

Table des matières

Introduction	1
1 Mise en équations	3
1.1 Mécanique du solide — 3	
1.1.1 Équations locales 3	
1.1.2 Conditions aux limites 4	
1.2 Mécanique des fluides — 4	
1.2.1 Équations locales 4	
1.2.2 Conditions aux limites 5	
1.3 Couplage — 6	
2 Méthode des éléments finis	7
2.1 Formulation générale — 7	
2.2 Application à la mécanique des fluides — 8	
3 Équations intégrales et méthode des singularités	13
3.1 Formulation — 13	
3.1.1 Intégrale de Stieltjes 13	
3.1.2 Équation intégrale 14	
3.2 Méthode des singularités et solutions de l'équation de Laplace — 15	
3.3 Discrétisation et résolution — 16	
3.3.1 Problème intérieur 16	
3.3.2 Problème extérieur 17	
4 Couplage fluide – structure	19
4.1 Couplage éléments finis – éléments finis — 19	
4.2 Couplage éléments finis – équations intégrales — 22	
4.3 Vibroacoustique — 23	
5 Étude vibratoire d'une poutre immergée dans un fluide	25
5.1 Équations du problème couplé — 25	
5.1.1 Comportement de la poutre 25	
5.1.2 Comportement du fluide 26	
5.2 Résolution analytique — 26	
5.2.1 Fluide incompressible 26	
5.2.2 Fluide compressible 30	
5.3 Méthodes numériques et couplage — 31	
5.3.1 Éléments finis – éléments finis 31	
5.3.2 Éléments finis – équations intégrales 34	
Références	37

Introduction

Ce document concerne l'étude du comportement dynamique d'une structure déformable en présence d'un fluide. On pourra envisager différentes configurations géométriques listées dans ce qui suit.

Fluide intérieur

Le domaine fluide est contenu dans le domaine structure.

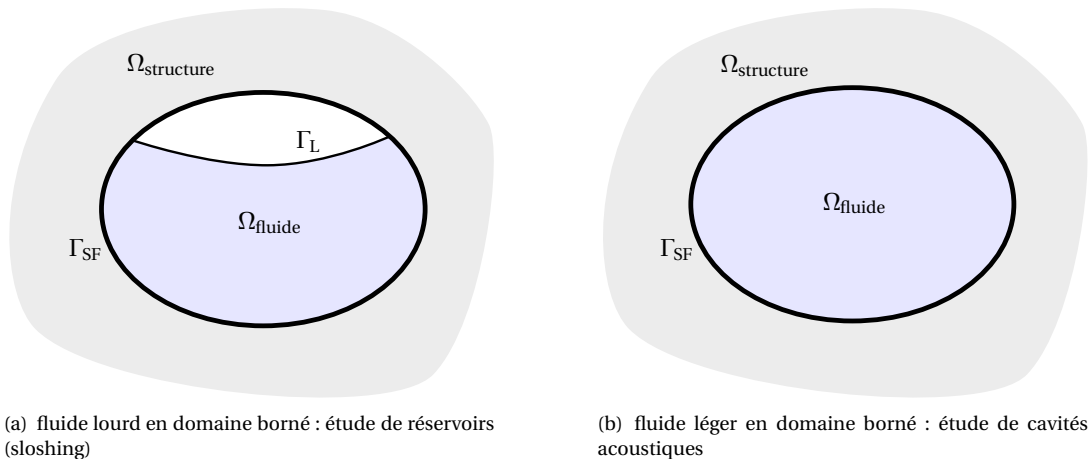


Figure 1 – configurations de fluide intérieur

Fluide extérieur

On peut envisager plusieurs hypothèses :

- fluide lourd non borné avec surface libre Γ_L (étude des flotteurs) ou sans surface libre (structures avec une profondeur d'immersion infinie) ;
- fluide léger pour les études des surfaces portantes en aéroélasticité.

Problèmes mixtes

Ce type de problèmes pourra concerner l'étude de cavités acoustiques plongées dans un fluide ou l'étude de réservoirs internes de flotteurs (pétroliers).

La stratégie de résolution adoptée pour traiter le problème couplé, dépendra du milieu que l'on veut privilégier (fluide ou structure). Le transfert d'informations se fera du milieu secondaire vers le milieu primaire. Pour les applications envisagées ici, le milieu primaire sera plutôt la structure et les variables du fluide seront éliminées au profit des variables de la structure.

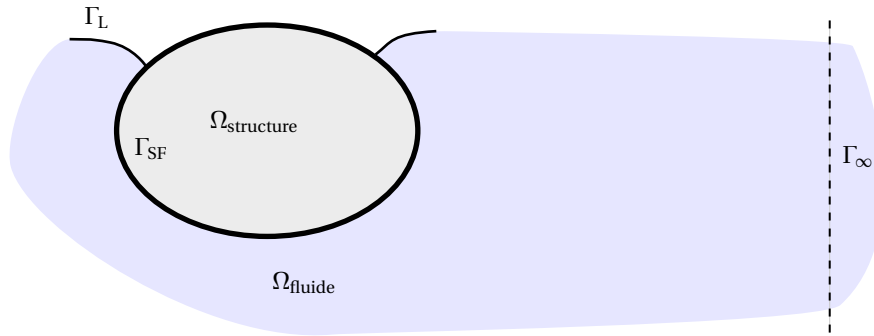


Figure 2 – domaine fluide extérieur et frontières

Après un rappel rapide des équations générales qui traduisent le comportement des fluides et

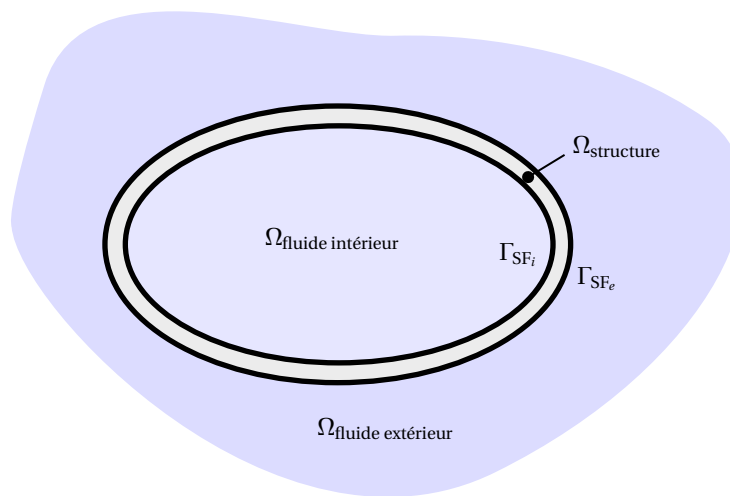


Figure 3 – problématique mixte

des structures que nous analyserons dans le cadre des hypothèses classiques de petits mouvements et petites déformations, nous présenterons rapidement les méthodes de résolution spécifiques, adaptées à chacun des problèmes pris de manière indépendante :

- méthode des éléments finis pour l'étude de la structure ;
- méthode des éléments finis pour l'étude du fluide intérieur ou extérieur ;
- méthode des équations intégrales pour l'étude du fluide intérieur ou extérieur.

Puis pour la résolution du problème couplé, nous développerons les différentes méthodologies envisageables :

- analytiques qui ne peuvent être mise en œuvre que pour des types de problèmes très particuliers, c'est-à-dire presque exclusivement pour les problèmes à symétrie de révolution ;
- couplage éléments finis – éléments finis, méthode adaptée à la résolution de problème intérieur et extérieur si l'on s'intéresse essentiellement au comportement de la structure ;
- couplage éléments finis – équations intégrales pour la résolution des problèmes intérieurs ou extérieurs.

Nous illustrerons complètement ces différentes méthodes pour l'étude du comportement dynamique d'une poutre immergée en fluide lourd incompressible et compressible.

Mise en équations

1.1 Mécanique du solide

1.1.1 Équations locales

On se place dans l'hypothèse des petites perturbations en élasticité linéaire. Les équations locales, sont obtenues en écrivant que dans un repère galiléen ou absolu, à chaque instant t , pour toute partie s d'un système matériel S , le torseur dynamique de s est égal au torseur des forces extérieures s'exerçant sur s et les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\operatorname{div} \overline{\overline{\sigma}}_c + \vec{f} = \rho_s \vec{\gamma} \quad \text{dans } \Omega_s \quad (1.1)$$

où $\overline{\overline{\sigma}}_c$ est le tenseur symétrique des contraintes de CAUCHY, \vec{f} , le vecteur des répartitions volumiques de force et $\vec{\gamma}(M)$, l'accélération au point M , où le champ des déplacements est $\vec{u}(M)$. Le vecteur des déformations associé au tenseur des petites déformations est tel que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

avec $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$, $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$ et $\gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx}$. Si \mathbf{D} est la matrice d'élasticité, la relation contraintes-déformations (loi de Hooke généralisée), s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.3)$$

avec vecteur contrainte associé au tenseur des contraintes de CAUCHY $\overline{\overline{\sigma}}_c$, dont les composantes sont :

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{yz} & \sigma_{zx} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

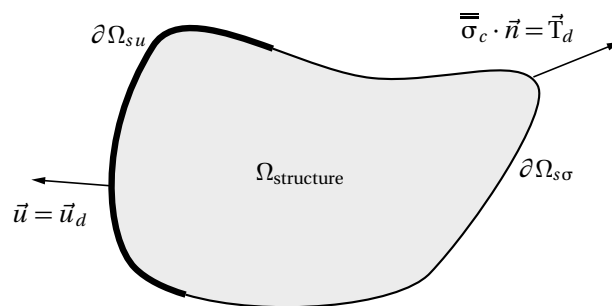


Figure 1.1 – solide et conditions aux limites

1.1.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites appliquées sur la frontière du domaine structure sont de deux types :

- les conditions aux limites naturelles :

$$\overline{\overline{\sigma}}_c \cdot \vec{n} = \vec{T}_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_{s\sigma} \quad (1.5)$$

- les conditions aux limites géométriques (ou cinématiques) :

$$\vec{u} = \vec{u}_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_{su} \quad (1.6)$$

avec $\partial\Omega_{s\sigma} \cup \partial\Omega_{su} = \partial\Omega_s$ et $\partial\Omega_{s\sigma} \cap \partial\Omega_{su} = \emptyset$.

