UNE INTRODUCTION A LA DIDACTIQUE[1]

Annie Bessot, Université Grenoble Alpes, équipe MeTAH, Laboratoire LIG

À l'origine du mouvement théorique sous l'étiquette (malheureuse) « didactique des mathématiques » en France est l'idée qu'il est possible de décrire, d'expliquer de façon rationnelle les phénomènes d'enseignement, phénomènes qui suscitent en général davantage l'empirisme ou l'opinion que le discours raisonné.

> Un des soucis largement partagés au sein de la communauté française de didactique des mathématiques est celui de l'établissement d'un cadre théorique original développant ses propres concepts … Un large consensus se fait aussi sur l'exigence méthodologique d'avoir recours à l'expérimentation en interaction avec la théorie… (Laborde, 1989).

On pourrait définir dans un premier temps la didactique comme la science des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances utiles au fonctionnement des institutions humaines.

Je présenterais dans ce cours des éléments d'introduction à trois cadres théoriques ayant une ampleur et une cohérence significatives. Dans l'ordre, la théorie des champs conceptuels, la théorie des situations didactiques (TSD) et la théorie anthropologique du didactique (TAD). De plus, ces trois cadres théoriques se complètent et certains concepts sont communs.

I. INTRODUCTION A LA THEORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS

Références principales: G.Vergnaud (1990), J.Brun (1993)

La théorie des champs conceptuels dont l'initiateur est Gérard Vergnaud occupe une position particulière dans le champ de la didactique, celle d'une théorie cognitiviste, Vergnaud étant avant tout un psychologue.

> La théorie des champs conceptuels est une théorie cognitiviste qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage de compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques (Vergnaud, 1990)

C'est un point de vue résolument psychologique dans le prolongement de l'épistémologie génétique de Piaget. Elle n'a pas pour ambition d'être une théorie didactique, mais celle de fournir un cadre pour l'étude de l'apprentissage des individus, c'est à dire un cadre pour analyser la formation et le fonctionnement de leurs connaissances

> C'est une théorie psychologique du concept, ou mieux encore de la conceptualisation du réel.… Sa principale finalité est de fournir un cadre qui permette de comprendre les filiations et les ruptures entre connaissances, chez les enfants et les adolescents, en entendant par « connaissances » aussi bien les savoirs-faire que les savoirs exprimés.

L'originalité de cette démarche est d'avoir développé des outils théoriques prenant en compte une double exigence qu'il décrit ainsi :

> La psychologie cognitive est confrontée au double problème de tenir compte au plus près des savoirs sociaux constitués (scientifiques, techniques, culturels, pratiques …) *et en*

[1] Ce texte s'appuie sur les cours que j'ai donnés dans le cadre du DEA puis dans celui du Master 2 de didactique des sciences, donnés en particulier à l'Université Joseph Fourier de Grenoble de 1995 à 2007.

> *même temps de ne pas rester prisonnière de leur description actuelle*[2], de manière à analyser au plus près la formation et le fonctionnement des connaissances des sujets individuels (Vergnaud, 1984)

Ce qui l'amène à caractériser ainsi son approche :

> Une approche psychologique et didactique de la formation des concepts mathématiques conduit à considérer un concept comme un ensemble d'invariants utilisables dans l'action. La définition pragmatique d'un concept fait donc appel à l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis en œuvre par les sujets dans ces situations (idem)

I.1 Schèmes et invariants

> L'unité de base de cette architecture de filiations et de ruptures est le schème « organisation invariante de la conduite pour une classe de situations » … Un schème chez un sujet n'est qu'à l'état de virtualité et c'est l'action en situation qui décidera en quelque sorte de l'individuation du schème (Brun, 1993)

La théorie des champs conceptuels tient compte d'une part des aspects *structuraux* des schèmes en les analysant en terme d'invariants opératoires, et d'autre part précise la *fonctionnalité* des schèmes pour le processus de transformation des connaissances au travers de situations centrées sur des concepts.

Pour Vergnaud (1995) les principaux invariants opératoires sont de deux types : théorème en acte et concept en acte.

Théorèmes en acte

Ce sont des invariants de type « proposition » : ils sont tenus *pour vrai* dans le fonctionnement de l'activité.

Exemple. Pour illustrer le concept de théorème en acte je prendrais un exemple fourni par Conne (1992) :

> … prenons comme exemple la commutativité. A la source c'est donc un savoir mathématique qui prend son sens dans un contexte mathématique abstrait (structures algébriques). Un nouvel usage lui est conféré quand ce savoir mathématique permet au psychologue de considérer comme significatif un comportement d'enfant, par exemple, dans un contexte de comptage, la commutation des facteurs d'une addition lorsque le premier facteur est plus petit que le second (2+7 est commuté en 7+2 pour être compté : 7,8,9 selon une procédure de comptage continué). Si le comportement est suffisamment stable, on conclura à partir de cette correspondance entre la commutativité mathématique et cette sorte de commutativité observée dans le traitement de l'enfant, qu'il y a bien théorème en acte[3].

Concept en acte

Ce sont les invariants de type « fonction propositionnelle » : ils ne sont pas susceptibles d'être vrai ou faux, mais ils constituent des briques indispensables à la construction des propositions. Ils sont tenus *comme pertinents* pour la prise d'informations.
Exemple : concepts de cardinal et de collection, ceux d'état initial, de transformation

Ces concepts sont rarement explicités par les élèves alors qu'ils sont construits par eux

---

[2] C'est moi qui souligne

[3] Que l'on peut exprimer par « 2+7 = 7+2 ».

dans l'action.

Un concept en acte n'est pas tout à fait un concept, ni un théorème en acte un théorème.

I.2. Concept

Gérard Vergnaud va donner une définition des concepts dans la logique de sa problématique, à savoir une définition « pragmatique » :

…un concept est un triplet de trois ensembles : C = (S, I, *S*)
S : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)
I : l'ensemble des invariants opératoire sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes
S : l'ensemble des formes langagières et symboliques qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement.

Cette définition sera reprise par nombre de chercheurs en didactique pour la notion de conception dont je parlerais plus loin.

I.3. Champ conceptuel

Si la première entrée d'un champ conceptuel est celle des situations, on peut aussi identifier une deuxième entrée, celle des concepts et des théorèmes.

Le champ conceptuel des structures additives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs additions ou soustractions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques.

Ce cadre théorique conduit à une méthodologie selon trois plans d'analyse systématiques et simultanées (correspondant au triplet C = (S, I, *S*)) le plan des situations, le plan des invariants (modèles des conduites de élèves), le plan des représentations symboliques.

Conseil de lecture illustrative de cette définition : exemple des structures additives (Vergnaud, 1990, p. 152)

Autres définitions de champ conceptuel :

• Première entrée :
Ensemble de situations dont la maîtrise progressive appelle une variété de concepts, de procédures et de représentations symbolique en étroite connexion, mais aussi ensemble de concepts qui contribuent à la maitrise de ces situations. (Exposé oral de Vergnaud, 1995)

• Deuxième entrée :
… réseau composé de plusieurs concepts : au centre le concept étudié et autour, lié à lui, ceux qui sont nécessaires pour lui donner sens. (Héjer Dabaji, mémoire de DEA, 1995, p.5)

Dabaji (1995) atteste par une étude « épistémologique » de l'inscription du concept de relations alimentaires dans 4 champs conceptuels : celui de comportement alimentaire, celui de biocénose[4], celui de population, et enfin celui d'écosystème. A ces 4 champs conceptuels sont associés 4 significations différentes du concept de relations alimentaires.

[4] Ensemble des êtres vivants qui occupent un milieu donné (le biotope), en interaction les uns avec les autres et avec ce milieu. (La biocénose forme, avec son biotope, un écosystème).

II. INTRODUCTION A LA THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES (TSD)

Remarque. Ce préambule est aussi valable pour la TAD.

Les chercheurs en didactique affirment la spécificité de leur discipline par rapport aux autres domaines proches, en particulier par rapport à la psychologie, point de vue de la théorie précédente.

> Pour produire, améliorer, reproduire, décrire et comprendre les situations d'enseignement des mathématiques, il est devenu nécessaire - et possible - de théoriser cette activité d'enseignement en tant qu'objet original d'étude et non pas en tant que simple conjonction de faits théorisables uniquement dans des domaines autonomes comme la pédagogie, la sociologie, la psychologie, les mathématiques, la linguistique ou l'épistémologie. (Brousseau, résumé thèse, 1986)

La métaphore du labyrinthe peut permettre de mieux comprendre ce qui différencie la problématique du didacticien de celle du psychologue :

> Le psychologue […] étudie le comportement du rat dans le labyrinthe ; mais il connaît la structure du labyrinthe, qu'il a lui-même conçue. Le didacticien, en revanche, ne connaît pas la structure du labyrinthe dans lequel l'élève est lancé. Il devra donc d'abord, logiquement, chercher à l'explorer. Pour cela renversant la perspective du psychologue, il pourra même observer le comportement du « rat » (l'élève !) à l'intérieur du labyrinthe pour en déduire la structure du labyrinthe … (Chevallard, 1989)

Les concepts théoriques issus d'un domaine disciplinaire particulier, celui des mathématiques, sont-ils spécifiques de cette discipline ?

On constate actuellement l'utilisation par des chercheurs en didactique d'autres disciplines (comme par exemple, l'éducation physique et sportive, la physique, etc.) de certains de ces concepts.

Je prendrais comme hypothèse que certains concepts théoriques issus de la didactique des mathématiques ont un caractère générique : ils permettent dans des situations particulières de générer des questions et des résultats qui eux sont spécifiques d'un savoir particulier.

Ce qui définit les positions « professeur », « élève » est le projet du système didactique qui est de passer d'un état initial à un état final vis à vis du savoir, enjeu d'apprentissage.

> Du point de vue de la relation au savoir, il y a une *dissymétrie,* qui est constitutive du système didactique. Nous ne dirons pas que l'élève n'entretient aucune relation au savoir avant l'enseignement, mais simplement que dans l'état initial, cette relation est peu ou pas adéquate. Sans l'hypothèse de cette dissymétrie, le système didactique n'a pas lieu d'être. (Margolinas, 1993)

Le professeur se distingue de l'élève en ce qu'il est « supposé savoir », mais aussi en ce qu'il est « supposé capable » d'anticiper sur ce que l'élève va avoir à apprendre.

De plus le système didactique a une caractéristique particulière, celle d'avoir pour finalité de disparaître : si l'enseignant réussit dans sa mission, il doit pouvoir se retirer, et *l'élève doit pouvoir maintenir sa relation au savoir hors de sa présence.*

Mais qu'est-ce que l'apprentissage dans une situation didactique ?

Le projet de l'élève est d'apprendre.

> Une idéologie très répandue suppose un lien de simple transfert de l'enseignement vers l'apprentissage : l'élève enregistre ce qui est communiqué par l'enseignant avec peut être

quelques pertes d'informations. (Laborde, 1989).

De nombreux travaux ont montré le caractère erroné de considérer l'apprentissage comme un simple enregistrement de ce qui est communiqué par autrui à autrui : l'apprentissage n'est pas un processus de simple transfert, ni un processus linéaire et continu.

Brousseau s'oppose à ce point de vue « naïf » sur l'apprentissage comme simple enregistrement mais aussi aux thèses constructivistes radicales. Il définit l'apprentissage comme suit.

Hypothèse sur l'apprentissage :

L'apprentissage est un double processus.

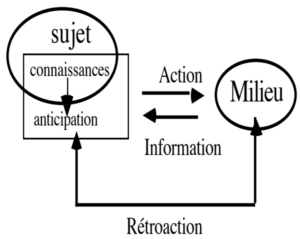
- un processus d'adaptation (assimilation et accommodation) à un *milieu* qui est producteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres : notion de milieu et de situation adidactique

- et un processus d'acculturation par l'entrée dans les pratiques d'une institution : notions de contrat didactique et d'institutionnalisation.

Dans un processus d'acculturation, il ne s'agit pas seulement de la modification d'une culture d'origine pouvant aller jusqu'à sa perte (déculturation) mais surtout de l'appropriation d'une nouvelle culture, celle de l'institution didactique.

Le processus d'adaptation se réfère à :

- la théorie psychogénétique piagétienne pour laquelle les notions de déstabilisation, déséquilibre et rééquilibration sont essentielles (Piaget 1975) ;
- la notion d'obstacle épistémologiques (Bachelard 1934) : en effet le choix des difficultés à faire rencontrer à l'élève en tant que sujet apprenant est centrale.



Situation d'apprentissage par adaptation

Exemple. Situation d'apprentissage : le vélo (citée par G.Brousseau, 1988)

Situation 1 : vélo à 4 roues, une à l'avant et trois en arrière

> Avec ces petites roues, l'enfant apprend à pédaler et à tourner le guidon suivant le modèle implicite suivant :
>
> • je veux aller à droite, je tourne le guidon vers la droite ;
>
> • je veux aller à gauche, je tourne le guidon vers la gauche.
>
> D -> D
>
> G -> G (Brousseau 1988, p.62)

Situation 2 : vélo à deux roues (on enlève les deux petites roues de l'arrière).

> […] l'enfant veut aller tout droit mais le vélo penche à droite, et donc se dirige vers la droite, l'enfant veut donc revenir vers la gauche et tourne son guidon vers la gauche suivant le modèle implicite acquis. Il tourne le guidon vers la gauche et … tombe !
>
> Pour garder l'équilibre {…] il doit d'abord tourner le guidon du côté où il penche pour obtenir une poussée qui le redresse, suivant donc un schéma inversé (momentané) mais indispensable.
>
> G -> D
>
> D -> G
>
> Le changement de schème est caractéristique de l'apprentissage. (op. cité, p.62)

Hypothèse didactique :

Un milieu sans intentions didactiques (c'est-à-dire non volontairement organisé pour enseigner un savoir) est insuffisant à induire chez un sujet toutes les connaissances que la société souhaite qu'il acquière.

