Genèse de l'infini en mathématiques : entre émotion et raison

Imène Ghedamsi, Université de Tunis & Thomas Lecorre, Université Cergy-Pontoise

Résumé. Cet essai invite le lecteur, élève en fin de cursus secondaire, étudiant, professeur, etc. à suivre la quête historique insensée des mathématiques pour capturer et domestiquer ce qui semble échapper sans cesse à l'entendement, tel un horizon, l'infini numérique. Tandis que les nombres les plus simples, les entiers naturels, emportaient déjà avec eux cette potentialité de l'inaccessible, l'évolution des mathématiques a progressivement permis de façonner d'autres catégories de nombres qui ont contribué à poser autrement cette vertigineuse question. Et cette aventure quasi mystique à certains moments s'accompagne des émotions les plus fortes pour celui qui se laisse entraîner dans cette spirale mathématique à la lisière de la raison.

Mots-clés. Infini, raison, émotion, histoire, nombres.

Avant goût

Même si la pensée philosophique qui s'est érigée avec les grands noms de la Grèce antique a ouvert les mathématiques au monde des idées et de l'abstraction, les pensées religieuses et mystiques ont continué de contrôler le développement de la pensée mathématique jusqu'à l'avènement du siècle des lumières (et au-delà pour certains…). La transition philosophique, qui s'est opérée entre la renaissance et les lumières, a marqué un changement dans la pensée mathématique en faveur de la méthode et de la raison scientifique. Cette transition s'est particulièrement façonnée autour du cartésianisme, un courant rationaliste soutenu par Descartes et étayé, en 1637, dans son "Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences". Pendant le siècle des lumières, dominé incontestablement par Euler et Lagrange, les mathématiques se sont fondamentalement structurées autour du calcul infinitésimal (analyse réelle en langage moderne). En dépit de son rôle central dans le développement des techniques relatives à ce calcul, la notion d'infini (infiniment grand, infiniment petit, etc.) est utilisée sous différentes acceptions qui ont évité soigneusement d'aborder explicitement la question de la nature de cet infini et ses significations. A la fin du siècle des lumières, les voix se sont élevées dans les cercles des mathématiques pour exiger de répondre à cette question et préciser clairement ce qu'on appelle infini en mathématiques. C'est au cours du 19ème siècle que Cauchy, Dedekind, Cantor et bien d'autres, se sont emparés de cette question. Convaincus par la puissance de la raison mathématique et de ses pensées, ils se sont engagés sur un chemin qui allait vite déterrer d'autres formes de pensées dont ils croyaient les mathématiques raisonnable(ment) séparées.

Pour Larousse, l'infini désigne un adjectif de ce qui est sans limites dans le temps et l'espace. Il est, par ailleurs, communément accepté que penser l'infini, par exemple de la nature, ne peut pas être isolé des émotions qu'il pourrait déclencher. Contrairement au cartésianisme fondé sur la séparation esprit/corps, donc sur la distinction rationalité/émotions, les travaux du neurobiologiste Damasio[1] (1994, 2005) mettent les émotions, positives ou négatives, au cœur de la thèse des *marqueurs somatiques* impliqués dans la prise de décision et la construction de connaissances : l'émotion est, entre autres, une source d'expressions et d'actions sur les connaissances. Les émotions positives renvoient à des sentiments de types joie, confiance, assurance, émerveillement, plaisir, etc. Par contre, les émotions négatives renvoient à des sentiments de honte, regret, colère, inquiétude, doute, etc. On admettra dans cet article que la construction mathématique au fil des temps ne déroge pas à cette thèse. La question du bonheur en mathématique peut alors être réinterprétée par la question des émotions, tout du moins celles qui sont associées à l'activité mathématique d'un individu lorsqu'il progresse ou pas dans son activité. Par bonheur, nous entendons une tonalité émotionnelle enivrante qui conduit à un état de satisfaction équilibrée et durable. Toujours dans le cadre de la neuroscience, cet état est principalement le résultat de la production de sérotonine dans le cerveau et il est très différent du sentiment passager du plaisir issu principalement de la production de dopamine. Les mathématiciens contemporains décrivent souvent leurs activités avec les mots du monde émotionnel : *plaisir de la découverte, sensation de jouissance extraordinaire qui se dégage de l'intemporalité de la réalité mathématique, découragement, exaltation, souffrance, éblouissement, fascination,…* Mais peut-on admettre l'existence d'une dialectique émotions/raison alors même que les émotions ont leurs raisons et que la raison, mathématique, s'en abstrait ? Polémiquer sur cette question n'est pas un enjeu de cet article, la nier ne nous parait pas non plus constructif. La littérature sur la question est relativement faible, de même que celle sur les états émotionnels des mathématiciens au cours de l'histoire des constructions mathématiques. Comment préserver le pari des émotions dans une enquête historique non ennuyeuse sur les mathématiques ?

En mathématiques, les nombres et les formes matérialisent le temps et l'espace et sont à l'origine de l'évolution de la pensée mathématique. L'expérience des individus aux prises avec les nombres et les formes depuis les premières civilisations a conditionné les mouvements de la pensée mathématique et suscité des débats houleux jusqu'au siècle dernier, et plus encore peut être ! Tantôt accusés et monstrualisés, tantôt bénis et adulés, les nombres, entités en apparence évidentes, ont inlassablement contribué à dessiner et redessiner les contours de la raison mathématique. Dans ces contributions, l'infini[2] a indéniablement été l'ingrédient de base de ces dessins. C'est sur un récit à propos des nombres, parfois non dissociés des formes, au cours de l'histoire des mathématiques que nous avons misé pour engager le lecteur dans un jeu des émotions et de la raison en mathématiques en l'invitant à entrer au cœur de l'infini et de ses vertiges.

---

[1]Antonio Damasio, neurologue et spécialiste de la neurobiologie, a été désigné par le Institute for Scientific Information comme l'un des chercheurs les plus cités de la dernière décennie. Son ouvrage *Descartes' Error: Emotion, Reason and Humanbrain* (1994, 2005) est considéré comme l'un des livres les plus influents (notamment en neurosciences et en psychologie) des deux dernières décennies.

[2]A entendre dans un sens large d'infini : infiniment "grand"/infiniment "petit".