1.2 Mécanique des fluides

1.2.1 Équations locales

Le fluide est analysé en variables eulériennes et il est décrit par deux équations locales :

- équation de continuité ou conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{u} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_f \quad (1.7)$$

où ρ est la masse volumique du fluide et \vec{u} le vecteur vitesse des particules ;

- équation d'EULER ou conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} \vec{u}^2 + \text{rot} \vec{u} \wedge \vec{u} \right) = \vec{f} + \text{div} \overline{\overline{\sigma}}_c \quad \text{dans} \quad \Omega_f \quad (1.8)$$

Le tenseur des contraintes s'exprime en fonction de la pression p , de la viscosité et du tenseur gradient des taux de déformations :

$$\overline{\overline{\sigma}}_c = -p \overline{\overline{1}} + 2\mu \overline{\overline{T}}_D \quad \text{avec} \quad \overline{\overline{T}}_D = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{u} + \overline{\overline{\text{grad}}}^T \vec{u} \right) \quad (1.9)$$

Le cadre de travail considéré ici est :

1. fluide parfait, donc à viscosité nulle :

$$\overline{\overline{\sigma}}_c = -p \overline{\overline{1}} \quad (1.10)$$

2. mouvement irrotationnel $\text{rot} \vec{u} = \vec{0}$ et donc il existe un potentiel des vitesses Φ tel que $\vec{u} = \text{grad} \Phi$ et, dans ces conditions, l'équation d'EULER devient :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} \vec{u}^2 \right) = \vec{f} + \text{div} \overline{\overline{\sigma}}_c = \vec{f} - \text{grad} p \quad (1.11)$$

3. les forces volumiques dérivent d'un potentiel. Par exemple l'action du champ de pesanteur conduit à $\vec{f} = -\rho g \vec{k} = -\text{grad}(\rho g z)$ et après intégration, l'équation d'EULER dans le domaine fluide donne l'équation de BERNOULLI :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u}^2 + g z + \frac{p}{\rho} = C(t) \quad (1.12)$$

4. hypothèse de *petits mouvements* du fluide. Par conséquent, en négligeant \vec{u}^2 devant les autres termes, l'équation de BERNOULLI conduit à l'équation de LAGRANGE linéarisée qui en choisissant $C(t) = 0$ est :

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.13)$$

5. hypothèse de compressibilité :

- fluide incompressible : l'équation de continuité donne l'équation de LAPLACE :

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_f \quad (1.14)$$

- fluide compressible : on supposera un comportement adiabatique et avec c , la célérité du son dans le fluide, on obtient l'équation de HELMHOLTZ (équation des ondes) :

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_f \quad (1.15)$$

1.2.2 Conditions aux limites

Condition de glissement sur les parois de solides

Elle s'obtient en écrivant que les particules fluides ne pénètrent pas les parois de solides, c'est-à-dire qu'il y a continuité des vitesses normales des particules fluides et solides :

$$\vec{V}_s \cdot \vec{n} = \vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{\text{grad}} \Phi \cdot \vec{n} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\text{SF}} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_s \cdot \vec{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\text{SF}} \quad (1.16)$$

où \vec{n} est la normale extérieure au domaine structure, donc intérieure au domaine fluide. Cette condition peut également être écrite en terme de pression :

$$-\rho_f \vec{V}_s \cdot \vec{n} = \frac{\partial p}{\partial n} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\text{SF}} \quad (1.17)$$

Condition de surface libre

Dans le cas où le fluide est lourd avec surface libre, la condition est obtenue en écrivant que la pression est constante sur la surface libre, soit :

$$\frac{dp}{dt} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_L \quad (1.18)$$

qui, compte tenu des hypothèses retenues pour l'étude du fluide, donnera :

- $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ sur le plan $z = 0$ (surface libre au repos), lorsque les mouvements de surface libre sont de faibles amplitudes, et que le fluide incompressible est étudié dans la gamme des basses fréquences¹ ;
- $\Phi = 0$ sur le plan $z = 0$ dans le cas d'un fluide incompressible en hautes fréquences ou bien dans le cas d'un fluide compressible ;
- $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ sur le plan $z = 0$ dans le cas d'un fluide incompressible en très basses fréquences. Dans ce cas, la surface libre est équivalente à une paroi rigide.

1. Il peut, par exemple, s'agir des fréquences des ondes de gravité telles que les fréquences de houle.

Condition à l'infini

En milieu non borné, la condition à l'infini est la condition de SOMMERFELD² :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r^\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right] = 0 \quad (1.19)$$

avec $\alpha = 0,5$ en 2D et $\alpha = 1$ en 3D et $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi = \Phi_I$ où Φ_I représente le potentiel incident, dû à la houle par exemple mais qui est nul quand il n'y a pas d'écoulement.

1.3 Couplage

Les équations de couplage s'obtiennent en écrivant pour le fluide la condition de continuité des vitesses normales :

$$\vec{V}_s \cdot \vec{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma_{SF} \quad (1.20)$$

et pour la structure, en écrivant que l'interface fluide – structure Γ_{SF} appartient à la partie de frontière $\partial\Omega_{s\sigma}$ et donc que :

$$\vec{\sigma}_c \cdot \vec{n} = -p\vec{n} \quad \text{sur } \Gamma_{SF} \subset \partial\Omega_{s\sigma} \quad (1.21)$$

La résolution, comme nous le verrons au chapitre 4, pourra être conduite de deux manières :

- analytiquement par une méthode modale. Les déplacements de la structure *mouillée* sont projetés sur la base modale de la structure *sèche*. La résolution analytique se fait alors simultanément pour les deux milieux ;
- numériquement en couplant la méthode des éléments finis mise en œuvre pour l'analyse de la structure à la méthode des éléments finis ou à la méthode des singularités retenues pour la résolution du problème fluide.

2. La condition de SOMMERFELD est une condition de non réflexion des ondes à l'infini.

2

Méthode des éléments finis

Nous rappelons rapidement la démarche de la méthode des éléments finis conduisant au problème discrétisé associé à une formulation variationnelle.

2.1 Formulation générale

Le domaine Ω_s est divisé en sous-domaines élémentaires e de formes simples sur lesquels il est aisé de définir, à partir de l'approximation polynomiale généralisée, une approximation nodale (interpolation) de la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{a}_e \quad (2.1)$$

où \mathbf{u} est le vecteur dont les composantes caractérisent le vecteur des déplacements \vec{u} au point $M(x)$ de Ω_e , \mathbf{a}_e , le vecteur des déplacements nodaux du domaine élémentaire Ω_e et \mathbf{N} , la matrice des fonctions d'interpolation.

Le calcul du tenseur des petites déformations $\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ permet d'exprimer les composantes du vecteur des déformations en fonction des déplacements nodaux sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{a}_e \quad (2.2)$$

La loi de Hooke généralisée s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}_e \quad (2.3)$$

La forme quadratique associée à l'énergie de déformation sur l'élément fini se met sous la forme :

$$2E_{de} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \xrightarrow{\text{éq. (2.2) et (2.3)}} 2E_{de} = \mathbf{a}_e^T \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{a}_e \quad (2.4)$$

dont on déduit la matrice raideur d'un élément fini e dans la base des déplacements nodaux :

$$\mathbf{k}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (2.5)$$

De même, la forme quadratique associée à l'énergie cinétique de l'élément permet de définir la matrice masse de l'élément fini e dans la base des déplacements nodaux :

$$2E_{ce} = \int_{\Omega_e} \dot{\vec{u}}^2 \rho dV = \dot{\mathbf{a}}_e^T \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \right] \dot{\mathbf{a}}_e \Rightarrow \mathbf{m}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \quad (2.6)$$

Enfin, le calcul du travail virtuel des forces extérieures conduit à la définition de forces généralisées qui peuvent être de différentes natures :

- forces généralisées associées aux répartitions volumiques de forces q_v :

$$\delta T_{ve} = \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dV = \delta \mathbf{a}_e^T \varphi_{ve} \Rightarrow \varphi_{ve} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dV \quad (2.7)$$

- forces généralisées associées aux répartitions surfaciques de forces q_s :

$$\delta T_{se} = \int_{\partial\Omega_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_s dS = \delta \mathbf{a}_e^T \varphi_{se} \Rightarrow \varphi_{se} = \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s dS \quad (2.8)$$

- forces généralisées associées aux forces appliquées aux nœuds de l'élément (efforts de liaison) :

$$\delta T_{le} = \delta \mathbf{a}_e^T \varphi_{le} \quad (2.9)$$

- forces généralisées associées à une dissipation d'énergie. Le travail virtuel de la force dissipative $f_d = -b \dot{u}_p$ s'écrit :

$$\delta T_{de} = - \int_{\partial\Omega_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_d dV = \delta \mathbf{a}_e^T \varphi_{de} \quad \text{et} \quad \varphi_{de} = - \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T b \mathbf{N} dV \dot{\mathbf{a}}_e \quad (2.10)$$

ce qui conduit à la définition d'une matrice amortissement \mathbf{b}_e telle que :

$$\mathbf{b}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T b \mathbf{N} dV \quad (2.11)$$

En prenant les variations par rapport à chaque variable généralisée a_i , autrement dit en écrivant les équations de LAGRANGE, on obtient l'équation matricielle caractérisant le mouvement de l'élément fini :

$$\mathbf{m}_e \ddot{\mathbf{a}}_e + \mathbf{b}_e \dot{\mathbf{a}}_e + \mathbf{k}_e \mathbf{a}_e = \varphi_{le} + \varphi_{ve} + \varphi_{se} \quad (2.12)$$

L'équation matricielle de la structure assemblée obtenue en additionnant les formes intégrales élémentaires et en prenant les variations des quantités additionnées est :

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{B}_s \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_s \mathbf{a} = \mathbf{F}_{ext} + \varphi_v + \varphi_s \quad (2.13)$$

avec \mathbf{F}_{ext} , vecteur des forces extérieures directement appliquées aux nœuds de la structure.

2.2 Application à la mécanique des fluides

Nous considérons des fluides avec les hypothèses précédentes.

Ils sont caractérisés par les équations caractéristiques :

$$\begin{cases} \Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 & \text{dans } \Omega_f \text{ (compressible)} \\ \Delta\Phi = 0 & \text{dans } \Omega_f \text{ (incompressible)} \end{cases} \quad (2.14a)$$

$$\left. \begin{cases} \Phi = 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{en fluide compressible} \\ \text{ou en hautes fréquences} \end{array} \right\} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 & \text{en incompressible} \end{cases} \right\} \text{ sur la surface libre } \Gamma_L \quad (2.14b)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \vec{V}_s \cdot \vec{n} \quad \text{sur les interfaces fluide-solide } \Gamma_{SF} \quad (2.14c)$$

équations auxquelles il faut éventuellement ajouter une condition à l'infini.

Dans un premier temps, on considère que le domaine Ω_f est borné. Il est divisé en sous-domaines élémentaires e sur lesquels le potentiel des vitesses est interpolé en fonction des potentiels nodaux e :

$$\Phi = \mathbf{N} \Phi_e \quad (2.15)$$

Pour simplifier la mise en œuvre de la formulation éléments finis, cette relation est écrite en considérant que l'approximation nodale est réalisée sur le domaine Ω_f complet sous la forme :

$$\Phi = \tilde{\mathbf{N}} \Phi \quad (2.16)$$

avec Φ , vecteur des potentiels aux nœuds du domaine fluide complet Ω_f ; et $\tilde{\mathbf{N}}_i$ qui s'identifie à la fonction d'interpolation N_i calculée au nœud i d'un l'élément e .

Par exemple, une discrétisation du domaine monodimensionnel en éléments linéaires à deux nœuds correspond à la figure 2.1. Le remplacement de Φ par son approximation dans

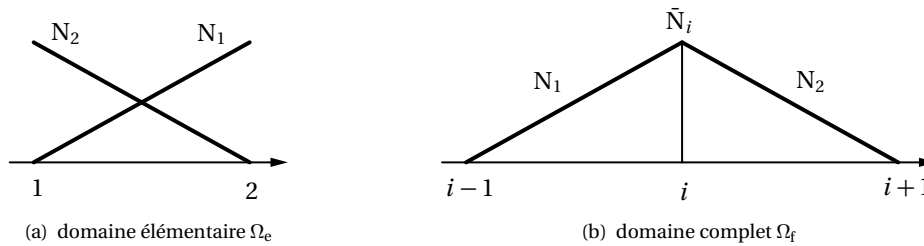


Figure 2.1 – fonctions de forme

l'équation (2.14a) génère un résidu que l'on pondère par des fonctions Ψ . Considérons la forme intégrale $W(\Phi)$ telle que :

$$W(\Phi) = W_1(\Phi) + W_2(\Phi) \quad (2.17)$$

avec :

$$W_1(\Phi) = \int_{\Omega_f} \Psi \Delta\Phi dV \quad \text{et} \quad W_2(\Phi) = - \int_{\Omega_f} \Psi \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} dV \quad (2.18)$$

en appliquant la formule de Green (intégration par parties généralisée) à la forme intégrale $W_1(\Phi)$, on obtient :

$$\int_{\Omega_f} \Psi \Delta \Phi \, dV + \int_{\Omega_f} \text{grad} \Psi \cdot \text{grad} \Phi \, dV = \int_{\partial \Omega_f} \Psi \text{grad} \Phi \cdot \vec{n} \, d\Gamma \quad (2.19)$$

Donc la forme intégrale $W(\Phi)$ s'écrit :

$$W(\Phi) = - \int_{\Omega_f} \Psi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \, dV - \int_{\Omega_f} \text{grad} \Psi \cdot \text{grad} \Phi \, dV + \int_{\partial \Omega_f} \Psi \text{grad} \Phi \cdot \vec{n} \, d\Gamma \quad (2.20)$$

Formulation faible du problème fluide

Trouver le potentiel Φ donc le vecteur des potentiels nodaux Φ qui annule la forme intégrale (2.20), quelles que soient les fonctions de pondération Ψ cinématiquement admissibles (nulles sur la partie de frontière $\partial \Omega_1$ où le potentiel Φ est connu) et telles que sur la partie de frontière complémentaire $\partial \Omega_2$, $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ soit donné.

