Table des matières

1 Fibrations-Connexions **3**
1.1 fibration 3
1.2 Fibrations principales 7
1.3 Fibrés vectoriels 9
1.3.1 Définitions-Propriétés 9
1.3.2 Sections d'un fibré vectoriel 10
1.3.3 fibré dual 11
1.3.4 fibré produit tensoriel 12
1.3.5 fibré des p-formes 12
1.3.6 Repères mobiles 13
1.3.7 Fibré vectoriel réciproque 13
1.4 Connexions 14
1.4.1 Connexion induite 16
1.4.2 Courbure d'une connexion 18
1.4.3 Torsion 20

Chapitre 1

Fibrations-Connexions

Dans tout ce qui suit r désigne soit un entier naturel supérieur ou égal à 1 soit infini. Les variétés considérées sont supposées séparées.

1.1 fibration

Définition 1.1. *Un préfibré ou espace au dessus de la variété B de classe C^r, est un triplet (E, B, π) où E est une variété de classe C^r, π un morphisme de E dans B. La variété B est appelée base , E l'espace total et π le morphisme du préfibré.*

Définition 1.2. *Soient $\lambda_1 = (E_1, B_1, \pi_1)$ et $\lambda_2 = (E_2, B_2, \pi_2)$ deux préfibrés de classe C^r ; un morphisme de λ_1 dans λ_2 est un couple (f, g) tel que :*

i) f *est un morphisme de* E_1 *dans* E_2

ii) g *est un morphisme de* B_1 *dans* B_2

iii) $\pi_2 \circ f = g \circ \pi_1$

En d'autres termes on a le diagramme suivant qui commute :

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "g"'] & B_2 \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

On dit que le morphisme de préfibrés (f, g) est un isomorphisme si f et g sont bijectives et (f^{-1}, g^{-1}) est un morphisme du préfibré λ_2 dans le préfibré λ_1. Si $B_1 = B_2 = B$ et $g = Id_B$ et si (f, Id_B) est un morphisme, on dit que f est un $B-$morphisme.

Définition 1.3. *Une fibration ou un fibré de classe C^r est un préfibré $\lambda = (E, B, \pi)$ vérifiant la propriété suivante dite« propriété de trivialisation locale » :*

(PTL) Pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b dans B, une variété F et un isomorphisme φ du préfibré $(\pi^{-1}(U), U, \pi)$ sur le préfibré trivial $(U \times F, U, Pr_1)$.

Si $\lambda = (E, B, \pi)$ est une fibration, B est la base, E l'espace et π la projection de λ.

Proposition 1.1. *Si $\lambda = (E, B, \pi)$ est une fibration alors π est une submersion et par conséquent pour tout $b \in B$, $\pi^{-1}(b)$ est une sous-variété fermée de E ; elle est appelée la fibre de b.*

Démonstration

Soit $x \in E$ et $b = \pi(x) \in B$; la propriété (PTL) montre qu'il existe un voisinage ouvert U de b dans B, une variété F, un isomorphisme $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ tels que $\pi \circ \varphi = Pr_1$, ce qui traduit que π est une submersion. Le reste découle du théorème de submersion.

Si toutes les fibres de $\lambda = (E, B, \pi)$ sont isomorphismes à une même variété F, on dit que E est un espace fibré de fibre type F.

Exemples 1.

1. Si B et F sont des variétés de classe C^r alors la fibration $(B \times F, B, Pr_1)$ est dite fibration triviale indexfibration triviale.

   Par exemple si B est le cercle d'équation $x^2+y^2 = R^2$ et F est l'intervalle $]-a, a[$ avec $a > 0$ alors la fibration triviale de type F et de base B s'identifie au cylindre

   $$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad z \in]-a, a[\right\}.$$

2. Si $\lambda_1 = (E_1, B_1, \pi_1)$ et $\lambda_2 = (E_2, B_2, \pi_2)$ sont deux préfibrés (respectivement deux fibrés) de classe C^r alors

   $(E_1 \times E_2, B_1 \times B_2, \pi_1 \times \pi_2)$ est un préfibré (respectivement fibré)

3. Si M est une variété de classe C^r alors (TM, M, P) est un fibré où P est l'application « Pied ».

4. Si $\lambda_1 = (E_1, B, \pi_1)$ et $\lambda_2 = (E_2, B, \pi_2)$ sont deux préfibrés (respectivement deux fibrés) de classe C^r, de même base B, notons

   $$E_1 \times_B E_2 = \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2; \quad \pi_1(x_1) = \pi_2(x_2)\};$$

   si $E_1 \times_B E_2$ est une sous variété de $E_1 \times E_2$ (ce qui est le cas si λ_1 et λ_2 sont des fibrés) alors $(E_1 \times_B E_2, B, \pi_1 \times \pi_2)$ est un préfibré (respectivement une fibration).

Soit $\lambda = (E, B, \pi)$ un préfibré, B_1 une variété et g un morphisme de B_1 dans B.

On pose $E_1 = E \times_B B_1 = \{(x, b_1) \in E \times B_1; \quad \pi(x) = g(b_1)\}$, $\pi_1 = pr_{2/E_1}$ et $f = pr_{1/E_1}$ alors l'on a :

Proposition 1.2. *Si E_1 est une sous variété de $E \times B_1$ alors $\lambda_1 = (E_1, B_1, \pi_1)$ est un préfibré et (f, g) est un morphisme de préfibrés de λ_1 dans λ; le préfibré λ_1 est appelé l'image réciproque de λ par g.*

Démonstration

Si E_1 est une sous variété de $E \times B_1$ alors f est un morphisme de E_1 dans E, π_1 est un morphisme de E_1 dans B_1 et $g \circ \pi_1(x, b_1) = g(b_1) = \pi(x)$.

