mathbb{E}}\vec{dY} \end{aligned}$$

Or

$$\frac{d}{dt}(\vec{dx} \cdot \vec{dy}) = \underline{dx}^T \cdot (2\mathbb{D}) \cdot \underline{dy}$$

Donc

$$\underline{dx}^T \mathbb{F}^T \cdot (2\mathbb{D}) \cdot \mathbb{F}\underline{dY} = 2\vec{dX}\dot{\mathbb{E}}\vec{dY}$$

D'où

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F}$$

4. Contrainte(s) au sein d'un milieu continu

4.1. Vecteur contrainte

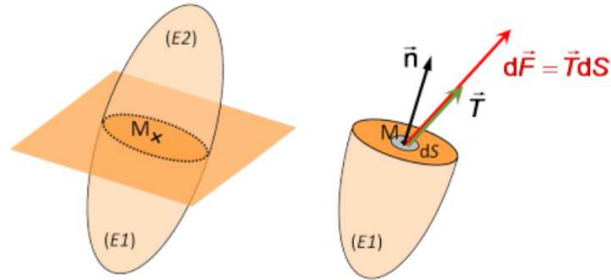


Figure 8 : représentation du vecteur contrainte, lien avec la répartition de force local

Lorsque l'on considère une section virtuelle d'un solide Ω définissant une surface $\partial\Omega$, de normale \vec{n} orientée par définition vers l'extérieur, les deux parties sont en équilibre de par l'action des efforts intérieurs de l'une sur l'autre. Ces efforts peuvent être représentés par une répartition surfacique d'efforts $\vec{T}(M, \vec{n})$. La résultante globale de cette répartition sur la surface $\partial\Omega$ est un torseur : le torseur des efforts intérieurs ou torseur de cohésion tel que :

$$\mathcal{T}_C = \{\vec{F}, \vec{M}_A\}_A$$

avec

$$\vec{F} = \int_{\partial\Omega} \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot dS$$

$$\vec{M}_A = \int_{\partial\Omega} \vec{AM} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot dS$$

Pour chaque élément de surface de normale \vec{n} et chaque point M, $\vec{T}(M, \vec{n})$ est différent. Par définition

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dS}$$

$\vec{T}(M, \vec{n})$ est le vecteur contrainte au point M pour une surface de normale \vec{n} . Il correspond à la densité locale de \vec{F} sur une face de normale \vec{n} au point M (voir Figure 8). Il est important de souligner que cette densité n'est a priori ni homogène, ni isotrope.

Le principe d'action-réaction permet d'obtenir immédiatement :

$$\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$$

L'unité du vecteur contrainte est celle d'une pression 1 bar = 0,1 MPa et 1 Pa = 1 N.m⁻²

4.2. Composantes du vecteur contrainte

Comme pour tout vecteur il est possible de décomposer $\vec{T}(M, \vec{n})$ en une composante normale le long du vecteur normale localement à la surface \vec{n} et une composante tangentielle dans le plan orthogonal à \vec{n} . Nous obtenons ainsi deux composantes pour le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$:

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n(M) \vec{n} + \tau_n(M) \vec{t}$$

Le vecteur \vec{t} représente le vecteur unitaire donnant la direction de la projection de $\vec{T}(M, \vec{n})$ dans le plan de la section de normal \vec{n} . On établit naturellement que :

$$\sigma_n(M) = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

$$\tau_n(M) \vec{t} = \vec{n} \wedge (\vec{T}(M, \vec{n}) \wedge \vec{n}) = \vec{T}(M, \vec{n}) - \sigma_n(M) \vec{n}$$

$\sigma_n(M)$ est la contrainte normale au point M pour une surface de normale \vec{n} . Cela représente la pression normale à la surface au point M.

$\tau_n(M)$ la contrainte tangentielle au point M sur une surface de normale \vec{n} . Cela représente la pression « tranchante » sur la surface, ou encore composante de glissement.

Tout effort surfacique est décomposable en une composante de pression normale et une composante de glissement.

4.3. Tenseur des contraintes

Si on considère un trièdre infinitésimal de matière dans un repère cartésien, orienté selon les trois vecteurs de bases usuels. On peut définir les vecteurs contraintes $\vec{T}(M, \vec{n})$ sur chacune des facettes.

$$\vec{T}(M, \vec{x}) = \sigma_x \vec{x} + \tau_x \vec{t}$$

\vec{t} est dans le plan y,z on peut donc à son tour décomposer $\tau_x \vec{t}$ selon les vecteurs y et z

$$\vec{T}(M, \vec{x}) = \sigma_x \vec{x} + \tau_{yx} \vec{y} + \tau_{zx} \vec{z}$$

Où on interprétera l'indice zx comme la composante selon z du vecteur contrainte de la facette de normale \vec{x} . Pour homogénéiser les notations on peut alors écrire les composantes sous la même forme :

$$\vec{T}(M, \vec{x}) = \sigma_{xx} \vec{x} + \sigma_{yx} \vec{y} + \sigma_{zx} \vec{z}$$

De même pour les autres facettes :

$$\vec{T}(M, \vec{y}) = \sigma_{xy} \vec{x} + \sigma_{yy} \vec{y} + \sigma_{zy} \vec{z}$$

$$\vec{T}(M, \vec{z}) = \sigma_{xz} \vec{x} + \sigma_{yz} \vec{y} + \sigma_{zz} \vec{z}$$

Si on considère une pyramide dont une face est de normale \vec{n} , les autres étant portées par les plans du repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

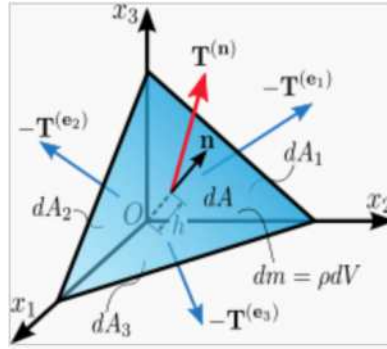


Figure 9 : tétraèdre de calcul

L'équilibre dynamique de la pyramide (ou tétraèdre) impose que :

$$\int_{dS_{yz}} \vec{T}(M, -\vec{x})dS + \int_{dS_{yx}} \vec{T}(M, -\vec{y})dS + \int_{dS_{xz}} \vec{T}(M, -\vec{z})dS + \int_{dS} \vec{T}(M, \vec{n})dS$$

$$= - \iiint_{\Omega} \vec{f} d\Omega + \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \vec{V}_R^M d\Omega$$

On suppose un tétraèdre suffisamment petit pour que les effets volumiques (masse, quantité de mouvement) soient négligeables devant les effets de surfaces (force surfacique, vecteur contrainte). De ce fait, le tétraèdre est proche de la taille du point et l'équation se ramène à :

$$-\vec{T}(M, \vec{x})dS_{yz} - \vec{T}(M, \vec{y})dS_{xz} - \vec{T}(M, \vec{z})dS_{yx} + \vec{T}(M, \vec{n})dS = 0$$

La surface de la face inclinée de normale \vec{n} peut être défini par :

$$dS \vec{n} = \frac{1}{2} (\vec{V}_{yz} \wedge \vec{V}_{xy})$$

Où \vec{V}_{yz} et \vec{V}_{xz} sont les vecteurs « coté » de la surface, allant de \vec{y} à \vec{z} et de \vec{x} à \vec{z} respectivement. Ces vecteurs ont, selon l'arrête considéré, des composantes selon les trois directions. Ainsi

$$dS \vec{n} = \frac{1}{2} (\vec{V}_{yz} \wedge (V_{xy,x} \vec{x} + V_{xy,y} \vec{y}))$$

$$dS \vec{n} \cdot \vec{x} = \frac{1}{2} (\vec{V}_{yz} \wedge (V_{xy,x} \vec{x} + V_{xy,y} \vec{y})) \cdot \vec{x} = \frac{1}{2} (\vec{V}_{yz} \wedge V_{xy,y} \vec{y}) \cdot \vec{x}$$

$$dS \vec{n} \cdot \vec{x} = \frac{1}{2} (\vec{V}_{yz} \wedge V_{xy,y} \vec{y}) \cdot \vec{x} = dS_{yz} \vec{x} \cdot \vec{x}$$

$$dS \vec{n} \cdot \vec{x} = dS n_x = dS_{yz}$$

De même, on établit que

$$dS \vec{n} \cdot \vec{y} = dS_{xz} = dS n_y$$

$$dS \vec{n} \cdot \vec{z} = dS_{yx} = dS n_z$$

D'où

$$\left(-\vec{T}(M, \vec{x}) n_x - \vec{T}(M, \vec{y}) n_y - \vec{T}(M, \vec{z}) n_z + \vec{T}(M, \vec{n})\right) dS = 0$$

Et donc

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{T}(M, \vec{x}) n_x + \vec{T}(M, \vec{y}) n_y + \vec{T}(M, \vec{z}) n_z$$

On substitue ici $\vec{T}(M, \vec{x})$ par son expression en fonction des contraintes (voir plus haut) et de même pour les autres.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_{xx} n_x \vec{x} + \sigma_{yx} n_x \vec{y} + \sigma_{zx} n_x \vec{z} + \sigma_{xy} n_y \vec{x} + \sigma_{yy} n_y \vec{y} + \sigma_{zy} n_y \vec{z} + \sigma_{xz} n_z \vec{x} + \sigma_{yz} n_z \vec{y} + \sigma_{zz} n_z \vec{z}$$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z) \vec{x} + (\sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z) \vec{y} + (\sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z) \vec{z}$$

D'où :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

Cette relation est à connaître par cœur. Il est bon de bien en comprendre le sens physique.

D'où le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ d'ordre 2 tel que

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur d'ordre 2 des contraintes de Cauchy.

Ce tenseur permet d'obtenir la répartition des efforts surfaciques sur une surface de normale \vec{n} dans les différentes directions de l'espace. Il renseigne donc sur l'état des contraintes (en Pa) autour du point M dans toutes les directions. Il est intéressant de noter que cet opérateur est linéaire.

Chacune des composantes représente une projection particulière d'un vecteur contrainte selon une normale bien identifiée :

σ_{ij} est la composante selon \vec{i} du vecteur contrainte de la facette de normale \vec{j} .

$$\sigma_{ij} = \vec{T}(M, \vec{j}) \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{j}$$

Ainsi, les composante ii (ou jj) sont des composantes « normales » à la facette tandis que les composantes ij sont des composantes dans le plan de la facette de normale \vec{j} , on parle de cisaillement.