L'orientation de la normale choisie pour écrire la condition de glissement implique :

$$\text{grad} \Phi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\vec{V}_s \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \Gamma_{\text{SF}} \quad (2.21)$$

avec $\Gamma_{\text{SF}} \subset \partial \Omega_2$. Suivant les gammes de fréquences étudiées et le type d'informations cherchées, la condition de surface libre pourra s'écrire :

$$\begin{aligned} \Phi = 0 & \quad \text{hautes fréquences en incompressible ou en compressible} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} & \quad \text{ondes de gravité en incompressible} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 & \quad \text{très basses fréquences en incompressible} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Suivant le type d'étude, la condition de surface libre sera prise en compte par des conditions sur $\partial \Omega_1$ ou bien par des conditions sur $\partial \Omega_2$.

La principale difficulté dans l'analyse du comportement du fluide par élément fini en domaine non borné est la prise en compte correcte des conditions à l'infini. Il existe plusieurs manières de la contourner :

- ramener la frontière à *distance finie* et afficher sur cette frontière des conditions simulant le comportement du fluide à l'infini ;
- développer des éléments finis particuliers, *les éléments infinis* ;
- développer une *formulation mixte* élément fini – équations intégrales.

et comme pour la condition de surface libre, suivant le type d'approximation, les conditions à l'infini, seront prises en compte comme des conditions sur $\partial \Omega_1$ ou sur $\partial \Omega_2$.

Une méthode courante guidant le choix des fonctions de pondération est la méthode de GALERKIN¹ ; elle consiste à développer les fonctions Ψ sur les mêmes fonctions de base que celles utilisées pour l'interpolation de Φ , soit :

$$\Psi = \vec{N} \Phi \quad (2.23)$$

1. Cette méthode s'identifie, pour les problèmes de mécanique du solide, au principe des travaux virtuels.

et la formulation faible (2.20) conduit au système matriciel suivant :

$$\mathbf{M}_f \ddot{\Phi} + \mathbf{H}_f \Phi = \mathbf{G} \quad (2.24)$$

Les matrices du système sont déterminées par assemblage de matrices calculées sur les domaines élémentaires e et telles que :

$$\begin{aligned} (h_{ij})_e &= \int_{\Omega_e} \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_j \, dV \\ (m_{ij})_e &= \int_{\Omega_e} N_i \frac{1}{c^2} N_j \, dV \quad \text{fluide compressible} \\ (m_{ij})_e &= \int_{\Gamma_{Le}} N_i \frac{1}{g} N_j \, dV \quad \text{fluide incompressible et ondes de gravité} \\ (g_i)_e &= \int_{\Gamma_e} N_i (-\vec{V}_s \cdot \vec{n}) \, d\Gamma \quad \text{tel que } \Gamma_e \in \Gamma_{SF} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Si le fluide est non borné et si la compressibilité du fluide est prise en compte, on obtient alors une matrice *amortissement* provenant des conditions à l'infini, dont le terme général s'écrit :

$$(b_{ij})_e = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{1}{c} N_j \, d\Gamma \quad (2.26)$$

tel que Γ_e appartienne à la surface à *l'infini*. Le système matriciel assemblé s'écrit alors :

$$\mathbf{M}_f \ddot{\Phi} + \mathbf{B}_f \dot{\Phi} + \mathbf{H}_f \Phi = \mathbf{G} \quad (2.27)$$

La matrice masse est due à la compressibilité (pas de contribution de la surface libre).

Équations intégrales et méthode des singularités

La méthode des éléments finis, si elle se prête bien à l'analyse des problèmes en milieu borné est délicate à mettre en œuvre lorsque les domaines sont illimités et dans ce cas on lui préfère la méthode des équations intégrales. Cette méthode est d'utilisation courante pour traiter les problèmes de fluide, aussi bien en acoustique, en aérodynamique et en hydrodynamique.

3.1 Formulation

Considérons à nouveau la forme intégrale (2.17) associée aux équations générales caractérisant le comportement du fluide. Dans un premier temps, on considère que le fluide est incompressible, donc $W_2(\Phi) = 0$.

Appliquons à nouveau la formule de GREEN à $W_1(\Phi)$:

$$\int_{\Omega_f} \vec{\text{grad}}\Psi \cdot \vec{\text{grad}}\Phi \, dV + \int_{\Omega_f} \Phi \Delta\Psi \, dV = \int_{\partial\Omega_f} \Phi \vec{\text{grad}}\Psi \cdot \vec{n} \, d\Gamma \quad (3.1)$$

et on peut écrire (troisième formule de GREEN) :

$$\int_{\Omega_f} -\Psi \Delta\Phi + \Phi \Delta\Psi \, dV + \int_{\partial\Omega_f} \left(\Psi \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial\Psi}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (3.2)$$

avec \vec{n} normale extérieure au domaine fluide. La frontière $\partial\Omega_f$ du domaine est constituée de trois parties Γ_L la surface libre, Γ_{SF} la surface de contact avec un solide et la frontière à l'infini.

Pour transformer cette forme intégrale, nous utilisons les résultats généraux découlant des propriétés de l'intégrale de STIELTJES et de la solution élémentaire de l'équation de LAPLACE.

3.1.1 Intégrale de Stieltjes

Soit P un point courant d'un domaine Ω_i limité par une surface S à distance finie et Ω_e le domaine extérieur illimité complémentaire de Ω_i .

Soit une fonction scalaire $v(M, P)$ satisfaisant l'équation de LAPLACE et qui présente une singularité en $\frac{1}{\|MP\|}$:

$$\Delta_M \{v(M, P)\} = 0 \quad \forall M \in \Omega_i \quad (3.3)$$

laplacien calculé au point M (ou au point P dans l'équation (3.4)).

En entourant un point M quelconque d'une sphère dont on fait tendre le rayon vers zéro, si la surface S admet partout un plan tangent, $u(P)$ étant une fonction scalaire, alors on définit les identités suivantes :

$$\int_{\Omega_i} u(P) \Delta_P \{v(M, P)\} dV = \begin{cases} -4\pi u(M) & \text{si } M \in \Omega_i \\ -2\pi u(M) & \text{si } M \in S \\ 0 & \text{si } M \notin \Omega_i \cup S \end{cases} \quad (3.4)$$

On peut mettre en évidence des propriétés de discontinuité identiques pour une fonction scalaire satisfaisant l'équation de HELMHOLTZ.

3.1.2 Équation intégrale

Problème intérieur

Soit $G(M, P)$ une fonction scalaire satisfaisant l'équation de LAPLACE dans le domaine Ω_i . Dans l'équation (3.2), on identifie $G(M, P)$ et la fonction scalaire Ψ , si Φ est le potentiel des vitesses exact, alors on obtient compte-tenu de (3.4) :

$$\int_S \left[\Phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} - G(P) \frac{\partial \Phi(P)}{\partial n_P} \right] dS = \begin{cases} -4\pi \Phi(M) & \text{si } M \in \Omega_i \\ -2\pi \Phi(M) & \text{si } M \in S \\ 0 & \text{si } M \notin \Omega_i \cup S \end{cases} \quad (3.5)$$

avec \vec{n} normale extérieure au domaine fluide Ω_i .

Problème extérieur

On considère une sphère de surface Σ entourant complètement le domaine Ω_i , dont le rayon tend vers l'infini. On applique les résultats de l'équation (3.5) au domaine Ω'_e compris entre les surfaces S et Σ avec une normale \vec{n} extérieure au domaine Ω'_e . On obtient alors :

$$\int_S \left[\Phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} - G(M, P) \frac{\partial \Phi(P)}{\partial n_P} \right] dS + \int_{\Sigma} \left[\Phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} - G(M, P) \frac{\partial \Phi(P)}{\partial n_P} \right] dS = \begin{cases} -4\pi \Phi(M) & \text{si } M \in \Omega'_e \\ -2\pi \Phi(M) & \text{si } M \in S \\ 0 & \text{si } M \notin \Omega_i \end{cases} \quad (3.6)$$

Si $G(M, P)$ est fonction de GREEN du problème, c'est-à-dire si $G(M, P)$ satisfait en plus les conditions de radiation à l'infini, alors dans l'expression (3.6), l'intégrale sur Σ est nulle, ce qui entraîne :

$$\int_S \left[\Phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} - G(M, P) \frac{\partial \Phi(P)}{\partial n_P} \right] dS = \begin{cases} -4\pi \Phi(M) & \text{si } M \in \Omega_e \\ -2\pi \Phi(M) & \text{si } M \in S \\ 0 & \text{si } M \in \Omega_i \end{cases} \quad (3.7)$$

Fonction de GREEN en fluide incompressible illimité — En milieu fluide incompressible illimité, r désignant la distance MP , la condition à l'infini s'écrit :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi = \mathcal{O} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (3.8)$$

et la fonction de GREEN associée s'écrit :

$$G(M, P) = \frac{1}{r} \quad (3.9)$$

Fonction de GREEN en fluide compressible illimité — Les conditions de radiation à l'infini s'écrivent dans cas :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3.10)$$

et en réponse forcée de pulsation, avec $k = \frac{\omega}{c}$ nombre d'ondes, la fonction de GREEN du problème est :

$$G(M, P) = \frac{e^{jkr}}{r} \quad (3.11)$$

Si la fonction de GREEN satisfait la condition de surface libre, quand elle existe, alors dans les équations (3.5) et (3.6), les intégrales sur Γ_L sont nulles et il ne reste que les termes sur l'interface fluide–structure Γ_{SF} ¹.

3.2 Méthode des singularités et solutions de l'équation de Laplace

Les fonctions Φ qui satisfont l'équation locale de l'ensemble (2.14a), autrement dit l'équation de LAPLACE en fluide incompressible ou l'équation de HELMHOLTZ en fluide compressible, sont déterminées en utilisant la méthode des singularités.

Pour construire la solution harmonique Φ du problème de NEUMANN extérieur, on remplace la frontière Γ_{SF} par une distribution de singularités. Ces distributions peuvent être de différents types et en particulier :

- distribution de sources ;
- distribution de doublets normaux ;
- distribution mixte de GREEN.

La méthode des équations intégrales consiste à remplacer la frontière Γ_{SF} par une distribution mixte de GREEN :

- distribution de sources (potentiels de simple couche) ;
- distribution de doublets normaux (potentiels de double couche).

