DEUG MASS 2ème année — Université de Paris 1

Travaux dirigés d'Analyse Algèbre 4 — 2001-2002

**TD semaine 1**

**Exercice 1** On considère les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^4$ :

$$q_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2$$

$$q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3 + (x_4)^2$$

$$q_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 - x_3x_4$$

$$q_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1)^2 - 5x_2x_3 + (x_4)^2.$$

Donner les formes bilinéaires symétriques dont sont dérivées ces formes quadratiques ainsi que leur écriture matricielle.

**Exercice 2** Montrer que les applications suivantes sont des formes bilinéaires symétriques sur $E$ et déterminer leurs formes quadratiques associées.

1) $E = \mathbb{R}[X]$, $\quad \varphi(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(1) + P(1)Q(0)$.

2) $E = C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\quad \varphi(f, g) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0)g^{(k)}(0)$.

**Exercice 3** Soit $f_1$ et $f_2$ deux formes linéaires sur $E$, espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{R}$. On considère l'application $q$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$q(u) = f_1(u)f_2(u)$, pour tout $u \in E$.

1) Montrer que $q$ est une forme quadratique sur $E$ et donner la forme bilinéaire symétrique dont elle est dérivée.

2) On suppose que ici que $n = 3$ et que :

$$f_1(u) = u_1 - 2u_2$$

$$f_2(u) = 2u_1 + u_2.$$

Montrer que $f_1$ et $f_2$ sont indépendantes, et qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que pour tout $u \in E$, $q(u) = x_1x_2$ où $x_1$ et $x_2$ sont les deux premières composantes de $u$ dans la base $\mathcal{B}$. Ecrire le changement de base et vérifier la formule du changement de base.

**Exercice 4 (extrait de l'interrogation 1 d'avril 1999)** Soit $A$ une matrice réelle carrée de taille $n$ telle que ${}^tA = -A$ où ${}^tA$ désigne la matrice transposée de $A$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soit $f$ la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A$ : si le vecteur $u$, (respectivement $v$) est représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice colonne $X$ (respectivement $Y$) , on a :

$$f(u, v) = {}^tXAY.$$

1) Montrer que pour tout couple $(u, v)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on $f(u, v) = -f(v, u)$.

2) Montrer que pour tout vecteur de $\mathbb{R}^n$, $u$, on a $f(u, u) = 0$.

3) En déduire que $A$ ne possède aucune valeur propre réelle non nulle.

4) En déduire que si $A$ est non nulle, alors $A$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

**TD semaine 2**

**Exercice 1** Soit $\varphi$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $E$ de dimension finie. Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces de $E$. Montrer que $(F+G)^{\perp_\varphi} = F^{\perp_\varphi} \cap G^{\perp_\varphi}$ et $(F \cap G)^{\perp_\varphi} = F^{\perp_\varphi} + G^{\perp_\varphi}$.

**Exercice 2** Soit $\varphi$ une forme bilinéaire symétrique sur $E$ et soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ $p$ vecteurs de $E$ non isotropes et deux à deux orthogonaux. Montrer qu'ils forment un système libre de $E$. Montrer sur un exemple que le résultat est faux si on ne suppose pas que les vecteurs sont non isotropes.

**Exercice 3** Pour les formes quadratiques de l'exercice 1 du TD 7, calculez le noyau et le rang. Calculez le $q_1-$orthogonal du vecteur $u = (1, 1, 1, 0)$.

**Exercice 4** Soit $E$, un espace vectoriel de dimension $n$ et soit $(e_1, \ldots, e_n)$, une base de $E$. Soit $\varphi$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $E$ et soit $g$ une forme linéaire sur $E$.
1) On considère l'application $\psi$ de $E$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :
pour tout $u \in E$, $\psi(u) = (\varphi(u, e_1), \ldots, \varphi(u, e_n))$.
Montrer que $\psi$ est une application linéaire bijective de $E$ dans $\mathbb{R}^n$.
2) Montrer qu'il existe un unique $u \in E$ tel que $\psi(u) = (g(e_1), \ldots, g(e_n))$.
3) Montrer que pour tout $v \in E$, $f(u, v) = g(v)$.

*N.B. On a montré qu'à toute forme linéaire $g$, on peut associer un unique vecteur $u$ de $E$ tel que pour tout $v \in E$, $g(v) = \varphi(u, v)$.*

**Exercice 5** Soit $M$ une matrice réelle symétrique $n \times n$, soit $\varphi$ la forme bilinéaire associée sur $\mathbb{R}^n$ et soit $u$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la restriction de $\varphi$ à $F = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot u = 0\}$ (l'orthogonal au sens classique de $u$) est non dégénérée si et seulement si la matrice $(n+1) \times (n+1)$ suivante est inversible :

$$\begin{pmatrix} M & u \\ {}^t u & 0 \end{pmatrix}.$$

**TD semaine 3**

**Exercice 1** 1) Soit $M_3$ la matrice $3 \times 3$ suivante (on suppose $a \neq b$)

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \qquad .$$

1)a) Calculer le rang, donner les valeurs propres et une base orthogonormée (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$) formée de vecteurs propres.
1)b) Soit $P$ la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres. Vérifiez que ${}^tPP = I_3$. On a donc ${}^tPM_3P = P^{-1}M_3P$. Quelle est *a priori* la différence entre les deux termes en terme d'interprétation ?
2) on suppose $n \geq 3$, reprendre 1) avec la matrice de taille $n \times n$ :

$$M_n = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$$

3) On se place dans $\mathbb{R}^n$ que l'on munit de la forme quadratique dont l'expression dans la base canonique $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est :

$$q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2, \quad \text{avec} \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

3a) Montrer que :

$$q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2.$$

3b) En déduire que :

$$q(x_1, ..., x_n) = (1 - 1/n) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2/n \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j x_k$$

et que la matrice de $q$ relativement à la base canonique est une matrice $N_1$ avec $a = 1 - 1/n$ et $b = -1/n$.
3c) Déduire de 3b) et 2) une base $(e'_1, ..., e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de $q$ est diagonale, avec une diagonale égale à $(0, 1, ..., 1)$.