4.4. Champs de contrainte admissible

Un champ de contrainte est dit statiquement admissible, au sens où il peut être solution du problème, si et seulement si, il remplit toutes les conditions suivantes :

- Les fonctions qui le définissent sont C^1
- Il respecte en tout point du milieu le principe de conservation de la quantité de mouvement (i.e principe fondamental de la dynamique)
- Il respecte les conditions imposées aux bords (i.e. effort surfacique)

Pour un problème donné, l'ensemble des champs statiquement admissible est un espace affine de dimension infini.

4.4.1. Conservation de la quantité de mouvement

Considérons un domaine fermé quelconque Ω soumis sur son bords $\partial_F \Omega$ à des efforts surfaciques (vecteur contrainte) et à un champ de force extérieure volumique \vec{f} . Dans le cas particulier de la gravité, $\vec{f} = \rho \vec{g}$.

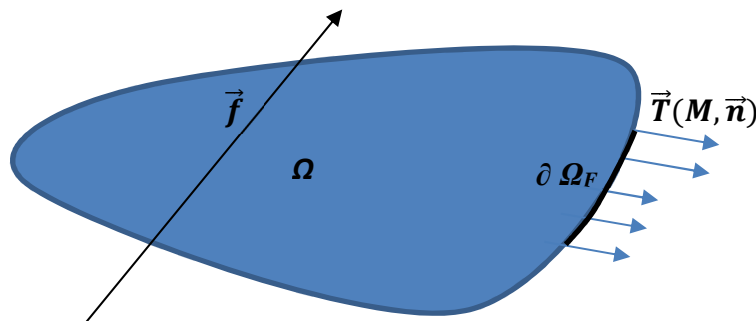


Figure 10 : Patatoïde continue soumis à un champ volumique de force et à une action mécanique de contact

La conservation de la quantité de mouvement stipule que la somme des résultantes des actions mécaniques extérieures est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement. Ceci implique que, sur le domaine fermé déformable Ω :

$$\iint_{\partial \Omega} \vec{T}(M, \vec{n}) dS + \iiint_{\Omega} \vec{f} d\Omega = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \overline{V_R^M} d\Omega$$

L'utilisation de la définition du tenseur des contraintes de Cauchy amène :

$$\iint_{\partial \Omega} \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} dS + \iiint_{\Omega} \vec{f} d\Omega = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \overline{V_R^M} d\Omega$$

Attention le volume Ω se déforme, donc on ne peut pas simplement passer la dérivation en temps dans l'intégrale, il faut prendre en compte la déformation du volume.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \overline{V_R^M} d\Omega = \iiint_{\Omega} \left\{ \frac{d}{dt} (\rho \overline{V_R^M}) d\Omega + \rho \overline{V_R^M} \frac{d(d\Omega)}{dt} \right\}$$

Or

$$\frac{d(d\Omega)}{dt} = \frac{d}{dt}(Jd\Omega_0) = J \operatorname{div} \overline{V_{\mathcal{R}}^M} d\Omega_0 = \operatorname{div} \overline{V_{\mathcal{R}}^M} d\Omega$$

Au-delà du tour de passe-passe calculatoire, l'essentiel est l'origine physique de ce terme en divergence : la variation de volume du domaine d'intégration.

Donc

$$\iint_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} dS + \iiint_{\Omega} \vec{f} d\Omega = \iiint_{\Omega} \left(\frac{d}{dt}(\rho \overline{V_{\mathcal{R}}^M}) + \rho \overline{V_{\mathcal{R}}^M} \operatorname{div} \overline{V_{\mathcal{R}}^M} \right) d\Omega$$

L'utilisation du théorème de Green-Ostrogradski ou théorème de la divergence, ou encore flux-divergence, permet d'arriver à la forme locale suivante :

$$\underline{\underline{\operatorname{div} \sigma}} + \underline{\underline{f}} = \frac{d}{dt}(\rho \overline{V_{\mathcal{R}}^M}) + \rho \overline{V_{\mathcal{R}}^M} \operatorname{div} \overline{V_{\mathcal{R}}^M} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \overline{V_{\mathcal{R}}^M}) + \underline{\underline{\operatorname{div}}}(\rho \overline{V_{\mathcal{R}}^M} \otimes \overline{V_{\mathcal{R}}^M})$$

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (i.e. petits déplacements et petites déformations), le domaine initial Ω_0 et le domaine final Ω peuvent être confondu, auquel cas la variation de volume du domaine d'intégration peut être négligé. De ce fait l'expression précédente devient (voir 4 équations plus haut) :

$$\underline{\underline{\operatorname{div} \sigma}} + \underline{\underline{f}} = \frac{d}{dt}(\rho \overline{V_{\mathcal{R}}^M})$$

Ainsi, à l'équilibre, ou d'une façon beaucoup plus générale quand le terme d'inertie est négligeable ($\frac{d}{dt}(\rho \overline{V_{\mathcal{R}}^M}) \ll \underline{\underline{\operatorname{div} \sigma}} + \underline{\underline{f}}$, i.e. masse volumique très faible et où accélération quasi nulle) :

$$\underline{\underline{\operatorname{div} \sigma}} + \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{0}}$$

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, on fera toujours l'approximation que l'on est proche de l'équilibre, on parlera de chargement « quasi-statique », ce qui correspond parfaitement à la notion de terme d'inertie négligeable. **Cette dernière relation est donc à connaître par cœur, de même que son origine et son sens physique.**

L'importance des termes d'inertie et de variation de volume sera capitale dans des calculs tels que le crash par exemple.

4.4.2. Conservation du moment cinétique

La conservation du moment cinétique en dynamique des solides rigides correspond à la conservation de quantité de mouvement « en rotation ». Il faut donc que la somme des moments soit égale à l'évolution du moment cinétique dans le temps. Mathématiquement cela s'exprime par :

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{X} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) dS + \iiint_{\Omega} \vec{X} \wedge \vec{f} d\Omega = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \vec{X} \wedge \rho \overline{V_{\mathcal{R}}^M} d\Omega$$

Où \vec{X} est le vecteur position « courant », c'est-à-dire le vecteur position de tous les points du domaine Ω . Par définition du tenseur des contraintes de Cauchy, et utilisation de la dérivation (avec variation de volume), nous obtenons :

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{X} \wedge \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} dS + \iiint_{\Omega} \vec{X} \wedge \vec{f} d\Omega = \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{X} \wedge \rho \overline{V_R^M}) + \overline{div} \left((\vec{X} \wedge \rho \overline{V_R^M}) \otimes \overline{V_R^M} \right) d\Omega$$

Le calcul est difficilement réalisable en symbolique, il est donc préférable de passer ici en indiciel. On rappelle que

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \epsilon_{ijk} U_j V_k$$

Avec le tenseur de Levi-Civita

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si deux indices égaux } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } i = k \\ +1 & \text{si les indices sont dans l'ordre - permutation - } 123, 312, 231 \\ -1 & \text{si les indices sont dans le désordre - permutation - } 213, 321, 132 \end{cases}$$

Avec cette notation, nous obtenons :

$$\oint_{\partial\Omega} \epsilon_{ijk} X_j \sigma_{kl} n_l dS + \iiint_{\Omega} \epsilon_{ijk} X_j f_k d\Omega = \iiint_{\Omega} \frac{d}{dt} (\rho \epsilon_{ijk} X_j V_k) + (\rho \epsilon_{ijk} X_j V_k V_l)_{,l} d\Omega$$

Le recours au théorème de la divergence (passage de l'intégrale de surface à l'intégrale de volume) amène :

$$(\epsilon_{ijk} X_j \sigma_{kl})_{,l} + \epsilon_{ijk} X_j f_k = \frac{d}{dt} (\rho \epsilon_{ijk} X_j V_k) + (\rho \epsilon_{ijk} X_j V_k V_l)_{,l}$$

$$\epsilon_{ijk} X_j \sigma_{kl,l} + \epsilon_{ijk} X_{j,l} \sigma_{kl} + \epsilon_{ijk} X_j f_k = \rho \epsilon_{ijk} X_j \frac{d}{dt} V_k + (\rho \epsilon_{ijk} X_j V_k V_l)_{,l}$$

Or $X_{j,l} = \delta_{jl}$ et $\dot{X}_j = 0$ car \vec{X} est le vecteur position d'origine, il est donc indépendant du temps, d'où

$$\epsilon_{ijk} X_j \sigma_{kl,l} + \epsilon_{ilk} \sigma_{kl} + \epsilon_{ijk} X_j f_k = \epsilon_{ijk} X_j \frac{d}{dt} \rho V_k + \rho \epsilon_{ijk} X_{j,l} V_k V_l + \rho \epsilon_{ijk} X_j (V_k V_l)_{,l}$$

$$\epsilon_{ijk} X_j \sigma_{kl,l} + \epsilon_{ilk} \sigma_{kl} + \epsilon_{ijk} X_j f_k = \epsilon_{ijk} X_j \left(\frac{d}{dt} \rho V_k + (\rho V_k V_l)_{,l} \right) + \rho \epsilon_{ilk} V_k V_l$$

Attention, l'ordre des indices amène : $\rho \epsilon_{ilk} V_k V_l = 0$

De plus, le terme entre parenthèse correspond à la quantité de mouvement, donc :

$$\epsilon_{ijk} X_j \sigma_{kl,l} + \epsilon_{ilk} \sigma_{kl} + \epsilon_{ijk} X_j f_k = \epsilon_{ijk} X_j (\sigma_{kl,l} + f_k)$$

D'où finalement

$$\epsilon_{ilk} \sigma_{kl} = 0$$

Donc, nécessairement,

$$\sigma_{kl} - \sigma_{lk} = 0$$

D'où

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$$

La conservation du moment cinétique (i.e. l'équilibre des moments en statique) implique que le tenseur des contraintes soit symétrique.

Il est essentiel de bien retenir que le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique et le pourquoi de cette propriété.