Distribution mixte de Green – Domaine intérieur

Soit $\Phi(M)$, un champ scalaire harmonique défini dans le domaine intérieur Ω_i dont le domaine complémentaire est Ω_e et \vec{n}_P , la normale à la surface Γ_{SF} frontière des deux domaines, extérieure au domaine intérieur Ω_i . L'équation (3.5) écrite avec la fonction de GREEN $G(M, P) = 1/r$ donne :

$$\int_{\Gamma_{SF}} \left[\Phi_i(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_i(P)}{\partial n_P} \right] dS = \begin{cases} -4\pi \Phi_i(M) & \text{si } M \in \Omega_i \\ -2\pi \Phi_i(M) & \text{si } M \in \Gamma_{SF} \\ 0 & \text{si } M \in \Omega_e \end{cases} \quad (3.12)$$

Le potentiel en M , $\Phi_i(M)$ apparaît comme la superposition des potentiels créés par :

- une densité surfacique de sources :

$$\sigma(P) = - \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \right)_P \quad (3.13)$$

- une densité surfacique de doublets normaux :

$$\mu(P) = \Phi_i(P) \quad (3.14)$$

1. La surface Γ_{SF} représente les surfaces mouillées des solides immergés ou des parois.

Distribution mixte de Green – Domaine extérieur

Les résultats précédents sont encore applicables à un champ scalaire harmonique $\Phi_e(M)$, défini dans un domaine extérieur Ω'_e limité par Γ_{SF} et Σ la surface d'une sphère entourant entièrement le domaine Ω_i dont le rayon tend vers l'infini. Les termes d'intégration sur cette frontière sont nuls, une fonction harmonique, régulière, tend vers zéro à l'infini comme $1/r$. En choisissant comme normale à Γ_{SF} la normale extérieure au domaine intérieur Ω_i , on obtient :

$$-\int_{\Gamma_{SF}} \left[\Phi_e(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_e(P)}{\partial n_P} \right] dS = \begin{cases} 0 & \text{si } M \in \Omega_i \\ -2\pi \Phi_e(M) & \text{si } M \in \Gamma_{SF} \\ -4\pi \Phi_e(M) & \text{si } M \in \Omega_e \end{cases} \quad (3.15)$$

Distribution mixte de Green sur la frontière fluide – structure

En ajoutant les représentations dans Ω_i et Ω_e , on obtient :

$$\int_{\Gamma_{SF}} \left[-(\Phi_e(P) - \Phi_i(P)) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi_e(P)}{\partial n_P} - \frac{\partial \Phi_i(P)}{\partial n_P} \right) \right] dS = \begin{cases} -4\pi \Phi_i(M) & \text{si } M \in \Omega_i \\ -2\pi(\Phi_e(M) + \Phi_i(M)) & \text{si } M \in \Gamma_{SF} \\ -4\pi \Phi_e(M) & \text{si } M \in \Omega_e \end{cases} \quad (3.16)$$

et donc les densités surfaciques de singularité sur Γ_{SF} :

$$\sigma(P) = \frac{\partial \Phi_e}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \quad \text{et} \quad \mu(P) = -\Phi_e + \Phi_i \quad (3.17)$$

induisent les potentiels Φ_e et Φ_i dans les domaines extérieur et intérieur et l'équation intégrale (3.16) s'écrit :

$$\int_{\Gamma_{SF}} \left[\mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \sigma(P) \right] dS = \begin{cases} -4\pi \Phi_i(M) & \text{si } M \in \Omega_i \\ -2\pi(\Phi_i(M) + \Phi_e(M)) & \text{si } M \in \Gamma_{SF} \\ -4\pi \Phi_e(M) & \text{si } M \in \Omega_e \end{cases} \quad (3.18)$$

3.3 Discrétisation et résolution

On cherche la distribution mixte de GREEN solution du problème intérieur ou extérieur.

3.3.1 Problème intérieur

On obtient la distribution mixte de GREEN en choisissant comme potentiel extérieur le potentiel Φ_e identiquement nul dans Ω_e et dans ces conditions, la distribution surfacique de sources est définie sur Γ_{SF} par :

$$\mu(P) = \Phi_i(P) \quad \text{et} \quad \sigma(P) = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \quad (3.19)$$

En écrivant l'équation (3.18) pour un point M appartenant à la frontière Γ_{SF} il vient :

$$-\frac{\mu(P)}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{SF}} \left[\mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{SF}} \sigma(P) \frac{dS}{r} \quad (3.20)$$

Pour résoudre cette équation intégrale, la méthode de discrétisation adoptée est une méthode de collocation par sous-domaines. La surface Γ_{SF} est discrétisée en N facettes planes quadrilatères ou triangulaires d'aire S_j supportant des densités surfaciques de singularités constantes.

Donc sur chaque facette j , $\mu(P)$ et $\sigma(P)$ restent égales à leur valeur moyenne μ_j et σ_j . Dans ces conditions, l'équation intégrale sur la surface complète (3.20) est transformée en une somme d'intégrales calculées sur la surface de chaque facette i qui s'écrit :

$$-\frac{\mu_i}{2} - \sum_{j=1}^N \mu_j \left(\frac{1}{4\pi} \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \right) = \sum_{j=1}^N \sigma_j \left(\frac{1}{4\pi} \int_{S_j} \frac{dS}{r} \right) \quad (3.21)$$

avec $r = |M_i P|$, et M_i centre de la facette i et le problème fluide discrétisé se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires :

$$\mathbf{D}_i \boldsymbol{\mu} = \mathbf{S}_i \boldsymbol{\sigma} \quad (3.22)$$

où \mathbf{D}_i est la matrice des coefficients d'influence de doublets normaux, telle que :

$$(d_{ij})_i = -\frac{1}{2} \delta_i^j - \frac{1}{4\pi} \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (3.23)$$

et \mathbf{S}_i , la matrice des coefficients d'influence de source, telle que :

$$(s_{ij})_i = \frac{1}{4\pi} \int_{S_j} \frac{dS}{r} \quad (3.24)$$

3.3.2 Problème extérieur

On obtient la distribution mixte de GREEN en choisissant maintenant, comme potentiel intérieur le potentiel Φ_i identiquement nul dans Ω_i et dans ces conditions la distribution surfacique de sources est définie sur Γ_{SF} par :

$$\mu(P) = -\Phi_e(P) \quad \text{et} \quad \sigma(P) = \frac{\partial \Phi_e}{\partial n} \quad (3.25)$$

L'équation intégrale (3.18) écrite pour un point M appartenant à la frontière Γ_{SF} devient :

$$\frac{\mu(P)}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{SF}} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{SF}} \sigma(P) \frac{dS}{r} \quad (3.26)$$

et après discrétisation en facettes planes, il vient :

$$\frac{\mu_i}{2} - \sum_{j=1}^N \mu_j \left(\frac{1}{4\pi} \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \right) = \sum_{j=1}^N \sigma_j \left(\frac{1}{4\pi} \int_{S_j} \frac{dS}{r} \right) \quad (3.27)$$

et le problème fluide discrétisé se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires :

$$\mathbf{D}_e \boldsymbol{\mu} = \mathbf{S}_e \boldsymbol{\sigma} \quad (3.28)$$

avec :

$$(d_{ij})_e = \frac{1}{2} \delta_i^j - \frac{1}{4\pi} \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad \text{et} \quad (s_{ij})_e = \frac{1}{4\pi} \int_{S_j} \frac{dS}{r} \quad (3.29)$$

Sur Γ_{SF} , $\sigma(P)$ s'identifie à la vitesse normale de la paroi ($\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \vec{V}_s \cdot \vec{n}$) et $\mu(P)$, au potentiel des vitesses. La connaissance de l'une ou l'autre de ces grandeurs ou une combinaison linéaire des deux, suffit pour résoudre complètement le problème.

Les résultats précédents sont généralisables à la recherche de fonctions scalaires satisfaisant l'équation de HELMHOLTZ, d'une part lorsque l'hypothèse de fluide compressible est retenue ou l'équation de LAPLACE, d'autre part lorsque le fluide incompressible est limité par une surface libre déformable (ondes de gravité). Dans l'équation intégrale (3.26), la fonction $1/r$ est remplacée par la fonction de GREEN $G(M, P)$ du problème correspondant. La forme intégrale $W(\Phi)$ devient une intégrale de FREDHOLM de deuxième espèce.

4

Couplage fluide – structure

Nous disposons donc des deux systèmes d'équations aux dérivées partielles caractérisant le comportement des solides d'une part, des fluides parfaits d'autre part.

Les équations du processus de résolution sont récapitulées dans le tableau 4.1.

fluide	structure
$\Delta\Phi$ ou $\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$ dans Ω_f	$\text{div}\bar{\sigma}_c + \vec{f} = \rho_s \vec{\gamma}_P$ dans Ω_s
conditions de surface libre	$\bar{\sigma}_c \cdot \vec{n} = \vec{T}_d$ sur $\partial\Omega_{s\sigma}$
conditions à l'infini	$\vec{u} = \vec{u}_d$ sur $\partial\Omega_{su}$
couplage	
$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \vec{V}_s \cdot \vec{n}$ sur Γ_{SF}	$\vec{T}_d = -p\vec{n}$ sur $\Gamma_{SF} \subset \partial\Omega_{s\sigma}$
résolution analytique	
méthode modale : Le déplacement de la structure <i>mouillée</i> est projeté sur la base modale de la structure <i>sèche</i>	
résolution numérique	
méthode des éléments finis	
méthode des éléments finis + éléments infinis méthode des éléments finis	
méthode des équations intégrales	
méthodes couplées	
MEF-MEF MEF+E infinis-MEF MEI-MEF	

Tableau 4.1 – processus de résolution

La frontière $\partial\Omega_{s\sigma}$ est constituée en particulier de l'interface fluide-structure, notée Γ_{SF} (surface *mouillée* déformable ou non), sur laquelle les tensions extérieures données s'identifient à la pression dynamique du fluide p inconnue. Les équations traduisant le comportement des fluides parfaits sont les équations (2.14a). Les parois mobiles incluent l'interface fluide-structure Γ_{SF} où la vitesse normale est inconnue.

Nous proposons de montrer comment peut être réalisé le couplage des deux grandes classes de méthodes pour l'analyse simultanée des deux milieux.

4.1 Couplage éléments finis – éléments finis

Cette analyse du comportement de la structure et du fluide par la méthode des éléments finis est d'une mise en œuvre classique et aisée pour traiter les problèmes intérieurs et elle a fait l'objet de nombreux travaux et communications.

Nous reprenons ici la formulation générale conduisant à la construction des deux systèmes d'équations linéaires couplés, obtenus par discrétisation en éléments finis des deux milieux. Afin de ne pas alourdir inutilement les écritures matricielles, nous supposons qu'à l'interface fluide-structure, les discrétisations en éléments finis des deux milieux sont identiques. Nous ne ferons donc pas de différence entre la frontière mouillée d'un élément fini structure $(\Gamma_{FS})_e$ et la frontière $(\Gamma_{SF})_e$ d'un élément fini fluide en contact avec la structure. Cette frontière élémentaire commune sera notée simplement Γ_{fse} .

Le cas où les maillages structure et fluide à l'interface sont différents ne présente pas de difficultés théoriques particulières, seule la mise en œuvre pratique de la méthode est un peu plus délicate.

L'approximation nodale par éléments finis sur chaque élément solide s'écrit :

$$u = \mathbf{N}_s \mathbf{a}_e \quad (4.1)$$

Elle conduit donc, conformément à la section 2.1, au calcul classique des quantités élémentaires énergies cinétique, de déformation et travaux virtuels. Pour ce calcul des forces généralisées associées aux répartitions surfaciques, il intervient deux types de répartitions :

- des répartitions connues d'origine mécanique ;
- des répartitions inconnues dues au chargement du fluide : les pressions dynamiques sur Γ_{SF} la partie mouillée de $\partial\Omega_{s\sigma}$.