Proposition 1.3. *Soit $\lambda = (E, B, \pi)$ une fibration et g un morphisme d'une variété B_1 dans B ; avec les notations précédentes, $\lambda_1 = (E_1, B_1, \pi_1)$ est une fibration appelée fibration réciproque de λ par g. On la note $g^*(\lambda)$. De plus le couple (f, g) vérifie la propriété universelle suivante :*

Pour tout morphisme (h, g) d'une fibration $\lambda' = (E', B_1, \pi'_1)$ de base B_1 dans la fibration λ, il existe un unique B_1-morphisme $\overline{h}$ de λ' dans λ_1 tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} (E_1, B_1, \pi_1) \arrow[r, "(f,g)"] \arrow[d, "(\overline{h}, Id_{B_1})"'] & (E, B, \pi) \arrow[d, "(h,g)"] \\ (E', B_1, \pi') \arrow[r, "(id_{E'}, id_{B_1})"'] & (E', B_1, \pi') \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Démonstration Les propriétés étant locales et les fibrations étant localement triviales, l'on peut supposer que $\lambda = (U \times F, U, pr_1)$ et $g : V \longrightarrow U$ un morphisme. On a :

$$E_1 = \{((x, t), y); x \in U, t \in F, y \in V; \quad pr_1(x, t) = x = g(y)\} . \tag{1.3}$$

Donc E_1 s'identifie à $V \times F$. Ainsi $g^*(\lambda) = (V \times F, V, pr_1)$

Si (h, g) est un morphisme de (E', V, π') dans $(U \times F, U, pr_1)$ alors pour tout $x' \in E'$ l'on a : $\pi' \circ g(x') = pr_1 \circ h(x')$. En posant $\overline{h}(x') = (\pi'(x'), h(x'))$ on a : $h = f \circ \overline{h}$ et $\overline{h}$ est l'unique application répondant à la question.

Définition 1.4. *Une fibration $\lambda = (E, B, \pi)$ est dite trivialisable s'il existe une variété F et un isomorphisme g de λ sur le fibré trivial $\lambda' = (B \times F, B, pr_1)$. L'isomorphisme g est alors appelé une trivialisation de λ.*

Exemple 1.1.

Pour $0 < r < R$ fixés, considérons le ruban de Möbus S défini par la paramétrisation : $x = R + t\cos\theta\cos 2\theta, \quad y = R + t\cos\theta\sin 2\theta, \quad z = t\sin 2\theta$ pour $\quad (\theta, t) \in \mathbb{R}\times]-r, r[$ et l'application π de S dans le cercle qui à tout point (x, y, z) défini comme ci-dessus associe le point $(R\cos\theta, R\sin\theta)$. Ainsi S est une fibration qui n'est pas difféomorphe au cylindre $\mathbb{S}^1(\frac{1}{R})\times]-r, r[$ donc elle n'est trivialisable.

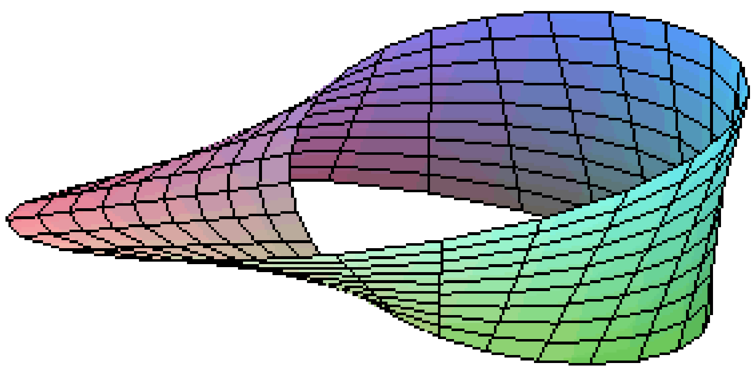


FIGURE 1.1 – Le ruban de möbius

Définition 1.5. *Si $\lambda = (E, B, \pi)$ est une fibration, on appelle section de λ tout morphisme s de B dans E tel que $\pi \circ s = Id_B$.*

Proposition 1.4. *Tout fibré trivialisable admet une section.*

Soit $\lambda = (E, B, \pi)$ est une fibration trivialisable ; il existe une variété F et un isomorphisme g de E sur $B \times F$. Soit $c \in F$; posons i_c l'application de B dans $B \times F$ définie par $i_c(b) = (b, c)$ alors $s = g^{-1} \circ i_c$ est une section de λ.

Remarque 1.1. *Une fibration peut admettre des sections sans être trivialisable.*

Par exemple pour tout t_0 fixé dans $[-r, r]$ et pour tout $(x = R\cos\theta, y = R\sin\theta)$ en posant

$$s_{t_0}(x, y) = (R + t_0\cos\theta\cos 2\theta, R + t_0\cos\theta\sin 2\theta, t_0\sin 2\theta)$$

on définit ainsi une section de la fibration du ruban de Möbius de base le cercle de rayon R et de fibre l'intervalle $[-r, r]$.

1.2 Fibrations principales

Soient B une variété et G un groupe de Lie.

Définition 1.6. *On appelle fibration principale de base B et de groupe structural G un quadruplet $\lambda = (P, B, G, \pi)$ où P est une variété sur laquelle G opère à droite par $(x, g) \mapsto x.g$ et où π est un morphisme de P dans B vérifiant :*

(P) Pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b et un isomorphisme

$$f : U \times G \to \pi^{-1}(U)$$

tels que l'on ait

$$\pi(f(u, g)) = u \text{ et } f(u, gg') = f(u, g).g' \quad \forall u \in U \text{ et } g, g' \in G. \tag{1.4}$$

Soit $\lambda = (P, B, G, \pi)$ un fibré principal et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence définie par : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $\pi(x) = \pi(y)$

Proposition 1.5. *La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ coincide avec celle définie par l'action de G sur P.*

En effet si $\pi(x) = \pi(y) = b$ alors la propriété (P) montre qu'il existe un unique couple $(b, g) \in U \times G$ tel que $f(b, g) = x$; de même il existe un unique $(b, g') \in U \times G$ tel que $f(b, g') = y$. Donc $y = f(b, g') = f(b, e)g' = xg^{-1}g'$.