Le sentiment des nombres

Quand les passions, émotions donnant lieu à un sentiment très intense, inspirent les romantiques, parfois une étrange résonnance avec ce qui a mené à l'une des plus profondes tensions dans l'histoire de la pensée mathématique surgit. Shelley[3] l'exprime ainsi dans ces vers : *If you divide suffering and dross, you may diminish till it is consumed away; If you divide pleasure and love and thought, each part exceeds the whole, and we know not how much, while any yet remains unshared, of pleasure may be gained, of sorrow spared…*. L'étrange subtilité de ces vers à résumer les tenants et aboutissants de la crise de l'infini en mathématiques laisserait quiconque informé de cette crise perplexe. Le romantisme, *l'opposé du rationalisme des lumières, libérateur de l'imagination*[4] et souvent mis dos à dos avec les mathématiques se retrouve face à elles dans ses ébats sur l'infini[5].

Plus concrètement, imaginons une règle graduée, choisissons une portion entre deux graduations de cette règle (par exemple entre 0 et 1) et amusons-nous à emboîter successivement d'autres morceaux, les uns dans les autres, à l'intérieur de cette portion. Nous allons nous apercevoir qu'à un moment, il va nous être difficile de continuer cette besogne. Oh que oui, vous diront les mathématiques, cette "règle" a la puissance du continu ! Vous pouvez continuer cette besogne jusqu'à la lueur de l'infini, la portion peut diminuer jusqu'à l'entière dissipation, mais il restera toujours un petit quelque chose au pire une seule graduation comme l'étrange 0.000002487143691758032….

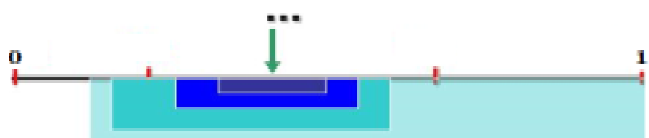

Fig.1 Emboîtement (infini ?) d'intervalles

Si Shelley affirme que *vous pouvez diviser la souffrance, vous pouvez la diminuer jusqu'à ce qu'elle soit entièrement consumée*[6], les mathématiques renchériront : mais ça ne se résorbera point !

Si maintenant on imagine que notre règle mesure non pas 10cm, mais 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, …, 10 milliards de milliards, …et ainsi de suite en essayant de rattraper celui à qui on ne peut assigner de place jusqu'à vaciller d'épuise(ment). En cours de route Shelley vous exhortera àperpétuer ce plaisir car *tant que l'on n'en reste pas à partager, nous ne saurons pas combien du*

[3]Shelley est un poète anglais (1792 – 1822), auteur classé dans le courant du Romantisme (mouvement littéraire et culturel européen). Cité dans Regnault (2008).
[4] Ces descriptions sont prises du site des études littéraires https://www.etudes-litteraires.com/figures-de-style/romantisme.php.
[5] Pour plus de détails sur la question, voir *Le sentiment de l'infini* de Regnault (2008) qui nous a beaucoup inspiré pour cet article.
[6]Traduction française de la première partie dans les vers de Shelley ci-dessus.

plaisir peut être gagné[7], les mathématiques vous confirmeront que ce plaisir, partagé gardera au moins une fois toute sa saveur à condition qu'il soit infini.

C'est sur sa ténacité : parfois dans l'infiniment grand et parfois dans l'infiniment petit, tantôt emprisonné et tantôt inattrappable, que nous ouvrons le bal pour la danse de l'infini en mathématiques. Si les notes de romantisme que nous avons choisi jouissent des avatars de l'infini, les mathématiques ont souvent cherché à s'en délivrer.

1. Démesure de la mesure : le vertige des naturels

Le plaisir esthétique que procure les entiers naturels (0, 1, 2, 3, 4, 5, …) est sans équivoque ; il façonne en grande partie la beauté des mathématiques. Ce sentiment que ressentent certaines personnes face aux naturels est inséparable de la démesure de ces nombres indéfiniment rattrapée par la raison de la mesure ! Qu'ils soient carrés, triangulaires, jumeaux, heureux, parfaits, premiers, amiables ou autres, chaque catégorie de naturels ne cesse d'avancer en se frayant un chemin qui la mettra à l'abri de la démesure. Avant de retrouver le repos, chaque catégorie est priée par les mathématiques de revenir à la raison et de répondre à la question ultime : êtes-vous certain que vous avez guidé l'infini aux limites de votre démesure ?

L'expérience des naturels a parcouru plusieurs millénaires avant d'être élevé, par la *Fraternité pythagoricienne*[8], vers 600 av. J-C, à un rang qui dépasse les seules exigences de la vie pratique de l'époque. Les disciples de cette fraternité annoncent une rupture avec les anciens et pénètrent, main dans la main avec les nombres[9], au monde de la raison mathématique et parfois engrainée par l'envie de connaitre le monde. Pour les premiers pythagoriciens *Tout est nombre*[10] et ils en firent deux éléments pour expliquer tout ce qui existe : le fini (limité, l'unité, structurant comme une figure géométrique) et l'infini [11](illimité, multiple, désordonné comme l'air). Les nombres, y compris les multiples, sont des symboles[12] (4 pour la justice, 8 pour l'amour, 10 pour la perfection, …) mais aucun "nombre" ne symbolise l'air, on raconte que pour certains l'air est le tout, le divin ?? Le nombre initialement ancré dans le matériel le dépasse, s'en détache, s'en libère, s'en désaliène... pour partir avec l'air à l'infini !

On attribue généralement aux premiers pythagoriciens les premières manipulations des nombres figurés, représentés par des points disposés sous de multiples formes dont les polygones réguliers. Ces manipulations leur ont permis de découvrir plusieurs catégories de nombres. Par exemple les nombres 3, 6, 10,… sont triangulaires ; les nombres 6, 8, 10, … sont rectangulaires (chacun de ces nombres peut s'écrire comme produit de deux naturels différents de 1 et de lui-même, ces

---

[7]Traduction française de la deuxième partie dans les vers de Shelley.

[8]Une sorte d'ordre ou de Franc-maçonnerie réservée aux (apprentis) mathématiciens et mise en place par Pythagore.