Donc pour les éléments finis ayant une frontière Γ_e appartenant à Γ_{SF} le travail virtuel des forces dues au fluide (forces de pression) s'écrit :

$$\delta T_{ph} = \int_{\Gamma_{fse}} \delta \vec{u} \cdot (-p) \vec{n} \, dS \quad (4.2)$$

En tenant compte de l'interpolation nodale, la force généralisée associée a alors pour expression :

$$\varphi_{he} = \int_{\Gamma_{fse}} \mathbf{N}_s^T \mathbf{n} (-p) \, dS \quad (4.3)$$

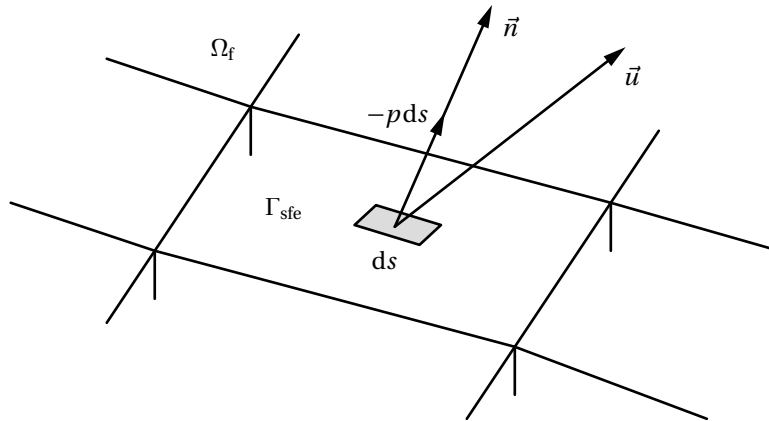


Figure 4.1 – maillage

De même, l'interpolation du potentiel des vitesses en fonction des variables nodales élé-

mentaires s'écrit :

$$\Phi = \mathbf{N}_f \Phi_e \quad (4.4)$$

et l'équation de LAGRANGE permet d'exprimer la pression dynamique en tout point d'un élément fini fluide :

$$p = -\rho_f \mathbf{N}_f \dot{\Phi}_e \quad (4.5)$$

et en particulier à l'interface fluide – structure, la force généralisée équivalente à la pression dynamique à pour expression :

$$\varphi_{he} = \rho_f \left[\int_{\Gamma_{sfe}} \mathbf{N}_s^T \mathbf{n} \mathbf{N}_f dS \right] \dot{\Phi}_e \quad (4.6)$$

que l'on peut écrire :

$$\varphi_{he} = \rho_f \mathbf{s}_e \dot{\Phi} = -\mathbf{s}_e \mathbf{p}_e \quad \text{avec} \quad \mathbf{s}_e = \int_{\Gamma_{sfe}} \mathbf{N}_s^T \mathbf{n} \mathbf{N}_f dS \quad (4.7)$$

où \mathbf{s}_e représente la matrice de couplage structure-fluide élémentaire et \mathbf{p}_e , le vecteur des pressions nodales élémentaires.

En procédant d'une manière analogue pour l'analyse du fluide, on peut exprimer la vitesse normale en un point quelconque de l'interface appartenant à un élément fini e par :

$$V_n = \vec{V}_s \cdot \vec{n} = \mathbf{n}^T \mathbf{N}_s |_{\Gamma_{sfe}} \dot{\mathbf{a}}_e \quad (4.8)$$

donc les termes $(g_i)_e$ calculés sur $sfe \in \Gamma_{SF}$ s'écrivent :

$$\mathbf{g}_e = - \left[\int_{\Gamma_{sfe}} \mathbf{N}_f^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}_s dS \right] \dot{\mathbf{a}}_e \quad \text{soit} \quad \mathbf{g}_e = -\mathbf{f}_e \dot{\mathbf{a}}_e = -\mathbf{s}_e^T \dot{\mathbf{a}}_e \quad (4.9)$$

Par conséquent, après assemblage des formes intégrales élémentaires discrétisées, pour le fluide et pour la structure, nous obtenons les deux systèmes d'équations linéaires couplés suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{B}_s \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_s \mathbf{a} &= \mathbf{F}_{\text{ext}} + \rho_f \mathbf{s}_f \dot{\Phi} \\ \mathbf{M}_f \ddot{\Phi} + \mathbf{B}_f \dot{\Phi} + \mathbf{H}_f \Phi &= \mathbf{G}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_s \dot{\mathbf{a}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

avec \mathbf{F}_{ext} , vecteur des forces généralisées associées à des forces d'excitation de la structure, volumiques, surfaciques ou ponctuelles connues et \mathbf{G}_{ext} un second membre du système matriciel caractérisant le comportement du fluide associé à des conditions de glissement sur des parois où la vitesse normale serait connue.

La matrice de couplage fluide – structure assemblée \mathbf{f}_s , où $\mathbf{s}_f = \mathbf{f}_s^T$, ne fait correspondre que les inconnues nodales du fluide et de la structure attachées à l'interface Γ_{SF} . Dans le cas général, la résolution de ce système se fera en regroupant les inconnues nodales \mathbf{a} et Φ dans un même vecteur des inconnues nodales \mathbf{y} tel que :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{H} \mathbf{y} = \mathbf{Q} \quad (4.11)$$

avec :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \\ & \mathbf{M}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_s & -\rho_f \mathbf{s} \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & \mathbf{B}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \\ & \mathbf{H}_f \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ \mathbf{G}_{\text{ext}} \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système est simplifiée si le fluide est incompressible et en se plaçant dans une gamme de fréquences telle que la condition de surface libre est simplement identiquement nulle. Dans ces conditions, l'équation matricielle traduisant le comportement fluide s'écrit :

$$\mathbf{H}_f \Phi = \mathbf{G}_{\text{ext}} - \mathbf{f} \mathbf{s} \dot{\mathbf{a}} \quad (4.13)$$

et il est alors possible d'éliminer les variables nodales du fluide du système précédent et dans ces conditions le système devient :

$$(\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_a) \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{B}_s \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_s \mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{gt}} \quad (4.14)$$

avec la matrice *masse ajoutée* $\mathbf{M}_a = \rho_f \mathbf{f} \mathbf{s}^T \mathbf{H}_f^{-1} \mathbf{f} \mathbf{s}$ et $\mathbf{F}_{\text{gt}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \rho_f \mathbf{H}_f^{-1} \mathbf{G}_{\text{ext}}$. Comme nous l'avons déjà signalé en section 2.2, si le milieu fluide n'est pas borné, il est nécessaire de mettre en œuvre des procédures spéciales permettant de tenir compte de la frontière à l'infini, ces procédures étant plus ou moins bien adaptées aux types de problèmes à résoudre. Par exemple pour un calcul de fréquences et modes propres d'une structure immergée en milieu infini, on peut tout en gardant une bonne précision étudier la structure en milieu borné.

4.2 Couplage éléments finis – équations intégrales

L'analyse du fluide, problème intérieur ou extérieur, par la *méthode des équations intégrales* permet d'exprimer le potentiel des vitesses aux centres des facettes de la discrétisation de l'interface Γ_{SF} supportant des densités surfaciques de singularités constantes par la relation :

$$\Phi = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{V}_n \quad (4.15)$$

\mathbf{V}_n étant le vecteur des vitesses normales des centres des facettes. En reprenant l'interpolation éléments finis de la structure, et connaissant les coordonnées des centres de facettes, on construit une matrice de couplage $\mathbf{f} \mathbf{s}$ qui permet d'exprimer la vitesse normale au centre de chaque facette en fonction des déplacements nodaux de la structure. En effet, si on note

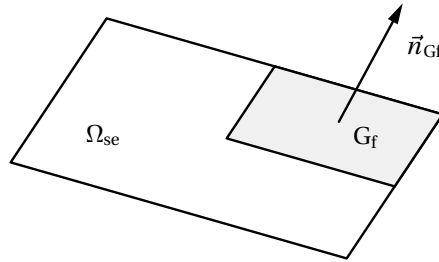


Figure 4.2 – couplage éléments finis – équations intégrales

(x_f, y_f, z_f) les coordonnées du centre de gravité $G_f(\xi_f, \eta_f, \nu_f)$ de la facette f de normale \vec{n}_{Gf} , appartenant à l'élément fini e , la vitesse normale en G_f s'exprime en fonction des degrés de liberté

de l'élément fini e par :

$$\mathbf{V}_{nGf} = \mathbf{n}_{Gf}^T \mathbf{N}_{s|Gf} \dot{\mathbf{a}}_e \quad (4.16)$$

Cette relation fournit la f^e ligne de la relation générale :

$$\mathbf{V}_n = \mathbf{f}_s \dot{\mathbf{a}} \quad (4.17)$$

et les potentiels des vitesses aux centres des facettes sont donnés par :

$$\Phi = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{f}_s \dot{\mathbf{a}} \quad (4.18)$$

La formule de Lagrange permet d'exprimer les pressions dynamiques aux centres des facettes en fonction des déplacements nodaux :

$$\mathbf{p} = \rho_f \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{f}_s \ddot{\mathbf{a}} \quad (4.19)$$

La force résultante des pressions dynamiques sur une facette i de normale \vec{n}_i et d'aire S_i est donc égale à $-p_i S_i \vec{n}_i$. En considérant que cette force est appliquée au centre de la facette, son travail virtuel s'écrit :

$$\delta \Gamma_{hi} = \delta \vec{u}_i (-p_i S_i \vec{n}_i) \quad (4.20)$$

En regroupant sous forme matricielle le travail virtuel de toutes les forces qui s'exercent sur les N facettes et en notant \mathbf{A} la matrice diagonale des aires de facettes, on obtient alors la force généralisée totale équivalente à la répartition de pression à l'interface :

$$\varphi_h = -\rho_f \mathbf{f}_s^T \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{f}_s \ddot{\mathbf{a}} \Rightarrow \varphi_h = -\rho_f \mathbf{M}_a \ddot{\mathbf{a}} \quad (4.21)$$

La forme de cette force généralisée conduit, suivant l'hypothèse retenue pour l'étude du fluide, à deux opérateurs différents :

fluide incompressible sans ondes de gravité — dans ce cas les matrices \mathbf{D} et \mathbf{S} sont à coefficients constants et réels, et la force généralisée fournit la matrice *masse ajoutée* :

$$\mathbf{M}_a = \rho_f \mathbf{f}_s^T \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{f}_s \quad (4.22)$$

fluide incompressible avec ondes de gravité — dans cette hypothèse, les matrices \mathbf{D} et \mathbf{S} sont à coefficients complexes fonction de la pulsation ω . Le calcul de la force généralisée conduit à une matrice *masse ajoutée* à coefficients complexes ;

fluide compressible — les matrices \mathbf{D} et \mathbf{S} sont ici également à coefficients complexes fonction de la pulsation ω et la matrice masse ajoutée est à coefficients complexes.

On doit résoudre dans tous les cas :

$$(\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_a) \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_s \mathbf{a} = \mathbf{F}_{gt} \quad (4.23)$$

4.3 Vibroacoustique

Après avoir résolu le problème couplé, on connaît pour la discrétisation structure le vecteur des déplacements nodaux \mathbf{a} et pour le fluide, ou bien le vecteur des potentiels nodaux ou bien le vecteur des potentiels aux centres des facettes Φ . On peut donc exprimer en tout point du domaine fluide le potentiel des vitesses Φ (donc la pression p) :

– à partir de l'interpolation nodale :

$$\Phi = \mathbf{N}_f \Phi_e \quad (4.24)$$

– en repartant de l'équation intégrale :

$$\Phi_e(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{sf}} \left(\Phi(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(P)}{\partial n_p} \right) dS \quad (4.25)$$

5

Étude vibratoire d'une poutre immergée dans un fluide

On considère la poutre de la figure 5.1, d'axe \vec{z} , de section circulaire de rayon $r = a$, encadrée à une extrémité et libre à l'autre, immergée dans un fluide limité par une surface libre et un fond rigide parallèle à la surface libre, illimité dans les autres directions.

On étudie les vibrations de flexion de la poutre dans le plan (x, z) . On suppose que $h \leq \ell$.