**Remarque :** Ceci a une application en statistiques. Supposons que $y_1$,...,$y_n$ soient des réalisations indépendantes d'une loi normale $N(m, \sigma^2)$ de paramètres inconnus. On est intéressé par l'estimation de $\sigma^2$. Le calcul précédent appliqué aux $x_i = y_i - m$ est l'étape cruciale pour montrer que :

$$\frac{1}{\sigma^2} q(x_1, ..., x_n)$$

suit une loi $\chi^2(n-1)$. Par conséquent,

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

est un estimateur sans biais de $\sigma^2$.

**Exercice 2 (extrait de l'examen de juin 1999. Cet exercice est un exercice type).**
Soit $M$ la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
1) Donner la signature de la forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^2$ associée à $M$ dans la base canonique.

Soit $A$ la matrice suivante et $f$ la forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^4$ associée à $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Montrer que $f$ n'est pas définie positive, n'est pas définie négative et est non dégénérée.
3) Soit $e_1$ (respectivement $e_2$) le vecteur de coordonnées $(1,1,0,0)$ (respectivement $(0,0,1,1)$). Soit $v$ un vecteur de coordonnées $(x,y,z,t)$ qui est orthogonal à $e_1$ et à $e_2$ pour $f$. Simplifier l'expression de $f(v,v)$.
4) Trouver un vecteur $e_3$ orthogonal à $e_1$ et à $e_2$ tel que $f(e_3,e_3) > 0$. Trouver un vecteur non nul $e_4$ orthogonal à $e_1$, $e_2$ et à $e_3$.
5) Montrer que $(e_1,e_2,e_3,e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et calculer la matrice de $f$ dans cette base. Donner la signature de $f$. Comparer aux résultats de la question 2.

**Exercice 3** Soit $\lambda$ et $\mu$ deux réels. Discuter selon le signe de $\lambda$ et $\mu$ la signature de la forme quadratique $q$ représentée dans une base par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Faire un tableau qui en fonction du signe de $\det(M)$ et $\operatorname{tr}(M)$ donne la signature de $q$.

**Exercice 4** Effectuer la réduction de Gau$\beta$ des formes quadratiques suivantes. En déduire une base orthogonale et la signature de la forme bilinéaire symétrique associée.

$$q_1(x_1,x_2,x_3) = (x_1)^2 + 6(x_2)^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$$

$$q_3(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3.$$

Donner aussi des bases orthogonales en suivant le plan de la démonstration du théorème d'existence des bases orthogonales.

**Interros et partiels :** vous pouvez traiter les exercices 1 de la première interrogation de 2003 (questions 1 à 3), et des partiels de juin et septembre 2003.

**TD semaine 4**

**Exercice 1** Soit $M$ une matrice réelle $n \times n$ quelconque. Montrer que la matrice ${}^tMM$ est une matrice symétrique positive et qu'elle est définie si et seulement si la matrice $M$ est inversible (indication : on comparera ${}^tX{}^tMMX$ et $\|MX\|^2$).

**Exercice 2** Soit $M$ une matrice symétrique inversible. Montrer que l'inverse de $M$ est symétrique. Montrer que si $M$ est positive alors son inverse l'est aussi (indication : on utilisera que $X \mapsto MX$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$, et on calculera ${}^t(MX)M^{-1}(MX)$).

**Exercice 3** Soit $\varphi$ une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $E$ espace vectoriel. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ $p$ vecteurs de $E$ et soit $M$ la matrice $p \times p$ définie par $m_{ij} = f(u_i, u_j)$. Montrer que les vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ forment un système libre si et seulement si la matrice $M$ est inversible.

**Exercice 4** Soit $\varphi$ une forme bilinéaire symétrique sur $E$, espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si $\varphi$ est anisotrope (aucun vecteur n'est isotrope) alors $\varphi$ est positive ou négative et non dégénérée. On pourra raisonner par contraposition : prenant des vecteurs $x$ et $y$ tels que $q(x) < 0 < q(y)$, on étudiera la fonction $t \mapsto q(tx + (1-t)y)$. Retrouvez ce résultat grâce au théorème de Sylvester.

**Interros et partiels :** vous pouvez traiter l'exercice 1 du partiel de mai 2003.

**TD semaine 5**

**Exercice 1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit sur $\mathbb{R}^n$ la forme bilinéaire symétrique :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i.$$

Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire si et seulement si :

$$\forall i, \quad a_i > 0.$$

**Exercice 2.** Considérons $E = \mathbb{R}^3$ sur lequel on met les deux produits scalaires :

$$< x, y >_1 = xx' + yy' + zz'$$

$$< x, y >_2 = xx' + 2yy' + xy' + x'y + zz'.$$

On note $\perp_i$ l'orthogonal au sens du produit scalaire $i$.
1) Vérifier que la seconde forme bilinéaire est bien un produit scalaire.
2) Soit $u = (1, 1, 0)$. Préciser $u^{\perp_1}$ et $u^{\perp_2}$.
3) A partir de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, fabriquer une base orthonormée pour le second produit scalaire en utilisant le procédé de Gram-Schmidt.
4) Donner l'équation des projections orthogonales relativement à chaque produit scalaire sur :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y = 0\}$$

en utilisant dans les deux cas chacune des méthodes suivantes :

- en trouvant une base orthogonale de $F$.
- en écrivant d'abord $F$ comme l'orthogonal d'un vecteur $e$, puis en calculant en premier la projection sur $< e >$.