[9]Au sens d'entiers naturels, les fractions sont des rapports de nombres.

[10] Principe de la Fraternité interprété en termes de : *les nombres sont l'essence des choses.*

[11] Dits aussi respectivement l'impair et le pair.

[12]De leur époque, les pythagoriciens n'attribuaient pas forcément les mêmes symboles aux nombres.

deux naturels constituent les mesures du rectangle représentatif de ce nombre), et il existe des nombres non rectangulaires (qu'on appelle aujourd'hui nombres premiers).

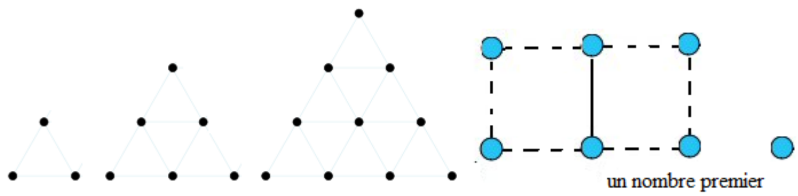

Fig.2 Représentations des nombres triangulaires et impairs-premiers

Mais s'il a fallu attendre Euclide, vers 300 av. J-C, pour répondre au problème d'existence d'une infinité de nombres premiers, c'est-à-dire de nombres non rectangulaires (donc un nombre qui ne se décompose pas en produit de deux nombres différents de 1 et de lui-même), ce problème demeure ouvert à ce jour pour les nombres parfaits (nombre égal à la somme de tous ses diviseurs sauf lui-même)[13]. En utilisant les règles de la divisibilité, Euclide a prouvé que *les nombres premiers sont en quantité plus grande que toute quantité proposée de nombres premiers*. Mais alors ceci ne supposerait-il pas de prime abord, que les *quantités proposées de nombres premiers* sont infinies ? Pour atteindre la raison mathématique, cette justification ne peut se suffire à la divinité de l'air pour décharger ce en quoi elle se fonde : les naturels sont infinis !

La légende raconte que depuis le début des temps, il y a environ 30 000 ans, le plaisir de manipuler les naturels, à l'époque en ajoutant à chaque fois un caillou, a d'abord fait le bonheur d'un berger, heureux de pouvoir contrôler tous les moutons de sa bergerie. C'est là la correspondance terme à terme qui consiste à associer à chaque mouton un caillou et à chaque caillou son mouton. Le matin, le berger associe à chaque mouton un caillou, quand les moutons reviennent le soir, il associe encore un caillou à chaque mouton mais le caillou n'est pas forcément le même! Il n'associe plus les mêmes moutons aux mêmes cailloux, à moins d'avoir écrit leurs noms sur les cailloux, mais ceci serait inutile, car le berger, sans le savoir consciemment utilise une propriété des correspondances terme à terme : si on peut établir une correspondance terme à terme entre deux ensemble, ici l'ensemble des moutons et celui des cailloux, alors les deux ensembles comportent le même nombre, aujourd'hui on dira nombre cardinal, et ce nombre ne dépend pas des associations terme à terme utilisées. En choisissant une autre association au retour des moutons, il peut ainsi être certain de bien vérifier que le nombre de caillou est égal au nombre de moutons, autrement dit qu'aucun mouton ne s'est perdu depuis le matin, à moins qu'un rigolo n'ait modifié entre-temps le nombre de cailloux ! Cette correspondance terme à terme est la base de tout système de numération et permet en particulier de comparer la taille des ensembles, en tout cas jusque-là finis !

Maintenant et alors que, comme le dirait un certain Emile Ajar : *Chaque fois que je vois le nombre un, j'ai envie de l'aider à s'échapper... Il a constamment à ses trousses, derrière,*

[13]Comme par exemple les nombres 6 et 28.

le zéro qui veut le rattraper et devant, toute la mafia des grands nombres qui le guette[14], quel autre ensemble que celui des naturels, certifié par la raison mathématique infini, pourrait-on mettre en correspondance terme à terme avec l'ensemble des naturels pour attester de sa taille ?

Les ensembles dont il a été question dans les correspondances terme à terme sont finis, ils ont un nombre cardinal fini, alors que l'ensemble de tous les naturels est sensé avoir une cardinalité infinie ! Nous allons cependant jouer le jeu des ensembles finis et supposer que sa cardinalité est égale à aleph-zéro et notée $\aleph_0$ comme par Cantor, le pionnier de la théorie des ensembles infinis. Maintenant, lequel est le plus grand, l'ensemble des naturels ou celui de cardinalité aleph-zéro + 1 ? Cette question peut paraitre très bizarre mais n'affirmons rien avant de voir l'ensemble des naturels à l'aune des correspondances ! Eh bien, empruntons un caillou au berger et ajoutons-le à l'ensemble de tous les naturels, nous avons là un ensemble E de cardinalité aleph-zéro + 1.Comme nous l'avons établi, le seul moyen de comparer ces deux ensembles est la correspondance terme à terme. Nous placerons le caillou au début de E {caillou, 0, 1, 2, 3, 4 ...} tandis que l'ensemble F est celui des naturels {0, 1, 2, 3, 4, 5 ...}. Nous allons associer le caillou à 0, 0 à 1, 1 à 2, 2 à 3, 3 à 4, 4 à 5 ... et ainsi de suite en gardant la correspondance terme à terme sans jamais tomber à court d'association de termes : aleph-zéro et aleph-zéro + 1 sont égaux !C'est un résultat aussi étrange que fascinant, Cantor lui-même l'a déclaré ! Le plus étrange est à venir si l'on répond à la question suivante : Y a-t-il autant de naturels que de naturels pairs ? Notre intuition nous dirait qu'il y a deux fois plus de naturels {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ...} que de naturels pairs {0, 2, 4, 6 ...} mais une correspondance terme à terme nous révèle immédiatement que ces deux ensembles ont la même taille ! On multiplie par deux pour aller de la première à la deuxième ligne du tableau, et on divise par deux pour aller dans le sens contraire.

x 2

0	1	2	3	4	5	..
0	2	4	6	8	10	...

x 1/2

Fig.3 Correspondance entre les nombres pairs et les entiers

Et c'est d'ailleurs ainsi que Dedekind, qui fut parmi les premiers mathématiciens à comprendre la portée des travaux de Cantor sur la théorie des ensembles infinis, définit audacieusement ce que c'est qu'un ensemble infini : *Un ensemble est infini s'il peut être mis en correspondance terme à terme avec l'une de ses parties strictes*. En dépit de leur normalisation mathématique, plusieurs questions en lien avec les ensembles infinis demeurent insolubles, c'est le cas de l'un des 23 problèmes d'Hilbert, grand défenseur des ensembles infinis, sensés marquer le cours de la pensée mathématique du 20ème siècle : *l'ensemble des nombres premiers jumeaux est infini*[15].