Le professeur doit donc provoquer chez les élèves les adaptations souhaitées par un choix judicieux des situations qu'il lui propose.

> L'enseignant n'a pas pour mission d'obtenir des élèves qu'ils apprennent, mais bien de faire en sorte qu'ils puissent apprendre. Il a pour tâche, non la prise en charge de l'apprentissage - ce qui demeure hors de son pouvoir - mais la prise en charge de la création des conditions de possibilité de l'apprentissage. (Chevallard, 1985)

Les conséquences de ces hypothèses conduisent à introduire un modèle de la situation didactique : *situation adidactique* / *contrat didactique.*

> Brousseau a proposé un modèle relativement économique, un « noyau » adidactique, sur lequel vient se greffer une gestion didactique. (Conne, 1992)

II.1 Contrat didactique[5]

a. Le contrat didactique représente[6] *les droits et les devoirs implicites des élèves et de l'enseignant à propos d'objets, de savoir mathématique, enseignés.*

Ce que chacun a le droit de faire ou de ne pas faire à propos d'un savoir repose sur un ensemble de règles explicites mais surtout implicites. Brousseau a appelé contrat didactique l'ensemble de règles qui partage et limite les responsabilités de chacun, élèves et professeur, vis-à-vis d'un savoir mathématique enseigné.

Il a proposé ce concept en 1978 puis en 1980 pour expliquer l'échec d'élèves de l'école élémentaire *réussissant dans toutes les disciplines enseignées sauf en mathématiques* (échec électif en mathématiques) : les échecs électifs proviendraient non pas d'une inaptitude des élèves à apprendre mais de contrats didactiques spécifiques à tels ou tels savoirs mathématiques empêchant certains élèves d'entrer dans un processus d'apprentissage de ces savoirs.

Exemple. Le cas Gaël

> Gaël est un enfant intelligent mais en échec électif en mathématiques, c'est-à-dire qui ne réussit pas en mathématiques et qui réussit dans les autres disciplines. Il est l'un des neuf cas étudiés entre 1980 et 1985 (au COREM - Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques - de Bordeaux). En observant Gaël en classe et en lui proposant diverses situations, didactiques ou adidactiques, Guy Brousseau a émis l'hypothèse que Gaël mettait en œuvre une stratégie d'évitement du « conflit de savoir ».
>
> Il est possible de proposer des explications psychologiques à ce comportement, mais ces explications ne donnent pas de moyen de corriger les évitements, et elles centrent l'intérêt des chercheurs sur une caractéristique de l'enfant ou sur ses compétences, au lieu de rester au niveau des conditions qui le provoquent ou qui peuvent le modifier. Ces comportements manifestent le refus, conscient ou non, de la part de l'enfant, d'accepter sa part de responsabilité dans l'acte de décider en situation didactique et donc d'apprendre, face à un adulte. De cette observation a émergé le concept de contrat didactique.

Ci-après la définition du contrat didactique donnée par Brousseau (1980).

---

[5] Ce concept a été repris dans la TAD.

[6] Le contrat didactique est un *modèle* construit par le chercheur

> Au cours d'une séance ayant pour objet l'enseignement à un élève d'une connaissance déterminée *(situation didactique)*, l'élève interprète la situation qui lui est présentée, les questions qui lui sont posées, les informations qui lui sont fournies, les contraintes qui lui sont imposées, en fonction de ce que le maître reproduit, consciemment ou non, *de façon répétitive*[7] dans sa pratique de l'enseignement. Nous nous intéressons plus particulièrement à ce qui, dans ces habitudes, est spécifique des connaissances enseignées. (Brousseau, 1980)

Exemple 1. Relations ensemblistes au début du collège

Autour des années 1970 en France au niveau de la sixième (enfants de 11-12 ans) on faisait des cours sur les notions d'appartenance et d'inclusion[8]. Un exercice habituel sur ces notions était le suivant :

> Parmi les signes suivants $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ quel est celui qui convient ?
>
> $\{a\}$ .... $\{a, b, c\}$
>
> b .... $\{a, b, c\}$

Une étude d'un questionnaire de ce type (Duval et Pluvinage, 1977, cité par Tonnelle, 1979) montre que le comportement de réponses des élèves était réglés par un arbre de choix permettant de prendre des décisions :
- s'il y a des accolades « de chaque côté », il s'agit d'inclusion
- s'il y a des accolades « à droite » seulement, il s'agit d'appartenance
etc.

Les élèves pouvaient alors répondre correctement à la plupart des exercices sur ce sujet en sixième sans que la *signification mathématique* des relations ensemblistes joue un rôle.

Les élèves devant un certain nombre de problèmes qui se répètent sont amenés à apprendre des règles implicites (comme ici la présence ou l'absence d'accolades) leur permettant de répondre de façon économique au problème posé.

Exemple 2. Factorisation au collège [9]

Le professeur attendra d'un élève du collège placé devant la question « Factorise $16x^2 - 4$ » qu'il reconnaisse là l'occasion de mettre en oeuvre la règle de factorisation $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ et réponde $16x^2 - 4 = (4x - 2)(4x + 2)$, et que devant la question « Factorise « $4x^2 - 36x$ » l'élève reconnaisse une factorisation simple: $4x^2 - 36x = 4x(x - 9)$.

Les réponses toutes correctes $16x^2 - 4 = 2(8x^2 - 2)$ ou $16x^2 - 4 = 3(\frac{16}{3}x^2 - \frac{4}{3})$ ou $16x^2 - 4 = 16x^2(1 - \frac{1}{4x^2})$ $x \neq 0$ [10] seront éliminées ou n'auront pas l'occasion d'apparaître, *non pas parce que ne satisfaisant pas une condition mathématique préalablement formulée*[11], *mais comme un acte déviant par rapport à un code de conduites.*

> Le pouvoir de l'enseignant dans sa classe, ça n'est pas d'*interdire* (plus précisément : d'interdire de manière *directe*) la réponse $16x^2 - 4 = 2(8x^2 - 2)$, mais bien de *produire* la réponse $16x^2 - 4 = (4x+2)(4x-2)$. Son pouvoir consiste moins à désigner les «mauvaises

[7] c'est moi qui souligne par l'usage de l'italique.

[8] ce type d'exercices a disparu de l'enseignement actuel en France

[9] d'après Tonnelle (1979)

[10] qui sera une réponse adéquate en seconde au moment de l'apprentissage des limites des fonctions polynômes.

[11] comme factoriser dans Z[X] (ensemble des polynômes à coefficients entiers)

réponses», qu'à susciter *la* bonne réponse - qui désigne implicitement les autres réponses comme mauvaises. (Chevallard, 1985)

L'existence de règles implicites structurant fortement la conduite des élèves et celle de l'enseignant, modifie le statut de l'erreur : une erreur sera une réponse recevable et fausse. L'erreur surgit donc comme une faute sur le fond d'un modèle respectant le code de conduite (ou règle de contrat) : la réponse $16x^2 - 4 = 3(\frac{16}{3}x^2 - \frac{4}{3})$ est vraie, mais n'est pas recevable, la réponse $16x^2 - 3 = (4x - 3)(4x + 1)$ est erronée, c'est-à-dire *recevable et fausse*.

Ce que nous avons montré à propos de la factorisation n'est pas un cas pathologique vis à vis de l'enseignement d'un savoir, nous l'avons utilisé pour mettre en évidence un mécanisme général intervenant dans la communication didactique des savoirs. *L'étude du contrat didactique relatif à un savoir permet de tracer les limites de la signification du savoir enseigné pour l'élève.*

b. Contrat didactique et négociations entre les élèves et l'enseignant à propos du savoir

Au cours de l'enseignement d'un savoir, les règles de communication entre les élèves et l'enseignant, à propos d'objets de savoir, s'établissent, changent, se rompent et se renouent au fur et à mesure des acquisitions, de leur évolution et de l'histoire produite. Ces règles ne se présentent pas sous une forme unique et figée dans le temps, mais au contraire sont le fruit d'une négociation toujours renouvelée.

D'une part, les interactions entre l'enseignant et de l'élève obéissent à des règles localement stables et d'autre part, celles-ci ne sont pas immuables.

> Cette négociation produit une sorte de jeu dont les règles provisoirement stables permettent aux protagonistes et notamment à l'élève de prendre des décisions dans une certaine sécurité, nécessaire pour lui assurer l'indépendance caractéristique de l'appropriation. (Brousseau, 1986)

Ce processus de négociation est soumis à un certain nombre de paradoxes. Nous n'en examinerons ici qu'un : l'enseignant n'a pas le droit de dire à l'élève ce qu'il veut que l'élève fasse (sinon il ne joue pas son rôle d'enseignant) et pourtant il faut qu'il fasse en sorte que l'élève produise la réponse attendue (sinon il n'a pas réussi son enseignement).

De la même façon, si l'élève accepte que l'enseignant lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc il ne les apprend pas. Si, au contraire, il refuse toute information de la part de l'enseignant, alors il rompt la relation didactique.

Brousseau a caractérisé différents procédés de négociation pour obtenir des élèves la réponse attendue (que le professeur connaît et que l'élève ne connaît pas). L'effet Topaze[12] est l'une de ces formes : l'enseignant essaie de faire en sorte que le sens de la réponse soit le plus riche possible. En cas d'échec, il ajoute des informations réductrices du sens, jusqu'à accepter des conditions qui provoquent la réponse de l'élève sans que ce dernier ait pu investir le moindre sens.

Exemple 3. Tracé de l'axe de symétrie avec règle non graduée et équerre (D'après Grenier 1989)

Référence : voir annexes II et III

Le projet de l'enseignant est que les élèves utilisent les propriétés géométriques suivantes pour justifier le tracé de l'axe de symétrie :

---

[12] En référence à la pièce de théâtre « Topaze » de l'écrivain Marcel Pagnol dans lequel un enseignant rajoute de plus en plus d'informations pour que l'élève ne fasse pas d'erreurs d'orthographe jusqu'à la caricature : « des moutonsses étai-hunt réunisse… »

P2 (propriété d'orthogonalité) : la droite de symétrie d'une figure est orthogonale au segment joignant deux points symétriques.

P3 (propriété d'incidence) : soient (A,A') et (B,B') deux paires de points symétriques : le point d'intersection des droites (A,B) et (A',B'), s'il existe, est sur l'axe de symétrie

Le choix des instruments (règle non graduée et équerre) doit bloquer le recours à la propriété du milieu P1.

P1 (propriété du milieu) : la droite de symétrie d'une figure passe par le milieu du segment joignant deux points symétriques.

L'enseignant veut un procédé de tracé géométrique (qui n'est pas une construction géométrique au sens de Félix Klein[13]) : l'enseignant ne travaille pas sur l'objet matériel qu'est un dessin mais sur l'objet géométrique que nous appellerons « figure ». Pour lui c'est un problème théorique, le contrôle du tracé se fait par référence aux propriétés géométriques P2 et P3 (ici) de la figure géométrique.

Dans les tâches précédentes (annexe II : groupe des figures 1) les problèmes étaient résolus par « la propriété du milieu » (instruments disponibles : règle graduée et équerre). La mise en oeuvre de cette propriété a réussi. Pour la nouvelle tâche (annexe II : groupe des figures 2), en l'absence de la règle graduée, les élèves (cf. chronique de l'annexe III), cherchent malgré tout à trouver les milieux des deux segments parallèles - et donc à produire le tracé matériel de l'axe de symétrie à l'aide de la mesure et le contrôle peut se faire en référence au pliage, comme le propose d'ailleurs un élève ou par les contrôles de la précision des mesures.

Le discours sur un dessin est toujours ambigu : il peut porter sur la figure géométrique (que le dessin représente) ou sur le dessin lui-même. Les discours de l'enseignant et des élèves n'échappent pas à cette ambiguïté.

L'enseignant cherche à faire produire une réponse qui soit bien celle qui correspond à la mise en oeuvre des propriétés P2 et P3 : il doit disqualifier les réponses basées sur P1. Pour cela et à plusieurs reprises (voir annexe III : interventions 10, 14, 18, 20, 39, 41, 45, 51, 53, 55, et 89 de la chronique), il se réfère à la précision pour mettre en doute les réponses basées sur P1 puis (voir annexe III : intervention 89) pour conclure !

Il y a là une situation paradoxale : l'enseignant voudrait que la précision soit géométrique et il ne peut pas donner la solution. Pour disqualifier les solutions proposées par le groupe 3 des élèves, il use d'un argument de précision ce qui conforte les élèves dans une problématique de la mesure : pour eux une meilleure précision demande un plus grand soin dans l'opération matérielle de mesure (voir annexe III : Groupe 3 et François). Cet argument devient argument d'autorité.

L'enseignant en cherchant à ce que les élèves produisent la réponse qu'il désire, transforme la situation. Le dernier élève ne sait pas forcément qu'il a produit un élément de réponse et pourquoi : il répond par rapport aux attentes de l'enseignant. Il n'y a pas d'explication sur pourquoi c'est juste, pourquoi c'est faux.

On peut ici se référer à l'effet Topaze : la réponse attendue n'a pas pu être produite comme solution au problème initial sous la responsabilité des élèves ; l'enseignant a été contraint de restreindre les conditions de production de la réponse (diminution de l'incertitude de l'élève) jusqu'à obtenir la réponse attendue. La signification de cette réponse imposée devient, pour les élèves, très limitée.