Quelles sont, au sens de chacun de ces produits scalaires, les distances de $(1, 1, 1)$ à $F$ ?

**Exercice 3.** Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, dessiner les ensembles :

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad 1 \leq x_1 - x_2 \leq 2\}$$

et

$$T = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 1\}$$

et les écrire comme intersection d'ensembles de la forme :

$$P_{u,\alpha} := \{x \in \mathbb{R}^2, \quad u \cdot x \leq \alpha\}, \quad (u, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$

**Exercice 4 (optionnel)** On se place dans l'espace vectoriel (de dimension 3) $E = \mathbb{R}_2[X]$ constitué des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2. On admettra que si $P \in E$ vérifie $P \geq 0$ et $\int_0^1 P(t)dt = 0$, alors $P = 0$. On définit sur $E$ la forme bilinéaire suivante :

$$< P, Q > = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1) Pour $P = p_1 + p_2 X + p_3 X^2$ et $Q = q_1 + q_2 X + q_3 X^2$, calculez $< P, Q >$ en fonction des $p_i$ et des $q_i$. On obtient ainsi une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$, notée $\varphi$.

1)a) Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.
1)b) Calculer le $\varphi-$orthogonal de $(1,1,0)$ représentant le polynôme $1+X$.
1)c) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour $\varphi$.

On se propose de reprendre la question 1) sans utiliser l'isomorphisme entre $E$ et $\mathbb{R}^3$ :
2)a) Montrer que $< .., .. >$ est un produit scalaire de $E$.
2)b) Calculer l'orthogonal de $1+X$.
2)c) Donner une base orthonormée de $E$.

**Exercice 5 (optionnel)** On se place dans l'espace vectoriel (de dimension infinie) $E = \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$, où $I=[-1,1]$. On introduit les sous-espaces vectoriels de $E$ :

$$\mathcal{P} = \{f \in E, \quad \forall x \in I, \quad f(-x) = f(x)\}$$

$$\mathcal{I} = \{f \in E, \quad \forall x \in I, \quad f(-x) = -f(x)\}.$$

On introduit enfin le produit scalaire sur $E$ :

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Pour $f \in E$, on note $f_p$ et $f_i$ les éléments de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ définis par :

$$f_p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

1) En remarquant que pour toute $f \in E$, on a $f = f_p + f_i$, montrez que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
2) Soit $f \in \mathcal{P}$ et $g \in \mathcal{I}$. Montrez que $f \perp g$. En déduire que $\mathcal{P}^\perp \subset \mathcal{I}$.
3) Soit $f \in \mathcal{P}^\perp$. Calculez de deux manières $< f, f_p >$, et en déduire que $\mathcal{P}^\perp = \mathcal{I}$.

*Remarque : ici, nous sommes en dimension infinie, et nous avons $E = \mathcal{P}^\perp \oplus \mathcal{P}$.*

**Interros et partiels :** vous pouvez traiter l'exercice 2 de la seconde interrogation de 2002, la question 4 de la première interrogation de 2003 et le second exercice de la seconde interrogation de 2003.

**TD semaine 6**

**Exercice 1 (les résultats de cet exercice sont à savoir retrouver rapidement ou à connaître. Issu du sujet de partiel de juin 2002).** Soit $q$ une forme quadratique de $\mathbb{R}^2$ représentée dans la base canonique par une matrice $M$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P$ telle que ${}^tPMP$ soit diagonale. En déduire, à l'aide d'un exercice antérieur, la signature de $q$ en fonction de $\det(M)$ et $\mathrm{tr}(M)$.

**Exercice 2** 1) Montrer que deux matrices symétriques $A$ et $B$ commutent si et seulement si le produit est symétrique.
2) On se place dans le cas où $A$ et $B$ commutent. On note $f$ (resp. $g$) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par la matrice $A$ (resp. $B$) dans la base canonique. On a donc $f \circ g = g \circ f$. Soit $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres (réelles) de $f$.
2)a) Posons $E_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i id)$. Pourquoi a t-on :

$$\mathbb{R}^n = \oplus_{i=1}^k E_i \quad ?$$

2)b) Montrer que si $u \in E_i$, alors $g(u) \in E_i$. En déduire que $g$ induit un endomorphisme $g_i$ sur $E_i$.
2)c) Montrer qu'il existe une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$) de $E_i$ dans laquelle la matrice de $g_i$ est diagonale.
2)d) Déduire de 2)c) qu'il existe une base orthonormée $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle les matrices de $f$ et $g$ sont toutes deux diagonales.
3) Exprimer matriciellement (sans $f$ et $g$) sous forme d'une proposition ce que l'on a démontré dans 2).

**Exercice 3** 1) Soit $N$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une matrice $H$ symétrique telle que $HH = N$. (Indication : utiliser le théorème sur la diagonalisation des matrices symétriques).
2) Soit $M$ une matrice $n \times n$ inversible telle que la matrice ${}^tMM$ est diagonale. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $H$ et une matrice unitaire $U$ telles que $M = UH$. (Indication : considérer la matrice ${}^tMM$ et prendre $H$ comme la "racine carrée de cette matrice").
3) Généraliser la conclusion précédente pour $M$ inversible quelconque.