Mais à la suite des pythagoriciens, les nombres ne sont pas uniquement les naturels mais aussi les fractions de deux naturels, que nous appelons aujourd'hui rationnels : Qu'en est-il alors de l'ensemble des rationnels ? Tenez-vous bien, nous parlons d'un ensemble qui contient {**1**/1, **1**/2, **1**/3, **1**/4, **1**/5 ...}, {**2**/1, **2**/2, **2** / 3, **2**/4, **2**/5 ...}, {**3**/1, **3**/2, **3**/3, **3**/4, **3**/5 …}, {**4**/1, **4**/2, **4**/3, **4**/4, **4**/5

[14]Nom d'emprunt d'un écrivain français, Romain Gary, du 20ème siècle, cité dans son *Gros-câlin.*

[15] Par exemple 27 et 29 sont premiers et jumeaux parce que leur différence est égale à 2.

…}, et ainsi de suite. Donc s'il y a un ensemble de cardinalité supérieure à aleph-zéro, c'est bien celui-là ! A vue d'œil, chaque partie peut être mise en correspondance terme à terme avec les naturels (par exemple, pour la première partie on fait correspondre 1/1 à 1, 1/2 à 2, 1/3 à 3, …). Par quel délire, existerait-il un moyen de créer une correspondance terme à terme entre l'ensemble des naturels et l'ensemble des rationnels ? Afin d'illustrer comment procéder, il nous faudra créer un tableau qui comporte toutes les fractions possibles.

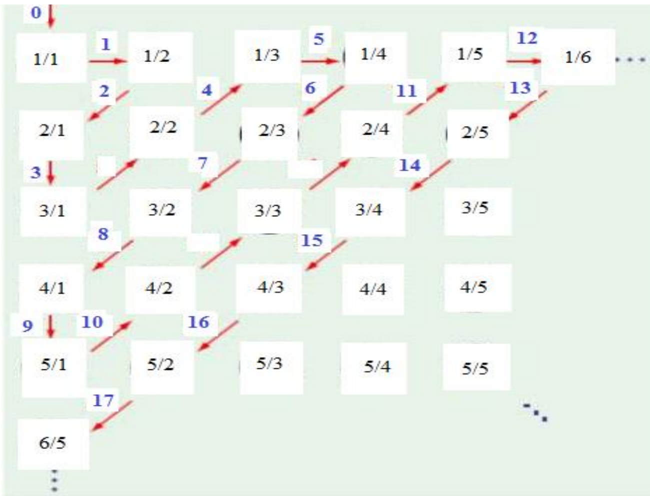

Fig.4 Principe de numérotation de toutes les fractions

Le trajet représenté par les flèches en partant de 0 permet de fonder la correspondance recherchée. On associe 0 à 1/1, 1 à 1/2, 2 à 2/, 3 à 3/1, 4 à 1/3. On a sauté 2/2 car il est déjà pris par 0 (1/1 = 2/2). Ensuite on associe 5 à 1/4, 6 à 2/3, et ainsi de suite en faisant attention à chaque fois que l'on rencontre une fraction déjà prise précédemment, on la saute et on passe à la case suivante du trajet ... Cette correspondance crie haut et fort qu'il y a autant de naturels que de fractions !

Le monde des mathématiques ne cessera pas d'être fasciné par les nombres, à côtés des naturels et des rationnels, il est temps de goûter à la saveur des irrationnels !

2. Diagonale du (dé)plaisir

Il y a à peu près 4000 ans, les babyloniens avaient comme nous des besoins pour la vie pratique. Et comme pour nous, ces besoins, notamment de fabrication d'objets, de partage de champs, de construction d'habitations, nécessitaient de mesurer et de faire des calculs. Ils avaient leur propre système de numération, de calcul, développé à l'aide de symboles cunéiformes[16] … écrits

[16]En gros, en forme de coin. Il parait que c'était l'utilisation d'un stylet sur un support en argile qui a conduit à l'utilisation de symboles cunéiformes, car les lignes courbes ne peuvent pas être tracées.

sur des tablettes en argile, souvent accompagnés du problème à l'origine du calcul. Des milliers de ces tablettes ont survécu jusqu'à ce jour, la YBC 7289 est la plus surprenante[17] !

Fig.5 Tablette YBC 7289
(a) en écriture cunéiforme correspond à 30, soit la longueur du côté du carré
(b) correspond à 42,4262889, soit la longueur de la diagonale du carré
(c) correspond à 1,41421296, soit le rapport de b sur a

Vous devez surement vous demander ce que cette tablette a de si particulier ! Vous avez raison de poser cette question surtout que le carré qui y est représenté avec ses deux diagonales et des inscriptions cunéiformes traduites, en général sur les côtés, en numération actuelle n'a rien d'exceptionnel ! Les traductions correspondent successivement à la mesure du côté du carré (a = 30), à la mesure de la diagonale du carré (b = 42,4262889) et au rapport de b sur a donné par 1,41421296. Si vous êtes intéressés par l'originalité de cette tablette, tracez autant de carrés que vous voulez, prenez une règle graduée et mesurez la diagonale et le côté puis faites le rapport de la mesure de la diagonale par la mesure du côté… Avez-vous deviné ?