Si $y = x.g$ et $\pi(y) = u$ alors la propriété (P) montre qu'il existe $g_1 \in G$ tel que $f(u, g_1) = y = x.g$ donc $x = f(u, g_1).g^{-1} = f(u, g_1.g^{-1}$ donc $\pi(x) = \pi \circ f(u, g_1 g^{-1}) = u = \pi(y)$. Le graphe de $\mathcal{R}$ est la sous variété $P \times_B P$ de $P \times P$. Elle est isomorphe à $P \times G$: l'application $(x, g) \mapsto (x, x.g)$ est un isomorphisme de $P \times G$ sur $P \times_B P$.

Définition 1.7. *On dit qu'un groupe G opère librement ou sans point fixe dans un ensemble E si le stabilisateur $G_x = \{g \in G; \quad x.g = x\}$ est réduit au singleton $\{e\}$. On dit que l'opération est propre si pour tous $x, y \in E$, $y \neq x$, il existe un voisinage ouvert U de x, un voisinage ouvert V de y tels que $g(U) \cap V = \emptyset$ pour tout $g \in G, \quad g \neq e$.*

Si $\lambda = (P, B, G, \pi)$ est un fibré principal alors le groupe G opère proprement et librement sur P. Pour tout $b \in B$, la fibre de b est isomorphe à G. Si $x \in P$ et si $b = \pi(x)$, l'application $g \mapsto x.g$ est un isomorphisme du groupe de Lie G sur la fibre de b.

Exemples 2.

1. Soit B une variété et soit G un groupe de Lie. Considérons sur la variété $B \times G$ l'opération de G sur $B \times G$ par $(b, g).g' = (b, g.g')$. Ainsi le quadruplet $(B \times G, B, G, pr_1)$ est un fibré principal appelé fibré trivial.
2. Soit B une variété de classe C^r avec $r \geq 1$ de dimension n ; soit $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i,)$ un atlas de B. Un repère r_b en b est la donnée d'un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur T_bB. On pose $R(B) = \cup Isom(\mathbb{R}^n, T_bB)$ est un fibré principal de groupe structural $Gl(n, \mathbb{R})$, l'opération étant donnée par $(r_b; g) \mapsto r_b \circ g$. Si $d_b\varphi$ est un isomorphisme de T_bB sur $\mathbb{R}^n$ alors $\phi_U(r_b) = (b, d_b\varphi \circ r_b)$ définit une trivialisation sur $R(U) = \cup_{b \in U} Isom(\mathbb{R}^n, T_bB)$.
3. On identifie la sphère $\mathbb{S}^3$ à l'ensemble
$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$
et $\mathbb{S}^1$ le sous-groupe des complexes λ de module 1. On fait agir $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{S}^3$ de la manière suivante : pour $\lambda \in \mathbb{S}^1$ et $(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3$ $\lambda.(z_1, z_2) = (\lambda z_1, \lambda z_2)$. Posons $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ définie par $\pi(z_1, z_2) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\overline{z}_2)$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z. On définit ainsi une fibration principale de groupe structural $\mathbb{S}^1$ appelée fibration de Hopf .

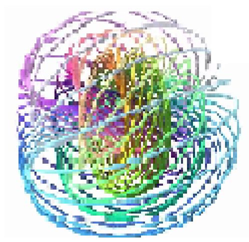


FIGURE 1.2 – Fibration de Hopf

Définition 1.8. *Soient $\lambda = (P, B, G, \pi)$ et $\lambda = (P', B', G', \pi')$ deux fibrés principaux. On appelle morphisme de λ dans λ' tout triplet (f, φ, h), où $f : P \to P'$ et $h : B \to B'$ sont des morphismes et $\varphi : G \to G'$ est un homomorphisme de groupe de Lie vérifiant : $\pi' \circ f = h \circ \pi$ et $f(x.g) = f(x).\varphi(g)$, pour tous $x \in P$ et $g \in G$.*

Si $B = B'$ et $h = Id_B$ un morphisme est appelé un B-morphisme compatible avec φ. Si par contre $G = G'$ et $\varphi = Id_B$, on dit qu'on a G-morphisme compatible avec h.

Un morphisme qui est à la fois un B-morphisme et un G-morphisme est appelé G-B- morphisme.

Proposition 1.6. *Tout G-B-morphisme est un isomorphisme de variétés.*

L'application f est injective. En effet si $f(x) = f(y)$ alors $\pi' \circ f(x) = \pi(x) = \pi(y)$ donc il existe $g \in G$ tel que $y = x.g$ et par conséquent $f(x) = f(y) = f(x.g) = f(x).g$ ce qui montre que $g = e$ et $y = x$.

f est surjective : soit $x' \in P'$. Posons $\pi(x') = b \in B$; il existe $x \in B$ tel que $\pi(x) = b = \pi' \circ f(x)$ d'où $\pi'(f(x)) = \pi(x) = \pi'(x')$. Donc il existe $g \in G$ tel que $x' = f(x).g = f(xg)$.

Proposition 1.7. *Un fibré principal admet une section si et seulement si il est trivialisable.*

Démonstration

Soit s une section du fibré λ; on pose, pour tout $b \in B$ et tout $g \in G$, $\phi^{-1}(b, g) = s(b).g$. Ainsi ϕ est une trivialisation. La réciproque est évidente.

1.3 Fibrés vectoriels

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.3.1 Définitions-Propriétés

Définition 1.9. *Soit $\lambda = (E, B, \pi)$ un fibré. On dit que λ est un fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-fibré vectoriel si, pour tout $b \in B$, la fibre $E_b = \pi^{-1}(b)$ est munie d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et qu'il existe un voisinage ouvert U de b dans B, un espace de Banach F et un difféomorphisme $\phi : U \times F \to \pi^{-1}(U)$ tel que :*

(1) $\pi \circ \phi = pr_1$ où $pr_1 : U \times F \to U$ désigne la première projection ;

(2) pour tout $q \in U$, l'application $\phi_q : F \to E_q$, est un $\mathbb{K}$-isomorphisme linéaire où $\phi_q(\xi) = \phi(q, \xi)$.