---

[13] voir annexe I

c. Enseignement et ruptures de contrat

Tout enseignement d'un nouvel objet de savoir provoque des ruptures de contrat par rapport à des objets de savoir anciens et la re-négociation de nouveaux contrats : l'apprentissage de l'élève se fait au prix de ces ruptures que l'enseignant doit négocier.

Exemple 4. Statut des dessins dans l'enseignement de la géométrie

À l'école élémentaire, les élèves apprennent à utiliser les instruments de dessin pour développer des aptitudes graphiques. Les dessins géométriques (nommés triangles, rectangles etc.) sont alors des tracés matériels sur lesquels on opère, et dont on vérifie les mesures : ils sont les objets étudiés.

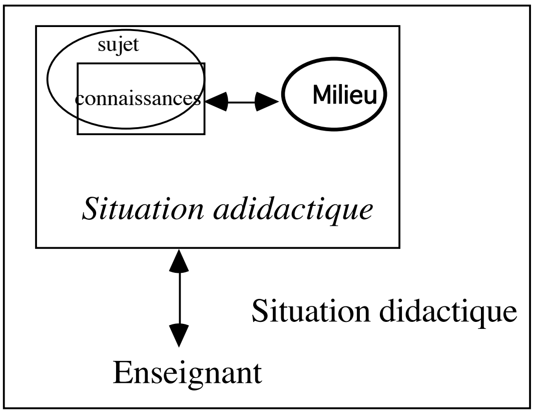
Au collège et plus particulièrement à partir de la quatrième en France (élèves de 13-14 ans) va devoir s'opérer une rupture de ce premier contrat : l'élève va devoir établir des preuves non pas sur le dessin lui-même mais sur les objets abstraits et idéaux (nommé triangles, rectangles etc.) que représente le dessin matériel (nouveau contrat didactique à propos des dessins). L'exemple 3 est une exemple de la négociation (difficile) de ce nouveau contrat.

Considérons la question suivante : « les segments AB et CD sont-ils égaux ? » Dans le premier contrat, l'élève devra effectuer la vérification sur les segments tracés. Dans le second, il devra rechercher des propriétés géométriques de la « figure » (que représente le dessin) pour établir la preuve de l'égalité.

Ce changement de contrat didactique source de difficulté et même d'échec pour de nombreux élèves est *nécessaire à l'apprentissage de la preuve en géométrie.* On peut le caractériser ainsi : de l'efficacité demandée à l'élève praticien (géométrie comme lieu de tracés *précis* de dessins), on passe à la rigueur de l'élève théoricien (géométrie comme lieu d'étude rationnelle des figures).

II.2. Situation adidactique

En nous référant, au point de vue adopté sur l'apprentissage, l'apprentissage de l'élève est modélisé par une situation adidactique organisée par l'enseignant dans une situation didactique.



Brousseau (1990) définit le milieu comme le système antagoniste de l'élève dans la situation didactique. Ce système modifie les états de connaissances de façon non contrôlée par l'élève : le milieu se comporte comme un système non finalisé. Il a un caractère relatif.

L'enseignant va chercher à proposer une situation telle que les élèves construisent leur rapport à l'objet de connaissance ou modifient ce rapport comme réponse *aux exigences d'un milieu et non au désir de l'enseignant*.

Une telle situation est une *situation dans laquelle ce que l'on fait a un caractère de nécessité par rapport à des obligations qui ne sont ni arbitraires, ni didactiques, mais de l'ordre du savoir*. Il faut que l'enseignant parvienne à ce que l'élève enlève de la situation les présupposés didactiques, que la résolution du problème devienne pour l'élève indépendante du désir de l'enseignant : la *dévolution* que cherche à faire l'enseignant pour que l'élève apprenne est donc celle d'une *situation d'apprentissage* (sur le modèle de la situation du vélo)·

Il y a un déplacement de responsabilité par rapport au savoir : de l'enseignant vers l'élève. L'élève dans une situation adidactique devient responsable de son rapport au savoir.

L'apprentissage est une *modification* du rapport à la connaissance produite par l'élève lui-même, que l'enseignant peut seulement provoquer par des choix (volontaires ou involontaires) qui sont modélisés comme des valeurs de *variables* de la situation adidactique.

La modélisation en termes de situation adidactique permet la conception d'ingénierie didactique où les conditions pour provoquer (au mieux) l'apprentissage de l'élève ont été « calculées ».

Quelles sont les conditions pour qu'une situation puisse être vécue comme adidactique ?

Il faut au minimum les conditions suivantes :

- L'élève peut envisager une réponse mais cette réponse initiale *(procédure de base qui est relative aux savoirs et connaissances antérieurs)* n'est pas celle que l'on veut enseigner : si la réponse était déjà connue, ce ne serait pas une situation d'apprentissage.

> Sans stratégie de base l'élève ne comprend pas le jeu, même si la consigne est claire. (Brousseau, 1988, p.61)

- Cette procédure de base doit se révéler très vite insuffisante ou inefficace pour que l'élève soit contraint de faire des accommodations, des modifications de son système de connaissance. Il y a incertitude de l'élève quant aux décisions à prendre.

- La connaissance visée est *a priori* requise pour passer de la stratégie de base à la stratégie optimale.

- Il existe dans le milieu « des éléments pour la validation » (milieu pour la validation) : le milieu permet des rétroactions.

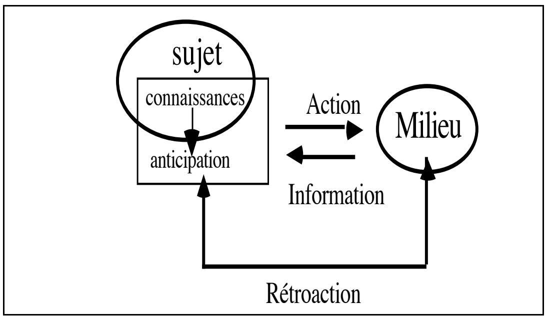
On appelle *rétroaction* une information particulière fournie par le milieu : c'est-à-dire une information qui est reçue par l'élève comme une sanction, positive ou négative, relative à son action et qui lui permet d'ajuster cette action, d'accepter ou de rejeter une hypothèse, de choisir entre plusieurs solutions.

- L'élève peut recommencer.

> L'apprentissage va consister à changer de stratégies et à changer les connaissances qui leur sont associées. (Brousseau, 1988, p.61)

Quels éléments de la situation modélise t-on dans le milieu ?

Le schéma général des interactions de l'élève et du milieu dans une situation adidactique est celui donné pour une situation d'apprentissage :



Les interactions sont significatives de la capacité du système (sujet <-> milieu) à retrouver un équilibre à la suite de perturbations, voire à évoluer si ces perturbations sont telles que cela soit nécessaire.

> Problème désigne [de ce point de vue], le résultat de la perturbation plus ou moins sévère de l'équilibre de la relation sujet / milieu. C'est donc dans ses manifestations comme outil de résolution de problèmes que l'existence d'une connaissance peut être attestée, ou encore c'est dans la capacité du système sujet / milieu à conserver dynamiquement un équilibre à la suite de perturbations en satisfaisant des contraintes de viabilité. Ces contraintes ne portent pas sur la façon dont l'équilibre est retrouvé, mais sur les critères qui attestent de sa restauration (on pourrait dire encore : il n'y a pas une seule façon de connaître). (Balacheff, 1995)

De même que les éléments modélisés dans le milieu ne sont pas forcément matériels (cela peut être des connaissances anciennes, stabilisées, qui vont de soi), les actions du sujet peuvent être des actions « mentales », non visibles.

Le milieu modélise dans la situation adidactique ce que l'élève *ne contrôle pas* mais qui modifie ses connaissances.

Les procédures des élèves sont ce que l'on *peut observer* de l'évolution des connaissances de l'élève.

Il y a nécessairement de l'incertitude pour l'élève dans une situation adidactique.

S'il n'y a plus d'incertitude (au sens des choix possibles pertinents) quant aux états terminaux de la situation, c'est que l'lélève connaît la réponse, qu'il *sait* : on peut dire qu'alors la situation est contrôlée par l'élève (et qu'il n'y a plus de milieu par rapport à cette situation adidactique).

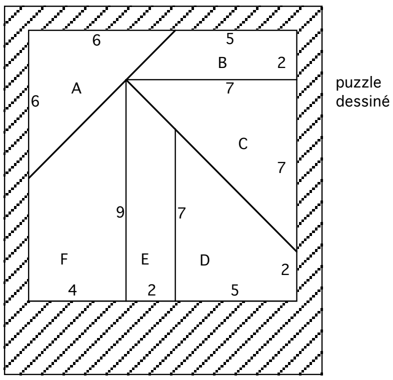
> […] la connaissance *réduit* l'incertitude du sujet en supprimant des possibilités de choix.

Les questions que permettent de poser le système sujet / milieu *(indissociable de la notion de situation adidactique)* sont donc les suivantes : qu'est ce qui, dans une situation didactique, peut provoquer (*a priori)* la modification des états de connaissance de l'élève ? ou les expliquer (*a posteriori*) ?

Exemple. Analyse a priori d'une situation didactique « Agrandissement du puzzle » (D'après N. et G.Brousseau, 1987)

Matériel

- 6 à 8 puzzles dessinés sur des cartons rectangulaires de 20 cm x 15 cm (voir ci-après). Pour chacun des puzzles, les 6 pièces (A,B,C,D,E,F) découpés dans le même carton.



- des feuilles de papier quadrillé
- un double décimètre par enfant.

Consigne

« Voici des puzzles. Vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles en respectant la règle suivante: le segment qui mesure 4 cm sur le modèle devra mesurer 7 cm sur votre reproduction.

Je donne un puzzle par équipe. Chaque élève devra faire une ou deux pièces. Lorsque vous aurez fini, vous devrez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle. »

Déroulement

Les enfants sont partagés en équipe de 4 ou 5. Après une brève concertation par équipe, ils se séparent pour réaliser leur(s) pièce(s).

L'enseignant affiche au tableau une représentation agrandie du puzzle complet.

Analyse[14]

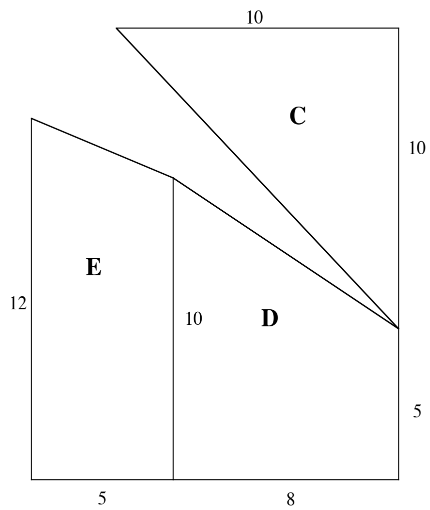
a. Deux stratégies qui ne sont pas des stratégies de réussite

Ces deux stratégies s'appuient sur des connaissances concernant les entiers naturels et les agrandissements : pour agrandir on ajoute ou on multiplie par un entier. *Le sens de la multiplication par un entier est celui de l'addition réitérée*. De plus, si on ajoute à un nombre un entier positif (et donc si on le multiplie par un entier positif) on obtient un entier *plus grand.*

Stratégie 1 : « ajouter 3 aux mesures des longueurs des «angles droits »

Le nombre de côtés de chaque pièce est conservé ainsi que les angles droits : on ajoute 3 aux mesures des côtés des angles droits.

Résultat de cette procédure sur les pièces « agrandies » C, D, et E du puzzle :



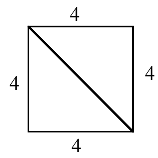
Il y a rétroaction du milieu matériel : les morceaux ne se raccordent pas de façon grossière, c'est-à-dire que le non agencement des morceaux est perceptible de façon indiscutable.

- Domaine de validité de la stratégie 1.

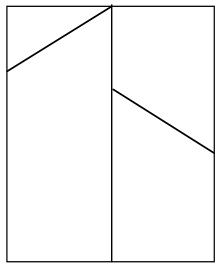
Le domaine de validité au sens strict de cette procédure (c'est-à-dire qui respecte la forme géométrique des pièces) est l'ensemble des puzzles où toutes les pièces sont composées de

[14] Une première analyse avait été faite en 1993 par A.Bessot et D.Grenier pour les étudiants du certificat ME1 « Histoire et didactique des mathématiques » de la maîtrise de mathématiques de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.

triangles isocèles rectangle de côtés 4, par exemple :

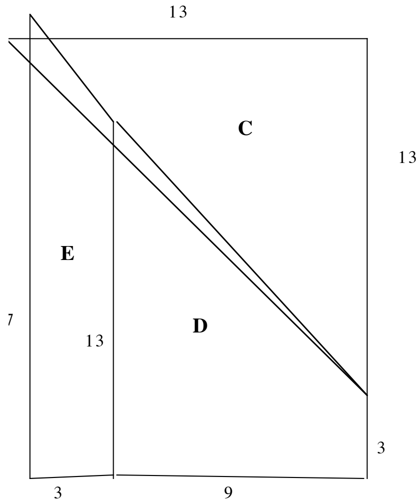


Si l'on définit le domaine de validité par rapport au milieu matériel, et que de ce fait on considère l'agrandissement comme valide si les morceaux du puzzle s'agencent bien, alors le domaine de validité est plus vaste, il comprend aussi : des puzzles de forme « rectangle » résultant de l'assemblage de pièces « à angle droit » (avec au plus un côté oblique) et tel que le rectangle ait ses côtés subdivisés par un même nombre. On ajoute alors un même nombre de fois 3 à chaque côté du carré.