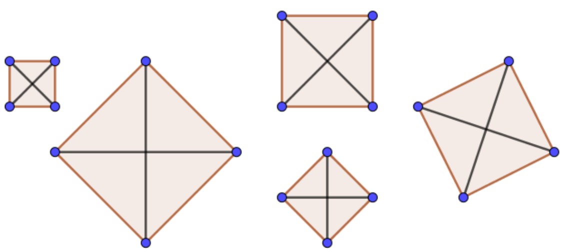

Fig.6 Des carrés différents mais un rapport diagonale/côté conservé

Comme vous, à la suite des babyloniens, les premiers pythagoriciens ont été confrontés au même problème mais rappelez-vous que seuls les naturels sont pour eux des nombres ; les fractions sont quant à eux des rapports de naturels. Donc en prenant un carré de côté l'unité ou le 1, ils se sont aperçus que le rapport de la diagonale de ce carré par 1 n'est ni un nombre, ni une fraction. Ce fût alors le grand désarroi au sein de la Fraternité. Est-il possible que le nombre, quintessence du monde, puisse ne pas être absolu, que l'unité ne puisse pas mesurer cette diagonale ? Tous les essais n'avaient pas servi pour dompter cette chose, elle refusait de s'exprimer en fonction de 1, il restait toujours un petit, un infiniment petit …

[17] En général, les symboles babyloniens sont retranscrits, à l'intérieur des tablettes, dans le système de numération babylonien (qui se fait en base 60).

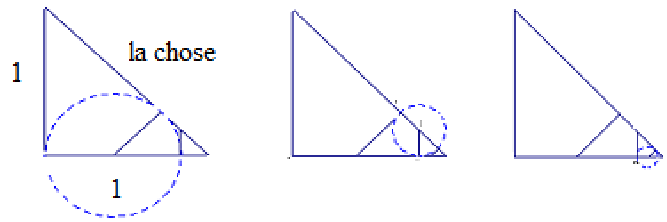

Fig.7 La diagonale incommensurable

On raconte que Pythagore a été fortement bouleversé par cette découverte au point de contester à cette chose le statut de nombre et de repenser les mathématiques en séparant le domaine des nombres[18], de l'absolu, et le domaine de ces entités[19], ces mesures incommensurables, qui continuent de s'étaler indéfiniment …La légende dit qu'on a sacrifié 100 bœufs (une hécatombe) pour célébrer la découverte. Elle dit aussi, que celui qui a divulgué cette information, Hippase de Métaponte, aurait été noyé en mer. Si vous avez répondu à la question sur les carrés d'en haut,vous auriez peut-être senti la même frustration ou au contraire, vous auriez été émerveillé de la régularité de vos résultats qui ressemblent à1,41 ; 1,414 ; 1,4142 ; 1,414213 ; 1,4142135 ; 1,41421356 … Les Grecs savaient aussi, depuis les premiers pythagoriciens, grâce à la formule dite de Pythagore, que cette mesure élevée au carré est un nombre, le 2. Il parait que cette formule a été découverte en utilisant une corde très particulière pour construire des triangles rectangles dont les mesures des côtés sont des nombres, des naturels qu'on appelait les triplets pythagoriciens. Le triplet (3, 4, 5) est emblématique de cette découverte, il vérifie $3^2 + 4^2= 5^2$. La généralisation de cette formule (dans un triangle rectangle, la somme des carrés des mesures des deux côtés de l'angle droit est égale au carré de la mesure du côté opposé à l'angle droit) a longtemps été utilisée, durant plusieurs siècles et au moins jusqu'au moyen âge, sans que la raison mathématique ne la remette en question.

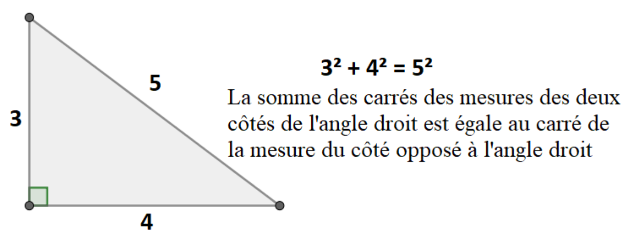

Fig.8 Le triangle de Pythagore

C'est en se basant sur cette formule et sur les règles de la divisibilité que la première raison mathématique de l'incommensurabilité de la mesure de la diagonale d'un carré de côté 1 a été connue par les pythagoriciens. Elle figure dans les textes d'Aristote et affirme que si la diagonale du carré de côté 1 était commensurable avec le côté, alors un même nombre serait à la fois pair et impair. La mesure de cette diagonale a incontestablement amorcé la naissance d'autres nombres,

---

[18] Dont le modèle est l'arithmétique.
[19] Dont le modèle est la géométrie.

à côté des naturels et des rationnels[20], que nous appelons aujourd'hui irrationnels, dont la fameuse chose, racine de deux que certains trouvent le plaisir de noter $\sqrt{2}$.

Fidèle à la tradition grecque de nier l'existence des irrationnels, Euclide met en place une méthode pour évaluer les mesures incommensurables de certaines grandeurs, où au lieu de les calculer et d'essayer de rattraper l'invisible, il les a comparées, entre elles ou avec un naturel ou une fraction, en contournant habilement la crise de l'infini et de l'infiniment petit en admettant ce qu'on appelle aujourd'hui le continu archimédien qui est dû, d'après Archimède vivant au temps d'Euclide, à Eudoxe de Cnide cent ans avant ! Mais de quoi s'agit-il exactement ? Et bien imaginez encore une fois une règle, cette fois-ci, non graduée, d'extrémités A et B, choisissez une graduation qui va fixer l'unité de mesure et qui commence à partir de A, puis reportez plusieurs fois cette unité de mesure sur la droite graduée en direction de B. Les Grecs nous disent qu'au bout d'un nombre fini de reports (par exemple n reports), on est dans l'obligation de prolonger cette règle et d'atteindre un point C pour lequel B sera entre A et C.

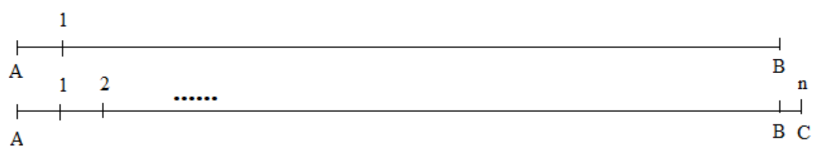

Fig.9 Représentation de l'axiome d'Archimède

Et c'est comme ça qu'ils avaient fini par apprivoiser les incommensurables : qu'elle soit incommensurable ou pas, la mesure de la distance entre A et B peut tout simplement être comparée à la mesure de la distance entre A et C, l'absolue, la certaine !