Le triplet (U, ϕ, F) est une carte vectorielle de λ. La dimension de F (finie ou non) est appelée rang de λ en b. On dit que λ est de rang fini s'il est de rang fini en tout point b.

Deux cartes vectorielles (U, ϕ, F) et (U', ϕ', F') de (E, B, π) sont dites C^r compatibles s'il existe une application θ de classe C^r de $U \cap U'$ dans $L(F, F')$, ensemble des applications linéaires continues de F dans F', telle que

$$\phi_b = \phi'_b \circ \theta(b) \quad \text{pour tout } b \in U \cap U'. \tag{1.5}$$

Un atlas vectoriel de classe C^r de E est un ensemble de cartes vectorielles de (E, B, π) deux à deux C^r-compatibles dont les domaines recouvrent B.

Si λ est un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel, nous dirons simplement que λ est un fibré vectoriel.

Si pour tout b, λ est de même rang fini k nous dirons que λ est de rang k.

On dit qu'un fibré vectoriel est orientable si et seulement s'il exsite un atlas vectoriel de classe $c^r(r \geq 1)$ tel que les restrictions à chaque fibre des automorphismes de transition soient de déterminants strictement positifs.

Exemples 3.

1. Soit le fibré trivial $(B \times \mathbb{R}^n, Pr_1) \longrightarrow B$; les fibres sont de la forme $\{p\} \times \mathbb{R}^n$. On a :

$$(p, x) + (p, y) = (p, x + y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

$$\alpha.(p, x) = (p, \alpha.x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \tag{1.7}$$

2. soit B une variété de classe C^r ; alors $(T(B), B, P)$ est un fibré vectoriel.

Définition 1.10. *Soient (E, B, π) et (E', B', π') deux fibrés vectoriels. On dit qu'un couple de morphismes (f, g) est un morphisme de fibrés vectoriels si $\pi' \circ f = g \circ \pi$ et $f_p = f/E_p : E_p \to E'_{g(p)}$ est linéaire, pour tout $p \in B$.*

Si $B = B'$ alors une application $f : E \longrightarrow E'$ est un morphisme si (f, Id) est un morphisme de fibrés vectoriels. On dit que f est un isomorphisme si f^{-1} existe et f et f^{-1} sont des morphismes.

Exemple 1.2. *Soient M et M' deux variétés de classe C^r $(r \geq 2)$ et f une application de classe C^r de M dans M'; alors (f, Tf) est un morphisme de classe C^{r-1} du fibré (TM, M) dans le fibré (TM', M')*

Proposition 1.8. *Soient $\lambda = (E, B, \pi)$ et $\lambda' = (E', B', \pi')$ deux fibrés vectoriels et (f, g) un morphisme de λ dans λ'. Pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b dans B, un voisinage ouvert U' de $b' = g(b)$ dans B' tels que $g(U) \subset U'$, deux espaces de Banach E et E' et des isomorphismes ϕ et ϕ' de $\pi^{-1}(U) \to U \times E$ et $\pi'^{-1}(U') \to U' \times E'$ respectivement . On a :*

$$l(x) = pr_2 \circ \phi'_{U'} \circ f_x \circ \phi_U^{-1} \circ i_x \in L(E, E') \tag{1.8}$$

1.3.2 Sections d'un fibré vectoriel

Définition 1.11. *Soit $\lambda = (E, B, \pi)$ un fibré vectoriel. Une section de λ est un morphisme $s : B \to E$ tel que $\pi \circ s = Id_B$.*

On note $\Gamma(B,E)$ l'ensemble des sections du fibré vectoriel (E,B,π). S'il n'y a pas d'ambiguité sur l'espace B, on écrit $\Gamma(B,E)=\Gamma(E)$. Si $\mathcal{C}^r(B)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^r de B dans le corps $\mathbb{K}$ alors $\mathcal{C}^r(B)$ un module sur $\Gamma(E)$.

Exemple 1.3. *Si $s_0 : B \to E$ est l'application qui à chaque point $b \in B$ associe le vecteur 0 de l'espace E_b , alors s_0 est une section. En effet comme $s_0(x) \in E_x$, on a bien que $\pi \circ s_0 = Id_B$. Montrons maintenant que s_0 est continue. Soit $x_0 \in B$ et V un voisinage ouvert trivialisant de b . On a le diagramme commutatif suivant :*

Proposition 1.9. *Soit $\lambda = (E,B,\pi)$ un fibré vectoriel de dimension finie alors pour tout point $x \in E$, il existe une section s de E telle que $s(\pi(x) = x$.*

Démonstration

Soit x_0 un point de E ; il existe une trivialisation locale au point x_0 ce qui veut dire qu'il existe un ouvert U de B contenant $b=\pi(x_0)$, un isomorphisme ϕ de $U \times K^k$ dans $\pi^{-1}(U)$ telle que $\pi \circ \phi = pr_1$. Posons $c = pr_2(\phi(x_0))$; l'application $b \longrightarrow \phi(b,c)$ est une section au dessus de U. Il existe un ouvert V relativement compact $V \subset \overline{V} \subset U$, une fonction plateau f tels que $f_{|V} = 1$ et $suppf \subset U$. Posons $\sigma(b) = f(b)s(b)$ si $b \in U$ et $\sigma(b) = 0$ si $b \notin U$. Comme $B \backslash \overline{V}$ et U sont deux ouverts qui recrouvrent B et que $\sigma = fs$ sur l'intersection, σ est alors une section de E définie sur B.

Remarque 1.2. *L'exemple ci-dessus montre qu'un fibré vectoriel admet toujours une section (section nulle), ce qui n'est pas le cas des fibrés principaux.*

1.3.3 fibré dual

Soit (E,B,π) un fibré vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ de rang k. Pour tout $b \in B$, E_b est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension k. Soit E_b^* le dual de E_b ; $E_b^* = Hom_{\mathbb{K}}(E_p, \mathbb{K})$ des $\mathbb{K}$-formes linéaires sur E_p.