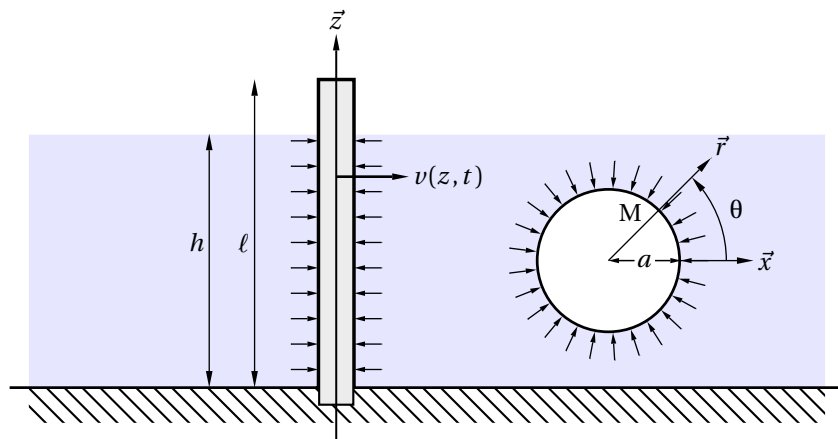


Figure 5.1 – poutre verticale immergée dans un fluide

5.1 Équations du problème couplé

5.1.1 Comportement de la poutre

Pour analyser le comportement de la poutre, on se place dans le cadre classique de l'hypothèse de BERNOLLI, ce qui conduit, en notant $v(z, t)$, la flèche comptée suivant \vec{x} , E , le module d'Young du matériau, ρ_s , sa masse volumique, I , le moment quadratique de la section droite par rapport à un diamètre et S , l'aire de la section, aux équations du mouvement suivantes :

$$\begin{aligned} EI v_{,zzzz} + \rho_s S \ddot{v} &= f_h(z, t) \\ M_f &= EI v_{,zz} \quad \text{pour } z \in [0, \ell] \\ T &= -EI v_{,zzz} \end{aligned} \tag{5.1}$$

avec $v(0, t) = v_{,z}(0, t) = v_{,zz}(\ell, t) = v_{,zzz}(\ell, t) = 0$ et où $f_h(z, t)$ est la résultante linéique suivant \vec{x} des pressions hydrodynamiques, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} f_h(z, t) &= - \int_0^{2\pi} p(a, \theta, z, t) a \cos \theta d\theta && \text{pour } z \in [0, h] \\ f_h(z, t) &= 0 && \text{pour } z \in [h, \ell] \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.1.2 Comportement du fluide

En supposant le fluide parfait, à mouvement irrotationnel, les équations générales qui caractérisent le fluide s'écrivent ici :

$$\begin{aligned} \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= 0 && \text{dans } \Omega_f \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= \dot{v} \cos \theta && r = a, \forall \theta, z \in [0, h] \text{ — condition sur la surface latérale} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= 0 && z = 0, \forall r, \theta \text{ — condition sur le fond} \\ \Phi &= 0 && z = h, \forall r, \theta \text{ — condition de surface libre} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 0 && \text{— condition de SOMMERFELD} \end{aligned} \quad (5.3)$$

où $\dot{v} \cos \theta$ est la vitesse normale en M de la surface latérale de la poutre.

La pression en un point quelconque du domaine fluide et en particulier sur la surface latérale mouillée de la poutre s'obtient par la relation de LAGRANGE linéarisée. Si on connaît le potentiel Φ , on peut calculer la résultante des efforts hydrodynamiques $f_h(z, t)$.

5.2 Résolution analytique

5.2.1 Fluide incompressible

L'équation locale du fluide dans ce cas est l'équation de LAPLACE.

Détermination du potentiel des vitesses

Le potentiel des vitesses $\Phi(M, t) = \varphi(M)f(t)$ est cherché en coordonnées cylindriques (r, θ, z) sous la forme d'une solution à variables séparées :

$$\varphi(r, \theta, z) = A(r)B(\theta)C(z) \quad (5.4)$$

Il est solution de l'équation de LAPLACE qui en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.5)$$

En notant :

$$A' = \frac{dA}{dr}; \quad A'' = \frac{d^2A}{dr^2}; \quad B' = \frac{dB}{d\theta}; \quad B'' = \frac{d^2B}{d\theta^2}; \quad C' = \frac{dC}{dz}; \quad C'' = \frac{d^2C}{dz^2} \quad (5.6)$$

L'équation (5.5) s'écrit :

$$\frac{A''}{A} + \frac{1}{r} \frac{A'}{A} + \frac{1}{r^2} \frac{B''}{B} + \frac{C''}{C} = 0 \quad (5.7)$$

On en déduit :

$$\frac{C''}{C} = \gamma \quad \text{et} \quad \frac{B''}{B} = \beta \quad (5.8)$$

où γ et β sont des coefficients constants et on cherche $A(r)$ solution de :

$$r^2 A''(r) + rA'(r) + (\gamma r^2 + \beta)A(r) = 0 \quad (5.9)$$

D'autre part, la fonction $B(\theta)$ est périodique de période 2π de la forme :

$$B(\theta) = a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta \quad (5.10)$$

ce qui fixe la valeur de la constante $\beta = -k^2$. Les valeurs que peut prendre la constante, fixent la forme de la fonction $C(z)$:

$$\begin{aligned} \gamma = 0 & \quad C(z) = a_0 z + b_0 \\ \gamma = q^2 & \quad C(z) = a_1 e^{qz} + b_1 e^{-qz} \\ \gamma = -q^2 & \quad C(z) = a_2 \cos qz + b_2 \sin qz \end{aligned} \quad (5.11)$$

et dans ces conditions l'équation (5.9) devient :

$$r^2 A''(r) + rA'(r) + (\gamma r^2 - k^2)A(r) = 0 \quad \text{où} \quad \gamma = \pm q^2 \quad (5.12)$$

Le potentiel φ s'annule quand $r \rightarrow \infty$ — pas d'écoulement à l'infini — donc $A(r)$ doit s'annuler quand $r \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma = 0 & \quad A(r) = m_k r^{-k} \\ \gamma = q^2 & \quad A(r) = d_k J_k(qr) + e_k Y_k(qr) \\ \gamma = -q^2 & \quad A(r) = f_k K_k(qr) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Les termes J_k et Y_k sont les fonctions de BESSEL de 1^{re} et 2^e espèce d'ordre entier k , et K_k , les fonctions de BESSEL modifiées. La fonction potentiel $\varphi(r, \theta, z)$ est donc une combinaison linéaire des trois solutions φ_1 , φ_2 et φ_3 :

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \theta, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) m_k r^{-k} (a_0 z + b_0) \\ \varphi_2(r, \theta, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) (d_k J_k(qr) + e_k Y_k(qr)) (a_1 e^{qz} + b_1 e^{-qz}) \\ \varphi_3(r, \theta, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) (f_k K_k(qr)) (a_2 \cos qz + b_2 \sin qz) \end{aligned} \quad (5.14)$$

La condition de glissement sur le fond $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ pour $z = 0$ et pour tous r et θ se traduit par $a_0 = a_1 - b_1 = b_2 = 0$. La condition de surface libre $\varphi = 0$ en $z = h$ et pour tous r et θ implique :

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ a_1 \cosh qh &= 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0 \\ a_2 \cos qh &= 0, \quad \Rightarrow \quad q = q_n = \frac{2n-1}{2h} \pi, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.15)$$

Finalement, la solution cherchée est de la forme :

$$\varphi = \varphi_3(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) (f_{kn} K_k(q_n r)) \cos q_n z \quad (5.16)$$

La condition de glissement sur la surface latérale mouillée de la poutre :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a} f(t) = \dot{v} \cos \theta \quad (5.17)$$

implique $B(\theta) = \cos \theta$ donc $k = 1$ et $b_k = 0$ et, par conséquent, la solution générale du potentiel est de la forme :

$$\varphi = \varphi_3(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n K_1(q_n r) \cos q_n z \cos \theta \quad \text{avec} \quad q_n = \frac{2n-1}{2h} \pi \quad (5.18)$$

D'autre part en cherchant $v(z, t)$ sous la forme $v(z, t) = V(z)g(t)$, avec $g(t)$ fonction périodique, la condition de glissement sur la surface latérale de la poutre entraîne $f(t) = \dot{g}(t)$ et :

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n q_n K_{1,qr}(q_n a) \cos q_n z = V(z) \quad \text{avec} \quad q_n = \frac{2n-1}{2h} \pi \quad (5.19)$$

Les coefficients F_n sont explicités en prémultipliant l'équation (5.19) par $\cos p z$, avec $p = (2m-1)/2h$, puis en intégrant entre 0 et h . On obtient alors, en notant $K_1^* = K_{1,qr}^{-1}$:

$$F_n = \frac{4}{(2n-1)\pi} \frac{1}{K_1^*\left(\frac{2n-1}{2h}\pi a\right)} \int_0^h V(z) \cos\left(\frac{2n-1}{2h}\pi z\right) dz \quad (5.20)$$

du fait des conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\int_0^h \cos\left(\frac{2m+1}{2h}\pi z\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2h}\pi z\right) dz = \frac{h}{2} \delta_{mn} \quad (5.21)$$

Le potentiel des vitesses s'exprime alors par la relation :

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \frac{K_1(q_n r)}{K_1^*(q_n a)} \left(\int_0^h V(z) \cos(q_n z) dz \right) \cos(q_n z) \cos \theta f(t) \quad (5.22)$$

et le calcul de $f_h(z, t)$ donne :

$$f_h(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2n-1} \rho_f a \frac{K_1(q_n a)}{K_1^*(q_n a)} \left(\int_0^h V(z) \cos(q_n z) dz \right) \cos(q_n z) \ddot{g}(t) \quad (5.23)$$

Développement de la flèche sur les modes propres de la poutre sèche

Les pulsations et modes propres de la poutre dans l'air sont déterminés en cherchant $v(z, t)$ solution des équations (5.1) où $f_h(z, t) = 0$. En posant $\Omega^4 = \frac{\rho_s S}{EI} \omega^2$, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$V(z) = A \cos \Omega z + B \sin \Omega z + C \cosh \Omega z + D \sinh \Omega z \quad (5.24)$$

1. Il s'agit ici de la dérivée du terme K_1 par rapport au produit qr , comme défini dans l'équation (5.19).

La prise en compte des conditions limites permet de trouver l'équation donnant les pulsations propres et de déterminer les constantes d'intégration fixant la forme des modes propres, soit :

$$\begin{aligned} \cos\Omega\ell \cosh\Omega\ell + 1 = 0 \quad \text{soit} \quad \Omega_r &\cong \frac{(2r-1)\pi}{2\ell} \quad \text{pour} \quad r > 2 \\ V_r(z) &= \frac{1}{\sqrt{\ell}} (\cos\Omega_r z - \cosh\Omega_r z + C_r(\sinh\Omega_r z - \sin\Omega_r z)) \\ \text{avec } C_r &= \frac{\cos\Omega_r \ell + \cosh\Omega_r \ell}{\sin\Omega_r \ell + \sinh\Omega_r \ell} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Cette base des modes propres est utilisée pour développer la flèche réelle de la poutre immergée :

$$v(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(z) \eta_i(t) \quad \text{avec} \quad \eta_i(t) = a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t \quad (5.26)$$

La résultante hydrodynamique $f_h(z, t)$ de l'équation (5.23) a alors pour expression :

$$f_h(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4\rho_f a}{2n-1} \frac{K_1(q_n a)}{K_1^*(q_n a)} \left(\int_0^h V_j(z) \cos(q_n z) dz \right) \cos(q_n z) \ddot{\eta}_j(t) \quad (5.27)$$

En reportant cette approximation de la flèche et de la résultante hydrodynamique dans l'équation locale de (5.1) et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes propres de la poutre dans l'air, les équations aux pulsations propres de la poutre immergée sont données, pour la i^e pulsation propre de la poutre sèche, par :

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \frac{1}{\rho_s S} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4\rho_f a}{2n-1} \frac{K_1(q_n a)}{K_1^*(q_n a)} \left(\int_0^h V_i(z) \cos(q_n z) dz \right) \left(\int_0^h V_j(z) \cos(q_n z) dz \right) \ddot{\eta}_j(t) \quad (5.28)$$

La résolution se fait en choisissant une base des modes propres tronquée à l'ordre m . On obtient le problème aux valeurs propres donnant les pulsations propres et modes propres de la poutre immergée :

$$(\mathbf{I} + \mathbf{M}_a) \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{diag}(\omega_i^2) \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \quad (5.29)$$

avec \mathbf{M}_a , matrice masse ajoutée dont le terme général s'écrit :

$$(\mathbf{M}_a)_{ij} = -\frac{\rho_f a}{\rho_s S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2n-1} \frac{K_1(q_n a)}{K_1^*(q_n a)} \left(\int_0^h V_i(z) \cos(q_n z) dz \right) \left(\int_0^h V_j(z) \cos(q_n z) dz \right) \quad (5.30)$$

soit également :

$$(\mathbf{M}_a)_{ij} = -\frac{\rho_f a}{\rho_s S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2n-1} \frac{K_1(q_n a)}{K_1^*(q_n a)} A_{ni} A_{nj} \quad (5.31)$$

avec :