Stratégie 2 : « Multiplier chaque mesure par 2 et enlever 1 »

Résultat de cette procédure sur les pièces « agrandies » C, D, et E du puzzle:



:

Il y a rétroaction du milieu matériel : les morceaux ne se raccordent pas, mais pour cette procédure, ce mauvais agencement est *discutable sur le plan perceptif.* Le puzzle est presque bon et les élèves peuvent penser que le mauvais agencement résulte de la maladresse des découpages. Il devient alors être nécessaire de recourir à une rétroaction d'un autre type, s'appuyant sur les relations entre les mesures du puzzle initial et les mesures du puzzle « image ».

Par exemple pour les pièces E, D et C, dans le puzzle initial la relation qui caractérise leur agencement est : 2+5 = 7. *Qu'en est-il dans le puzzle « image » ?*

2 ----> 2x2-1 = 3

5 ----> 5x2-1 = 9

7 ----> 7x2-1 = 13

et *3+9 ≠ 13* critère qui atteste du non agencement des pièces dans le puzzle « image » de cette procédure et qui permet de la rejeter sans ambiguïté.

b. Connaissance visée dans cette situation par la mise en échec de ces procédures

Le sens de la multiplication par un entier est celui de l'addition réitérée. Le sens de la multiplication *par un rationnel* doit se construire contre ce sens premier (premier du fait de l'antériorité nécessaire de la construction des entiers sur celui des rationnels).

L'enjeu de cette situation est que *les élèves rejettent explicitement les procédures faisant intervenir les entiers* (on parle souvent de modèle additif pour parler de ces procédures d'agrandissement) et *construisent au moins implicitement une règle de rejet* que le chercheur peut formuler ainsi : « si $a+b=c$ dans le puzzle initial, alors $f(a+b)=f(a)+f(b)$ dans le puzzle agrandi » (sinon les morceaux ne s'agencent pas!).

Le rejet de ce modèle additif devient alors constitutif du sens de la multiplication par un nombre rationnel. L'application linéaire, solution de ce problème, est *7/4* c'est-à-dire un rationnel - application.

Ce premier sens de la multiplication des nombres par un rationnel sera, au bout d'un long processus d'apprentissage, celui de l'image d'un rationnel-mesure par un rationnel-application linéaire.

c. Cette situation peut être vécue comme adidactique.

• L'enseignant a la possibilité de limiter ses interventions à des interventions neutres par rapport à la connaissance qui est enjeu de cette situation : il peut se contenter d'encourager et de constater les faits, sans exigences particulières.

• Il existe une procédure de base qui s'appuie sur les connaissances sur les nombres entiers : en effet, les connaissances sur les nombres entiers sont premières par rapport à toute connaissance sur les autres nombres, c'est-à-dire que la construction de tout ensemble de nombres (comme les rationnels par exemple) s'appuie sur l'existence de l'ensemble des nombres entiers. Cette procédure de base utilise les opérations définies sur les entiers.

• Il existe un milieu pour la validation de la procédure, c'est-à-dire la possibilité pour les élèves de savoir si leur procédure est correcte ou non sans que l'enseignant intervienne : le milieu est composé, pour chaque élève, de l'ensemble des morceaux « agrandis » du puzzle produit indépendamment par lui-même et ses partenaires (phase 2).

• Cette procédure de base est insuffisante, puisque la procédure visée fait intervenir nécessairement un rationnel : le résultat de la procédure de base (explicitée lors de la phase 1) est que les morceaux ne se raccordent pas au moment où les membres coopérants de l'équipe se regroupent (phase 3).

II.3. Variables didactiques[15] : définitions et exemples

Les définitions suivantes sont celles de Guy Brousseau données dans deux textes (déjà anciens) de la deuxième école d'été. Dans le texte *« Ingénierie didactique : d'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique »*, il analyse une situation (fondamentale pour la soustraction) en terme de variables :

> Un champ de problèmes peut être engendré à partir d'une situation par la modification des valeurs de certaines variables qui, à leur tour, font changer les caractéristiques des

[15] Concept repris récemment par Chaachoua et al. au sein de la TAD.

stratégies de solution (coût, validité, complexité…etc.) […]

> Seules les modifications qui affectent la hiérarchie des stratégies sont à considérer (variables pertinentes) et parmi les variables pertinentes, celles que peut manipuler un professeur sont particulièrement intéressantes : ce sont les *variables didactiques*. (Brousseau, 1982 a)
>
> Ces variables sont pertinentes à un âge donné dans la mesure où elles commandent des comportements différents. Ce seront des variables didactiques dans la mesure où en agissant sur elles, on pourra provoquer des adaptations et des régulations : des apprentissages. (Brousseau, 1982 b)

La notion de **variable didactique** d'une situation adidactique désigne une variable :

- « *à la disposition du professeur* » : le professeur *fait* des choix en rapport avec son projet d'enseignement, choix objectivé comme une valeur d'une variable didactique. Les autres valeurs représentent d'autres choix possibles *non retenus ou non perçus par le professeur* qu'il est important de décrire pour comprendre la signification du savoir dans la situation particulière.

- telle que ses valeurs pertinentes changent la « hiérarchie » des stratégies possibles, ou encore change la stratégie « optimale » de la situation (et donc la signification du savoir visé).

Exemple de variables qui peuvent changer la « hiérarchie » des procédures et qui ne sont pas des variables didactiques, car non disponibles pour l'enseignant : le fait qu'un élève soit redoublant ou non, les connaissances disponibles des élèves …

Exemple. Variables didactique de la situation du puzzle

V1 = (n,p)

n et p étant les nombres qui définissent le rapport de proportionnalité.

Les valeurs pertinentes étant : p multiple de n / p = kn+n/2 (k entier, et n pair) / p/n rationnel non décimal. Par exemple voici des couples d'entiers illustrant chacune des catégories : couples (4, 8), (4, 6), (4,7) (3, 7).

Un agrandissement qui fait passer de 4 à 8 met en jeu la multiplication par 2, qui est en fait l'addition 4+4. L'élève reste dans le modèle additif et les nombres entiers.

Un agrandissement de 4 à 6 est souvent analysé comme « x plus la moitié de x ». On a donc un modèle intermédiaire entre le modèle additif et le modèle linéaire, plus « proche » du modèle additif à cause du statut particulier de « la moitié », d'autant plus que dans ce cas, la moitié est aussi un nombre entier.

Un agrandissement de 4 à 7 ne permet pas un passage simple [l'agrandissement de 4 à 7 pourrait s'interpréter comme « 2 fois x moins 1»].

Il y a un saut lorsqu'il faut « passer de 3 à 7 », car aucune relation de ce type n'est possible. On est obligé de quitter l'additif et de quitter les entiers.

Les valeurs de V1 mettent en jeu le sens de la multiplication par un rationnel, elles permettent ou non le passage de la multiplication par un entier (modèle additif, addition réitérée) à la multiplication par un rationnel (modèle multiplicatif, image par une application linéaire).

V2 = organisation des interactions entre élèves

Les valeurs de cette variable sont un n-uplet décrivant les différents types de phases dans le temps : travail individuel, coopération, concertation, confrontation, etc. Dans la situation du puzzle, elle se décrit par : concertation, puis travail individuel, puis confrontation. La mise en place des deux dernières phases permet une véritable rétroaction de la stratégie décidée en première phase. Si l'on réduit les phases en une seule (coopération pour construire le puzzle agrandi), on enlève au milieu sa propriété de milieu pour la validation et à la situation son caractère adidactique. D'un autre point de vue, pour un public d'élèves plus « proches » du modèle multiplicatif (collège, lycée), la première phase (concertation) risquerait de faire diffuser la stratégie gagnante dès le début du travail et donc de bloquer les apprentissages en jeu pour les élèves qui, justement, sont les plus concernés.

V3 = configuration du puzzle

Les valeurs sont aussi des n-uplets décrivant les subdivisions respectives des côtés (par un même nombre ou non), les mesures des pièces etc. Les valeurs pertinentes de cette variable sont celles qui concernent le domaine de validité des stratégies de base. Ici, les mesures sont choisies de telle manière que la procédure « ajouter 3 » (dont on fait l'hypothèse qu'elle sera la stratégie initiale chez la grande majorité des élèves) conduise à construire des pièces non emboîtables de manière perceptivement évidente.

V1 se situe du côté du *savoir* en jeu (la multiplication par un rationnel non décimal, le nombre comme image par une application linéaire).

V2 est *constitutive du caractère adidactique* de la situation.

V3 est *liée aux connaissances* des élèves, puisqu'elle est basée sur les hypothèses relatives aux stratégies de base de ceux-ci.

D'autres « variables » ou contraintes semblent jouer un rôle dans la situation. Par exemple, le matériel dont dispose les élèves, papier quadrillé et règle graduée. Ils sont intégrés dans la situation pour faciliter la construction des pièces et mesurer des longueurs. Ils sont donc liés à la mesure. Va t-on donner le statut de variable didactique à cet élément de la situation ? Pour répondre, on a intérêt à revenir au savoir en jeu, c'est-à-dire le passage du modèle additif au modèle linéaire. La mesure n'est pas enjeu de savoir dans cette situation. Ces éléments peuvent intervenir dans la situation, mais nous faisons l'hypothèse (que l'on peut argumenter) que leur présence ou non ne la change pas fondamentalement.

II.4 Analyse de l’apprentissage dans une situation d’enseignement « ordinaire »

La notion de situation adidactique est un modèle pour analyser l'apprentissage de l'élève dans une *situation ordinaire d'enseignement*.

Ce modèle conduit à se poser les questions suivantes : dans quelle(s) situation(s) adidactique peuvent se trouver le(s) élève(s) ? Ce qui revient à se demander : que peuvent-ils apprendre dans cette situation d’enseignement (recherche des milieux possibles) ? Pour quel savoir ?

Il y a des phases adidactiques dans tout enseignement, en général hors du contrôle de l'enseignant. Chevallard (1985) a introduit la notion de *temps didactique* pour désigner le temps spécifique de l'institution d’enseignement, temps marqué par le décalage entre le moment de l'enseignement et le moment de l'apprentissage : il y a dans l'enseignement une fiction d'un temps didactique homogène.

Dans sa thèse (1992), Mercier montre que l'introduction officielle d'objets de savoir nouveaux modifie le rapport à des objets déjà là, naturalisés, transparents. Il y a alors dévolution à l'élève d'une responsabilité par rapport à ces objets de savoirs naturalisés : en tant qu'objets anciens, l’élève a la responsabilité de les savoir. C'est une phase adidactique pour ces objets anciens (anciens par rapport au moment de leur enseignement).

II.5. Différents statuts du savoir, différents types de situations adidactiques

En se référant à l'activité du mathématicien, Régine Douady (1986) parle de dialectique *outil-objet* pour désigner le processus de changement de statuts des concepts, processus qui intervient nécessairement dans l'activité de l'élève face à un problème : elle distingue pour un même concept trois statuts, celui d'objet, celui d'outils implicites et celui d'outils explicites.

Brousseau lui distingue trois fonctions (et donc trois statuts) du savoir : action, formulation et validation. Ce sont les types de *situations* qui permettent de caractériser les fonctions d'un objet de savoir.

Dans les situations (adidactiques) d'action, un sujet (un élève) élabore des connaissances implicites comme moyen d'action sur un milieu (pour l'action) : ce milieu lui apporte informations et rétroactions en retour de ses actions.

Dans les situations (adidactiques) de formulation, le sujet (l'élève) explicite *lui-même* le modèle implicite de ses actions. Pour que cette formulation ait du sens pour lui, il faut que cette formulation soit elle-même un moyen d'action sur un milieu qui lui apporte informations et rétroactions : cette formulation doit permettre d'obtenir ou de faire obtenir à d'autres un résultat. Les situations de communications entre groupe d'élèves peuvent être un exemple de telles situations.

Enfin dans les situations (adidactiques) de validation, la validation empirique venant du milieu devient insuffisante : le sujet, pour convaincre un opposant, doit élaborer des preuves intellectuelles. Par exemple en mathématique, les déclarations explicites à propos de la situation deviennent des assertions dont il faut prouver l'exactitude et la pertinence selon des règles communes pour en faire un théorème connu de tous.

II.6. Situation fondamentale, variables didactiques

Dans des phases adidactiques (modélisables par une situation adidactique), l'élève a à résoudre un problème dont il a la responsabilité.

Or la question centrale est la suivante : comment s'assurer que le problème posé est bien *pertinent* par rapport au savoir ? Quelles relations a le problème posé avec l*a raison d'être* de l'objet de savoir, enjeu de l'enseignement ? Quel sens donne t-il au savoir ?

C'est un problème épistémologique.

Hypothèse épistémologique

> il existe pour tout savoir une famille de situations susceptibles de lui donner un sens *correct* . (Brousseau, 1986)

correct par rapport à l'histoire de ce concept, par rapport au contexte social, par rapport à la communauté scientifique.

> Pour toute connaissance, il est possible de construire un jeu formel, *communicable sans utiliser cette connaissance*,[16] et dont elle détermine pourtant la stratégie optimale. (Brousseau, 1998)

Une *situation fondamentale* d'une connaissance est une *modélisation* de cette famille de situations spécifiques du savoir visé.