4.4.3. Champ de contrainte statiquement admissible

En conclusion, un champ de contrainte est statiquement admissible (SA) – i.e. il est potentiellement solution du problème – si et seulement si :

1. Il respecte en tout point la conservation de quantité de mouvement (c.a.d l'équilibre) :

$$\begin{cases} \text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \end{cases}$$

2. Il respecte les conditions aux bords en effort imposés :

$$\underline{\underline{\sigma}}(M) \vec{n} = \vec{T}(M, \vec{n}) \quad \forall M \in \partial\Omega_F$$

4.5. Directions principales des contraintes & contraintes principales

Le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique donc diagonalisable, il est donc possible de définir, de la même façon que pour le tenseur des déformations, une base principale constitué des directions principales de contraintes et d'identifier les contraintes principales associées.

Ainsi dans la base principale des contraintes le tenseur des contraintes est diagonal et s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}_{(e_I, e_{II}, e_{III})}$$

Compte tenu de la construction du tenseur des contraintes :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(M) \vec{n}$$

Les trois facettes ayant pour normale un des vecteurs propres ne sont donc soumise qu'à de la traction-compression. Les autres facettes, selon d'autres normales, seront-elles soumises à une composition de traction / compression et cisaillement (termes hors diagonale).

Il est d'usage de noter les contraintes principales de sorte que :

$$\sigma_I < \sigma_{II} < \sigma_{III}$$

4.6. Partition du tenseur des contraintes

De même que le tenseur des déformations est partitionné en une part sphérique et une part déviatorique, il est possible d'écrire le tenseur des contraintes sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = p\mathbb{I} + \mathbb{S}$$

Où $p\mathbb{I}$ est la partie sphérique des contraintes, ou pression hydrostatique, défini par :

$$p = \frac{1}{3} \text{Tr } \underline{\underline{\sigma}}$$

Et \mathbb{S} la partie déviatorique défini par :

$$\mathbb{S} = \underline{\underline{\sigma}} - p\mathbb{I}$$

Alors que la partie sphérique représente la valeur moyenne de traction/compression, au sens tridimensionnelle c'est-à-dire compaction/expansion, le déviateur représente le cisaillement. Ainsi, la partie sphérique est à l'origine de la variation de volume tandis que la partie déviatorique est à l'origine du changement de forme.

5. Relation contrainte / déformation : loi de comportement (i.e. loi d'état)

Chacun a déjà observé que les mêmes efforts appliqués à des objets de forme initiale identique (i.e. donc les mêmes contraintes), ne produisaient pas les mêmes déformations selon les matériaux constitutifs de l'objet. La « réponse » d'un matériau aux sollicitations mécaniques constitue ce que l'on appelle la « loi de comportement ».

D'après le déterminisme pur, dans l'esprit de Laplace, la connaissance des potentiels (énergétique) à l'échelle atomique et de l'agencement des atomes permet en théorie de déduire le comportement macroscopique de la matière. En pratique, cette approche ne fournit pas de loi fonctionnelle exploitable et les quelques résultats numériques sont loin de la réalité macroscopique. Une autre façon de procéder est l'approche dite phénoménologique qui combine l'exploitation d'un grand nombre d'essais macroscopique et le respect des principes physiques qui sont les lois de conservations (masse, énergie) et le second principe de thermodynamique. Cette approche est la plus efficace en Science Pour l'ingénieur. Elle sera développée pour le comportement mécanique dans le parcours modélisation et simulation numérique (MSN) en 4A puis étendu en 5A aux autres types de comportements (thermique, chimique, ...).

Dans ce cours, pour des raisons de progression pédagogique, seul le cas de l'élasticité linéaire isotrope sera traité et ce sans présenter les principes théoriques de l'écriture des lois de comportements. Ces principes, de même que les lois dites non-linéaire (plasticité, fluage) ou encore les comportements anisotropes, ne seront traités que en 4 et 5A.

5.1. Notion de comportement mécanique

L'essai le plus classique demeure l'essai de traction. La courbe de traction présentée en Figure 11 change d'un matériau à l'autre :

- Acier : comportement élastique linéaire, plastique (ductile...)
- Elastomère : élastique non linéaire
- Béton : élastique (linéaire) endommageable
- Céramique / verre : élastique fragile

D'une façon générale, la courbe de traction permet l'identification de différentes propriétés matériaux (voir Figure 11 et Tableau 1) :

- Le module d'Young (pente $\frac{\sigma}{\varepsilon}$)
- Le coefficient de Poisson : rapport des déformations longitudinale et axial $\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$
- La limite élastique conventionnel R_e (ou encore σ_y)
- La limite à rupture R_m

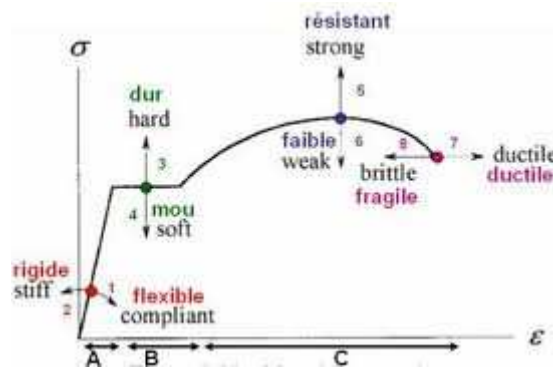


Figure 11 : courbe de traction classique d'un acier

	E	Poisson	Re (traction)
Acier	210 GPa	0,3	200 à 1500 MPa
Béton	20 à 50 GPa	0,2	1 à 10 (200) MPa
Céramique	50 à 1 000 GPa	0,2 à 0,3	0 à 150 (200) MPa
Aluminium	60 à 80 GPa	0,3	15 à 600 MPa
Fibre carbone	230 à 270 GPa	0,35	2500 à 3200 MPa

Tableau 1 : ordre de grandeurs usuels

Bien évidemment la relation unidimensionnelle qui donne

$$\sigma = E\varepsilon$$

Est insuffisante pour faire le lien entre l'état de contrainte tridimensionnelle caractérisé par le tenseur des contraintes et l'état de déformation tridimensionnelle caractérisé par le tenseur des déformations.

5.2. Elasticité linéaire isotrope

L'élasticité linéaire correspond à une déformation inférieure à 0,2% pour les aciers, encore moins pour les bétons ou les céramiques. Nous sommes donc clairement dans le cadre des petites déformations (inf. à 2-3 %). Dans le cadre de cette hypothèse il est raisonnable d'avoir recours au tenseur des déformations de Green-Lagrange linéarisé :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{grad}} \vec{U} + \left(\underline{\underline{grad}} \vec{U} \right)^T \right]$$

Dans le cas d'un essai de traction parfait selon l'axe \vec{X} , le tenseur des déformations exprimé dans le repère $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ est de la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\frac{\sigma_{xx}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\frac{\sigma_{xx}}{E} \end{pmatrix}$$

Le tenseur des contraintes lui, est de la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous cherchons une relation reliant les tenseurs des contraintes et des déformations. Par exemple, il est possible d'écrire :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\text{Tr}\underline{\underline{\sigma}})\mathbb{I}$$

Ou encore, en indiciel :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

Cette relation est la relation de Hooke (1660 en version initiale) (Hooke 1635-1703). **Elle est à connaître par cœur, c'est LA loi de l'élasticité linéaire isotrope.**

Il est également possible d'inverser la relation et d'écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda(\text{Tr}\underline{\underline{\varepsilon}})\mathbb{I}$$

Ou encore, en indiciel :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

Où μ et λ sont les coefficients de Lamé (1795-1870). **Cette seconde relation est également à connaître par cœur.**

On démontre que (voir TD)

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

5.3.Compressibilité, partition des déformations et des contraintes

Il est intéressant de remarquer que

$$\text{Tr}\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\text{Tr}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{3\nu}{E}(\text{Tr}\underline{\underline{\sigma}})$$

Or on définit la pression hydrostatique, ou encore la partie sphérique du tenseur des contraintes comme étant :

$$p = \frac{1}{3} Tr \underline{\underline{\sigma}}$$

C'est la moyenne des contraintes principales. Ainsi,

$$Tr \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} p$$

Or nous avons vu que, au premier ordre

$$\frac{\Delta V}{V_0} \cong Tr \left(\underline{\underline{grad \vec{U}}} \right) = Tr \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Donc, en HPP

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} p$$

On remarquera que, le coefficient de Poisson étant inférieur à 0,5 le volume augmente en traction et diminue en compression. Un coefficient de Poisson égale à 0,5 correspondra à un matériau incompressible (caoutchouc naturel).

Il est possible de définir la compressibilité K du matériau en MPa tel que :

$$p = K \frac{\Delta V}{V}$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

On peut également écrire :

$$3K Tr \underline{\underline{\varepsilon}} = Tr \underline{\underline{\sigma}}$$

Exprimé en MPa cela représente la pression à exercer pour faire varier le volume. Cette expression est à rapprocher de la loi d'état des gaz parfait $PV = nRT$, ici à température constante ! Nous avons bien là une loi d'état. Dite zéro-D, car purement scalaire, sans dimension spatiale.

De même que pour le tenseur des déformations, il est d'usage de partitionner le tenseur des contraintes en une part « sphérique » et une part dite « déviatorique », ou encore « contrainte octaédriques » :

$$\underline{\underline{\sigma}} = p \mathbb{I} + \mathbb{S}$$

Avec

$$p = \frac{1}{3} Tr \underline{\underline{\sigma}}$$

Et

$$\mathbb{S} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda (\text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \mathbb{I} - \frac{1}{3} \text{Tr}[2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda (\text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \mathbb{I}] \mathbb{I}$$

$$\mathbb{S} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda (\text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \mathbb{I} - \frac{2\mu}{3} \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \mathbb{I} - \lambda \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \mathbb{I} = 2\mu \left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3} \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \mathbb{I} \right) = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}_d$$

$$\begin{cases} \mathbb{S} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}_d \\ \text{Tr} \underline{\underline{\sigma}} = 3K \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{3} \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \mathbb{I} + \underline{\underline{\varepsilon}}_d \\ \mathbb{S} = \underline{\underline{\sigma}} - p \mathbb{I} \end{cases}$$

Ainsi, la part sphérique correspond à la pression de confinement qui entraîne une variation de volume tandis que le déviateur des contraintes représente la part qui entraîne un changement de forme.