**Exercice 4** 1) Soit $E$, un espace euclidien et $F$ un sous espace-vectoriel de $E$. On appelle symétrie orthogonale par rapport à $F$, et l'on note $s_F$, l'unique application linéaire vérifiant : $s_F(x) = x$ si $x \in F$ et $s_F(x) = -x$ si $x \in F^\perp$. Calculez $s_F(x) + \pi_F(x)$, et en déduire l'expression de $s_F$ en fonction de $\pi_F$ (cette expression n'est pas utile pour ce qui suit).
2) Soit $E$, un espace euclidien et soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $E$ qui est unitaire ($f^*f = id$) et autoadjointe ($f^* = f$). Montrer qu'il existe une base orthonormée de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale. Montrer que les valeurs propres de $f$ sont égales à 1 ou $-1$. Montrer que $f$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'espace propre associé à la valeur propre 1.
3) Montrer que la matrice suivante est la matrice d'une isométrie $s$ de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $s$ est une symétrie. Donner une base orthonormée dans laquelle la matrice de $s$ est diagonale.

**TD semaine 7**

**Exercice 1** 1) Montrer que pour tout vecteur de $\mathbb{R}^n$, on a les inégalités :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

2) En déduire des constantes $\alpha(n) > 0$ et $\beta(n) > 0$ de sorte que l'on ait pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\alpha(n)\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta(n)\|x\|_2.$$

3) Déduire de 2) des constantes $\gamma(n) > 0$ et $\delta(n) > 0$ de sorte que l'on ait pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\gamma(n)\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \delta(n)\|x\|_1.$$

**Exercice 2** Dessiner les ensembles suivants, étudier s'ils sont bornés, et montrer :

- $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \ x + y^2 > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \ x + y \geq 0$ et $x^2 + y^2 \leq 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ \text{pour tout } i = 1, \ldots, n,\ u \cdot x \leq w\}$ (où $w > 0$ et $u_i > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$) est fermé (on ne fera le dessin qu'avec $n = 2$).
- $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \ x > 0,\ y > 0,\ \text{et } xy \geq 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Donner l'adhérence du premier ensemble.

**Exercice 3** Soit $(x^{(q)})_q$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$. On considère la suite réelle $(\|x^{(q)}\|)_q$ où $\|.\|$ représente une des trois normes vues dans le cours.
1) Montrer que pour tout $p$, $q$ :

$$\left\| \sum_{k=p}^{p+q} x^{(k)} \right\| \leq \sum_{k=p}^{p+q} \|x^{(k)}\|.$$

2) Montrer que si la série réelle de terme général $(\|x^{(q)}\|)_q$ est convergente, alors la suite $(y^{(q)})_q$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall q,\quad y^{(q)} = \sum_{k=0}^{q} x^{(k)}$$

est de Cauchy. En déduire que la suite $(y^{(q)})_q$ est convergente.

**Exercice 4** 1) Soit $\sigma$ la fonction signe définie par : $\sigma(0) = 0$, $\sigma(x) = 1$ si $x > 0$ et $\sigma(x) = -1$ si $x < 0$. A t-on $\sigma(x) \geq 0$ sur un voisinage de 3 ? sur un voisinage de 0 ?
2) Soit $f$ la fonction constante égale à 1. A t-on $f(x) \neq \sigma(x)$ sur un voisinage de 0 ?

**Exercice 5** 1) Soit $(U_j)_{j\in J}$ une famille de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\cup_{j\in J} U_j$ est un ouvert. Montrer que si $J$ est finie, alors $\cap_{j\in J} U_j$ est un ouvert.
2) Soit $(F_j)_{j\in J}$ une famille de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\cap_{j\in J} F_j$ est un fermé. Montrer que si $J$ est finie, alors $\cup_{j\in J} F_j$ est un fermé.

**Exercice 6** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ qui est à la fois ouverte et fermée. Le but de l'exercice est de montrer que $A = \mathbb{R}^n$. On se donne $a \in A$ et $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque mais différent

de $a$.
1) Soit :

$$K_x = \{\lambda \in \mathbb{R}^+, \quad \forall t \in [0, \lambda], \quad a + t(x-a) \in A\}.$$

1)a) Montrer que $K_x$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^+$ et que si $\lambda_1 \in K_x$ et si $\lambda \in [0, \lambda_1]$, alors $\lambda \in K_x$.
2) Soit $M$ la borne supérieure de $K_x$. C'est un élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Dans 2), on suppose que $M$ est finie. On rappelle que $A$ est fermée et ouverte.
2)a) Montrer que $M \in K_x$.
2)b) Montrer qu'il existe $\mu > M$ tel que $\mu \in K_x$ et aboutir à une contradiction.
2)c) Que déduit-on de 2) ?
3) Montrer que $1 \in K_x$ et conclure.

**Interros et partiels :** vous pouvez traiter l'exercice 2 de la seconde interrogation de 2002 (questions 3 et début de 4.b), l'exercice 1 de la seconde interrogation de 2003 (question 1), la question 1 de l'exercice 2 du partiel de juin 2003. Vous pouvez aussi traiter l'exercices 2 de la seconde interrogation de 2003. Ces exercices sont difficiles, aidez-vous de dessins pour le premier exercice. Pour B1, on commencera admettre l'existence d'un $\bar{y} \in K$ tel que pour tout $y \in K$, $y_p \leq \bar{y}_p$, on prendra $\bar{x} \in O$ et l'on se demandera s'il existe une boule de centre $(\bar{x}, \bar{y})$ incluse dans $O$.