Elle est fondamentale :

[16] C'est moi qui souligne

1- par rapport à la connaissance : la situation « doit être telle que la connaissance apparaisse sous la forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la stratégie optimale. »

2- par rapport à l'activité d'enseignement : la situation doit permettre de représenter le plus possible de « situations observées dans les classes, même les moins satisfaisantes, dès lors qu'elles parviennent à faire apprendre à des élèves une forme de savoir visé.…Elles seront obtenues par le choix de certaines variables caractéristiques de cette situation. » (Brousseau 1986)

Une situation fondamentale doit au moins permettre (par un jeu sur les valeurs des variables didactiques) :

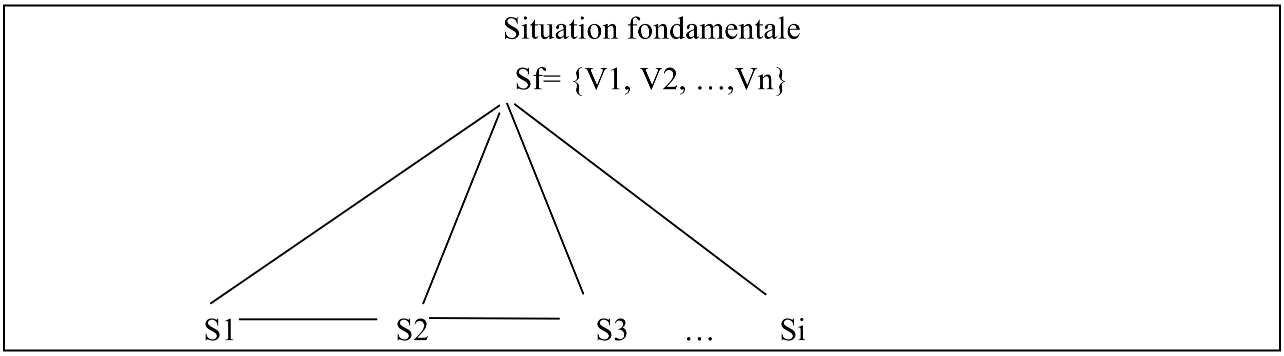
- une genèse effective du savoir, c'est-à-dire une genèse de situations représentatives des différents sens d'un savoir (des différentes occasions d'emploi de ce savoir)

- une « relecture » de cette genèse suivant la logique de l'organisation du savoir.

Un problème particulière peut donc envisagée comme découlant d'une situation fondamentale : cette situation « fondamentale » est représentée par un *ensemble fini de variables didactiques*, pertinentes par rapport à la signification du savoir, enjeu d'enseignement.

Inversement, en donnant des *valeurs* à ces variables, on génère des situations particulières donnant au savoir une signification particulière.

Le schéma ci-après illustre notre propos :



Exemple. Analyse *a priori* d'une situation fondamentale « Le jeu de la course à n » (D'après Brousseau 1978)

• **Jeu 1**. « La course à 20 »

Règle du jeu

Le jeu comporte deux adversaires qui disent un nombre tour à tour. Il s'agit pour chacun des adversaires de réussir à dire 20 le premier.

Le premier qui joue a le droit de dire 1 ou 2. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant 1 ou 2 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Faire quelques parties et formuler une stratégie gagnante (c'est à dire qui permette de gagner quoi que fasse l'adversaire).

Réponse : gagne celui qui joue le premier en disant 2, puis 5, 8, 11, 14, 17, 20 (qu'il peut dire quoique dise l'adversaire)

Commentaire : très vite on « sait » que celui qui dit 17 a gagné : la course à 20 devient la course à 17. On peut donc réitérer le raisonnement. En fait la suite gagnante se trouve « en descendant » : 20, 17, 14 etc.

• Les jeux suivants se jouent avec les mêmes équipes d'adversaires.

Jeu 2. « La course à 27 »

Il s'agit de réussir à dire 27 le premier. Celui qui commence à jouer a le droit de dire un entier *non nul* inférieur ou égal à 4. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre non nul inférieur ou égal à 4 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Formuler une stratégie gagnante

Pour arriver à dire 27 le premier quel nombre faut-il dire juste avant ?

(Raisonnement analogue au 17 de la course à 20) Si je dis 26, mon adversaire peut ajouter 1 et dire 27 ; si je dis 25, mon adversaire peut ajouter 2 et dire 27 ; si je dis 24, mon adversaire peut ajouter 3 et dire 27 ; si je dis 23, mon adversaire peut ajouter 4 et dire 27 ; si je dit 22, quoiqu'ajoute mon adversaire - 1, 2, 3 ou 4, j 'ajouterais le complément à 5 : 1+4, 2+3, : je dirais donc 27 le premier.

Stratégie gagnante : gagne celui qui joue le premier en disant 3. Suite gagnante : 27, 22, 17, 12, 7, 2

Jeu 3. « La course à 24 »

Il s'agit de réussir à dire 24 le premier. Le premier qui joue a le droit de dire un entier non nul inférieur ou égal à 3. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre non nul inférieur ou égal à 3 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Pouvez-vous gagner en utilisant la stratégie que vous avez proposée après le jeu 2?

Réponse : Non, **gagne celui qui joue le second** en disant 4 que l'on ne peut jamais dire le 1er !

Suite gagnante : 24, 20, 16, 12, 8, 4

Jeu 4. « La course à 5929 »

Il s'agit de réussir à dire 5929 le premier Le premier qui joue a le droit de dire un entier non nul inférieur ou égal à 2. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre inférieur ou égal à 2 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Réponse : **le jeu se transforme en : qui gagne ? faut-il commencer ou jouer en 2nd ? en disant quel nombre ?**

Si on commence à raisonner comme dans les jeux précédents, on cherche le dernier nombre que l'on doit dire pour dire le premier 5929. Ce dernier nombre est 5926 qui est à la "bonne" distance de 5929, c'est à dire à la distance 3 : si mon adversaire ajoute 1, j'ajoute 2 (et je dis le premier 5929) - s'il ajoute 2, j'ajoute 1 (et je dis encore le premier 5929). Le jeu de la course à 5929, devient le jeu à 5926.

5929, 5926, 5923 … : cette liste s'obtient par soustractions réitérées de 3.

Il devient très coûteux de trouver toute la suite gagnante : par économie, on ne va chercher que quelques uns des entiers de la liste gagnante pour arriver le plus rapidement possible à l'entier le plus petit. Si on soustrait à 5929, 1000 fois 3 on obtient un entier de la liste : 2929. Pour trouver un entier de la liste plus petit que 1000, on peut soustraire à 2929, 800 fois 3 par exemple et on obtient 529. Ainsi de suite juqu'à 1.

exemple : $5929 - 3\times 1000-3\times 800-3\times 100-3\times 70--3\times 6 = 1$

D'où la réponse : gagne celui qui joue le premier en disant 1.

- Une situation générale des jeux de la course à n

Le jeu comporte deux adversaires qui disent un nombre tour à tour. Il s'agit pour chacun des adversaires de réussir à dire **n** le premier.

Le premier qui joue a le droit de dire un entier *non nul* inférieur à **p**. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un entier non nul inférieur à **p** au nombre que l'adversaire vient de dire.[n et p sont des entiers naturels avec n > p]

Cette situation engendre les 4 jeux décrit ci-dessus en attribuant aux variables n et p des valeurs particulières.

Q1. Quel savoir mathématique fournit un outil de résolution économique et optimal pour les jeux de la course à n ?

Une réponse : La division euclidienne de n par l'entier (p+1) : n = (p+1)× q+r avec 0≤r≤(p+1)

Le « sens » de cette division (dans les jeux de la course à n) est la soustraction réitérée de (p+1) à n : le nombre de soustractions réitérées pour arriver au plus petit entier est le quotient de cette division, le plus petit entier auquel on arrive, est le reste. Le nombre (p+1) que l'on soustrait de façon réitérée est le diviseur.

Pour le jeu 1, la division de 20 par 3 donne comme reste 2 et pour arriver à 2 il faut soustraire 6 fois 3.

Pour le jeu 4, la division de 5929 par 3 donne 1 et le nombre de soustraction de 3 est 1000+800+100+70+6, c'est à dire 1976.

Q2. Quelles peuvent être des variables didactiques du problème de la course à n pour un apprentissage de ce savoir mathématique ?

V1 : n multiple de (p+1) ou non

Si n n'est pas multiple de (p+1) il faut commencer - la suite gagnante est une suite arithmétique de raison (p+1) et de premier terme le reste.

Si n est multiple de (p+1), il ne faut pas commencer - la suite gagnante est une suite géométrique de raison (p+1)

[passage des jeux 1, 2 au jeu 3]

V2 (taille de n relativement à p) : n petit par rapport à p / n grand par rapport à p

Si n est petit par rapport à p, l'écriture de **tous** les entiers de la suite gagnante est possible : la stratégie de soustraction réitérée de (p+1) est une stratégie optimale concurrente à la division euclidienne qui ne donne pas la liste !!

Si n est très grand relativement à p, la stratégie de soustractions réitérées devient très coûteuse (d'autant plus que n est grand par rapport à p). On ne peut alors atteindre que quelques uns des entiers de la suite gagnante. Le jeu change alors de nature : pour gagner, faut-il commencer ou jouer en 2nd ? en disant quel nombre ?

La stratégie des soustractions réitérées doit s'adapter et se transformer en une stratégie qui permet de (re)trouver le sens de la division euclidienne (on cherche à soustraire à n le multiple de (p+1) le plus grand possible)

Conclusion : le jeu de la course à n comme situation fondamentale

Si on modélise les jeux de la course à n par une situation générale, on obtient une situation fondamentale de la division euclidienne dont le sens est celui de la soustraction réitérée.

- Notion de saut informationnel

> Le saut informationnel consiste, après avoir trouvé une situation fondamentale faisant « fonctionner » une notion, à choisir d'abord les valeurs de ses variables de telle manière que les connaissances antérieures des élèves permettent d'élaborer des stratégies efficaces… puis, sans modifier les règles du jeu, à changer les valeurs des variables de façon à rendre beaucoup plus grande la complexité de la tâche à accomplir. De nouvelles stratégies doivent être établies qui demandent la construction de nouvelles connaissances. (Brousseau, 1986, p.23)

Exemple. Dans la course à n, le changement de valeurs de la taille de n relativement à n dans le passage des jeux 1, 2, 3 au jeu 4 est un saut informationnel

II.7. Conceptions, obstacles

Pour certaines connaissances, il existe des situations fondamentales que l'on peut mettre en scène directement au moment voulu.

> Mais supposons qu'il existe des connaissances pour lesquelles les conditions ci-dessus ne sont pas réalisées : il n'existe pas de situations suffisamment accessibles, suffisamment efficaces et en nombre suffisamment petit pour permettre à des élèves d'âge quelconque d'accéder d'emblée, par adaptation, à une forme de savoir que l'on puisse considérer comme correcte et définitive : il faut accepter des étapes dans l'apprentissage. Le savoir enseigné par adaptation dans la première étape sera provisoirement, non seulement approximatif, mais aussi en partie *faux et inadéquat***.** (Brousseau, 1986)

L'alternative est d'enseigner directement un savoir conforme aux exigences de la communauté scientifique c'est-à-dire le texte du savoir. De ce fait, on renonce à ce que l'élève donne du sens au savoir : le savoir n'est pas une réponse à un problème incertain dont l'élève accepte la responsabilité.

> Le professeur a donc le choix entre enseigner un savoir formel et dénué de sens ou enseigner un savoir plus ou moins faux qu'il faudra rectifier. (Brousseau, 1986)

On peut alors supposer chez un même sujet la coexistence de rapports contradictoires à un même objet de savoir (du point de vue de celui qui observe les procédures), et dont il faut rechercher la cohérence dans la situation particulière où est placé le sujet : la notion de conception est une réponse à ce problème de modélisation pour parler des connaissances du sujet.

La notion de conception permet en particulier de répondre au questionnement suivant : que connaissent les élèves (et qui expliquent leurs difficultés, leurs erreurs) ? Dans quelles situations l'ont-ils appris (quel domaine de validité) ?

La notion de contrat didactique complète cette modélisation pour prendre en compte les contraintes de la communication didactique des savoirs.

Postulat : l'erreur est un témoignage de connaissance (Bachelard 1977)

Ce postulat prend une signification forte dans le cadre de l'hypothèse Piagétienne sur l'apprentissage comme adaptation à un milieu permettant une prise de conscience d'une contradiction et son dépassement.

> L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou béhavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée. (Brousseau 1978).

Brousseau, dès les années 70, énonce que certaines de ces connaissances sont nécessaires à l'apprentissage : la trajectoire de l'élève devrait passer par la construction (provisoire) de connaissances erronées parce que la prise de conscience de ce caractère erroné serait constitutif du sens de la connaissance dont la construction est visée. Ces points de passage obligés, il les nomme, à la suite de Bachelard (1934, pp.13-22), *obstacles épistémologiques* :

> une connaissance, comme un obstacle, est toujours le fruit d'une interaction de l'élève avec son milieu et plus précisément avec une situation qui rend cette connaissance 'intéressante'. (Balacheff 1995).

On distingue le plus souvent trois types d'obstacles selon leur origine.

1- Obstacle ontogénétique lié au développement psychogénétique du sujet.

2- Obstacle didactique lié à la transposition didactique du savoir : c'est un obstacle qui peut être évité sans conséquence pour la construction de la connaissance, qui peut disparaître en agissant sur les situations d'enseignement.

3- Obstacle épistémologique lié au développement historique du concept :

> Un obstacle épistémologique est *constitutif* de la connaissance en ce sens que celui qui l'a rencontré et surmonté, a une connaissance différente de celui qui ne s'y est pas heurté. (Brousseau, 1989)

A.Duroux (1983) donne des critères pour définir un obstacle épistémologique[17] :

> 1- Il s'agit d'une connaissance qui fonctionne comme telle sur un *ensemble* de situations et pour certaines valeurs des variables de ces situations.…

[17] La notion d'obstacle épistémologique a été introduite par Bachelard (1977).