Le continu archimédien a permis aux mathématiques de survivre aux nombres irrationnels sans se poser la question de leur existence jusqu'au 19ème siècle[21], au moins jusqu'à ce qu'on se rende compte, comme exprimé par Bolzano, que :*Certainement la plupart des énoncés paradoxaux que l'on rencontre dans le domaine des mathématiques sont des théorèmes qui contiennent le concept de l'infini soit directement, soit qu'ils s'appuient sur lui, au moins d'une certaine façon lorsqu'on cherche à les démontrer*. On y reviendra plus loin …peut être …

3. Le nombre d'or : entre stupéfaction et ravissement !

Dans leur quête de comparaison de rapports de mesures de grandeurs, les Grecs ont révélé au monde le rapport le plus harmonieux qui pourrait exister : la découverte des incommensurables n'a pas été que malédiction comme on pourrait le croire ! Il parait que la Fraternité et les Grecs en avaient fait le symbole de la beauté et de l'harmonie universelle, et pourtant ce rapport est irrationnel ! C'est ce que nous appelons aujourd'hui le nombre d'or …

On raconte même que l'emblème de la Fraternité est le pentacle, l'une des formes géométriques la plus associée à ce nombre. Le pentacle est une étoile à cinq côtés de mesure égale que certains

[20]Rappelez-vous que les rationnels sont des fractions (donc rapports d'entiers).
[21]Pour plus de détails, les curieux pourront aussi regarder du côté des méthodes d'approximations successives des nombres.

inscrivent dans un cercle, et d'autres dans un polygone à cinq côtés de mesures égales[22]. Ce pentacle comporte le rapport d'or, celui qui a fasciné des architectes (retrouvé dans les pyramides égyptiennes), des peintres, des astronomes, des religieux, et tant d'autres : c'est le rapport de la mesure du côté de l'étoile par la mesure du côté du pentagone dans lequel elle est inscrite …

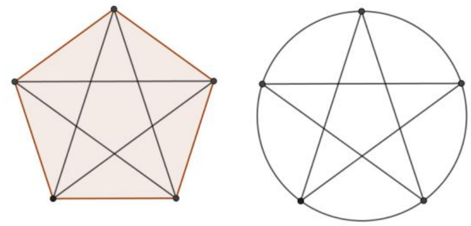

Fig.10 Le pentacle Pythagoricien

Mais qu'est-ce que ce rapport a de si particulier ? Et bien essayez de dessiner un pentagone régulier aussi grand que vous voulez[23], inscrivez une étoile à l'intérieur de ce pentagone (les sommets du pentagone sont les sommets de l'étoile) et vous aurez un pentacle. Vous obtiendrez un nouveau pentagone régulier au centre de l'étoile, inscrivez à l'intérieur de ce pentagone une autre étoile, et ainsi de suite ... Combien de fois pouvez-vous reproduire le pentacle, se pourrait-il que ça soit à l'infini ?

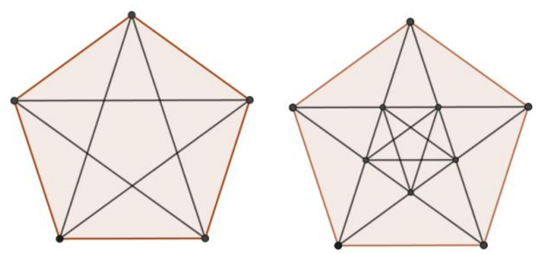

Fig.11 Pentacles emboîtés

Ce n'est qu'avec Euclide que le rapport d'or retrouve sa raison mathématique, *l'extrême et la moyenne raison*. Si on appelle a la mesure du côté de l'étoile et b la mesure du côté du pentagone, alors b/a = a/a+b ! Et comme le fameux √2, il est intraitable[24], jamais il ne s'exprimera comme rapport de deux naturels, c'est un incommensurable de la même espèce … Il faut attendre la renaissance pour que les spécialistes italiens des équations, Cardan et Bambelli, expriment l'égalité des deux rapports en équation d'inconnue$\varphi = a/b$, le nombre d'or. Par des techniques, aujourd'hui très usuelles, on trouve l'équation$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$qui a pour solution algébrique $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, où comme pour √2, √5 est un nombre dont le carré est égal à 5. Les découvertes d'irrationnels de cette espèce, pour faire simple, nous dirons ceux qui s'expriment aujourd'hui par des √ (donc par des nombres dont on connait les carrés)[25], se multipliaient et ne cessaient de

[22]Un pentagone régulier.
[23]Vous pouvez consulter internet pour les étapes de construction !
[24]Cf. note de bas de page 29 pour les curieux !
[25]Qu'on appelle aujourd'hui irrationnels algébriques.

proliférer... Mais il n’y a pas que ça ! D’autres incommensurables, irrationnels, avaient surgi, de la pire espèce, des transcendants, dont l’un des plus redoutables celui qui rugit à chaque apparition d’un (arc)-en-ciel ! Etes-vous tentés de voir un peu ce que ça peut-être ? Eh bien, construisez autant de cercles que vous voulez, pour chaque cercle, fabriquez une corde de longueur deux fois le rayon du cercle, reportez ensuite autant de fois que possible cette corde sur la circonférence du cercle. Qu’est-ce que vous en pensez ?

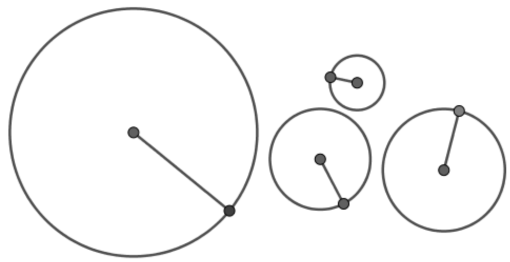

Fig.12 Des cercles différents mais un rapport périmètre/rayon conservé

A l’opposé des irrationnels que nous avons rencontrés jusque-là, celui en lien avec le rapport de la circonférence d’un cercle au double de son rayon a continué d’être utilisé sous forme de rapport jusqu’au 17ème siècle ; il faut attendre le 18ème siècle pour divulguer de plus en plus nettement cet irrationnel transcendant 3,141 ; 3,141 592 ; 3,141 592 653 ; … que nous notons majestueusement aujourd’hui π. D’autres, des transcendants, comme lui, ont continué à se manifester, de plus en plus, sous des formes aussi bizarres les unes que les autres. Mais ces incommensurables, qu’ils soient algébriques ou transcendants, vont-ils jamais s’arrêter de se reproduire ?