Pour toute trivialisation locale $\phi : U \times \mathbb{K}^k \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ de E en un point b, posons

$$\tilde{\phi}_b : \mathbb{K}^k \cong (\mathbb{K}^k)^* \longrightarrow E_p^* \qquad \text{par } \tilde{\phi}_b(\varphi) = \varphi \circ \phi_b^{-1} \tag{1.9}$$

En posant $E^* = \cup_{b\in B} E_b$ et $\pi^* : E^* \longrightarrow B$ alors E^* devient un fibré vectoriel dont les bijections $\tilde{\phi}$ sont des trivialisations locales. (E^*, B, π^*) est appelé fibré dual du fibré (E,B,π). Une section de E^* est appelée une 1-forme à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1.3.4 fibré produit tensoriel

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Un tenseur k-covariant sur V est une application k-linéaire

$$F : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{k fois} \to \mathbb{K}. \tag{1.10}$$

De même , un tenseur l-contravariant est une application l-linéaire

$$G : \underbrace{V^* \times V^* \times \ldots \times V^*}_{l fois} \to \mathbb{K}. \tag{1.11}$$

Notons $T^k(V)$ l'espace des tenseurs k-covariant sur V et $T_l(V)$ l'espace des tenseurs l-contravariant sur V.

Une application multilinéaire

$$F : \underbrace{V^* \times V^* \times \ldots \times V^*}_{l fois} \times \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{k fois} \to \mathbb{K} \tag{1.12}$$

est dit tenseur de type (l, k) ou l-contravariant et k-covariant. Notons $T_l^k(V)$ l'espace des tenseurs k-covariant et l-contravariant sur V.

Proposition 1.10. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Alors il existe un isomorphisme naturel entre l'espace des applications multilinéaires de*

$$\underbrace{V^* \times V^* \times \ldots \times V^*}_{l fois} \times \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{k fois} \to V \text{ et } T_{l+1}^k(V).$$

Soit E un fibré vectoriel de base B. Posons

$$T_l^k(E) = \amalg_{b \in B} T_l^k E_b \tag{1.13}$$

$T_l^k(E)$ est un fibré vectoriel appelé fibré des tenseurs sur E.

1.3.5 fibré des p-formes

Soient (E, B, π) et (E', B, π') deux $\mathbb{K}$-fibrés vectoriels de dimensions finies de base B. Pour tout $b \in B$, notons $\bigwedge^p(E_b, E'_b)$ l'ensemble des applications p-linéaires alternées de $\underbrace{E_b \times E_b \times \ldots \times E_b}_{p fois}$ dans E'_b. Posons $\bigwedge^p(E, E') = \bigcup_{b \in B}(\bigwedge^p(E_b, E'_b))$. Alors $\bigwedge^p(E, E')$ est un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel de base B, de fibres $\bigwedge^p(E_b, E'_b)$. En particulier si $E = TB$ les sections de $\bigwedge^p(TB, E')$ sont appelées p-formes à valeurs dans E'. Si $E' = \mathbb{K}$ et $E = TB$ alors les sections $\bigwedge^p(TB, \mathbb{K}) \equiv \bigwedge^p TB^*$ sont appelées des p-formes différentielles (extérieures) sur B.

1.3.6 Repères mobiles

Définition 1.12. *Soit (E, B, π) un fibré vectoriel de rang k et U un ouvert de B. On appelle repère (mobile) de E au dessus de U un k-uplet $(s_1, s_2, \dots, s_k)$ de sections de E sur U telles que, pour tout $b \in U$, $(s_1(b), s_2(b), \dots, s_k(b))$ soit une base de la fibre E_p.*

On dit que E admet un repère local en un point b s'il existe un ouvert U de B contenant b et un repère mobile de E au dessus de U.

Proposition 1.11. *Soit (E, B, π) un fibré vectoriel de rang k sur un corps $\mathbb{K}$.*
Soit $(s_1, s_2, \dots, s_k)$ un repère mobile de E au dessus d'un ouvert U. Alors l'application

$$\phi : U \times \mathbb{K}^k \longrightarrow \pi^{-1}(U), \qquad \phi(b, \xi) = \sum_{i=1}^{k} \xi^i s_i(b), \quad \xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^k) \tag{1.14}$$

est une trivialisation locale. Inversement, si $\phi : U \times \mathbb{K}^k \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ est une trivialisation locale et si $e_1, e_2, \dots, e_k$ est la base canonique de $\mathbb{K}^k$ alors le k-uplet $s_i = \phi(., e_i), \quad 1 \le i \le k$ est un repère mobile au dessus U

Démonstration

Pour tout $b \in U$, l'application ϕ_b est un isomorphisme de $\mathbb{K}^k$ sur E_b, donc ϕ est bijective. Soit V un voisinage ouvert de b tel qu'il existe une trivialisation locale $\psi : V \times \mathbb{K}^k \longrightarrow \pi^{-1}(V)$; on peut supposer que $V \subset U$. On a :

$$\psi^{-1} \circ \phi(b, \xi) = (b, \psi_b^{-1} \circ \phi_b(\xi)). \tag{1.15}$$

Alors $\psi^{-1} \circ \phi : V \times \mathbb{K}^k \longrightarrow V \times \mathbb{K}^k$ est un difféomorphime, donc ϕ est un difféomorphisme local bijectif donc est un difféomorphisme. La réciproque est triviale.

La proposition précédente montre qu'un fibré vectoriel n'admet de repère mobile (global) que si et seulement s'il est trivialisable.