**TD semaine 8**

**Exercice 1.** Soit $S$ la partie de $\mathbb{R}^2$ :

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = x^3, \quad \text{et} \quad x \neq 0\}$$

et $f$ la fonction qui vaut 1 sur les éléments de $S$, 0 ailleurs.
1) Montrer qu'en $(0,0)$, $f$ est continue dans la direction de tout vecteur $e$, mais que $f$ n'est pas continue.
2) Soit $a_0 = (x_0, y_0) \in S$. $f$ est-elle continue en $a_0$ ?
3) Soit $a_0 = (x_0, y_0) \notin S$ tel que $a_0 \neq 0$. Montrer que $f(a) = 0$ sur un voisinage de $a_0$. En déduire que $f$ est continue en $a_0$.

**Exercice 2** Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ qui n'est pas constamment nulle. Il existe une matrice $m \times n$, $A = (a_{ij})$, telle que, en identifiant matrice et application linéaire, on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = Ax.$$

1) Montrer que $f(x + h) - f(x) = f(h)$, et en déduire que $f$ est continue en $x$ si et seulement si $f$ est continue en 0.
2) On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de leurs normes $\|.\|_1$. On pose :

$$K(f) := \sum_{i=1}^{m} \max_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|.$$

Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $\|Ah\|_1 \leq K(f)\|h\|_1$. En déduire que $f$ est continue.
3) En déduire que si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un polynôme, alors $g$ est continue. On rappelle qu'un polynôme de $\mathbb{R}^n$ est une somme de termes de la forme :

$$a x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad p_j \in \mathbb{N}.$$

*Remarque : nous avons donc démontré les deux résultats essentiels suivants : toute* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *linéaire vérifie :*

- $\exists K(f) > 0$, $\forall h, x \in \mathbb{R}^n$, $\|f(h)\|_1 \leq K(f)\|h\|_1$ *et* $\|f(x + h) - f(x)\|_1 \leq K(f)\|h\|_1$ *($f$ Lipschitzienne).*
- *$f$ est continue.*

**Exercice 3** Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et si $(x, y) \neq 0$ :

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

où $\alpha$ est un réel strictement positif. Montrer que cette application est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Montrer qu'elle est continue en $(0, 0)$ si et seulement si $\alpha < 1$.

**Exercice 4** Etudier la continuité des applications définies de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par $f_i(0, 0) = 0$ et :

$$f_1(x, y) = \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0).$$

Pour $f_1$, on examinera aussi la continuité suivant les directions.

**Exercice 5** Peut-on prolonger par continuité en dehors de son domaine de définition $D$ la fonction $f$ définie sur :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 \neq 0\}$$

par :

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3 - 3x^2 - 6y^2 + 3x + 12y - 9}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}.$$

**Exercice 6** Les fonctions suivantes sont elles continues sur $\mathbb{R}^2$ :

$$f_1(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f_1(0, 0) = 0.$$

$$f_2(x, y) = y \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0, \quad f_2(0, y) = 0.$$

**Exercice 7** La fonction suivante est-elle continue en $(0, 0)$ ?

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2} e^{\left(-|y|/x^2\right)} \quad \text{si } x \neq 0, \quad f(0, y) = 0.$$

**Interros et partiels :** commencez par montrer le point admis pour B1 (cf. semaine précédente). Vous pouvez traiter la suite de l'exercice 2 de la seconde interrogation de 2002, la question 2 de l'exercice 2 du partiel de juin 2002, les exercices 1 (question 3) et 3 de la seconde interrogation de 2003, la question 2b de l'exercice 2 du partiel de septembre 2003.

**TD semaine 9**

**Exercice 1** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2y^3$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $e = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Calculer $\partial_e f(a)$.

**Exercice 2** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x, y) = x+y$ si $x \neq y$, $f(x, y) = 2(x+y)$ sinon, et $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Montrer qu'en $(0, 0)$, $f$ est dérivable dans la direction des vecteurs $e_1$, $e_2$, $e_1 + e_2$, mais que :

$$\partial_{e_1+e_2} f(0, 0) \neq \partial_{e_1} f(0, 0) + \partial_{e_2} f(0, 0).$$

**Exercice 3** Etudier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes et calculer-les si elles existent.

- $f_1$ de $]0, \infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^y$.
- $f_2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(xy)$.
- $f_3$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(x \sin(y))$.
- $f_4$ de $]0, \infty[\times]0, \infty[\times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^{y^z}$.
- $f_5$ de $]0, \infty[\times]0, \infty[\times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f(x, y, z) = (x + y)^z$.

Ecrire la matrice jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y) = (\sin(xy), \sin(x \sin(y)))$.

**Exercice 4** Soit $f$, l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et :

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Cette application admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$? Est-elle continue en $(0, 0)$?

**Exercice 5. (Conseil : si vous avez des difficultés lorsque $n$ est quelconque, commencez par faire $n = 2$ ou $n = 3$, puis passez au cas général).**
Soit $f$, la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = b \cdot x$ où $b$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Calculer les dérivées partielles de cette fonction. Donner le vecteur gradient pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. $f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ ?
Même question pour $f(x) = x \cdot x$.
Même question pour $f(x) = (Ax) \cdot x$ où $A$ est une matrice $n \times n$.
Même question pour $f(x) = (Ax - b) \cdot (Ax - b)$ où $A$ est une matrice $n \times n$ et $b$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 6 (Optionnel)** Soit $f$ de $]0, \infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(r, \varphi, \theta) = (r \cos(\theta) \cos(\varphi), r \cos(\theta) \sin(\varphi), r \sin(\theta)).$$

Donner la matrice jacobienne de $f$ en tout point de son domaine.

**Interros et partiels :** voir à la fin de la semaine 10 ; vous pouvez traiter certaines des questions signalées en semaine 10.