> 2- L'obstacle est une connaissance qui, en tentant de s'adapter à d'autres situations ou à d'autres valeurs des variables, va provoquer des *erreurs* spécifiques, repérables, analysables.
>
> 3- L'obstacle est une connaissance *stable*. […]
>
> 4- L'obstacle ne pourra donc être franchi que dans des *situations spécifiques de rejet* et sera constitutif du savoir […] Le retour même sur la conception obstacle sera partie intégrante du nouveau savoir. (Duroux 1983)

Exemple de l'obstacle des entiers

1. Décimaux et entiers

> Pour l'élève, les propriétés des naturels sont celles des nombres en général, de tous les nombres. Or, le plongement de l'ensemble des naturels dans un sur-ensemble comme les rationnels ou les décimaux, en même temps qu'il fait apparaître des propriétés nouvelles en fait disparaître certaines autres : elles ne sont plus vraies pour tous les nombres, ou même elles ne le sont plus pour aucun : multiplier peut rapetisser, un décimal n'a plus de successeur…
>
> L'enseignant ne peut pas avertir convenablement l'élève de cette rupture, car, ni la culture, et en particulier la tradition, ni l'ingénierie didactique n'ont encore produit les instruments nécessaires (exercices, avertissements, concepts, remarques, paradoxes…). Cette situation conduit l'enseignant à provoquer des quiproquos et des malentendus et l'élève à commettre des erreurs. Ces conceptions fausses persistent car elles sont attachées à une certaine manière de comprendre les propriétés des nombres naturels, et on peut observer les effet de la rupture pendant de nombreuses années.
>
> Plus important encore est le mécanisme de cet obstacle : ce sont, non pas les connaissances enseignées qui sont en défaut - en général les enseignants pourvoient à cet inconvénient en essayant de se maintenir dans un discours incompris mais correct - ce sont les instruments personnels de la compréhension de l'élève. Il ne comprend plus, parce que ce qui devrait être changé ce sont justement les moyens de ce qu'il appelait 'comprendre' jusque là. (extrait de Brousseau 1998, chapitre 6)

2. Puzzle situation pour faire rencontrer l'obstacle des naturels.

II.8. Dévolution/institutionnalisation (savoir/connaissance), rôles principaux du professeur[18]

Les rôles principaux du professeur se caractérisent par la double manœuvre suivante : processus de dévolution et processus d'institutionnalisation.

- Dévolution

Pour cela, le professeur fait d'abord le travail inverse du chercheur : il cherche à recontextualiser et repersonnaliser le savoir à enseigner: il *cherche des problèmes qui vont donner du sens aux connaissances à enseigner*, pour que l'activité de l'élève « ressemble » par moment à celle du chercheur. Il y a dévolution à l'élève d'une *responsabilité* vis à vis du savoir, il y a dévolution d'une situation adidactique.

Le processus de dévolution (d'une situation adidactique) est décrit par André Rouchier (1991) dans sa thèse comme un processus qui permet de convertir un *savoir* à enseigner en *connaissance* chez l'élève (personnalisée, contextualisée, temporalisée).

[18] Repris par Chevallard dans les moments didactiques.

- Institutionnalisation

Mais si cette phase a bien marché, quand l'élève a trouvé des solutions aux problèmes posés, il (l'élève) ne sait pas qu'il a produit une connaissance qu'il va pouvoir utiliser dans d'autres occasions. Pour transformer les réponses et les connaissances des élèves en savoir, les élèves vont devoir, avec l'aide du professeur, redécontextualiser, redépersonnaliser la connaissance qu'ils ont produite afin de reconnaître dans ce qu'ils ont fait quelque chose qui ait un caractère universel, un *savoir* culturel réutilisable.

En bref, le processus d'institutionnalisation est un processus inverse de celui de dévolution qui permet de convertir une connaissance chez l'élève en un savoir réutilisable (dépersonnalisée, décontextualisée, détemporalisée).

> En fait la conversion ne fabrique pas un nouveau produit qui serait le savoir par rapport à la connaissance ou l'inverse. On se contente de les placer, l'un et l'autre dans un ailleurs qui est celui des pratiques d'un autre niveau. (Rouchier, 1991)

III. INTRODUCTION A LA THEORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE (TAD)

La TAD prolonge la Transposition Didactique. Elle s'appuie sur trois termes primitifs : objet, individu, institution et les positions qu'ils occupent dans les institutions. En venant occuper ces positions, les individus deviennent les sujets des institutions – sujets actifs qui contribuent à faire vivre les institutions par le fait même de leur être assujettis.

Le rapport personnel d'un individu X à un objet de savoir O ne peut être établi que lorsque X entre dans une institution où O existe. C'est à travers l'établissement de ce rapport que la personne, couple formé par un individu X et le système de ses rapports personnels R(X, O), devient un sujet de I. Lorsqu'une personne entre dans une institution didactique, son rapport personnel à un objet de savoir O s'établit (s'il n'existait pas auparavant) ou se modifie (s'il existait déjà) sous la contrainte du rapport institutionnel à cet objet.

> Au cours du temps, le système des rapports personnels de X évolue : des objets qui n'existent pas pour lui se mettent à exister ; d'autres cessent d'exister ; pour d'autres enfin le rapport personnel de X change. Dans cette évolution, l'invariant est l'individu ; ce qui change est la personne. (Chevallard 1996)
>
> Le problème central en didactique est donc celui de l'étude du rapport institutionnel, de ses conditions et de ses effets. L'étude du rapport personnel est un problème pratiquement fondamental, mais épistémologiquement second, de la didactique. (Chevallard 1989, p. 93)

Le rapport institutionnel dépend de la position du sujet dans l'institution.

> Etant donné alors un objet institutionnel O, il existe – contrairement à ce que j'ai feint de dire jusqu'ici -, non un rapport institutionnel unique […], mais, pour chaque position p au sein de I, un rapport institutionnel à O pour les sujets de I en position p. (Chevallard, 1992, p. 90)

III.1. La notion de praxéologie

Pour décrire le rapport institutionnel à un objet Bosch et Chevallard (1999) proposent la notion de praxéologie.

> Le rapport institutionnel à un objet, pour une position institutionnelle donnée, est façonné et refaçonné par l'ensemble des tâches que doivent accomplir, par des techniques déterminées, les personnes occupant cette position. C'est ainsi l'accomplissement des différentes tâches que la personne se voit conduite à réaliser tout au long de sa vie dans les différentes institutions dont elle est le sujet successivement ou simultanément qui conduira à faire émerger son rapport personnel à l'objet considéré. (Bosch, Chevallard 1999)

La théorie anthropologique du didactique considère que, en dernière instance, toute activité humaine consiste à accomplir une tache t d'un certain type T, au moyen d'une technique τ, justifié par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ. En bref, elle part du postulat que toute activité humaine met en œuvre une organisation que Chevallard (1999) note [T/τ/θ/Θ] et nomme praxéologie, ou organisation praxéologique.

Le terme de praxéologie souligne la structure de l'organisation [T/τ/θ/Θ] : le grec praxis, qui signifie « pratique », renvoie au bloc practico-technique (ou praxique) [T/τ], et le grec logos, qui signifie « raison », « discours raisonné », renvoie au bloc technologico-théorique [θ/Θ].

Ces notions permettent de redéfinir certaines notions courantes : on peut considérer que le bloc [T/τ] représente ce que l'on désigne habituellement par savoir-faire, et que le bloc [θ, Θ] représente ce que l’on désigne usuellement par savoir (au sens restreint).

Ce modèle de la praxéologie constitue une brique élémentaire. Ces briques élémentaires viendront en général s’amalgamer pour constituer des praxéologies locales dans lesquelles on aura plusieurs savoir-faire justifiés par le même savoir, des praxéologies régionales où la même théorie justifiera plusieurs technologies, qui à leur tour justifieront plusieurs blocs type de tâches/technique ; des praxéologies globales enfin qui comprendront plusieurs théories.

La notion de praxéologie permet de donner une deuxième définition de la didactique :

> La didactique est la science des conditions et des contraintes de la diffusion (et de la non diffusion) des praxéologies au sein des institutions de la société. (Chevallard 2010)

Exemple. Type de tâches : « résoudre dans R une équation du 2nd degré » (D’après Matheron 2000)

Regardons ce qui se passe dans I : « 1ère S en France, en 2004 » pour : « Résoudre l’équation $x^2 + 10x - 39 = 0$ »

Technique 1 (τ_1) dans I

$\Delta = 102 - 4\times1\times(-39)$
$\Delta = 100 + 156$
$\Delta = 256$

Comme $\Delta > 0$ et que $\sqrt{\Delta} = 16$ alors cette équation admet deux racines qui sont : $x_1 = \frac{-10-16}{2}$ et $x_2 = \frac{-10+16}{2}$. Soit : $x_1 = -13$ et $x_2 = 3$

Allons voir dans une autre institution (passé). Une technique 2 (τ_2) est observée :

$10\div4 = 2,5$
$4\times(2,5)2 = 25$
$25+39 = 64$
$\sqrt{64} = 8$
$8-2\times2,5 = 3$
Donc la racine positive est 3
D’où la racine négative : -13 puisque $3\times(-13) = -39$

Les différentes écritures produites à chaque pas du calcul de la première étape (détermination de la racine positive) dans cette technique nous sont incompréhensibles ! Et de ce fait, nous pouvons douter de la validité de la démarche suivie bien qu’elle produise les solutions attendues.

Quels sont les fondements de cette incompréhension ?

L’activité scientifique (ici mathématique) relève d’un certain nombre de critères partagés dans I.

Principal critère. Toute technique doit être compréhensible et justifiée au sein de I.

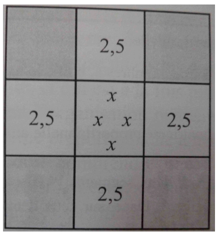
C’est ce que permet une technologie

Imaginons maintenant que l’élève ait rédigé, pour accompagner son calcul, le texte suivant :

L’aire du carré central est x^2
L’aire d’un rectangle est $2,5x$
Donc l’aire des quatre rectangles est : $4\times2,5x = 10x$
L’aire du carré central et des quatre rectangles est : $x2+10x$
qui est égal à 39 d’après l’équation
L’aire des quatre carrés gris est : $4\times(2,5)^2 = 25$
Donc l’aire du grand carré est : $25+39 = 64$
Le côté du grand carré est donc : $\sqrt{64} = 8$

x est donc la solution de : $x+2\times2{,}5 = 8$
c'est-à-dire : $8-2\times2{,}5 = 3$

On comprend mieux mais on peut encore douté de la validité de cette technique ! A ce stade, des doutes peuvent encore subsister. Ils se dissiperont à coup sûr si par ailleurs, ce petit discours est illustré de la figure suivante :



Cet exemple montre la nécessité de faire un « pas de côté » pour dénaturaliser le regard sur une institution

Dans cet exemple, accomplir une tâche *t* est : « résoudre dans R l'équation $x^2 + 10x - 39 = 0$ » relevant d'un type de tâches *T* : « résoudre dans R une équation du second degré ». Pour comprendre la technique 2 (regard sur le passé), on a besoin d'un discours tenu sur cette technique sous la forme d'une mise en texte qui s'appuie sur l'observation d'une figure particulière : il permet sa compréhension et sa justification. Ce discours, nécessaire, sur la technique est la technologie θ de la technique τ_2.

A partir de cet exemple on peut illustrer l'une des questions que l'on peut poser sur une technique : *quelle est sa portée ?*

Une technique τ – une « manière de faire » – ne réussît que sur une partie $P(\tau)$ des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme la portée de la technique : elle tend à échouer sur $T\backslash P(\tau)$, de sorte qu'on peut dire que « l'on ne sait pas, en général, accomplir les tâches du type T ».

Dans l'exemple et pour chacune des techniques : obtient-on toutes les racines ? Pour toutes les équations du second degré ?

Une technologie peut :

- différer suivant l'institution dans laquelle la praxéologie est observée

- être sans rapport avec la théorie scientifique.

Il n'y a pas une seule forme de justification possible. Par exemple en mathématiques, on peut penser à la démonstration (forme canonique de discours justificatif). Mais d'autres justifications sont possibles, comme la justification expérimentale, comme le recours au graphique, etc.

La fonction première de la technologie est de justifier la technique. Mais elle a deux autres fonctions :

• rendre la technique intelligible, compréhensible, de « comprendre pourquoi ça marche »

• produire des techniques.

Sur quoi s'appuie ce discours technologique ? Qu'est-ce qui le rend lui aussi intelligible ? Et surtout qu'est-ce qui le justifie ? Ce dernier niveau nécessaire est la théorie.

Revenons à la technique 2 et sa technologie

La technologie de la technique 2 présuppose l'existence de certaines propriétés de figures et de leurs aires, la possibilité de déterminer des longueurs à partir d'aires, etc. Le fondement de cette théorie se trouve dans certaines parties des Eléments d'Euclide,

Description des praxéologies

Pour décrire les praxéologies nous nous referons au cadre de référence T4TEL1 développé par Hamid Chaachoua (2010) au sein de l'équipe MeTAH

- Un type de tâches est décrit par un verbe d'action, un complément et des *variables*. Le verbe d'action permet de définir le genre de tâches (par exemples : calculer, déterminer, montrer,...). Le complément précise sur quoi porte le verbe d'action. Les variables peuvent prendre différentes valeurs et sont de différentes natures : didactique, institutionnelle, cognitive...