Ainsi la loi de l'élasticité linéaire isotrope peut se ramener à la définition de la compressibilité K et du module de cisaillement G tels que

$$\begin{cases} G = 2\mu \\ K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \end{cases}$$

Avec les relations suivantes :

$$\begin{cases} p = K \frac{\Delta V}{V} \\ \mathbb{S} = G \underline{\underline{\varepsilon}}_d \end{cases}$$

Ce découplage, très utilisé en mécanique des sols (Génie-Civil) et parfois en plasticité, n'est que rarement utilisé en mécanique des matériaux métalliques, car les effets de la pression de confinement (p) sont le plus souvent négligeables, surtout en HPP (variation relative de volume négligeable).

6. Résolution d'un problème de MMC

La résolution d'un problème de MMC consiste en la détermination du couple $(\underline{\underline{\sigma}}(M), \vec{U}(M))$ tel que

- Le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}(M)$ soit Statiquement Admissible (SA). C'est-à-dire qu'il soit C^1 , qu'il satisfasse l'équilibre en tout point du milieu continu Ω et respecte les conditions aux bords en contrainte ou effort imposés sur $\partial\Omega_f$
- Le champ de déplacement $\vec{U}(M)$ soit Cinématiquement Admissible (CA). C'est-à-dire qu'il soit C^1 et qu'il respecte les conditions aux bords en déplacements imposés sur $\partial\Omega_u$
- Que le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}(M)$ et le champ de déplacement $\vec{U}(M)$ soit compatible au sens du respect de la loi de comportement du milieu considéré.

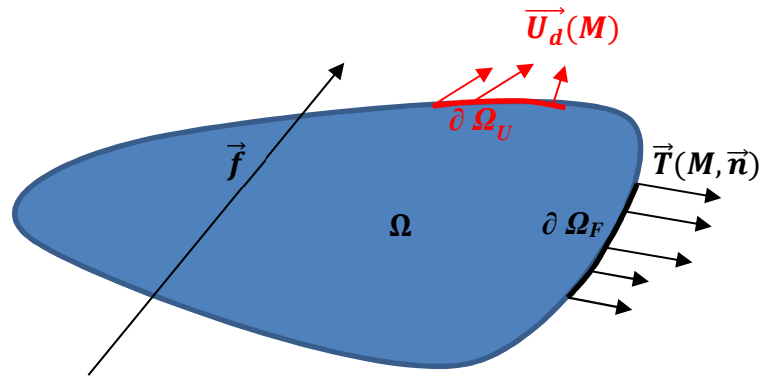


Figure 12 : cas général d'un problème de Mécanique des Milieux Continus (MMC)

Pour résoudre un problème de MMC il existe 3 familles de méthodes :

1. L'approche dite en déplacement (Navier-Stokes)
2. L'approche dite en contrainte (Beltrami-Michell)
3. Les approches énergétiques

Les plus utilisés sont l'approche en déplacement et en contrainte pour les résolutions analytiques, avec souvent plus de facilité avec l'approche en déplacement. Lorsque l'on développe une approche en contrainte, il n'est pas rare de s'arrêter au champ de déformation, car la détermination du champ de déplacement peut s'avérer délicate. Les méthodes énergétiques sont à la base des méthodes numériques actuelles (MEF, MED, etc..). Ces approches seront présentées succinctement dans ce cours, car elles feront l'objet de développements dans les cours ad hoc en 4A.

6.1. Conditions aux bords

6.1.1. Cas général

Comme nous l'avons déjà vu, les équations de conservations sont les mêmes pour tous les problèmes (i.e. forme locale du Principe Fondamental de la Dynamique) et ce sont donc uniquement les conditions aux bords qui feront la différence entre les problèmes.

Dans tout problème de physique considérant un milieu continu (thermique, mécanique, transport de masse), les conditions aux bords ne peuvent être que de deux types :

- Condition dite de Neumann, qui porte sur la dérivée de la fonction dans une direction (i.e. projection du gradient selon une direction). On parle également de condition en flux, car celui-ci est lié au gradient :

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{n}_{\partial\Omega_2}} = \underline{\underline{grad}}(\vec{f}) \cdot \vec{n}_{\partial\Omega_2} = \vec{\Phi}$$

- Condition dite de Dirichlet, qui porte sur la valeur de la fonction en un point (i.e. aux bords) :

$$\vec{f}(\underline{M} \in \partial\Omega_1) = \vec{V}_1$$

6.1.2. Cas de la Mécanique des Milieux Continus

En MMC, les conditions portant sur la valeur de la fonction (Dirichlet) concerneront les déplacements tandis que les conditions en flux (Neumann) porteront sur les contraintes.

Ce dernier point s'explique par la nature de la contrainte qui correspond in fine à un flux de quantité de mouvement. Il faut pour bien s'en rendre compte regarder l'équation d'équilibre où la contrainte apparaît dans la divergence, résultats d'une intégrale (i.e. bilan) sur une surface fermée.

En pratique, on notera que **les efforts imposés aux bords correspondent à une condition aux bords sur le champ de contrainte** :

$$\vec{F} = \int_{\partial\Omega_F} \vec{T}(M, \vec{n}) dS$$

Cela correspond également à :

$$\vec{T}(M, \vec{n}_{\partial\Omega_F}) = \underline{\underline{\sigma}}(M \in \partial\Omega_F) \cdot \vec{n}_{\partial\Omega_F}$$

On retrouve bien ici la forme d'une condition de Neumann en se rappelant que le tenseur des contraintes est une fonction du tenseur des déformations, lui-même fonction du champ de déplacement.

Dans le cas d'un couple imposé (ou « moment ») :

$$\vec{M}_A = \int_{\partial\Omega_C} \vec{AM} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}_{\partial\Omega_C}) dS = \int_{\partial\Omega_C} \vec{AM} \wedge \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} dS$$

Il est donc essentiel de se rappeler du lien entre le tenseur des contraintes et le vecteur contrainte imposé sur un bord (par exemple pression imposée).

Enfin, **le déplacement imposé aux bords s'exprime par** :

$$\vec{U}_{\partial\Omega_U} = \vec{U}_d$$

Ainsi, traditionnellement, la fonction physique principale (au sens de l'inconnue principale) en MMC est le champ de déplacement, car du point de vue « pratique » de la résolution l'ensemble des conditions aux bords peuvent être exprimés comme conditions sur le champ de déplacement (via la loi de comportement) et ainsi se ramener à une résolution « classique » (car plus ancienne) de type thermique/diffusion en remplaçant le champ de scalaire température T par le vecteur champ de déplacement \vec{U} .

Il est impératif de savoir exprimer proprement les conditions aux bords d'un problème, tant en déplacement qu'en contrainte, effort ou moment, pour pouvoir traiter un problème de MMC.

6.1.3. Notion de problème « bien posé »

Un problème de physique est dit mathématiquement « bien posé » s'il respecte les conditions de Hadamard (1865-1923, mathématicien français) :

- Une solution existe
- La solution est unique
- La solution dépend de façon continue des données.

D'un point de vue strictement théorique la question de l'existence d'une solution est essentielle. Il est en effet ridicule de chercher à résoudre un problème qui n'a pas de solution. Il est d'usage avant de résoudre numériquement un problème de démontrer l'existence d'une solution. L'unicité de la solution est une condition nécessaire pour l'utilisation de méthodes de résolutions exploitant par

exemple une minimisation de fonctionnelle. Enfin, la troisième condition assure la stabilité de la solution.

On notera, par exemple, le cas des problèmes « hyperstatique » en mécanique des solides indéformables : la solution existe, mais n'est pas unique, c'est un espace vectoriel de dimension égale au degré d'hyperstatisme. C'est donc un problème « mal posé » au sens de Hadamard.

En MMC, la troisième condition de Hadamard est assurée par la définition même de la continuité : les fonctions des paramètres du problème sont C^1 donc la solution dépend nécessairement de façon continue des données. Par conséquent, **en MMC, un problème sera « bien posé » si et seulement si :**

- La frontière $\partial\Omega$ du milieu admet une partition sans intersection en deux sous domaines $\partial\Omega_F$ et $\partial\Omega_U$ où sont imposés respectivement les contraintes (ou effort) et les déplacements :
$$\partial\Omega_F \cap \partial\Omega_U = \emptyset$$
- Le domaine où les déplacements sont imposés est non nul ($\partial\Omega_U \neq \emptyset$) et l'ensemble des conditions aux bords en déplacement empêche tout mouvement de corps rigide.

La première condition assure l'existence d'une solution tandis que la seconde en assure l'unicité. Si aucun déplacement n'est imposé (i.e. $\partial\Omega_U = \emptyset$) alors la solution est définie à un mouvement de corps rigide près. C'est une source d'erreur classique en simulation numérique.

On retiendra qu'il n'est pas possible d'imposer contrainte et déplacement sur la même partition : l'intersection des deux domaines doit être vide. Si on ne respecte pas cette condition, le couple $(\underline{\underline{\sigma}}(M), \vec{U}(M))$ nous est alors imposé sur un domaine donné, sans nécessairement respecter la loi de comportement. De fait, l'existence d'une solution n'est absolument pas garantie et, s'il en existe une, elle correspond au couple $(\underline{\underline{\sigma}}(M), \vec{U}(M))$ imposé, il n'y a donc plus de problème...

6.2. Formulation en déplacement

La formulation en déplacement vise à écrire tout le problème en fonction des déplacements puis à résoudre le système d'équations aux dérivés partiels obtenus. On choisit délibérément le déplacement comme inconnue principale. Nous nous intéresserons ici uniquement au cas d'un matériau élastique linéaire isotrope dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations.

Les données du problème sont :

- L'équilibre local (i.e. conservation de la quantité de mouvement)
- La loi de comportement (en élasticité linéaire, la loi de Hooke)
- La définition du tenseur des déformations (en HPP Green-Lagrange linéarisé).
- Les conditions aux bords (en déplacements et contraintes)

Afin d'obtenir les équations aux dérivées partielles en déplacement, il convient de reporter l'expression du tenseur des déformations (Green-Lagrange) en fonction du champ de déplacement dans la loi de comportement (Hooke) pour obtenir l'expression de la contrainte en fonction des déplacements puis de reporter celle-ci dans l'équation d'équilibre local.

Ainsi, dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations :

Navier-Stokes en mécanique des fluides, il suffit de reprendre la même démarche en utilisant la loi de comportement du fluide considéré.

Cette équation représente un système de trois équations aux dérivées partielles. Ces dernières seront développées au cas par cas en TD. MAIS il faut avoir en tête que le système générale est toujours le même pour tous les problèmes, ce n'est donc pas lui qui fera la différence ! Ce qui change le résultat final, ce sont les conditions aux bords !