1.3.7 Fibré vectoriel réciproque

Soit (E, B, π) un fibré vectoriel de base B et $f : N \to B$ une application de classe C^r. Pour tout $p \in N$ posons

$$(f^*E)_p = \{(p, x) \in N \times E, x \in E_{f(p)}\} \tag{1.16}$$

et $f^*E = \cup (f^*E)_p$. On a : $f^*E \subset N \times E$; on prend pour projection la restriction de Pr_1 sur f^*E. Une application $s : N \to f^*E$ est une section de $f^*(E)$ si et seulement s'il existe une application $\sigma : N \to E$ vérifiant $\pi \circ \sigma = f$ et

$s(p) = (p, \sigma(p))$, pour tout $p \in N$. L'application σ vérifiant $\pi \circ \sigma = f$ est appelée section de E le long de f.

`Cas particulier` : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $c : I \to M$ une courbe tracée sur M ; alors $\dot{c} : I \to TM$ est une section le long de c.

1.4 Connexions

a) Considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$; pour tout point $x \in \mathbb{R}^n$, l'espace tangent $T_x\mathbb{R}^n$ n'est rien d'autre que l'ensemble des vecteurs d'origine x. Si y est un autre point de $\mathbb{R}^n$ alors à tout vecteur tangent v d'origine x (on écrit souvent (x, v) ou $x + v$) on peut associer un vecteur tangent w d'origine y de sorte que v et w soient équipollents. Ainsi on définit un isomorphisme de $T_x\mathbb{R}^n$ sur $T_y\mathbb{R}^n$.

   Une section du fibré $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ est une application qui à tout point x de $\mathbb{R}^n$ associe un vecteur v d'origine x. Ainsi une section peut être considérée comme étant une application de classe C^r $(r \geq 1)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ définie par $s(x) = (x, f(x)) \equiv f(x)$. La dérivée directionnelle de s suivant un vecteur u est alors $df(x)(u)$.

b) Considérons le fibré trivial $M \times F$ de type F et de base M ; pour tous points x et y de M, on définit un difféomorphisme τ_{xy} de la fibre $\pi^{-1}(x)$ sur $\pi^{-1}(y)$ qui à tout point (x, v) associe (y, v). Une section peut être identifiée à une application de M dans F et par conséquent sa dérivée directionnelle suivant un vecteur X est :

$$\nabla_u s(x) = \frac{d}{dt} s(\gamma(t))|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{s(\gamma(t)) - s(\gamma(0))}{t}.$$

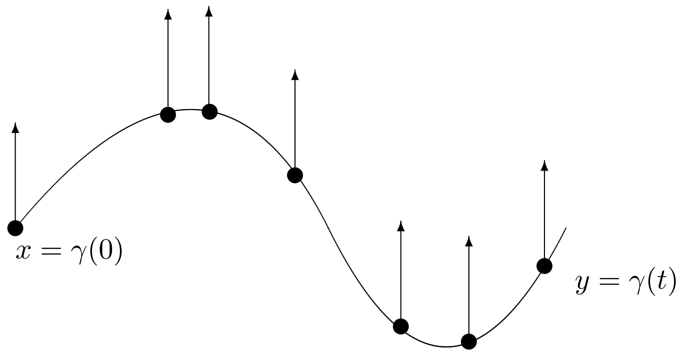
c) Si par contre E est un fibré non trivial, la relation ci-dessus n'est pas évidente ; en effet soit γ une courbe tracée sur B alors $s(\gamma(t))$ et $s(\gamma(0))$ sont dans deux fibres distinctes donc ne peuvent être additionnés. Si nous avons une manière d'identifier les fibres $E_{\gamma(t)}$ et $E_{\gamma(0)}$ alors nous pourrions évaluer $s(\gamma(t)) - s(\gamma(0))$.

   Si u est un vecteur tangent à B en x et γ est une courbe tracée sur B telle que $\gamma(0) = x$, on définit une suite finie d'ouverts $U_i \subset B (0 \leq i \leq k)$ telle que $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ et $\gamma[0, t] \subset \cup_{i=0}^{k} U_i$ et chaque U_i est un ouvert trivialisant . On construit une suite finie de points x_i telle que $x_0 = x$ et pour $1 \leq i \leq k - 1$, $x_i \in U_i \cap U_{i+1}$ et $x_k = y$. D'après b) on définit un difféomorphisme $\tau_{x_i x_i+1}$ de la fibre $\pi^{-1}(x_i)$ sur la fibre $\pi^{-1}(x_{i+1})$ et par suite un difféomorphisme τ_t de la fibre $\pi^{-1}(x)$ sur la fibre $\pi^{-1}(y.)$ Ce difféomorphisme est appelé transport parallèle le long de la courbe γ.

Si s est une section de E, on pose

$$\nabla_u s(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\tau_t^{-1} s(\gamma(t)) - s(\gamma(0))}{t}.$$

On définit sur l'ensemble $\chi(B) \times \Gamma(E)$ une opération notée ∇ par : $\nabla(X, s) = \nabla_X s$ telle que $\nabla_X s(x) = \nabla_{X(x)} s(x)$.



Transport parallèle.

Pour la suite (E, B, π) désigne un fibré vectoriel de rang fini sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.13. *Une connexion ou dérivation covariante sur E est une application $\nabla : \chi(B) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ vérifiant pour tous $f \in \mathcal{C}^r(B), X, Y \in \chi(B), s, s' \in \Gamma(E)$(notons $\nabla(X, s) = \nabla_X s$) :*

1. $\nabla_{X+Y} s = \nabla_X s + \nabla_Y s$
2. $\nabla_{fX} s = f \nabla_X s$
3. $\nabla_X fs = (X.f)s + f \nabla_X s$
4. $\nabla_X (s + s') = \nabla_X s + \nabla_X s'$

Pour un champ de vecteurs X sur la variété de base B et une section s de E la section $\nabla_X s$ est appelée la dérivée covariante de s suivant le champ X.

Proposition 1.12. *Si ∇ est une connexion sur un fibré E et ω est une $1-$forme à valeurs dans $Hom(E, E)$ alors ∇^N définie par :*

$$\nabla^N_X s = \nabla_X s + \omega(X).s \tag{1.17}$$

est une connexion sur E. Inversement si ∇ et ∇^N sont des connexions sur E alors $\omega(X)s = \nabla^N_X s - \nabla_X s$ définit une 1-forme à valeurs dans $Hom(E, E)$.