**TD semaine 10**

**Exercice 1** Soit $S$ une application différentiable de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.
1) Rappeler la formule donnant $D_{(u_0,v_0)}S(h,k)$ en fonction des dérivées partielles $\partial_1 S(u_0,v_0)$ et $\partial_2 S(u_0,v_0)$.
2) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x) = (x, x^2)$, et $f = S \circ \varphi$. $f$ est donc une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Rappeler la formule reliant $f'(x)$ et $D_x f$. En déduire $f'(x)$ en fonction des dérivées partielles de $S$.
3) Ici on suppose que $S(u,v) = (u-v)^2$. Finir le calcul commencé en 2), et comparer le résultat final avec celui d'un calcul direct.

**Exercice 2** Soit $u$, $v$ et $w$ trois fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $R$ et $S$ deux fonctions différentiables respectivement de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables et donner leur gradient en tout point de leur domaine de définition.

- $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = R(u(x)w(y), u(x) + v(y))$.
- $f\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = R(u(x+y), v(y+z))$.
- $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = S(x, u(x), R(x,y))$.
- $f\ : (]0,\infty[)^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = S(x^y, y^z, z^x)$.

**Exercice 3** 1) Montrer que les applications suivantes sont différentiables, calculer leurs différentielles et leurs matrices jacobiennes :
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad f(x) = Ax - b$, $A$ matrice $m \times n$ et $b$ vecteur $m \times 1$.
$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
2) Montrer que l'application $F_1 : x \mapsto \|x\|_2^2 = x \cdot x$ est différentiable, et que :

$$D_x F_1(h) = 2x \cdot h$$

puis en déduire que $F_2 : x \mapsto \|x\|_2$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (remarquer que $F_2 = \sqrt{\ } \circ F_1$), et que :

$$D_x F_2(h) = \frac{x \cdot h}{\|x\|_2}.$$

3) Déduire de 1) et 2) que l'application $x \mapsto (Ax-b) \cdot (Ax-b)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$, et calculer sa différentielle puis son gradient.

**Exercice 4** Soit $f$ une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit $\alpha > 0$ fixé.
1) $x \in \mathbb{R}^n$ étant fixé, calculez la dérivée de la fonction $\phi$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(t) = f(tx) - t^\alpha f(x).$$

2) On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $t > 0$,

$$f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Déduire de 1) *l'identité d'Euler* :

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x).$$

**Exercice 5 (Optionnel)** Soit $g$, une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x) = 0$, alors $\nabla g(x)$ est non nul. Soit $X$, le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

défini par $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$.
1) Montrer que si $x$ vérifie $g(x) = 0$, alors il existe une suite $(x^{(q)})_q$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers $x$ et telle que pour tout $q$, $g(x^{(q)}) > 0$.
2) Déduire de la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $g(x) < 0$ ;
(ii) il existe $r > 0$ tel que pour tout $x'$ vérifiant $\|x - x'\| < r$, $g(x') \leq 0$.

**Exercice 6 (Optionnel)** Soit $f$ et $g$ deux applications différentiables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les applications $F$, $G$ et $H$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$F(x) = f(x)g(x),$$

$$G(x) = \frac{1}{g(x)}$$

et

$$H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

sont différentiables et exprimer leurs gradients à partir des gradients de $f$ et $g$ ($H$ se déduit des précédents).
*N.B. : pour $G$ et $H$, on supposera que $g$ ne s'annule pas.*

**Interros et partiels :** vous pouvez regartder la question 3 de l'exercice 2 du partiel de 2002, l'exercice 2 du partiel de septembre 2002, l'exercice 2 du partiel de mai 2003 (questions 2 à 5), l'exercice 3 du même partiel (plus théorique), finir l'exercice 2 du partiel de septembre 2003 et faire l'exercice 3 de ce partiel (également plus théorique).

**TD semaines 11 et 12**

**Exercice 1. (Exercice 3 du partiel de juin 2002).** Soit $A_1, ..., A_n$ des parties de $\mathbb{R}^m$.
1) Montrer que si les parties sont deux à deux disjointes, c'est-à-dire si $A_p \cap A_q = \emptyset$ si $p \neq q$, alors on a :

$$1_{\cup_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}.$$

Montrer que sans hypothèse sur les parties $A_i$, on a :

$$1_{\cup_{i=1}^n A_i} \leq \sum_{i=1}^n 1_{A_i}.$$

2) On se propose de préciser ce qui se passe lorsqu'il n'y a pas d'hypothèse sur les $A_i$.
2)a) Montrer que :

$$1 - 1_{\cup_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n (1 - 1_{A_i}).$$

2)b) Ici on suppose $n = 3$ pour simplifier. Déduire de 2)a) que :

$$1_{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = 1_{A_1} + 1_{A_2} + 1_{A_3} - 1_{A_1 \cap A_2} - 1_{A_2 \cap A_3} - 1_{A_3 \cap A_1} + 1_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}.$$

*Remarque : En fait, ce que vous avez fait ici se traite exactement de la même manière avec n quelconque, c'est juste un peu plus lourd à écrire.*
3) Que peut-on dire lorsque de plus les parties sont Jordan-mesurables ?