La méthode de résolution est simple :

1. On postule une forme Cinématiquement Admissible pour le champ de déplacement (symétries du problème = géométrie et chargement + expérience !)
2. On établit l'équation de Navier du problème (maîtrise des opérateurs de calculs...)
 - a. On injecte le champ de déplacement dans le tenseur des déformations (Green-Lagrange linéarisé)
 - b. On injecte le résultat (a) dans la loi de comportement (Hooke pour nous)
 - c. On injecte le résultat (b) dans l'équilibre local
3. On résout les équations obtenues (forme particulière de Navier) (résolution EDP...)
4. On prend en compte les conditions aux bords pour identifier les paramètres du champ de déplacement (écriture des C.B.)
5. On déduit de la loi de comportement le tenseur des contraintes (loi de Hooke)
6. On vérifie que le tenseur des contraintes respecte les conditions aux bords (écriture des C.B.).

A l'issue de la résolution, le couple solution $(\underline{\underline{\sigma}}(M), \vec{U}(M))$ est normalement unique.

S'il reste des constantes non défini, alors le champ n'est pas unique, c'est généralement que l'on a oublié des conditions aux bords. Sinon, cela veut dire que le problème est « mal posé », i.e. il manque des données/hypothèses ou encore des conditions aux bords... Attention, un code EF ne peut pas résoudre un problème mal posé, il « plante » ou, pire, impose des valeurs nulles ou égale à l'unité pour les grandeurs oublié afin que la résolution soit possible... Analytiquement il est possible de définir un espace de solutions admissibles, à une ou plusieurs constantes près, c'est une des forces de l'analytique.

6.3. Formulation en contrainte

L'approche en contrainte correspond au duale de la formulation en déplacement. On commence donc par

- postuler un champ de contrainte Statiquement Admissible (symétries, expérience)
- puis on en déduit le champ de déformation via la loi de comportement (Hooke)
- et on intègre les déformations pour trouver les déplacements (Maths).

Le problème est que pour un champ de déformation quelconque donnée, il n'existe pas nécessairement un champ de déplacement correspondant, c'est la question dite de la compatibilité des déformations. C'est finalement la question duale du statiquement admissible pour les contraintes.

6.3.1. Compatibilité des déformations

Soit un champ de déformations donnée, quelles conditions doit-il respecté pour qu'il existe un champ de déplacement continue correspondant ? Cette question n'est pas triviale.

On démontre de façon purement mathématique, en indiciel, en utilisant le théorème de Schwartz (intersion des dérivées croisés) puis deux fois celui de Poincaré (notion de différentielle exact), que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un champ de déplacement $\vec{U}(M)$ pour un tenseur de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}(M)$ donné est :

$$\varepsilon_{ij,kk} + \varepsilon_{kk,ij} - \varepsilon_{ik,jk} - \varepsilon_{jk,ik} = 0$$

Il est alors possible de substituer $\underline{\underline{\varepsilon}}$ par $\underline{\underline{\sigma}}$ en utilisant la loi de Hooke pour obtenir les équations dites de Beltrami (1835-1900), dual de la relation de Navier.

La loi de Hooke donne :

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}$$

En réinjectant dans la relation de compatibilité des déformations et en considérant que le champ doit être statiquement admissible, on obtient :

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{ll,ij} + \frac{\nu}{1-\nu} f_{l,l} \delta_{ij} + f_{j,i} + f_{i,j} = 0$$

Cette relation dans sa forme simplifiée (i.e. comme ici avec prise en compte de l'équilibre local) est dite équation de Beltrami – Michell

6.3.2. Résolution

La méthode de résolution est alors la suivante :

- Postuler une forme raisonnable du tenseur des contraintes (symétries du problème, conditions aux bords et expérience !)
- Vérifier que le champ est statiquement admissible (cours et opérateur)
- Vérifier Belltrami-Michell ou
 - Déduire de la loi de comportement le tenseur des déformations (Hooke et opérateurs)
 - Vérifier que le tenseur des déformations est « compatible »
- Déduire de la relation de Green Lagrange le champ de déplacement (Green Lagrange et EDP)
- Vérifier les conditions aux bords en déplacement (conditions aux bords)

6.4. Approches énergétiques

Les approches énergétiques permettent rarement d'obtenir la forme analytique de la solution locale, à contrario elles sont extrêmement puissantes pour les résolutions numériques globales. Ce sont les méthodes à l'origine des codes de calculs actuels. Seules les bases seront ici présentées. Elles seront développées ultérieurement dans les cours ad hoc.

6.4.1. Energie potentielle

L'énergie potentielle d'un milieu, d'une structure, correspond à la différence entre l'énergie de déformation et le travail des forces extérieures pour un champ de déplacement cinématiquement admissible.

L'énergie de déformation correspond à l'énergie stocké au sein du matériau sous forme de déformation. D'un point de vue macroscopique, cela correspond à l'aire sous la courbe de traction. Ainsi, on arrive naturellement à la définition suivante de l'énergie de déformation en fonction de l'expression locale du tenseur des contraintes et du tenseur des déformations :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega$$

Par définition du travail d'une force, le travail des forces extérieures correspond à :

$$W_{ext} = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{U} d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \vec{F} \cdot \vec{U} dS$$

Dans le cas où le champ de déplacement est le champ solution, l'énergie potentielle (et donc la différence entre travail donné et énergie stocké) est nulle.

Donc l'expression de l'énergie potentielle est :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{U} d\Omega - \int_{\partial\Omega_F} \vec{F} \cdot \vec{U} dS$$

En indiciel la loi de Hooke s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Il est donc possible de l'écrire sous la forme suivante, utilisant un tenseur d'ordre 4 (utile pour les lois de comportement anisotrope par exemple, voir cours de 4A)

$$\sigma_{ij} = K_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

D'où

$$E_p(\vec{U}^{CA}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{U}^{CA}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{U}^{CA}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{U}^{CA} d\Omega - \int_{\partial\Omega_F} \vec{F} \cdot \vec{U}^{CA} dS$$

Où $\underline{\underline{K}}$ est un tenseur d'ordre 4. D'où la forme courante de l'énergie potentielle :

$$E_p(\vec{U}^{CA}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr \left(\underline{\underline{K}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{U}^{CA}) \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{U}^{CA}) \right) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{U}^{CA} d\Omega - \int_{\partial\Omega_F} \vec{F} \cdot \vec{U}^{CA} dS$$

Le champ solution est le champ CA qui minimise l'énergie potentielle en déplacement. Dans le cas où le champ de déplacement est solution du problème, l'énergie potentielle est nulle.

On notera utilement qu'ici l'énergie potentiel est, de fait, une énergie « virtuelle ». C'est plus une quantification de l'écart, en cout énergétique, entre la solution proposée et la solution exacte. Une méthode numérique consistera donc à minimiser cette énergie potentielle. On postulera par exemple

une forme de champs de déplacement (linéaire par morceau, ou quadratique par morceau en E.F.) puis on recherchera les coefficients des fonctions définissant le déplacement qui minimise l'énergie potentielle.

6.4.2. Energie complémentaire

Il est possible de définir l'énergie complémentaire comme étant la différence entre le travail des forces extérieures et l'énergie de déformation, exprimés en fonction du tenseur des contraintes. L'énergie complémentaire est le dual de l'énergie potentiel en déformation. C'est également une énergie « virtuelle ».

Si on considère un champ S.A. alors

$$E_c(\underline{\underline{\sigma}}^{SA}) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\mathbb{K}}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega + \int_{\partial\Omega_U} \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} \cdot \vec{U} dS$$

Ou encore :

$$E_c(\underline{\underline{\sigma}}^{SA}) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{K}}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_U} \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} \cdot \vec{U} dS$$

L'énergie complémentaire est bien évidemment de signe opposé à l'énergie potentielle. De plus, on démontre que le champ de contrainte solution maximise l'énergie complémentaire.

6.4.3. Erreur en relation de comportement

Dans le cas où on connaît la solution exacte du champ de contrainte et du champ de déplacement, les énergies potentielles et complémentaires sont égales et valent toutes deux zéro. On en déduit que :

$$E_c(\underline{\underline{\sigma}}^{SA}) \leq E_c(\underline{\underline{\sigma}}^{ex}) = E_p(\overline{U^{ex}}) \leq E_p(\overline{U^{CA}})$$

Ainsi, il est possible d'encadrer numériquement la solution recherchée. L'écart entre les énergies potentiels et complémentaires caractérisent l'erreur en relation de comportement, c'est-à-dire la part cumulée en tout point du domaine des écarts à la relation contrainte / déformation.

7. Caractérisation d'un état de contrainte

Comme on l'a déjà vu le tenseur des contraintes (et celui des déformations) dépend du repère choisi. De plus, il n'existe pas de relation d'ordre univoque dans l'espace des tenseurs des contraintes, car ils ne sont pas définis positifs. Il est donc très délicat de comparer des états de contraintes entre eux. Deux voies sont possibles, l'une mathématique, l'autre physique. Comme souvent en matière de modélisation, la voie la plus pertinente combine les deux.

7.1. Invariants d'un tenseur d'ordre 2

Tout tenseur de contrainte dépend de la base dans laquelle on l'exprime. Il apparaît donc naturel de chercher à exprimer ces tenseurs selon une combinaison de grandeurs dites « objectives », on entend par là qui ne dépendent pas du repère choisi. Il est alors possible de comparer les états de contraintes entre eux. C'est là que les invariants tensoriels prennent tout leur sens.