4. Par ta grâce infini(té)(si)mal !

Depuis les Grecs jusqu’au 19ème siècle, les mathématiques n’acceptaient de l’infini que son aspect potentiel, fécond mais dans le devenir et jamais saisissable, actuel. Pour ce dernier, l’absolu, le tout, l’infiniment grand, certains préféraient ne même pas y penser pour des raisons religieuses notamment ! Il aurait fallu attendre Bolzano, et à sa suite Dedekind et Cantor, pour oser défier le tout : s’il est infini, certaines de ses parties n’ont rien à lui envier, elles ont la même envergure, la même éminence … En tout cas, c’est ce que nous avons vu jusque-là avec l’ensemble des naturels, des rationnels …

Mais avec ce qu’on vient de découvrir dans le paragraphe précédent, on est sur une voie qui n’est certainement pas de tout repos ! Les mathématiques sont non seulement submergées par l’arrivée d’autres nombres, des irrationnels, avec un comportement très bizarre … Comme un mutant, chacun d’entre eux trouve un plaisir à braver ses décimales et rallonger leur file sans être jamais assouvi par ses besoins de les multiplier, toujours différemment sans aucune régularité apparente. Très gourmand, il continue de manger des quantités de plus en plus petites, infiniment petites, pour être sûr de ne jamais arrêter le bal de ses décimales !Jusqu’au 19ème siècle, la course des mathématiques derrière ces décimales leur a joué de très mauvais tours, il a fallu attendre

Cauchy[26] pour (limite)r la casse et poser, vers la fin du 19ème siècle, la question de la raison ultime de ces nombres ! L'année 1872 marque la publication de trois réponses distinctes à cette question, dont celle de Dedekind et celle de Cantor. Si ces réponses[27] sont en apparence différentes, elles se sont toutes accordées à renoncer à cette course et à redorer le blason de ces irrationnels qui, désormais, s'élèveront à un rang aussi actuel, réel, que leurs prédécesseurs, les naturels et plus généralement les rationnels. Désormais, l'ensemble de tous les nombres réels (naturels, rationnels, irrationnels), le continu, celui qui comble tous les trous d'une droite, accède enfin à une raison mathématique suprême, celle qui emprisonne à jamais ses rejetons. Se pourrait-il que cet ensemble soit encore plus démesuré que celui des naturels ou encore celui des rationnels ?

Rappelez-vous que nous avons vu que l'ensemble des naturels et l'ensemble des rationnels sont tous les deux infinis, donc de même cardinalité, celle de cet infini qu'on s'est mis d'accord d'appeler, comme pour Cantor, aleph-zéro. Ce nombre cardinal qui n'a pas bougé alors qu'on lui a ajouté 1, puis tous les rationnels non naturels, et pire encore … pourrait-il aussi traduire la cardinalité de l'ensemble des nombres réels ? Pourrait-on jamais croire que l'ensemble des nombres réels puisse être mis en correspondance terme à terme avec l'ensemble des naturels ?

Restons lucides et imaginons qu'il y a bel et bien une correspondance terme à terme entre les nombres naturels et les nombres réels. On peut l'organiser de plusieurs façons possibles, peu importe la façon dont nous avons organisé cela, mais disons que nous l'avons commencé ainsi :

0 correspond à 0,000430000...

1 correspond à 0,980403215...

2 correspond à 0,453502183...

3 correspond à 0,714335266...

…

La question est donc la suivante: en faisant correspondre chaque naturel à un nombre réel, est ce qu'on épuise tous les éléments de l'ensemble des nombres réels ? Ou alors restera-t-il un nombre réel qui ne soit pas mis en correspondance avec un nombre naturel ? Cantor était convaincu qu'il en resterait et il a tout fait pour fabriquer un nombre réel x qui ne soit associé à aucun nombre naturel. L'idée de Cantor, qu'on appelle l'argument de la diagonale, est de fabriquer ce nombre pas à pas, décimale par décimale … Il commence par fabriquer un autre nombre réel de sorte que sa première décimale est la première décimale du premier nombre réel (0), sa deuxième décimale est la deuxième décimale du deuxième nombre réel (9), sa troisième décimale est la troisième décimale du troisième nombre réel (3), et ainsi de suite jusqu'à épuiser tous les termes de la correspondance. Au final, il considère le nombre réel 0.093... Les choses deviennent très

[26]Grand mathématicien (1789 – 1857), membre de l'académie des sciences et professeur à l'école polytechnique. C'est d'ailleurs l'enseignement qui l'a amené à revoir les bases des mathématiques.

[27]Qui traduit chacune ce qu'on appelle en mathématiques une construction de l'ensemble des nombres réels, dont nous vous en épargnons les détails !

intéressantes quand il change chaque décimale de ce nombre par une autre qui lui soit différente et qu'il déclare que x = 0.930...en expliquant que x ne peut être égale à aucun des nombres réels utilisés dans cette correspondance ! x ne peut pas être égal au premier nombre réel car leurs premières décimales ne sont pas les mêmes, il ne peut pas être égal au deuxième nombre réel car leurs deuxièmes décimales ne sont pas les mêmes, ce ne peut pas être égal au troisième nombre réel car leurs troisièmes décimales ne sont pas les mêmes, et ainsi de suite. Cet x ne peut être égal à aucun terme de cette correspondance qui est supposée balayer tous les nombres réels ! En utilisant l'argument de la diagonale, pour n'importe quelle organisation de la correspondance terme à terme entre les nombres naturels et les nombres réels, on peut fabriquer un nombre réel qui échappe à tous les termes de cette correspondance. Cela signifie qu'il est impossible de créer une correspondance terme à terme entre les naturels et tous les nombres réels !