**Exercice 2.** On définit les ensembles $D_i$ pour $i = 1, .., 3$ par :
$D_1 = [0, 1] \times [0, 1]$, $D_2 = \{(x, y), \quad 0 \leq x \leq y \leq 1\}$, $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+, \quad x + y \leq 1\}$.
1) Dessinez les ensembles $D_i$, et (semaine 12) montrer qu'ils sont Jordan-mesurables.
2) Sur chaque ensemble $D_i$, calculez les intégrales suivantes :

$$\iint_{D_i} x^\alpha y^\beta \, dxdy = \iint_{[0,1]^2} 1_{D_i}(x, y) x^\alpha y^\beta \, dxdy$$

$$\iint_{D_i} (x^\alpha + y^\beta) \, dxdy = \iint_{[0,1]^2} 1_{D_i}(x, y)(x^\alpha + y^\beta) \, dxdy$$

$$\iint_{D_i} \alpha^x \beta^y \, dxdy = \iint_{[0,1]^2} 1_{D_i}(x, y) \alpha^x \beta^y \, dxdy.$$

Pour celles qui ne se simplifient pas, on pourra supposer $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

**Exercice 3.** $R$, $\lambda$ et $\mu$ étant trois réels strictement positifs, calculez

$$I_R = \iint_{D_R} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} \, dxdy \quad \text{avec} \quad D_R = \{(x, y), \quad 0 \leq x \leq y \leq R\},$$

puis $\lim_{R \to +\infty} I_R$.

**Exercice 4.** Calculez les deux intégrales suivantes en faisant les changements de variables indiqués (les questions sont indépendantes) :
1) $\iint_D \sin(x^2 + y^2) \, dxdy$ sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ ($R > 0$ fixé) en passant en coordonnées polaires $(\rho, \theta)$ telles que $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$.
2) $\iint_D \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right) \, dxdy$ sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, x + y \leq 1\}$ en passant aux coordonnées

$(u,v)$ définies par $u = x + y$ et $v = x - y$ (on ne se préoccupera pas de l'aspect impropre de l'intégrale).

**Exercice 5.** On définit la fonction $\psi$ sur le carré $C = [0,1] \times [0,1]$ par $\psi(x,0) = 0$ pour tout $x$, et $\psi(x,y) = x^y$ si $y \neq 0$. On admettra que $\psi$ est intégrable sur $C$. Calculez de deux manières :

$$\iint_C \psi(x,y)\ dxdy$$

et en déduire la valeur de :

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx.$$

**Exercice 6.** On pose, pour $R > 0$ :

$$I_R = \int_0^R e^{-u^2} du \quad \text{et} \quad J_R = \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\ dxdy$$

où $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\quad x^2 + y^2 \leq R^2\}$.
1) Calculez $J_R$ en passant aux coordonnées polaires $(\rho, \theta)$ telles que $x = \rho \cos\theta$ et $y = \rho \sin\theta$. Calculez $\lim_{R \to +\infty} J_R$.
2) Montrez que :

$$I_R^2 = \iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\ dxdy$$

où $C_R = [0,R] \times [0,R]$ (on pourra partir du membre de droite). En déduire un encadrement de $I_R^2$ par deux intégrales de type $J_{..}$ avec des indices à choisir.
3) Déduire de 1) et 2) que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

puis en déduire que la densité d'une loi normale est bien de masse 1, c'est-à-dire que si $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = 1.$$

**Exercice 7. (Optionnel)** Soit $P$ un pavé et $f$ une fonction intégrable sur $P$. Pour toute fonction $g \in \mathcal{B}(P, \mathbb{R})$, on posera :

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in P} |g(x)|.$$

On sait qu'il existe deux suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ telles que :

$$\forall x \in P, \quad |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \psi_n(x) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \int_P \psi_n = 0.$$

**1.** Montrer par un exemple que la suite de nombres $(\|\varphi_n\|_\infty)_n$ n'est pas forcément bornée. Indication : prenez (en dimension 2 par exemple) $f = 0$ et $\varphi_n = n 1_{A_n}$ avec des $A_n$ à choisir.
**2.** On considère deux suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ satisfaisant à :

$$\forall x \in P, \quad |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \psi_n(x) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \int_P \psi_n = 0$$

et l'on introduit l'ensemble :

$$A_n = \{x \in P, \quad |\varphi_n(x)| \geq \|f\|_\infty + 1\}.$$

$A_n$ est Jordan-mesurable ($\varphi_n$ étant en escalier, $A_n$ est une réunion finie de pavés, éventuellement privés de certaines de leurs arrêtes).
**2.a.** Montrer que pour tout $x \in P$, on a :

$$|\varphi_n(x) - f(x)| \geq 1_{A_n}(x).$$

**Indication :** distinguez les cas $x \notin A_n$ et $x \in A_n$, et dans le second cas, on utilisera que $|a - b| \geq |a| - |b|$).
**2.b.** En déduire que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

On introduit la fonction $\hat{\varphi_n}$ définie par :

$$\hat{\varphi_n}(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) & \text{si } \ x \notin A_n \\ \|f\|_\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

**2.c.** Montrer que $\hat{\varphi_n}$ est une fonction en escalier.
**2.d.** Montrer que $\|\hat{\varphi_n}\| \leq \|f\|_\infty + 1$ (et donc $\sup_n \|\hat{\varphi_n}\| < +\infty$).
**2.e.** En remarquant que $f = f1_{A_n} + f1_{A_n^c}$, trouver une suite de fonctions en escalier $(\hat{\psi_n})_n$ telle que l'on ait :

$$\forall x \in P, \quad |f(x) - \hat{\varphi_n}(x)| \leq \hat{\psi_n}(x) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_P \hat{\psi_n} = 0.$$

**3.** Formulez le résultat obtenu sous forme d'une proposition.

**Interros et partiels :** questions 4 et 5 de l'exercice 2 du partiel de juin 2002, exercice 1 de ce partiel, l'exercice 3 du partiel de septembre 2002 et question 6 de l'exercice 2 du partiel de juin 2003.