Le tenseur des contraintes de Cauchy, tout comme celui des déformations de Green Lagrange, est un endomorphisme. Pour tout endomorphisme \mathbb{A} sur E de dimension 3, le théorème de Cayley-Hamilton établi que si les coefficients I_i constituent les invariants principaux de l'endomorphisme \mathbb{A} , alors le polynôme suivant est nul :

$$\mathbb{A}^3 - I_1 \mathbb{A}^2 + I_2 \mathbb{A} - I_3 \mathbb{I} = 0$$

On démontre que ces invariants sont les coefficients du polynôme caractéristique utilisé pour la détermination des valeurs propres :

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

Les valeurs propres, racines de ce polynôme, sont fonction des invariants principaux (coefficient du polynôme) et inversement. On établit (voir algèbre linéaire) que :

$$I_1 = \text{Tr} \mathbb{A} = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} = A_I + A_{II} + A_{III}$$

$$I_2 = \text{Tr} \mathbb{A}^{-1} \det \mathbb{A} = \frac{1}{2} ((\text{Tr} \mathbb{A})^2 - \text{Tr} \mathbb{A}^2) = \frac{1}{2} \left((a_{ii})^2 - \delta_{ik} a_{ij} a_{jk} \right) = A_I A_{II} + A_{II} A_{III} + A_{III} A_I$$

$$I_3 = \det \mathbb{A} = \frac{1}{6} ((\text{Tr} \mathbb{A})^3 - 3(\text{Tr} \mathbb{A})(\text{Tr} \mathbb{A}^2) + 2\text{Tr} \mathbb{A}^3) = A_I A_{II} A_{III}$$

De fait, la connaissance des 3 valeurs propres ou des 3 invariants suffit à caractériser mathématiquement le tenseur considéré. Il est possible de construire une multitude d'invariants sur la base des combinaisons des valeurs propres ou des invariants principaux.

Il est donc possible de ramener un tenseur d'ordre 2 à 3 scalaires, indépendant de la base choisie. En vue de dimensionner des pièces il est fortement conseillé d'utiliser de tels « valeurs intrinsèque » pour analyser l'état de contrainte 3D.

7.2. Contrainte(s) équivalente(s)

Comment comparer des états de contraintes 3D (tenseur d'ordre 2) entre eux et, surtout, comment identifier les états critiques ? La notion d'état de contrainte critique dépendant directement du type de mode de ruine attendue : plasticité, rupture fragile, délaminage (composite), etc... **il n'existe pas une contrainte équivalente par matériau, mais des contraintes équivalentes par mode de ruine.** Le choix de LA bonne contrainte équivalente requiert donc un minimum de réflexion sur une seule question : quel(s) sera(ont) le(s) mode(s) de défaillance dimensionnant(s) ?

Dans ce qui suit, seules les trois contraintes équivalentes isotropes les plus utilisées sont présentées. Il en existe beaucoup d'autres !

7.2.1. Rankine (1858)

Un premier mode de défaillance, qui est sans doute à la fois le plus simple et le plus critique, est la rupture dite « fragile », c'est-à-dire une rupture sans déformation plastique apparente qui précède la ruine. On l'observe aisément pour les matériaux fragiles (verre, céramiques), mais également pour des matériaux ductiles dans certains cas de sollicitation, notamment en mécanique de la rupture lors de la présence de défaut de forme (TP mouton de Charpy PeIP 2) ou même dans les polymères à basse température ou encore pour certains aciers dans des conditions particulières (transition ductile/fragile).

Pour cette ruine par rupture fragile, Rankine à établi en 1858 que la rupture se produit dans le plan perpendiculaire à la plus grande des contraintes principales. Il propose donc de ramener l'ensemble du tenseur des contraintes à une contrainte équivalente, au sens de la contrainte de traction unidirectionnel qui produirait la rupture. Ainsi la contrainte équivalente de Rankine est définie comme étant la plus grande contrainte principale positive :

$$\sigma_R = \max_i(0, \sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$$

Ce critère est parfait pour les matériaux présentant une rupture de type fragile (céramiques, verres, béton, certains aciers ou polymères dans certaines conditions, ...), mais il est complètement inadapté pour la ruine par plasticité.

On notera que le calcul de la contrainte équivalente de Rankine requiert au préalable la détermination des contraintes principales. De plus pour interpréter convenablement cette contrainte, il faut également définir les directions principales.

L'expression et le sens physique de cette contrainte équivalente sont à connaître par cœur.

7.2.2. Tresca

La plasticité des métaux est liée au glissement des dislocations (voir cour de matériaux). Ce glissement est essentiellement activé par des contraintes internes de cisaillement. Il convient donc, d'après Tresca, de définir la contrainte de cisaillement maximale subit par le milieu continu. Cela revient à chercher le maximum de la composante de cisaillement du vecteur contrainte :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} = \sigma_n \vec{n} + \tau \vec{t}$$

Comme vue au § 4.2, la composante normale est :

$$\sigma_n(M) = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

Et la composante tangentielle est :

$$\tau \vec{t} = \vec{n} \wedge (\vec{T}(M, \vec{n}) \wedge \vec{n}) = \vec{T}(M, \vec{n}) - \sigma_n \vec{n}$$

Considérons un cas dis de « contrainte plane », c'est-à-dire un cas où il n'y a des contraintes que dans un plan. Dans ce cas, le tenseur des contraintes dans la base des contraintes principales est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$$

Et une normale à une facette dans le plan (\vec{e}_1, \vec{e}_2) aura l'expression suivante :

$$\vec{n} = \cos\theta \vec{e}_1 + \sin\theta \vec{e}_2$$

D'où

$$\tau \vec{t} = \vec{n} \wedge (\vec{T}(M, \vec{n}) \wedge \vec{n}) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sigma_I \cos\theta \\ \sigma_{II} \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau \vec{t} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_I \cos\theta \sin\theta - \sigma_{II} \sin\theta \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\tau \vec{t} = \begin{pmatrix} \sigma_I \cos\theta \sin^2\theta - \sigma_{II} \sin^2\theta \cos\theta \\ -\sigma_I \cos^2\theta \sin\theta + \sigma_{II} \sin\theta \cos^2\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin(2\theta) \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en contrainte plane, le cisaillement sur une facette faisant un angle θ avec la direction de sollicitation principale est tel que :

$$\tau = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin(2\theta)$$

Le maximum du cisaillement sera donc atteint pour un angle de 45 degré et la valeur du cisaillement maximum sera égale à la moitié de la différence des contraintes principales. Il est possible de généralisé ce résultat au cas d'une sollicitation quelconque en considérant une normale quelconque en repérage sphérique et l'on obtient que le cisaillement maximal dans un plan i,j est donnée par :

$$\tau_{IJ} = \frac{|\sigma_I - \sigma_J|}{2}$$

La contrainte équivalente de **Tresca (1814-1885)** correspond au cisaillement maximal présent au sein du volume. Celui-ci est donc déterminé à partir de la connaissance des contraintes principales par la relation suivante :

$$\tau_{max} = \max_{I,J} \left(\frac{|\sigma_I - \sigma_J|}{2} \right)$$

Cette contrainte équivalente est bien appropriée pour la plastification ductile.

On notera que le calcul de la contrainte équivalente de Tresca requiert au préalable la détermination des contraintes principales. Puis la recherche du maximum de la différence des contraintes principales. Cette étape supplémentaire rend cette contrainte équivalente plus longue à déterminer que celle de Rankine. De plus pour interpréter convenablement cette contrainte, il faut également définir les directions principales et ensuite identifier la direction de cisaillement maximal.

L'expression et le sens physique de cette contrainte équivalente sont à connaître par cœur.

7.2.3. Von Mises (1913)

Reprenant l'idée de Tresca, Von Mises s'intéresse non plus au cisaillement maximal, mais à l'énergie de déformation de cisaillement. Son idée est que c'est le fait que le niveau d'énergie apporté au matériau dépasse sa capacité de stockage sous forme de déformation élastique (variation de paramètre de maille) qui déclenche une déformation plastique (glissement de plan atomique, mouvement de lacunes).

Pour établir la contrainte équivalente de Richard von Mises (1913) nous allons développer une approche énergétique, distinguant ce qui entraîne une variation de forme (i.e. cisaillement) de ce qui entraîne une variation de volume (pression hydrostatique).

Soit la densité locale (volumique) d'énergie de déformation dans la pièce considérée :

$$E_D = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$2E_D = \left(\frac{I_1}{3} \mathbb{I} + \mathbb{S} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}} = \left(\frac{I_1}{3} \mathbb{I} + \mathbb{S} \right) : \left(\frac{1+\nu}{E} \mathbb{S} + \frac{1-2\nu}{E} \frac{I_1}{3} \mathbb{I} \right)$$

Après calcul :

$$E_D = \frac{1-2\nu}{6E} I_1^2 + \frac{1+\nu}{2E} \mathbb{S} : \mathbb{S}$$

La part responsable d'un changement de forme, piloté par le cisaillement, et responsable de la plasticité selon Von Mises, est :

$$W_D = \frac{1+\nu}{2E} \mathbb{S} : \mathbb{S}$$

On peut aisément établir que dans le cas d'un essai de traction, lorsque l'on commence tout juste à plastifier :

$$W_D = \frac{(1+\nu) \sigma_y^2}{E} \frac{1}{3}$$

Von Mises définit alors la contrainte de traction uni-axiale équivalente comme étant celle qui produirait le même niveau d'énergie de distorsion que l'état de contrainte triaxial, soit :

$$\frac{1+\nu}{2E} \mathbb{S} : \mathbb{S} = \frac{(1+\nu) \sigma_{VM}^2}{E} \frac{1}{3}$$

D'où :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbb{S} : \mathbb{S}}$$

Cette contrainte équivalente, relativement bien fondée physiquement, est en outre objective. En effet,

$$J_2 = \mathbb{S} : \mathbb{S} = (I_1(\mathbb{S}))^2 - 2I_2(\mathbb{S})$$

Est un invariant du déviateur (car composition des invariants).

Cette contrainte équivalente est très rapidement calculée numériquement, sans aucune recherche des contraintes principales et/ou directions associés, à l'opposé des contraintes équivalentes de Tresca et de Rankine, d'où son succès dans les outils de simulation numérique. Cependant, cette contrainte équivalente est plus pauvre intrinsèquement car elle ne permet pas d'identifier une direction particulière d'endommagement. C'est une vision exclusivement isotrope.

En développant l'expression du déviateur en fonction des contraintes principales, il est possible d'établir l'expression suivante de la contrainte équivalente de Von Mises en fonction des contraintes principales (voir TD) :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]}$$

Cette expression, utile lors de calculs à la main effectué dans la base principale des contraintes, n'est d'aucune utilité lors des résolutions numérique, à l'opposé de l'expression précédente en fonction du déviateur des contraintes.

Les deux expressions (en fonction du déviateur des contraintes et en fonction des contraintes principales) ainsi que le sens physique de cette contrainte équivalente sont à connaître par cœur.

7.3. Critère de tenue mécanique

Un critère de tenue mécanique est une fonction qui définit ce que l'on appelle un domaine acceptable pour le tenseur des contraintes. La frontière du domaine, (le plus souvent élastique) est appelé surface seuil.