Exemples 4.

1. Posons $E = M \times \mathbb{R}^k$ un fibré vectoriel de rang k. Une section de E est une application de la forme $s(p) = (p, \sigma(p))$ où σ est une application de M dans $\mathbb{R}^k$; $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$. Posons $(\nabla_X s)(p) = (p, (X_p.\sigma)) = (p, d_p\sigma(X(p)))$ On montre facilement que ∇ est une connexion ; elle est appelée connexion triviale sur E.
2. Prenons toujours $E = M \times \mathbb{R}^k$. D'après la proposition 1.12 il existe une 1-forme ω sur M à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre k à coefficients réels. Ainsi $\omega = (\omega_i^j)$ est une matrice avec ω_i^j est une 1-forme sur M à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit s une section de E ; $s = (Id, \sigma)$. On pose $(\nabla_X s)(x) = (x, X(x).\sigma + \omega_x(X_x)(\sigma(x)))$.

Proposition 1.13. *Soit (E, B, π) un fibré vectoriel et ∇ une connexion sur E. Soit b un point de B et s_1 et s_2 deux sections du fibré E qui coincident dans un voisinage ouvert de b ; alors pour tout champ de vecteurs X sur B on a : $(\nabla_X s_1)(b) = (\nabla_X s_2)(b)$.*

Démonstration

Soit f une fonction définie sur B à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $suppf \subset U$ et $f = 1$ sur un ouvert $V \subset U$ contenant b. Alors $f.s_1 = f.s_2$ sur B. Donc $(\nabla_X(f.s_1)) = (\nabla_X(f.s_2))$.

Or

$$(\nabla_X(fs_i)) = (X.f)s_i + f.\nabla_X s_i = f.\nabla_X s_i \tag{1.18}$$

donc au point b on a : $(\nabla_X(f.s_i)(b) = f(p)\nabla_X s_i(p) = \nabla_X s_i$ d'où la conclusion.

1.4.1 Connexion induite

1. Soit U un ouvert de B et b un point de B. La proposition ci-dessus montre que, pour tout champ de vecteurs X sur U et toute section s de E au dessus de U, il existe un champ de vecteurs X' sur B et une section s' de E au dessus de B tels que $X = X'$ et $s = s'$ dans un voisinage ouvert V de b contenu dans U. En posant
$$\nabla_X^U s(b) = \nabla_{X'} s'(b), \tag{1.19}$$
on définit une connexion ∇^U sur le fibré $\pi^{-1}(U)$ appelée connexion induite sur ce fibré. Elle est la restriction de ∇ sur U.
2. Soit (E, B, π) un fibré vectoriel muni d'une connexion ∇ alors ∇ induit sur le fibré dual (E^*, B, π) une connexion ∇^* définie par :
$$(\nabla_X^*\omega)(s) = X.(\omega(s)) - \omega(\nabla_X s) \tag{1.20}$$

où ω est une section de E^*,s une section de E et X un champ de vecteurs sur B

3. Si E_1 et E_2 sont deux fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$ de base B, on note $E = E_1 \oplus E_2 \equiv E_1 \times E_2$ la somme de ces deux fibrés vectoriels. Si ∇^1 et ∇^2 sont des connexions sur E_1 et E_2 respectivement alors on définit une connexion ∇ sur E. Si s_1 et s_2 sont des sections de E_1 et de E_2 respectivement , pour tout champ de vecteurs X sur B
$$\nabla_X(s_1 + s_2) = \nabla^1_X s_1 + \nabla^2_X s_2. \tag{1.21}$$
4. Si E_1 et E_2 sont deux fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$ de base B et ∇^1 et ∇^2 sont des connexions sur E_1 et E_2 respectivement alors, pour tout $p \geq 0$, on définit sur $\wedge^p(E, E')$ une connexion par :
$$(\nabla_X T)(s_1, \ldots, s_p) = \nabla^2_X(T(s_1, \ldots, s_p)) - \sum_{i=1}^{p} T(s_1, \ldots, \nabla^1_X s_i, \ldots, s_p). \tag{1.22}$$
5. En particulier si $E_1 = TB$ et $E_2 = E$ est un fibré vectoriel de base B alors on définit sur l'ensemble $\Gamma \wedge^p (TB, E)$ des p-formes alternées à valeurs dans E, une dérivation d appelée **dérivation extérieure covariante**
$$d : \Gamma(\wedge^p(TB, E)) \to \Gamma(\wedge^{p+1}(TB, E)) \tag{1.23}$$
par :
$$dT(X_0, X_1, \ldots, X_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \nabla_{X_i} \left(T(X_0, X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_p) \right) \tag{1.24}$$
$$+ \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} T([X_i, X_j], X_0, X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_p) \tag{1.25}$$
où $\hat{X}$ signifie X omis.
6. Soit (E, B, π) un fibré vectoriel de base B, ∇ une connexion sur E et $f : N \to B$ une application de classe C^r. Soit f^*E le fibré réciproque de E par f. Il existe une connexion notée $f^*\nabla$ compatible avec P qui est la restriction sur $f^*E \subset N \times E$ de la deuxième projection. Soit $\phi = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ un repère mobile de E au dessus d'un ouvert U. On a : $\pi^{-1}(U) \equiv U \times \mathbb{K}^k$; d'après l'exemple 4-2 , il existe une 1-forme $\omega = (\omega_i^j)$ sur U à valeurs dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ appelée forme de connexion de ∇. Soit S une section de f^*E au dessus de $V = f^{-1}(U)$ alors $S = (Id, \sigma)$ avec $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^k)$ alors $\phi \circ f = (s_1 \circ f, s_2 \circ f, \ldots, s_k \circ f)$ est un repère mobile sur V. On a : $S = \sum \sigma^i.(s_i \circ f)$.