- Une technique est décrite par une liste de sous-types de tâches.

- Une technologie est caractérisée par un ensemble d'énoncés qui peuvent avoir différents statuts : définition, théorème, propriétés, théorème-en-acte, règle du contrat didactique... Les statuts théorème-en-acte et règle du contrat didactique permettent de justifier les techniques personnelles.

Tâche : Une tâche est ce qu'un sujet d'une institution doit accomplir. Elle prend la forme d'un énoncé dans un contexte précis.

Dans l'univers de l'enseignement, on fait l'hypothèse que : *Toute tâche prescrite à un élève admet au moins une technique pour l'accomplir.*

Une technologie est un discours rationnel qui porte sur la technique et qui permet de :

La justifier / comprendre / contrôler sa mise en œuvre / l'adapter… que la technique permet d'accomplir les tâches du type T.

On peut la modéliser par un ensemble d'énoncés qui portent sur les éléments du domaine (essentiellement) ou non. Un énoncé est une proposition qui peut être vraie ou fausse.

Une théorie est un discours rationnel qui porte sur la technologie et qui permet de la justifier et la comprendre. On peut la modéliser par un ensemble d'ensembles d'énoncés qui portent sur les éléments du domaine.

Chaachoua et al. (à paraître) ont récemment défini la notion de type de tâches générateur par un verbe d'action, un complément et un ensemble de variables :

$$T = \text{(Verbe d'action ; Complément fixe ; Syst. Variables).}$$

Les variables d'un type de tâches générateur prennent des valeurs dans un domaine que l'on peut décrire.

Par exemple, si on considère le type de tâches T « Calculer la somme de deux nombres », il est générateur pour un ensemble de variables comme V1 : nature des nombres (entiers naturels, entiers relatifs, décimaux) ; V2 : taille du premier nombre si entier (nombre de chiffres) et V3 : taille du second nombre si entier (nombre de chiffres). Le fait d'être générateur pour un type de tâches est relatif au niveau de spécification du complément du verbe d'action.

Une première fonction d'une variable est de générer des sous-types de tâches en jouant sur les valeurs de cette variable : par exemple *T1* « calculer la somme de deux entiers » ou *T2* « calculer la somme d'un entier de taille 1 et d'un entier de taille 3 ». T1 et T2 sont des sous-types de tâches de T, T2 étant de plus un sous-type de tâches de T1. Ces sous-types de tâches peuvent avoir des techniques spécifiques : par exemple, une technique de T2 consiste à permuter les deux nombres et à faire un surcomptage, technique non valide pour deux nombres de taille 2 et 3. Ainsi, certaines variables permettent de caractériser les portées des techniques. Cette deuxième fonction apparaît comme particulièrement intéressante pour conduire des analyses *a priori* (point de vue épistémologique) et calculer des parcours d'apprentissage à partir d'un jeu sur ces variables et leurs valeurs. En particulier, la construction d'un modèle de praxéologie de référence pour un domaine mathématique (du point de vue de l'échelle de codétermination) inclue de fait pour nous l'explicitation de variables et de ses valeurs possibles.

Nous distinguons deux types de variables : variable institutionnelle et variable didactique.

- *Variable institutionnelle*

Les valeurs d'une telle variable permettent de rendre compte des contraintes et des conditions fixées par une institution. En conséquence, une variable institutionnelle et ses valeurs modélisent les conditions et les contraintes sous lesquelles une praxéologie peut être mise en œuvre dans une classe.

Par exemple, pour le type de tâches *T*, l'intervalle des nombres est limité à 30 au cycle 1 du primaire.

- *Variable didactique*

Une variable didactique est une variable dont un changement des valeurs qui lui sont attribuées peut modifier l'éventail des techniques possibles (donc les connaissances), et dont les valeurs peuvent être fixées par l'enseignant.

Pour un type de tâches *T* donné et une technique donnée, les variables didactiques permettent de caractériser la portée mathématique de la technique, les variables institutionnelles permettant de caractériser sa portée institutionnelle.

De plus, au niveau des variables didactiques, nous introduisons des valeurs supplémentaires pour rendre compte des techniques personnelles des élèves (Croset, Chaachoua 2010) qu'elles soient valides ou non. Ceci est *une troisième fonction de la notion de variable*, particulièrement importante pour le diagnostic des praxéologies personnelles des élèves d'une institution donnée. Les valeurs supplémentaires attribuées à une variable peuvent renvoyer à la notion de contrat didactique.

III.2. Praxéologie institutionnelle et praxéologie personnelle

Comme nous l'avons dit plus haut, la praxéologie a été introduite pour modéliser le rapport institutionnel : elle sera désignée dans la suite par « praxéologie institutionnelle ». Chaachoua (2010) a proposé une extension de la notion de praxéologie - modélisation de pratiques institutionnelles, à la modélisation des pratiques d'un élève en tant que sujet d'une institution en la désignant par « praxéologie personnelle » que nous présentons de façon synthétique.

> Face à une tache donnée *t*, l'institution attend d'un élève la mise en place d'une technique qui relève d'une organisation mathématique institutionnelle associée à la tache *t*. La non conformité du rapport personnel à *t* se traduit par la mise en œuvre d'une technique soit scientifiquement valide mais non adéquate institutionnellement soit scientifiquement non valide. (Croset et Chaachoua, à patraître)

Ces techniques se distinguent des techniques institutionnelles et, dans certains cas, le décalage entre la technique τ de l'élève et la technique attendue par l'institution peut s'expliquer comme si, pour l'élève, la tâche *t* relevait d'un type de tâches diffèrent de celui de l'institution.

Chaachoua (2010) désigne par praxéologie personnelle le quadruplet d'organisation praxéologique de l'activité d'un sujet institutionnel constitué de quatre composantes.

- Un type de tâches personnel *t* est l'ensemble des tâches que le sujet perçoit comme similaires, provoquant chez lui l'application d'une technique.

- Une technique personnelle utilisée par l'élève permet de résoudre un seul type de tâches personnel. Elle peut être erronée, correcte, légitimée par l'institution de référence ou non.

- Une technologie personnelle, explicite ou non, gouverne et légitime l'utilisation de praxis personnelles. Souvent un simple déficit technologique institutionnel peut être à même d'expliquer des techniques personnelles erronées. Mais il est parfois des situations où une technologie qui avait sa légitimité pour répondre à certains types de tâches se trouve être généralisée et utilisée par des élèves en dehors de la portée de la technique qu'elle légitimait.

- Une théorie personnelle qui, à son tour, à l'instar du modèle institutionnel, justifie la technologie personnelle.

III.3. Modèle Praxéologique de Référence (MPR) = Modèle Epistémologique de Référence (MER) : réinterprétation de la transposition didactique

Le schéma initial de la transposition didactique était le suivant :

Savoir Savant -> savoir à enseigner -> savoir enseigné -> savoir appris

Il est réinterprété en termes de praxéologie :

Praxéologie Savante -> Praxéologie à enseigner -> Praxéologie enseignée -> Praxéologie apprise

> La praxéologie à enseigner constitue un modèle praxéologique du curriculum d'une discipline. La base empirique pour élaborer ce modèle se trouve dans l'analyse des programmes et des manuels. Son influence sur la praxéologie enseigné et sur la praxéologie apprise est centrale bien que ni le professeur ni l'institution scolaire ne disposent explicitement de ce modèle mais uniquement de matériaux praxéologiques plus ou moins bien articulés (exposé de Chaachoua 2015)

L'étude de l'influence de la praxéologie à enseigner sur ce qui se passe dans l'institution à amène à chercher un modèle praxéologique de référence.

> Mais cette influence ne peut être adéquatement interprétée si nous ne disposons pas d'un point de vue épistémologique. Ce point de vue est fourni par une OM[19] de référence dont la description se fait généralement à partir des OM savantes légitimant le processus d'enseignement. L'OM de référence est celle que considère le chercheur pour son analyse. Elle ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes d'où elle provient (parce qu'elle les inclut dans l'analyse), mais elle se formule dans des termes très proches. L'OM de référence est celle que le chercheur met à l'épreuve de la contingence et qui subit pour cela de permanents remaniement (op. cité, p 117)

Un modèle praxéologique de référence permet de :

- Décrire les praxéologies à enseigner, enseignées ou enseignables et leurs limites ou incomplétude
- Décrire les praxéologies apprises et en particulier pour les situer au regard des praxéologies enseignées

(A suivre)

Bibliographie

BACHELARD G. (1977) *La formation de l'esprit scientifique*, Librairie philosophique, éd. Vrin, Paris

BALACHEFF N. (1995) Conception, propriété du système sujet/milieu. In Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (eds.) *Actes de la VII° Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp.215-229). Clermont-Ferrand : IREM deClermont-Ferrand.

BOSCH M. & GASCON J. (2010) Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”. Dans A. Bronner et al. (Éds), Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action (pp. 55-91). Montpellier : IUFM.

[19] Bosch et Gascon parle actuellement en termes de praxéologies. OM = Organisation Mathématique

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77–124

BROUSSEAU G. (1978) Étude locale des processus d'acquisitions scolaires, *Enseignement élémentaire des mathématiques n°18,* éd. IREM de Bordeaux

BROUSSEAU.G (1980) Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire, *Revue de Laryngologie. Vol* 101. n° 3.4

BROUSSEAU G. (1982 a) Les objets de la didactique des mathématiques, in *Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques*, Olivet

BROUSSEAU G. (1982 b) Ingénierie didactique : d'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique, in *Actes de la Deuxième école d'été de didactique des mathématiques*.

BROUSSEAU G. (1984) Le rôle du maître et l'institutionnalisation, in *Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques*, Olivet

BROUSSEAU G. (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques,* Thèse d'état de l'Université de Bordeaux, Bordeaux I

BROUSSEAU G., BROUSSEAU N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Publication de l'I.R.E.M. de Bordeaux

BROUSSEAU G. (1988) Didactique fondamentale, in *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire,* Actes de l'université d'été, Publication de l'I.R.E.M. de Bordeaux.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, éd. La pensée Sauvage, Grenoble.

BRUN J. (1993) Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques, in *Vingt ans de didactique des mathématiques en France,* éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHAACHOUA H. (2010) La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves (Habilitation à Diriger des Recherches). Grenoble: Université Joseph Fourier (Grenoble I).

CHEVALLARD Y., MERCIER A. (1984) La notion de situation didactique, in *Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques*, Olivet.

CHEVALLARD Y. (1985) *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné,* éd. La Pensée Sauvage, Grenoble. (1991 : 2ème édition)

CHEVALLARD Y. (1989) Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique,* IMAG, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12(1), 73–112.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherche en Didactique des Mathématiques, 19(2), 221–266.

CHEVALLARD Y. (2010) La didactique, dites-vous? *Éducation et didactique*, vol. 4 - n°1.

CHEVALLARD Y., JULLIEN M. (1990-1991) Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, *petit x*, n°27, pp. 41-76.

CONNE F.(1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol.12 n°2-3, pp.221-270, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

DABAJI H. (1995) *Construction d'une séquence didactique. Activité de modélisation du concept de relations alimentaires avec des élèves de CE1*. Mémoire de DEA, Université Joseph Fourier.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol.7 n°2, pp.5-31, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

DUROUX A. (1983) *La valeur absolue; difficultés majeures pour une notion mineure*. Mémoire de DEA, Université de Bordeaux I.

DUVAL R., PLUVINAGE F. (1977) Démarches individuelles de réponse en mathématique, in *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 8, éd. Dordrecht- Holland.

GRENIER D. (1984) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*, thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

GRENIER D. (1989) Le contrat didactique comme outil d'analyse des phases de dévolution et de bilan. Gras R. (coordonné par) *Actes de la 5ième école d'été de didactique des mathématiques*. IREM de Rennes.

KLEIN F. (1846) *Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaires.* Reproduction IREM de Paris 7.

LABORDE C. (1989) Hardiesse et raisons des recherches françaises en didactique des mathématiques, *Actes de la 13° conférence internationale Psychology of Mathematics Education,* Paris

MARGOLINAS C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble

MATHERON Y. (2000) Analyser les praxéologies. Quelques exemples d'organisations mathématiques, *Petit x* 54, 51-78, IREM de Grenoble.

MERCIER A. (1992) *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*, Thèse, Université de Bordeaux I

PIAGET J. (1975) L'équilibration des structures cognitives problème central du développement. PUF, Paris.

ROUCHIER A. (1991) *Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires: proportionnalité, structures itéro-récursives, institutionnalisation*, Thèse d'état, Université d'Orléans, UFR : Sciences Fondamentales et Appliquées, Orléans

TONNELLE J. (1979) *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*, Mémoire de DEA de Didactique des mathématiques, Université d'Aix-Marseille II et Université de Bordeaux I.

VERGNAUD G. (1984) Interactions sujet - situations, Troisième école d'été de didactique des mathématiques, Olivet.

VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.10 n°2-3, pp.133-170, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble

ANNEXE I

Construction mathématique

Les instruments sont des instruments *"idéals"*. Un problème de construction en mathématique est avant tout un problème de *constructibilité*.

Le compas d'Euclide est un "instrument" permettant de tracer un cercle de centre un point et passant par un point.
Un compas ne "transporte" pas des distances. On démontre qu'il peut transporter des distances par la "constructibilité" d'un segment [CF] de même longueur qu'un segment [AB] donné.