- $q_n \neq \Omega_i$:

$$\begin{aligned} A_{ni} &= \frac{1}{q_n^2 - \Omega_i^2} \left[(-1)^{n+1} q_n (\cos \Omega_i h - C_i \sin \Omega_i h) + C_i \Omega_i \right] \\ &\quad + \frac{1}{q_n^2 + \Omega_i^2} \left[(-1)^{n+1} q_n (-\cosh \Omega_i h + C_i \sinh \Omega_i h) - C_i \Omega_i \right] \end{aligned}$$

- $q_n = \Omega_i$:

$$A_{ni} = \frac{h}{2} - \frac{C_i h}{(2n-1)\pi} + \frac{1}{q_n^2 + \Omega_i^2} \left[(-1)^{n+1} q_n (-\cosh \Omega_i h + C_i \sinh \Omega_i h) - C_i \Omega_i \right]$$

5.2.2 Fluide compressible

Comme précédemment, le potentiel des vitesses $\Phi(M, t) = \varphi(M)f(t)$ est cherché en coordonnées cylindriques (r, θ, z) sous la forme d'une solution à variables séparées :

$$\varphi(r, \theta, z) = A(r)B(\theta)C(z) \quad (5.32)$$

et en réponse forcée. Si ω est la pulsation d'excitation, on note le nombre d'ondes $k = \frac{\omega}{c}$ et φ est solution de l'équation de HELMHOLTZ :

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0 \quad (5.33)$$

La même démarche que celle qui a été détaillée pour le fluide incompressible conduit à la solution, qui s'exprime cette fois en fonction de la fonction de HANKEL H_1 :

$$\varphi = \varphi_3(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n H_1(\beta_n r) \cos q_n z \cos \theta \quad (5.34)$$

avec $q_n = \frac{2n-1}{2h} \pi$ et $\beta_n = k^2 - q_n^2$

La détermination de F_n et le calcul de la résultante hydrodynamique $f_h(z, t)$ conduisent à :

$$f_h(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\beta_n h} \rho_f a \frac{H_1(\beta_n a)}{H_1^*(\beta_n a)} \left(\int_0^h V(z) \cos(q_n z) dz \right) \cos(q_n z) \ddot{g}(t) \quad (5.35)$$

et en projetant la flèche $v(z, t)$ de la poutre sur la base modale, on obtient :

$$f_h(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\beta_n h} \rho_f a \frac{H_1(\beta_n a)}{H_1^*(\beta_n a)} \left(\int_0^h V_j(z) \cos(q_n z) dz \right) \cos(q_n z) \ddot{\eta}_j(t) \quad (5.36)$$

En reportant cette approximation de la flèche et de la résultante hydrodynamique dans l'équation locale de (5.1) et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes propres de la poutre dans l'air, les équations aux pulsations propres de la poutre immergée sont données par :

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \frac{\rho_f a}{\rho_s S} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\beta_n h} \frac{H_1(q_n a)}{H_1^*(q_n a)} \left(\int_0^h V_i(z) \cos(q_n z) dz \right) \left(\int_0^h V_j(z) \cos(q_n z) dz \right) \ddot{\eta}_j(t) \quad (5.37)$$

pour la i^e pulsation propre de la poutre sèche.

Comme précédemment, la résolution se fait en choisissant une base des modes propres tronquée à l'ordre m , et en effectuant un balayage en fréquence, puisque les coefficients du système sont fonction du nombre d'ondes k . On résout alors :

$$(\mathbf{I} + \mathbf{M}_a) \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{diag}(\omega_i^2) \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \quad (5.38)$$

où \mathbf{M}_a est la matrice masse ajoutée dont le terme général s'écrit cette fois :

$$(\mathbf{M}_a)_{ij} = -\frac{\rho_f a}{\rho_s S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\beta_n h} \frac{H_1(\beta_n a)}{H_1^*(\beta_n a)} \left(\int_0^h V_i(z) \cos(q_n z) dz \right) \left(\int_0^h V_j(z) \cos(q_n z) dz \right) \quad (5.39)$$

soit également :

$$(\mathbf{M}_a)_{ij} = -\frac{\rho_f a}{\rho_s S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\beta_n h} \frac{H_1(q_n a)}{H_1^*(q_n a)} A_{ni} A_{nj} \quad (5.40)$$

avec :

– $\beta_n \neq \Omega_i$:

$$A_{ni} = \frac{1}{\beta_n^2 - \Omega_i^2} [(-1)^{n+1} \beta_n (\cos \Omega_i h - C_i \sin \Omega_i h) + C_i \Omega_i] \\ + \frac{1}{\beta_n^2 + \Omega_i^2} [(-1)^{n+1} \beta_n (-\cosh \Omega_i h + C_i \sinh \Omega_i h) - C_i \Omega_i]$$

– $\beta_n = \Omega_i$:

$$A_{ni} = \frac{h}{2} - \frac{C_i h}{(2n-1)\pi} + \frac{1}{\beta_n^2 + \Omega_i^2} [(-1)^{n+1} \beta_n (-\cosh \Omega_i h + C_i \sinh \Omega_i h) - C_i \Omega_i]$$

5.3 Méthodes numériques et couplage

5.3.1 Éléments finis – éléments finis

Élément fini poutre

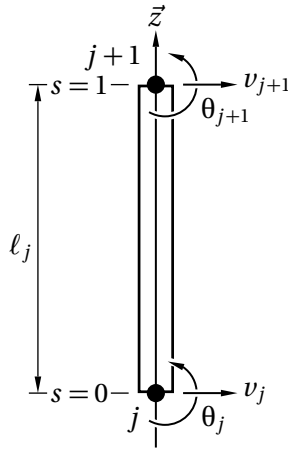


Figure 5.2 – élément de BERNOULLI

La poutre est discrétisée en éléments finis poutre à deux nœuds de numéros courants $j, j+1$ de coordonnées z_j, z_{j+1} et de longueur l_j . Sur un élément fini j , la flèche $v(z, t)$ est interpolée de façon classique en choisissant une approximation cubique (polynôme de l'Hermite cubique) soit :

$$v(z, t) = \mathbf{N}_s^T(z) \mathbf{a}_e(t) \quad (5.41)$$

avec $\mathbf{a}_e^T = [v_j, \theta_j, v_{j+1}, \theta_{j+1}]$ et $\mathbf{N}_s^T = [1 - 3s^2 + 2s^3, l_j(s - 2s^2 + s^3), (3s^2 - 2s^3), l_j(-s^2 + s^3)]$ où $s = \frac{z-z_j}{l_j} \in [0, 1]$.

Nous ne rappelons pas ici la forme des matrices masse et raideur de ce type d'élément qui sont classiques et données dans la plupart des ouvrages dédiés à la méthode des éléments finis.

Éléments finis fluides

Nous ne considérons ici que le cas du fluide incompressible, l'extension au fluide compressible, comme nous l'avons vu au niveau des méthodes générales, ne présente pas de difficultés particulières. Compte tenu de la géométrie à symétrie de révolution d'axe z , le potentiel des vitesses est déterminé en utilisant un développement en série de Fourier soit :

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \Phi_0(r, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r, z, t) \cos n\theta + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(r, z, t) \sin m\theta \quad (5.42)$$

L'harmonique 0 correspond à un problème axisymétrique. Le domaine fluide est discrétisé en éléments finis (la frontière Γ_∞ est à distance finie Γ_R), l'approximation nodale sur chaque élément fini s'écrit :

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \mathbf{N}_f(r, z) \Phi^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{N}_f(r, z) \cos n\theta \Phi^n + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{N}_f(r, z) \sin m\theta \Phi^m \quad (5.43)$$

où Φ^k représente le vecteur des potentiels nodaux élémentaires pour l'harmonique k du développement en série de Fourier (harmonique en cosinus ou sinus). La formulation faible du

problème, de type GALERKIN, conduit à une double infinité en plus d'un système matriciel. Chaque système correspondant à un harmonique n :

$$\mathbf{H}_f^n \Phi^n = \mathbf{G}^n \quad (5.44)$$

avec Φ^n , le vecteur des potentiels nodaux du domaine fluide complet, \mathbf{H}_f^n et \mathbf{G}^n matrices obtenues par assemblage des matrices \mathbf{h}_f^n et \mathbf{g}^n élémentaires telles que :

$$\begin{aligned} h_{ij}^n &= \pi \int_{\Omega_e} (N_{fi,r} N_{fj,r} + N_{fi,z} N_{fj,z}) r dr dz + \pi n^2 \int_{\Omega_e} N_{fi} N_{fj} \frac{1}{r} dr dz \quad \text{si } n > 0 \\ h_{ij}^0 &= 2\pi \int_{\Omega_e} (N_{fi,r} N_{fj,r} + N_{fi,z} N_{fj,z}) r dr dz \quad \text{si } n = 0 \\ g_i^n &= \int_{\Gamma_e \in \Gamma_{SF}} N_{fi} \cos n\theta (-\vec{v} \cdot \vec{n}) d\Gamma \quad \text{ou} \quad g_i^n = \int_{\Gamma_e \in \Gamma_{SF}} N_{fi} \sin n\theta (-\vec{v} \cdot \vec{n}) d\Gamma \end{aligned} \quad (5.45)$$

L'orthogonalité des fonctions trigonométriques conduit au découplage des différents systèmes. En effet, pour les cosinus :

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos p\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ 2\pi & \text{si } n = p = 0 \\ \pi & \text{si } n = p \neq 0 \end{cases} \quad (5.46)$$

pour les fonctions sinus :

$$\int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin q\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq q \\ \pi & \text{si } m = q \end{cases} \quad (5.47)$$

et pour les fonctions croisées :

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin q\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin p\theta d\theta = 0 \quad (5.48)$$

Pour ce problème particulier de vibrations de poutre, comme nous l'avons déjà indiqué précédemment, nous avons :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \dot{v} \cos \theta \quad (5.49)$$

donc de tous les seconds membres g^n , seul celui correspondant à l'harmonique $n = 1$ du développement en cosinus est non nul et le problème fluide se ramène à la résolution d'un seul système linéaire :

$$\mathbf{H}_f^1 \Phi^1 = \mathbf{G}^1 \quad (5.50)$$

avec le second membre qui s'obtient par assemblage de termes :

$$g_i^1 = \int_{\Gamma_e \in \Gamma_{SF}} N_{fi}|_{r=a} \cos \theta (-\dot{v} \cos \theta) d\Gamma \quad \Leftrightarrow \quad g_i^1 = \pi a \int_{z_1}^{z_m} N_{fi}|_{r=a} (-\dot{v}) dz \quad (5.51)$$

Les conditions affichées sur Γ_R sont les conditions $\Phi = 0$ ou $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$.