On pose $\nabla^f_X S = \sum_j (X(\sigma^j) + \sum_i \omega_i^j (f_* X).\sigma^i).(s_j \circ f)$.

Donc **la forme de connexion de** f^*E **est** $f^*\omega$.

Pour toute section s de E, $S = s \circ f$ est une section de E le long de f. Pour tout $q \in N$ et tout $v \in T_q N$ on a : $\nabla^f (s \circ f)(v) = (\nabla s)(f_*(v))$ où $f_*(v) = T_q f(v)$.

Cas particulier

Si N est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f = c$ est un chemin tracé sur M on a : $\nabla^c_t S = \nabla(\partial_t)$.

On dit qu'une section S le long d'un chemin c est un transport parallèle si $\nabla_t S = 0$.

1.4.2 Courbure d'une connexion

Soit (E, B, π) un fibré vectoriel muni d'une connexion ∇.

Définition 1.14. *On appelle tenseur de courbure de la connexion* ∇ *l'application*

$$\begin{aligned} R :\ & \chi(B) \times \chi(B) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E) \\ & R(X,Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s \end{aligned} \tag{1.26}$$

Proposition 1.14. *Le tenseur de courbure* R *est tensoriel en* X,Y *et* s *et antisymétrique en* X *et* Y.

Démonstration

L'antisymétrie de R par rapport à X et Y découle de celle du crochet de Lie et de la définition de R. L'additivité par rapport à X, Y et s découle de l'additivité de la dérivation covariante. Reste à montrer l'homogénéité sur l'ensemble $C^r(B)$ des fonctions de B dans $\mathbb{K}$, de classe C^r. Soit $f \in C^r(B)$ on a :

$$\nabla_X \nabla_Y (fs) = \nabla_X((Y.f)s) + \nabla_X(f.\nabla_Y s) \tag{1.27}$$

$$= X.(Y.f)s + (Y.f)\nabla_X s + (X.f)\nabla_Y s + f\nabla_X \nabla_Y s$$

On calcule de même manière $\nabla_Y \nabla_X (fs)$.

On a : $\nabla_{[X,Y]}(fs) = ([X,Y].f)s + f\nabla_{[X,Y]}s$.

En utilisant le fait que $X.(Y.f) - Y.(X.f) = [X,Y].f$ on a :

$$R(X,Y)fs = fR(X,Y)s.$$

L'homogénéité sur $C^r(B)$ en X et Y se vérifie aisément.

Remarque 1.3. *Si* X *et* Y *sont deux champs de vecteurs fixés, alors* $R(X,Y)$ *est une section de* $Hom_{\mathbb{K}}(E,E)$ *donc* R *peut être vu comme une* 2*-forme à valeurs dans* $Hom_{\mathbb{K}}(E,E)$. *Si* $E = TB$ *alors* R *est de type* $(1,2)$.

Le tenseur R induit sur $T_bB \times T_bB \times E_b$ une application 3-linéaire notée R_b ou tout simplement R défini par : $R_b(h,k)x = [R(X,Y)s](b)$ si $X(b) = h; Y(b) = k$ et $s(b) = x$. L'application R_b est appelée opérateur de courbure de ∇ au point b.

Soit $\Phi = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ un repère mobile de E au dessus d'un ouvert U et ω la forme de connexion associée à ∇ et d la dérivation extérieure covariante.

On a $d\omega(X,Y) = X.(\omega(Y)) - Y.(\omega(X)) - \omega([X,Y])$

Proposition 1.15. *Si S est une section de E au dessus de U ; alors la partie principale de $R(X,Y)S$ relativement au repère Φ est*

$$(d\omega(X,Y) + [\omega(X), \omega(Y)]) . \sigma \tag{1.28}$$

où $[\omega(X), \omega(Y)] = \omega(X)\omega(Y) - \omega(Y)\omega(X)$

Démonstration

On a : $\nabla_Y S$ a pour partie principale $Y.\sigma + \omega(Y).\sigma$ donc $\nabla_X \nabla_Y S$ a pour partie principale

$$X. (Y.\sigma + \omega(Y).\sigma) + \omega(X). (Y.\sigma + \omega(Y).\sigma)$$

$$= XY.\sigma + X.(\omega(Y)).\sigma + \omega(Y).(X.\sigma) + \omega(X).Y.\sigma + \omega(X).\omega(Y).\sigma \tag{1.29}$$

On calcule de même la partie principale de $\nabla_Y \nabla_X S$.

La partie principale de $\nabla_{[X,Y]} S$ est

$$[X,Y].\sigma + \omega([X,Y])\sigma = X.Y.\sigma - Y.X.\sigma + \omega([X,Y]).\sigma \tag{1.30}$$

D'où la conclusion.

Posons $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$. Alors, Ω est appelée **forme de courbure** de la connexion ∇ relativement au repère mobile Φ sur U.

Proposition 1.16. *On a :*

$$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega \qquad \textit{(Identité de Bianchi)} \tag{1.31}$$

Preuve

$d\Omega = d^2\omega + d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega = d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega = \Omega \wedge \omega - (\omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge \Omega + \omega \wedge (\omega \wedge \omega)$.

La conclusion découle du fait que $(\omega \wedge \omega) \wedge \omega = \omega \wedge (\omega \wedge \omega)$.

1.4.3 Torsion

Considérons le fibré tangent TM d'une variété M et ∇ une connexion sur M

Définition 1.15. *On appelle torsion de la connexion le tenseur T défini de $\chi(M) \times \chi(M)$ dans $\chi(M)$ par :*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]. \tag{1.32}$$

On dit que ∇ est sans torsion si T est identiquement nulle.

Propriétés 1.1. *Le tenseur T est tensoriel ; pour tout $f \in C(M)$ et pour tous champs de vecteurs X et Y sur M on a :*

$$T(X,Y) = -T(Y,X), \quad T(fX,Y) = fT(X,Y)$$

Preuve
Triviale