Soient trois points (de base) A et B et C non alignés. Tracer un triangle équilatéral CAD [20]. Tracer le cercle de centre A passant par B ; on appelle E le point d'intersection de ce cercle et de la droite (AD). Tracer le cercle de centre D passant par E ; on appelle F le point d'intersection de ce cercle avec la droite (CD). Le segment [CF] répond à la question. (Solution d'Euclide avec les notations modernes)

On peut reprendre à propos de cette construction ce que disent Chevallard & Jullien (1991) à propos de la construction du milieu d'un segment :

> On ne peut saisir l'intérêt de cette construction que si l'on prend en compte le fait que le point de vue d'Euclide est, avant tout, celui de la *constructibilité* : il montre par un enchaînement logique de propositions, - en ne se permettant donc d'utiliser que des propositions déjà établies - que le milieu d'un segment est constructible à la règle et au compas. .(Chevallard, Jullien, 1991, p. 65).

Une règle est un "instrument" à un seul bord rectiligne, supposé illimité et sans graduation ni marque.

On peut analyser la solution à un problème de construction géométrique selon les critères suivants :

> 1. elle doit fournir une preuve de l'existence de "l'objet" à construire ;
> 2. elle doit fournir une preuve de sa constructibilité ;
> 3. elle doit fournir un algorithme de construction.
> 4. éventuellement, elle peut fournir la construction géométrographique.[21]
>
> Ces exigences sont évidemment "emboîtés" les unes dans les autres, c'est-à-dire que la satisfaction de la dernière entraîne la satisfaction des trois autres, la satisfaction de l'avant-dernière celle des deux précédentes, et ainsi de suite." (Chevallard, Jullien, 1991 p. 68)

Construction pratique

Du point de vue pratique, le problème est de trouver des procédés de tracés avec des instruments *matériels* pour obtenir un dessin satisfaisant relativement aux mesures. Par exemple pour trouver les axes de symétrie d'une ellipse avec centre O marqué, on trace au compas pointé en O - en modifiant peu à peu son ouverture - les cercles inscrit et circonscrit, mais *avec une précision telle qu'il n'est pas possible de contester graphiquement (ou perceptivement) le tracé obtenu …* Un procédé de tracé approché est donc acceptable à partir du moment où il donne une solution graphique avec une précision suffisante.

---

[20]Tracer le cercle de centre A passant par C. Tracer le cercle de centre C passant par A. On appelle D l'un des points d'intersection.

[21] "…la géométrographie s'intéresse aux *procédés* de construction eux-mêmes, en se proposant de les comparer afin de trouver les plus simples, selon des critères déterminés. […] les solutions proposées par les mathématiciens sont (souvent de mauvaises solutions." (p. 66 et 68)

Le clivage entre les deux points de vue est manifeste quand on traite un cas de non constructibilité.

> Pour le dessinateur il existe toujours un algorithme de construction, exact ou approché, nécessitant tels ou tels instruments, lui permettant de réaliser son projet. La notion de non constructibilité - et, par suite, celle de constructibilité - devient, en conséquence, caduque de son point de vue. Elle n'a guère de pertinence *graphique* ; elle conserve pourtant toute sa pertinence *mathématique*. (Chevallard, Jullien, 1991, p. 76)

Un exemple d'un problème de non constructibilité à la règle et au compas :

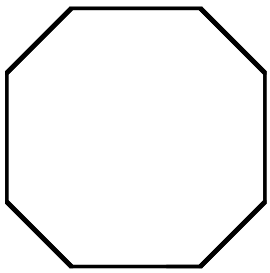
> S'agit-il de construire un cercle divisé pour un instrument de mesure, cette opération ne se fait en réalité que par tâtonnements. La division exacte du cercle en parties égales par la règle et le compas) n'était autrefois possible que pour les nombres 2n, 3, 5 et leurs divers multiples. Gauss y a ajouté d'autres cas en montrant la possibilité de la division en p parties, lorsque p est un nombre entier de la forme
>
> $$p = 2^{2^n} + 1,$$
>
> et l'impossibilité de la division dans tous les autres cas.
> La pratique ne peut tirer aucun profit de ces résultats ; les considérations de Gauss ont une signification purement théorique… (Klein, 1846, p.10)

Problème. Comment caractériser la construction à la règle et au compas dans l'enseignement de la géométrie ?
Dans la construction de l'axe de symétrie, ce qu'attend l'enseignant n'est ni une construction “mathématique” (au sens de Klein ou d'Euclide), ni une construction pratique. Les instruments sont matériels et on doit produire un tracé matériel (comme dans une construction “pratique”) mais tout tracé doit être justifiable par une propriété géométrique (comme dans une construction “mathématique”) mais le problème de l'existence ne se pose pas.

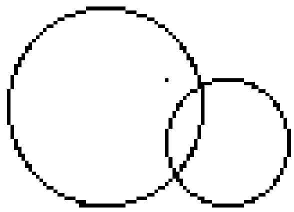
ANNEXE II

extrait de Grenier (1984)

groupe de figures 1 **règle graduée et équerre**

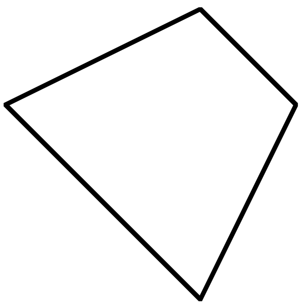


octogone

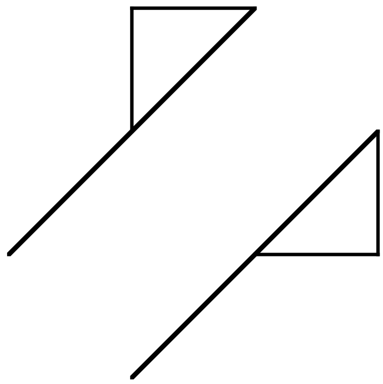


cercles sans leur centre

groupe de figures 2 **règle non graduée et équerre**

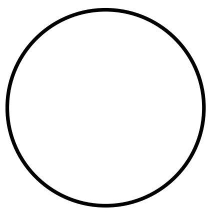


trapèze isocèle

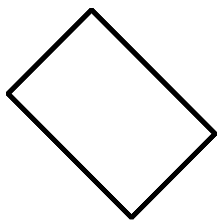


rapeaux

groupe de figures 3 **règle non graduée et compas**



cercle sans centre



rectangle

ANNEXE III

Chronique “Bilan sur l’activité de tracé avec instruments à propos du trapèze”

extrait de Grenier (1989)

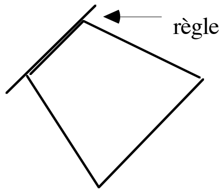
1 Enseignant=E : On passe à la figure 3, le trapèze *(E colle la figure sur le tableau)*

2 E : groupe 3 s’il vous plaît, chut *(la classe est bruyante)*, alors là vous avez la règle non graduée et l’équerre

3 Olivier (groupe 3) prend les deux instruments et se sert de la règle

4 E Donne la moi *(E reprend l’équerre)*

5 Olivier : alors déjà nous on a pris la règle /…/ on l’a posé

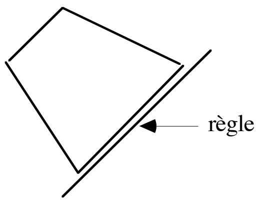


6 E *prend la règle* : chut, s’il vous plaît

7 Olivier : on l’a posé et puis après on a mis un point [sur la règle]

8 E : vous avez marqué sur la règle non graduée une graduation pour mesurer la longueur du segment

9 Olivier : et puis ici c’est pareil *(pose la règle sur la grande base et mesure)*



10 E : ici c’est pareil, bon, est-ce que c’est très précis ?

11 XX : non

12 E: à ton avis ?

13 XX : ça peut s’effacer sur la règle

14 E : ça peut s’effacer sur la règle. Ca n’est pas très précis. Bon ! Ensuite dis quand même comment tu as fait

15 Olivier : on a vu que ça faisait à peu près la moitié. Ca faisait le double de ça…

16 E : tu as dit quelle expression ? Tu as entendu ?

17 X oui

18 E : Est-ce que c’est très précis ? *(il rit)*

19 XX : non

20 E : tu vois ! Donc on va peut-être, parce que le temps passe, on va continuer là parce que tu es dans l’à-peu-près, nous voulons du précis

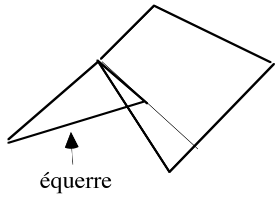
21 E à XF : tu as quelque chose à proposer ? *XF viens au tableau*

22 E *(à Olivier)* : merci Olivier

23 E *(à XF)* : donne la moi si ça t’embarrasse

24 *XF donne la règle et garde l’équerre*

25 E : parle très fort s’il te plaît



26 XF : on a posé notre équerre sur l’angle

27 E : oui au sommet de l’angle

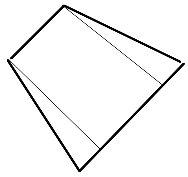
28 XF : oui et on a fait des petits pointillés jusqu’en bas *(XF trace)*

29 E : d'accord, donc une perpendiculaire ?

30 XF : oui

31 XF : on fait pareil de l'autre côté *(XF trace)*

32 E : même chose de l'autre côté. Deux perpendiculaires.



33 *XF rend l'équerre et prend la règle non graduée à E*

34 XF : puis il parait que ça fait un centimètre

35 E : Ah, il parait que …

36 XF : bien, c'est ce qu'ils ont dit

37 E : c'est ce qu'ils ont dit et tu les crois sur parole

38 XF rit

39 E : alors est-ce que c'est très précis le "il parait que"

40 *François proteste*

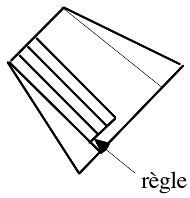
41 E : non on ne t'accuse pas François ! Mais discutons en. Est-ce que c'est très précis ?

42 X : non

43 E : vous avez pensé que c'était un centimètre. Vas-y. On va quand même t'écouter deux secondes

44 XF : puis, ils ont tourné la règle pour trouver combien il y avait de centimètres et ils ont divisé en deux.

45 E : bon. Donc tu rejoins un peu Olivier. Est-ce que c'est plus précis que



46 *XF retourne à sa place et donne à François les instruments*

47 E : bon, François ? Viens

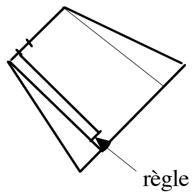
48 *François vient au tableau, prend la règle non graduée.*

49 E : tu as l'équerre aussi

50 *François pose la règle et marque par un petit trait chaque report de la section de la règle.*

51 E : tu marques donc ? Est-ce que c'est très précis là ce que tu fais ?

52 François : oui



53 E : ça fait la longueur. Bon, nous sommes d'accord alors je crois que beaucoup l'ont fait, ça n'est pas très précis parce que tu as l'épaisseur alors qui joue là.

54 *François continue à reporter sa règle*

55 E : tu n'est pas plus précis qu'Olivier, je suis désolée

56 *François retourne à sa place très déçu.*

57 *Un élève du groupe 2 vient au tableau, prend la règle non graduée*

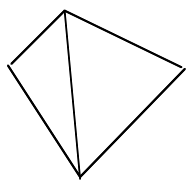
58 groupe 2 : on trace d'abord ça

59 E : donc voilà, tu la trace. Alors ?

60 E : qui est-ce qui peut dire comment s'appelle cette droite là, comment tu l'as appelée ?

61 groupe 2 : on trace une …

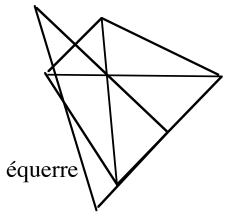
62 E : une diagonale, hein ?



63 X : perpendiculaire

64 E : une diagonale, puis l'autre. Chut.

65 *groupe 2 trace l'autre*

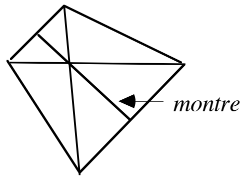


66 groupe 2 : alors là ça me donne le centre

67 E : ça te donne un point;

68 groupe 2 : avec l'équerre *(prend l'équerre, place l'équerre sur le point et rend la règle)*

69 *E écrit au tableau*



70 E : ce point, tu considères…

71 groupe 2 : qu'il est u milieu

72 E : qu'il est sur ? *(bruits)*

73 groupe 2 : ça nous donne ça *(montre le segment)*

74 E : alors c'est quoi ?

75 groupe 2 : c'est la droite de symétrie

76 E : ça nous donne la droite de symétrie. Donc tu as le point, puis la perpendiculaire *(E écrit au tableau)*

77 E : et ça te donne la droite de symétrie. Ce point tu l'as choisi, enfin tu dis au départ qu'il est sur la droite de symétrie

78 groupe 2 : oui

79 E : d'accord. Est-ce que quelqu'un a autre chose comme construction ? ça va ?

élèves : oui

80 X : on aurait pu plier la feuille et tracer *(rires d'autres élèves)*

81 E : non, c'est avec les instruments. Nous passons à la page suivante qui est "les drapeaux".

82 Yann : mais monsieur il n'y avait qu'un point !

83 E : oui, un point et la perpendiculaire (brouhaha) ça lui a suffit. Je ne dis pas que c'est comme ça exactement…

84 Yann : oui, il faut au moins deux points !

85 E : ah chut ! …silence… je crois que Yann a un problème et il faut l'aider. Un point ça ne suffit pas dit Yann.

86 Yann : oui

87 E : alors vas-y c'est ton problème

88 X : ben il est idiot parce que… *(rires)*

89 E : ah non non ! Tu place l'équerre selon le côté et tu la fait glisser jusqu'à ce que le point soit sur l'autre côté de l'équerre *(elle mime au tableau)* donc tu peux tracer, c'est précis.

90 Yann : oui.