Compte tenu de la discrétisation en éléments finis poutre et en écrivant le système (5.50) en fonction des pressions nodales, on obtient :

$$\mathbf{H}_f^1 \mathbf{p} = \pi \rho_f a \mathbf{F} \mathbf{S} \ddot{\mathbf{a}} \quad (5.52)$$

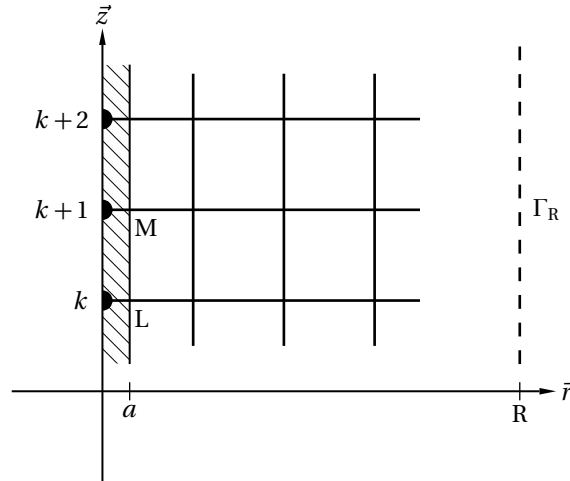


Figure 5.3 – maillage du domaine fluide

où la matrice \mathbf{FS} rassemble les matrices \mathbf{f}_e , telles que, si les maillages des discrétisations poutre et fluide coïncident, elles s'expriment par :

$$f_{ij}^k = \int_{z_k}^{z_{k+1}} N_{fi}|_{r=a} N_{sj} dz \quad (5.53)$$

Le calcul de la pression sur la surface latérale de la poutre et le calcul de la force généralisée associée conduit au système matriciel qui traduit le comportement de la poutre immergée :

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_s \mathbf{a} = -\pi a \mathbf{FS}^T \mathbf{p} \quad (5.54)$$

En éliminant les variables de pression (résolution du système (5.52) avec une matrice du système \mathbf{H}_r tenant compte des conditions de pression nulle sur la surface libre), on en déduit la matrice *masse ajoutée* :

$$\mathbf{M}_a = \pi^2 \rho_f a^2 \mathbf{FS}^T \mathbf{H}_r^{-1} \mathbf{FS} \quad (5.55)$$

En choisissant une discrétisation fluide en éléments quadrilatères à quatre nœuds (modèle linéaire), à cotés parallèles aux axes \vec{r} et \vec{z} , avec (r_0, z_0) , coordonnées du centre de l'élément et de cotés $(2a, 2b)$, l'interpolation du potentiel des vitesses est :

$$\Phi = \mathbf{N}_f^T \cos \theta \Phi_e \quad (5.56)$$

où les fonctions N_{fi} sont les fonctions linéaires. Dans ces conditions, la matrice élémentaire $\mathbf{h} = \pi(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, s'exprime par :

$$b_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{a^2} N_{i,\xi} N_{j,\xi} + \frac{1}{b^2} N_{i,\eta} N_{j,\eta} \right) (r_0 + a\xi) ab d\xi d\eta \quad (5.57)$$

soit :

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{r_0 ab}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{a^2}{6b} & b_{12} &= \frac{r_0 ab}{3} \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2} \right) \\ b_{13} &= -\frac{r_0 ab}{6} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) & b_{14} &= \frac{r_0 ab}{3} \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{b^2} \right) + \frac{a^2}{6b} \\ b_{22} &= \frac{r_0 ab}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{a^2}{6b} & b_{23} &= \frac{r_0 ab}{3} \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{b^2} \right) - \frac{a^2}{6b} \\ b_{24} &= b_{13} & b_{33} &= b_{22} & b_{34} &= b_{12} & b_{44} &= b_{11} \end{aligned}$$

et :

$$c_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i N_j \frac{ab}{r_0 + a\xi} d\xi d\eta \quad (5.59)$$

soit :

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{b}{6} \left(-4 - \frac{2r_0}{a} + \left(1 + \frac{r_0}{a}\right)^2 \ln \left(\frac{r_0 + a}{r_0 - a} \right) \right) \\ c_{12} &= \frac{b}{6} \left(\frac{2r_0}{a} + \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2}\right) \ln \left(\frac{r_0 + a}{r_0 - a} \right) \right) \\ c_{22} &= \frac{b}{6} \left(4 - \frac{2r_0}{a} + \left(1 - \frac{r_0}{a}\right)^2 \ln \left(\frac{r_0 + a}{r_0 - a} \right) \right) \\ c_{13} = c_{24} &= \frac{c_{12}}{2} = \frac{c_{34}}{2} \quad 2c_{23} = c_{22} = c_{33} \quad 2c_{14} = c_{11} = c_{44} \end{aligned}$$

et dans ces conditions, la matrice élémentaire \mathbf{f}_e de couplage entre un élément poutre e et un élément fluide rectangulaire tel que $2b = \ell_e$ s'écrit :

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \frac{7b}{10} & \frac{b^2}{5} & \frac{3b}{10} & -\frac{2b^2}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3b}{10} & \frac{2b^2}{15} & \frac{7b}{10} & -\frac{b^2}{5} \end{bmatrix} = \mathbf{sf}_e^T \quad (5.61)$$

5.3.2 Éléments finis – équations intégrales

La poutre est toujours discrétisée en éléments finis poutre à deux nœuds, le fluide étant quant à lui analysé par la méthode des équations intégrales. La fonction de GREEN pour les hypothèses retenues est $G(M,P) = 1/r$ en fluide incompressible.

La surface latérale mouillée de la poutre est discrétisée en facettes rectangulaires : Les ma-

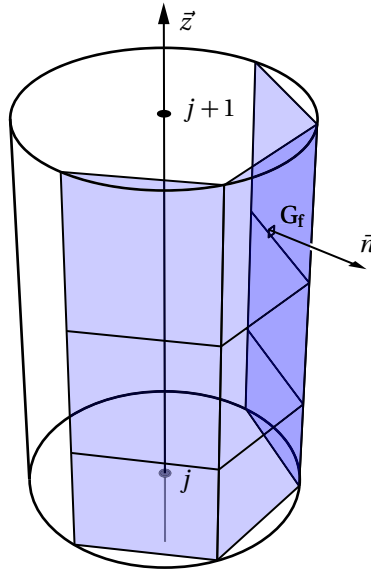


Figure 5.4 – couplage élément fini poutre – équations intégrales

trices des coefficients d'influence de doublets et de source sont calculées en appliquant la méthode de collocation décrite précédemment.

Le centre de gravité de chaque facette f est caractérisé par l'angle θ_f et l'abscisse locale s_f calculée à partir de l'origine z_j de l'élément fini j auquel la facette appartient. On construit donc la ligne f de la matrice de couplage \mathbf{FS} de l'équation (4.17) :

$$(V_n)_f = \left[(1 - 3s_f^2 + 2s_f^3), \ell_j(s_f - 2s_f^2 + s_f^3), (3s_f^2 - 2s_f^3), \ell_j(-s_f^2 + s_f^3) \right] \cos \theta_f \begin{pmatrix} v_j \\ \theta_j \\ v_{j+1} \\ \theta_{j+1} \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

et la résolution du problème couplé se fait conformément à la démarche présentée en section 4.2 : voir plus précisément l'équation (4.23).

Exemple 5.1 On considère une poutre de longueur $\ell = 30$ m d' hauteur d'immersion $h = 20$ m. On donne $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, $s = 7800$ kg/m³, $R_e = 1$ m, $R_e = 0,97$ m et $f = 1000$ kg/m³. En ⁽¹⁾, les

fréquences (Hz)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
poutre sèche	2,19	13,72	38,44	75,47	124,8	186,4	260,3	346,6
poutre immergée	1,89	9,43	25,56	53,9	87,7	132,4	191	255,5
couplage EF-EI ⁽¹⁾	1,88	9,43	26,46	53,9	88,1	132,3	191,7	258,7
couplage EF-EF ⁽²⁾	1,89	9,35	26,5	54,2	89,1	135,8	197,4	266,5

résultats sont obtenus avec quinze éléments finis poutre (dix éléments immergés), une facette par longueur d'élément fini et six facettes par circonférence soit soixante facettes sur la surface latérale de la poutre. Dans ⁽²⁾, les résultats sont obtenus avec quinze éléments finis poutre (dix éléments immergés), quatre-vingts éléments finis fluide (10 × 8), la frontière à l'infini est ramenée à la distance $R = 8$ m.

Références

- ❑ Beer G. et Watson J., *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers*, New York, Wiley & Sons, 1992.
- ❑ Bettess P., *Infinite Elements*, Penshaw Press, 1992.
- ❑ Bishop R. et Price W., *Hydoelasticity of ships*, Cambridge University Press, 1979.
- ❑ Bratu C., *Vibrations des grandes structures marines*, Paris, 1978, bulletin atma édition.
- ❑ Brebbia C. et Dominguez J., *Boundary Element - An Introduction Course*, New York, Mc Graw Hill, 1992, seconde édition.
- ❑ Delhommeau G., *Les problèmes de diffraction-radiation et de résistance de vagues : étude théorique et résolution numérique par la méthode des singularités*, ENSM Nantes, Thèse de doctorat, 1987.
- ❑ Delhommeau G., Peseux B. et Quevat J.P., Natural frequencies of immersed plates evaluated by mixed method finite element, boundary element, pp. 346 – 355, Swansea, 1981.
- ❑ Dhatt G. et Touzot G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Québec-S.A. Maloine, Les Presses de l'Université Laval, 1981, bulletin atma édition.
- ❑ Evertine G. et Henderson F., Coupled finite element/boundary element approach for fluid-structure interaction, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 87, n5, 1990, pp. 1938 – 1947.
- ❑ Hall W.S., *The Boundary Element Method*, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- ❑ Junger M. et Feit D., *Sound, structures, and their interaction*, MIT Cambridge, 1972.
- ❑ Lesueur C., *Rayonnement acoustique des structures, vibroacoustique, interaction fluide structure*, Paris, Eyrolles, 1988.
- ❑ Martin V. et Peseux B., Flowchart and software for numerical coupling of dynamic problems in elastic media, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, n22, 1994, pp. 4285 – 4308.
- ❑ Morand H. et Ohayon R., *Fluid-Structure Interaction : Applied Numerical Methods*, New York, John Wiley & Sons, 1995.
- ❑ Ohayon R. et Valid R., *True symmetric variational formulations for fluid structures interaction in bounded domains. Finite elements results. Numerical Method for Coupled Problems*, 1983, hinton, bettess, lewis édition.
- ❑ Oudin H., Peseux B. et Quevat J.P., Dynamic response of coupled problems, pp. 340 – 347, Venise, Italie, 1984.
- ❑ Peseux B., *Contribution à l'étude de structures partiellement ou totalement immergées en matériau homogène ou en composite*, Nantes, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de Mécanique, 1989.

- ❑ Peseux B. et Delhommeau G., Fluid/structure interaction : Influence of the compressibility on the dynamic response of immersed structures, *15th Intern. Aeroacoustique Conference - DGLR/AIAA*, Strasbourg, 1993.
- ❑ Peseux B. et Martin V., *Numerical Procedure for Fluid-Structure interaction : Interface elements. Computational Methods for fluid-structure interaction*, 1994, crolet/ohayon — longman higher education édition, 78 – 103p.
- ❑ Peseux B. et Quevat J.P., Linear fluid-structure interaction in unbounded domains, *ASME Pressure Vessels and Piping Conference*, pp. 185 – 188, Nouvelle Orléans, 1985.
- ❑ Sahi M., Ousset Y. et G.Verchery, Solution of radiation problems by collocation of integral formulation in terms of single and double layer, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 54, 1981, pp. 473 – 500.
- ❑ Susbielle G. et Bratu C.H., *Vagues et ouvrages pétroliers en mer*, Paris, 1981, technip édition, 78 – 103p.
- ❑ Zienkiewicz O. et Taylor R., *The Finite Element Method — Basic Formulations and Linear Problems*, London, McGraw-Hill, 1989, 4^e édition vol. I.
- ❑ Zienkiewicz O. et Taylor R., *The Finite Element Method — Solid and Fluid Mechanics : Dynamics and Non-Linearity*, London, McGraw-Hill, 1991, 4^e édition vol. II.
- ❑ Zienkiewicz O., Kelly D. et Bettess P., The coupling of the finite element method and boundary solution procedures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, 1977, pp. 355 – 375.
- ❑ Zienkiewicz O., Kelly D. et Bettess P., *Marriage à la mode — the Best of Both Worlds (Finite Elements and Boundary Integrals)*, chap. 5 of Energy Methods in Finite Element Analysis, pp. 81 – 107, London and New-York, Wiley, 1979.