Mathématiquement, une surface seuil est défini par :

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_{eq} - \sigma_{seuil} = 0$$

Le critère de tenue mécanique (ou de non plastification ou encore de non endommagement) s'écrit alors :

$$f(\underline{\sigma}) \leq 0$$

L'usage amène souvent à écrire

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_{seuil}$$

Le choix d'une contrainte seuil et d'une contrainte équivalente constitue un critère. Pour que le critère ainsi construit soit prédictif il faut bien évidemment faire des choix judicieux.

7.3.1. Critère de rupture de Rankine

Le critère de Rankine s'intéresse à une rupture brutale entraînée par une forte traction, c'est un critère de rupture, il est donc pertinent de choisir une contrainte ultime de rupture comme seuil :

$$\sigma_R = \max_i(0, \sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \leq R_m$$

Où R_m est la limite a rupture en traction uni-axiale. Ce critère fonctionne d'autant mieux que le matériau est fragile. Attention à ne pas utiliser Rankine en plasticité !

La surface seuil correspondante est :

$$f(\underline{\sigma}) = \max_i(0, \sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) - R_m$$

7.3.2. Critère de plasticité de Tresca

Le critère de Tresca s'intéresse à la plastification d'un matériau et postule que la plasticité survient par cisaillement maximum (glissement des dislocations). Il peut donc apparaitre pertinent de considérer la limite en cisaillement (i.e. glissement) comme contrainte seuil :

$$\tau_{max} = \max_{I,J} \left(\frac{|\sigma_I - \sigma_J|}{2} \right) \leq \tau_g$$

Où τ_g est la limite au glissement ou limite en cisaillement.

Lors d'un essai de traction le cisaillement est maximal selon un angle à 45° par rapport à la direction de traction (voir le §7.2.2 et adapter). En effet si on considère un essai de traction de direction \vec{y} et une normale orienté par θ par rapport à \vec{x} , alors le cisaillement induit est :

$$\tau = \vec{t} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = -\sigma \cos\theta \sin\theta = -\frac{\sigma}{2} \sin(2\theta)$$

D'où un cisaillement maximum à 45° et d'une valeur maximale :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}$$

Ainsi, si on considère la limite élastique en traction R_e on obtient :

$$\tau_g = \frac{R_e}{2}$$

D'où l'expression du critère de Tresca suivante :

$$\max_{I,J} (|\sigma_I - \sigma_J|) \leq R_e$$

ATTENTION : la limite en cisaillement obtenue par un essai de torsion est une donnée légèrement différente car le calcul de la contrainte de cisaillement est fait dans ce cas selon une vision « RdM ». Ainsi, dans ce cas, pour les aciers notamment, on trouve en général une limite un peu supérieure à celle déduite de l'essai de traction.

$$0,5 R_e \leq R_{eg} \leq 0,8 R_e$$

Cependant, la méconnaissance de la limite en cisaillement (essais moins courant que l'essai de traction) fait que l'on privilégie très souvent la donnée issue de l'essai de traction. D'où l'usage récurrent de la formulation suivante :

$$\max_{I,J} (|\sigma_I - \sigma_J|) \leq R_e$$

Attention, sous cette forme le critère de Tresca est très conservateur. Le critère de Tresca est largement validé pour les matériaux ductiles, i.e. l'essentiel des métaux et alliages.

La fonction seuil du critère de Tresca est donc

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \max_{I,J} \left(\frac{|\sigma_I - \sigma_J|}{2} \right) - \tau_{max} = \max_{I,J} (|\sigma_I - \sigma_J|) - R_{e_{traction}}$$

7.3.3. Critère de plasticité de Von Mises

La contrainte équivalente de Von Mises correspond à la contrainte de traction unidirectionnelle qui génèrerait la même énergie de distorsion que l'état tridimensionnel considéré. Il est donc pertinent de considérer la limite élastique du matériau comme contrainte seuil.

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbb{S} : \mathbb{S}} \leq R_e$$

La fonction seuil correspondante est :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbb{S} : \mathbb{S}} - R_e$$

Ou encore

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq R_e$$

7.3.4. Comparaison des critères

Le tenseur des contraintes est entièrement décrit par la connaissance de ses trois contraintes principales (et des directions associés), ou de ses trois invariants principaux. Il est donc d'usage de représenter les états de contraintes et les surfaces seuils dans le repère des contraintes principales et, parfois, dans celui des invariants principaux.

Pour se familiariser avec ce type de représentation, nous allons représenter les surfaces seuils de Rankine, Tresca et Von Mises dans le cas particulier d'un état de contraintes planes tel que σ_3 soit nul :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le critère de Rankine devient alors :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \max_i(0, \sigma_1, \sigma_2) - R_r \leq 0$$

Cela définit un demi-plan infini en compression... Certains auteurs le limite en compression et parle de plasticité : danger ! Il faut garder à l'esprit que l'approche de Rankine fonctionne bien pour les ruptures fragiles qui, par définition, surviennent dans des cas où il n'y a pas de plasticité.

Le critère de Tresca, dans ces conditions, devient alors :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \max_{i,j} (|\sigma_1 - \sigma_2|; \sigma_1; \sigma_2) - 2R_{eg} \leq 0$$

Cela définit un hexaèdre non régulier.

Le critère de Von Mises devient alors :

$$f(\underline{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_1)^2]} - R_e$$

Cela correspond à une ellipse, centré en 0 et dont le grand axe est à 45°.

L'ensemble de ces trois surfaces seuils est représenté sur la Figure 13 dans le cas général. Souvent l'hypothèse est faite que $R_e = R_r$. Dans ce cas les trois critères sont égaux en certains points qui correspondent à des sollicitations particulières : traction uni-axiale, traction equi-biaxiale. Il existe des points d'égalités en plus pour les critères de Tresca et de Von Mises : compression uni-axiale et compression equi-biaxiale.

Lors de sollicitations composés, le plus restrictif est le critère de Tresca et le plus optimiste celui de Rankine. En pratique, en sollicitation 3D complexe, il à été expérimentalement établi que la surface seuil réelle est entre celle de Von Mises et celle de Tresca.

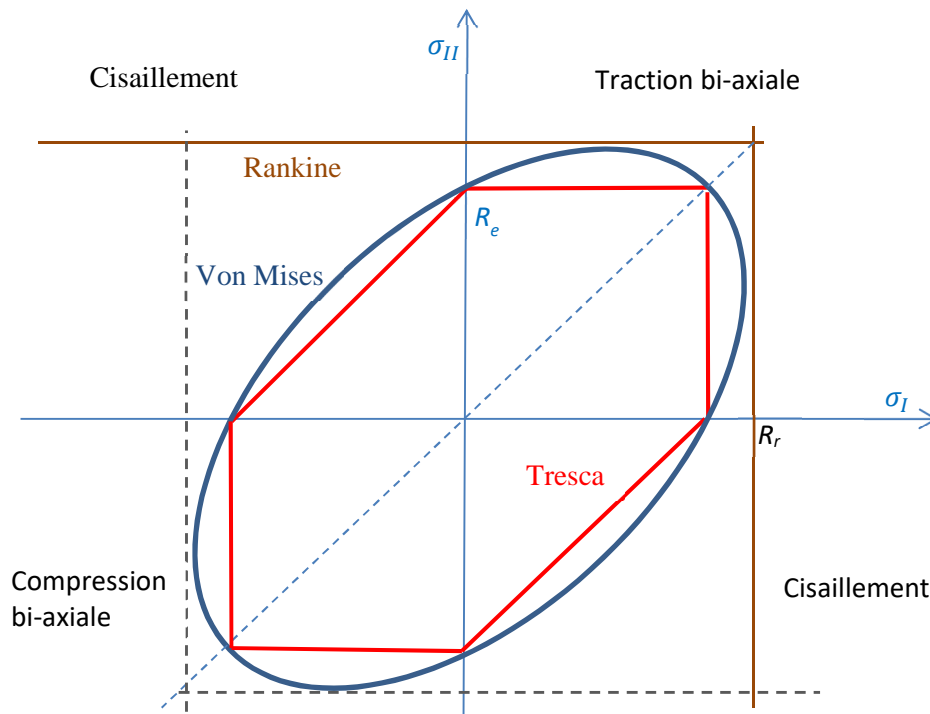


Figure 13 : représentation des surfaces seuils dans le plan des contraintes principales en contrainte planes

Le plus grand écart entre Von Mises et Tresca est observé pour un cisaillement pur, soit $\sigma_1 = -\sigma_2$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max_{i,j} (2\sigma; \sigma; -\sigma) = \sigma \leq \frac{R_e}{2}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_1)^2]} = \sqrt{3}\sigma = \sqrt{3}\sigma \leq R_e \text{ soit } \sigma < \frac{R_e}{\sqrt{3}}$$

Le rapport des valeurs ultime donne :

$$\frac{Tresca}{Mises} = \frac{R_e \sqrt{3}}{2 R_e} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86$$

soit moins de 15% d'écart

C'est écart maximale est relativement faible au regard des incertitudes de mesures des propriétés mécaniques des matériaux combinés aux incertitudes liés aux hypothèses de modélisation et aux approximations faites pour la résolution des problèmes (analytique ou numérique).

7.3.5. Remarque générale

Dans l'espace des contraintes principales 3D, les critères de Von Mises et Tresca définissent tous les deux un cylindre d'axe la trisectrice (vecteur direction 1,1,1), mais l'un avec une base octogonale (Tresca) et l'autre avec une base circulaire (Von Mises).

Ces critères sont invariant le long de cet axe, qui représente la part sphérique du tenseur des contraintes (trace de σ). Donc, on peut avoir une pression infinie car celle-ci n'a pas d'effet sur la tenue, seul l'écart relatif entre les contraintes principales compte... C'est une des limites majeures des critères isotropes : ils ne prévoient aucune limite en equi-compression triaxiale ni pour aucune autre sollicitation de ce type. Ils sont insensibles à l'effet de confinement.

Pour beaucoup de matériaux, voir tous pour une pression de confinement très élevé, on observe l'existence d'une limite après laquelle le matériau présente une évolution non négligeable :

- Compaction : sol, sable, pisé, tissus, ...
- Dilatance : milieux granulaires

Pour cela, il existe des critères (et des lois de comportement) qui prennent en compte l'effet du premier invariant, on parle de comportement « compactant ». Ils seront vus par certains, plus tard, peut être...