Voilà donc un ensemble infini de cardinalité supérieur à aleph-zéro[28], c'est le continuum, celui qui a la puissance du continu, c'est tout simplement l'ensemble des nombres réels[29] de cardinalité aleph-un ($\aleph_1$). Cantor va encore plus loin et pose ce qu'on appelle aujourd'hui l'hypothèse du continu : Il n'y a aucun ensemble infini entre l'ensemble des nombres naturels et l'ensemble des nombres réels de cardinalité strictement comprise entre aleph-zéro et aleph-un. Plus de 150 ans après, cette hypothèse, qui constitue le premier problème de Hilbert, demeure indécidable.

Cantor ne s'est pas arrêté là, il est allé au-delà de aleph-zéro et aleph-un, au-delà des deux ensembles infinis, où l'un est considérablement plus infini que l'autre. Mais est-ce que ce sont les seuls ensembles infinis? Son acharnement l'a amené à trouver des ensembles infinis de cardinalités de plus en plus supérieures à celle du continuum, c'est le cas d'au moins l'ensemble de toutes les parties de l'ensemble des nombres réels, et il a même mis en place toute une arithmétique de ces nombres cardinaux appelés nombres transfinis. Il a pour cela utilisé autant de fois qu'il le voulait, le même argument, celui de la diagonale. Mais tous ces infinis actuels, ces transfinis, restaient pour Cantor, dérisoires, devant l'infini actuel absolu, l'infini de tous les infinis, qui transcende toutes les tentatives d'exprimer l'infini dans la théorie des ensembles.

Et pourtant elles continuent d'enchanter leurs utilisateurs !

Les mathématiques contemporaines sont basées sur la notion d'ensemble. La théorie des ensembles, initiée par Cantor, est le cadre qui fonde les mathématiques à partir de cette notion. Elle est utilisée, consciemment ou inconsciemment, par la quasi-totalité des individus qui s'occupent de mathématiques, y compris par nous en écrivant ce texte.

Cependant, plusieurs penseurs lui reprochent son caractère d'univers autocratique, où on pourrait ~~y~~ ajouter quelques autres principes, mais il est là et il comporte *toutes les mathématiques passées, présentes et futures.* Un univers fermé, où la quête de la vérité est modelée sur le ton de ses contours. Ce sont essentiellement les notions d'infini et d'hypothèse du continu qui sont dans le collimateur de ces penseurs. Les motivations de ces penseurs, dont certains sont des mathématiciens, des philosophes, des physiciens, ces motivations qui semblent différentes, sont

---

[28] L'infini de l'ensemble des naturels est appelé depuis infini dénombrable.

[29] L'infini de l'ensemble des nombres réels est alors appelé infini non dénombrable.

soutenues par la même quête : la recherche d'une signification, vérité inhérente, à la structuration et organisation des mathématiques. Qu'elle soit palpable par les sens, qu'elle transcende l'expérience, ou bien ni l'une ni l'autre, cette signification replonge ces deux notions dans les ténèbres du doute …

Bien sûr, il n'est pas question qu'on banalise les crises de plusieurs décennies, et qui se poursuivent jusqu'à ce jour, en gribouillant quelques lignes de ci et de là. Il n'est pas, non plus question, de vous laisser à la merci de la toile et de ses tentacules sans vous en livrer un arrière-goût qui pourrait sembler amer pour certains …

Weyl, élève de Hilbert, n'était pas satisfait par la non prise en compte de la signification de l'espace/temps pour fonder l'approche ensembliste du continuum et de son hypothèse. Son livre "Matière, espace, temps", grand débat entre mathématiques et physiques, soulève la question de l'unification de l'espace/temps par le continuum. Il y a annoncé que le fondement des mathématiques doit se faire à l'intérieur d'une signification du monde, de la nature. Le continuum ensembliste ne lui semble pas adéquat pour représenter le temps : le présent temporel ne peut pas être un point, ou une graduation, il est la mémoire du passé et l'attente du futur, donc un segment avec une unité qui n'est pas saisi par les mathématiques ; c'est l'infini qui a créé la controverse notamment parce que l'existence de ces ensembles infinis, est en contradiction avec certains principes des mathématiques dites constructives ou intuitionnistes. Ces derniers contestent tout argument qui repose sur une contradiction, comme celui de la diagonale de Cantor.

Pour finir sur une note positive : l'idée ingénieuse des catégories[30] concilient ces penseurs avec la théorie des ensembles en les exhortant à ne pas chercher l'essence dans la nature des ensembles et de leurs éléments, mais, comme pour la nature, dans des régularités que partageront des catégories d'ensembles. Ce qui confirme, en dépit et contre tout, le miracle de l'efficacité des mathématiques à formuler les lois de la physique et à continuer de les façonner au rythme de ses avancées …

Bibliographie

Blanchet, L-E. (1977) L'infini chez Cantor, *Laval théologique et philosophique*, 33(1), 23-31.

Candiotto, L. (2019) The Value of Emotions for Knowledge. Candiotto (Ed.).

Caye, P., Gontier, T. (2006) Mathématiques et savoir à la renaissance, *Revue d'histoire des maths*, 59, 181-186.

Courant, R., Brunschwig, J. (1987)De la très déraisonnable efficacité des mathématiques en physique,*Raison présente*, 84(4), 49-63.

Lecorre, T. (2018) Le bonheur par les mathématiques. In Durpaire, F. (Ed.), *Les écoles du bonheur, suivi de cinq leçons pour apprendre à être heureux*, Paris, Téraèdre, coll. " Éclaboussements". pp. 52-60.

[30]Par Alexandre Grothendieck (1928 – 2014) est un mathématicien français. Il est considéré comme le refondateur de la géométrie algébrique et, à ce titre, comme l'un des plus grands mathématiciens du 20ème siècle.

Le Lionnais, F. (1948) *Les grands courants de la pensée mathématique*, Hermann Edition.
Damásio, A. (1994) *Descartes' Error: Emotion, Reason, and the Human Brain*. Penguin Edition, 2005.
Patras, F. (2014) *La possibilité des nombres*. PUF Editions.
Regnault, F. (2008) Le sentiment de l'infini. *L'école de la cause Freudienne*, 69, 190-199.

Weyl H. (1979) *Temps, espace, matière : leçons sur la théorie de la relativité,* A. Blanchard Editions.