8. Cercles de Mohr (1882)

Il existe un autre domaine de représentation de l'état de contrainte, appelé Cercles de Mohr, qui correspond à une représentation du vecteur contrainte dans un espace (contrainte normale, contrainte tangentielle) usuellement noté (σ_n, τ) . Dans ce repère, les états de contraintes décrivent des formes géométrique simple, ce qui a longtemps permis de réaliser les calculs pendant toute la période qui s'est écoulé de 1882 à environs 1990, soit 110 ans. Cette représentation présente l'avantage d'obtenir rapidement un résultat assez juste (à la précision du graphique près !).

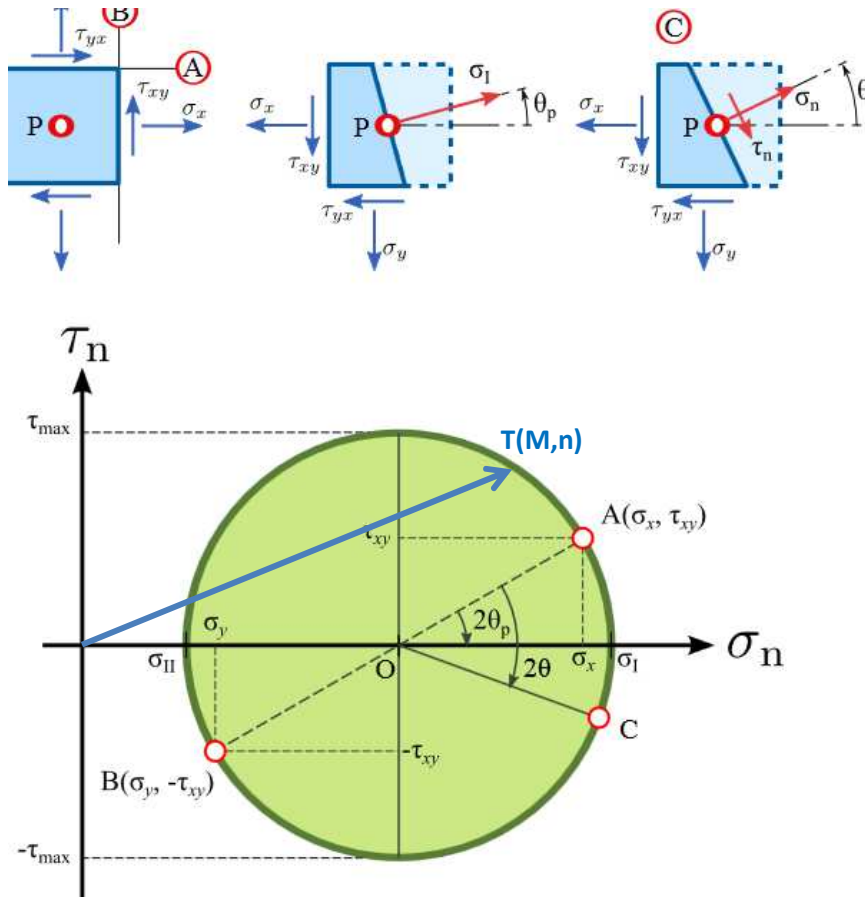


Figure 14 : principe du diagramme (σ, τ)

Soit un tenseur de contrainte donnée, son expression dans sa base propre est :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Par définition, la composante normale du vecteur contrainte sur la facette de normal \vec{n} est :

$$\sigma_n = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n} = \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} \cdot \vec{n}$$

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

Et la composante tangente dans le plan de normale \vec{n} est tels que :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{pmatrix} = \sigma_n \vec{n} + \tau \vec{t}$$

D'où

$$\sigma_n^2 + \tau^2 = (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2$$

De plus, la normale doit être unitaire, d'où le système d'équation :

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ \sigma_n^2 + \tau^2 = (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}$$

Considérons le cas d'une sollicitation quelconque bi-axiale selon les directions principales 1 et 2, dès lors $\vec{n}_3 = \vec{0}$. Alors, les équations 1 et 3 du système précédent permettent d'établir que :

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{\sigma_n - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \\ n_2^2 = \frac{\sigma_n - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} \end{cases}$$

En injectant cela dans l'équation 2 du système puis en réorganisant, nous obtenons :

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2$$

Donc, quelque soit la facette de normale \vec{n} considéré, les coordonnées (σ_n, τ) du vecteur contrainte sont sur un cercle de centre $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$ et de rayon $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ dans le repère (σ, τ) . Lorsque l'on fait tourner la facette, donc la normale, on décrit l'ensemble du cercle. Un calcul identique permet d'établir l'existence de deux autres cercles pour les sollicitations bi-axiales selon les directions principales (2,3) et (3,1).

Il est possible de démontré que, pour un cas pleinement tri-axe, l'état de contraintes se situe dans la surface délimité par les trois cercles de Mohr des états de contraintes bi-axiaux. Ainsi, la connaissance des directions principales permet de reproduire aisément l'ensemble des états de contraintes possible.

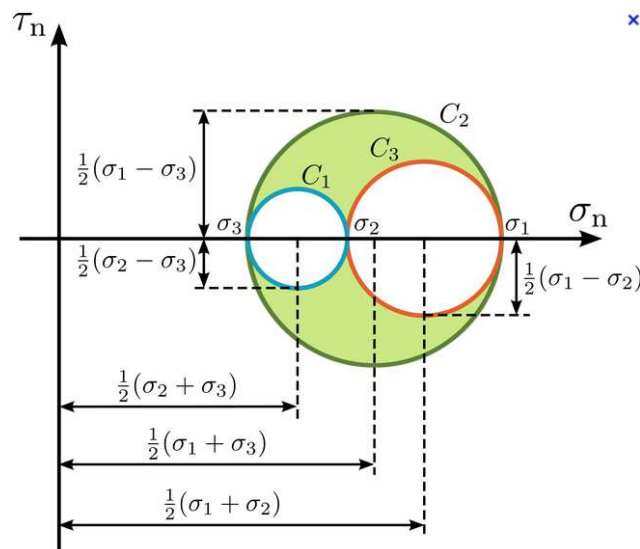


Figure 15 : tri-cercle de Mohr

Mohr a établi que l'angle θ_p de la Figure 14 était égale au double de l'angle de la facette par rapport aux directions principales. On retrouve ainsi un cisaillement maximale pour $\theta_p=90^\circ$ soit pour une facette à 45° de la direction principale de traction. (Ouf !)

8.1. Critères dans le diagramme de Mohr

Le critère de Tresca correspond au cisaillement maximale admissible, il est donc représenté par une droite horizontale dans le diagramme de Mohr.

Le critère de Rankine correspond à la traction maximale, il est donc représenté par une droite verticale dans le diagramme de Mohr.

Le critère de Von Mises est une composition des carrés des contraintes principales. Il peut être interprété comme la traction uni-axiale équivalente et correspond par conséquent à deux bornes sur l'axe des contraintes normales ?

9. Initiation à la thermomécanique

9.1. Partition de la déformation

En HPP l'hypothèse de partition des déformations se traduit par une sommation des différents termes constituant la déformation totale, attention, en grande déformation c'est différent (produit d'opérateur linéaire tangent), d'où :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p + \varepsilon_T$$

Avec les indices T pour thermique, e pour élastique et p pour plastique.

9.2. Dilatation thermique

Traditionnellement le coefficient de dilatation thermique est défini tel que :

$$\varepsilon_T = \alpha(T - T_0)$$

Où T_0 est la température pour laquelle on considère la déformation thermique nulle. On parle également d'état libre de contrainte thermique. Ce point est souvent à l'origine d'erreur dans les calculs : il faut bien définir quelle est cette T_0 et calculer le coefficient de dilatation en conséquence :

$$\alpha(T) = \frac{\varepsilon(T)}{T - T_0}$$

Cette définition est celle d'un coefficient sécant, pas d'un coefficient tangent. Ce point est essentiel car beaucoup de confusions et d'erreurs sont induites par l'usage du coefficient tangent (usuel en génie des matériaux) en lieu et place du coefficient sécant (usuel en mécanique).

Le terme concernant la déformation thermique n'est pas nécessairement isotrope. Il convient alors d'utiliser un tenseur de dilatation :

$$\varepsilon_T = (T - T_0) \underline{\underline{\alpha}}$$

9.3. Loi de comportement

D'une façon générale la loi de Hooke ne porte que sur la part élastique du comportement, soit :

$$\sigma = \sigma_0 + \lambda \text{Tr}(\varepsilon_e) I + 2\mu \varepsilon_e$$

Or, de par l'hypothèse de partition des déformations :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p + \varepsilon_T$$

Donc

$$\sigma = \sigma_0 + \lambda \text{Tr}(\varepsilon) I + 2\mu \varepsilon - (3\lambda + 2\mu)(\varepsilon_T + \varepsilon_p)$$

Soit en l'absence de plasticité et en considérant l'expression de la déformation d'origine thermique :

$$\sigma = \sigma_0 + \lambda \text{Tr}(\varepsilon) I + 2\mu \varepsilon - (3\lambda + 2\mu)(T - T_0)\alpha I$$

Inversement

$$\varepsilon = \frac{-\nu}{E} \text{Tr}(\sigma - \sigma_0) I + \frac{1+\nu}{E} (\sigma - \sigma_0) + \alpha(T - T_0) I$$

Il est intéressant de noter que la variation volumique s'obtient en prenant la trace du tenseur des déformations :

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E} \text{Tr}(\sigma - \sigma_0) + 3\alpha(T - T_0)$$

Le tiers de la trace du tenseur des contraintes représente la partie sphériques qui n'est autre que la pression hydrostatique au sens « plongée dans un fluide », on obtient donc

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta p}{K} + 3\alpha\Delta T$$

Où K représente la compressibilité du solide, exprimé en MPa. On retrouve une relation de type volume / pression / température (P,V,T) ou loi d'état de type thermodynamique « classique ». Une élévation de température à volume constant (dilatation bloqué) produit une pression (contrainte) directement proportionnelle au chargement :

$$p = -3K\alpha(T - T_0) \text{ en dilatation bloqué.}$$

$$e = 3\alpha\Delta T \text{ en dilatation libre}$$

$$e = \frac{\Delta p}{K} \text{ en élasticité isotherme}$$

Attention au signe : une dilatation bloquée entraîne une compression.