# Sujets des années précédentes.

Vous trouverez ici quelques sujets posés les années précédentes. Les difficultés sont commentées au début de l'épreuve (informations non fournies par écrit le jour de l'épreuve). Voici les significations des abréviations (indiquées en gras) : clq : classique. Il s'agit de questions pouvant tomber régulièrement, et que donc vous êtes censés savoir traiter. Les questions classiques sont en général de difficulté facile **fcl** (alors non mentionné), ou moyenne **moy**. Il arrive aussi qu'il y ait des questions difficiles diffc, celles-ci sont très souvent signalées d'une étoile dans leur numéro.

## Seconde interrogation d'Analyse-algèbre 4, mai 2002

Ce sujet est clq, sauf la question 2 de l'exercice 1, qui est **moy**.

**Cours :** énoncez précisément (hypothèses + conclusions) le théorème de diagonalisation des endomorphismes autoadjoints (i.e. vérifiant $f^* = f$), son interprétation matricielle et le théorème de co-réduction (ou de réduction simultanée) de deux formes bilinéaires symétriques.

**Exercice 1.**
**1.** Ici $E = \mathbb{R}^3$ que l'on munit de sa structure euclidienne canonique et dans lequel on considère le vecteur :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**1.a.** Donner l'équation de $F = e_1^{\perp}$.
**1.b.** Calculez, pour tout vecteur $u = (u_1, u_2, u_3)'$, $\pi_{e_1}(u)$ et $\pi_F(u)$.
**2.** On admet l'énoncé suivant :

Soit $E$ un espace euclidien, et soit $G$ et $H$ deux sous espaces de $E$ en somme directe. Notons $p = \dim(G)$ et $n = \dim(E)$. Sont équivalentes :

**(1)** L'othogonal de $G$ est $H$.

**(2)** Il existe une base $(e_1, ..., e_p)$ de $G$ et une base $(e_{p+1}, ..., e_n)$ de $H$ telles que la matrice du produit scalaire de $E$ dans la base $(e_1, ..., e_n)$ soit $I_n$.

Trouver un produit scalaire $< .., .. >$ sur $E = \mathbb{R}^3$ distinct du produit scalaire usuel pour lequel l'orthogonal de $e_1$ est encore $F$. Il est demandé de donner sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 2.** Soit $\varphi$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = x^3$, soit $S$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ y = \varphi(x) \ \text{ et } \ x \neq 0\}$$

et soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**1.** Dessinez une allure de l'ensemble $S$.
**2.** Soit $e = (e_1, e_2)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ (i.e. dont au moins l'une des composantes est

non nulle). On définit la fonction $f_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par : $f_e(t) = f(te) = f(te_1, te_2)$.
**2.a.** Résoudre l'équation d'inconnue $t$ : $te_2 = \varphi(te_1)$, et en déduire qu'il existe un réel $\alpha(e) > 0$ tel que si $|t| < \alpha(e)$, alors $f_e(t) = 0$.
**2.b.** Montrer qu'en $(0,0)$, $f$ est continue dans la direction de tout vecteur $e$ non nul.
**2.c.** $f$ est-elle continue en $(0,0)$ ? (Vous pourrez, par exemple, calculer $\lim_{n\to+\infty} f(1/n, 1/n^3)$).
**3.** On pose $S_0 = S \cup \{(0,0)\}$.
**3.a.** L'ensemble $S_0$ est-il ouvert ? Est-il fermé ? (Justifiez).
**3.b.** Mêmes questions pour $S$.
**4.** Soit $(x_0, y_0) \notin S_0$. On note $S_0^c$ le complémentaire de $S_0$.
**4.a.** Montrer que si $(x, y) \in S_0^c$, alors $f(x, y) = 0$.
**4.b.** Montrer en utilisant **3.a** qu'il existe $r > 0$ tel que si $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2 < r$, alors $(x, y) \in S_0^c$. $f$ est-elle continue en $(x_0, y_0)$ ?

# Partiel de juin 2002

Tout est **clq**, sauf 3.b de l'exercice 1 dont la fin est **diff**, et le 2.a de l'exercice 3 qui est **moy**.

**Exercice 1.** On se donne une matrice $A$ symétrique d'ordre 2, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ; soit $q$ la forme quadratique de matrice $A$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. ON se donne enfin deux réels $\lambda$ et $\mu$.

**1.** Indiquez, en justifiant rapidement mais précisément, si les assertions suivantes sont justes ou fausses :
**1.a.** si il existe une matrice $P$ inversible telle que ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, alors $\lambda$ et $\mu$ sont les valeurs propres de $A$.
**1.b.** si il existe une matrice $P$ inversible telle que ${}^tPAP = I_2$ et ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, alors $\lambda$ et $\mu$ sont les valeurs propres de $A$.

**2.** Soit $B$ la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, et v$q_1$ la forme quadratique de matrice $B$ dans la base canonique.
**2.a.** Calculer $q_1(\varepsilon_1)$, $q_1(\varepsilon_2)$ et $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où $\varphi_1$ est la f.b.s. associée à $q_1$.
**2.b.** On suppose dans la question **2.b** que $\det(B) > 0$.
**2.b.i.** On suppose ici de plus que $\operatorname{tr}(B) > 0$. Que peut-on dire du signe de $\lambda$ et $\mu$ ? Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de $q_1$ est $I_2$, et en déduire la signature de la forme quadratique $q_1$.
**2.b.ii.** On suppose ici de plus que $\operatorname{tr}(B) > 0$. En suivant un plan analogue à celui de **2.b.i**, mais avec les adaptations nécessaires, montrer que la signature de $q_1$ dans ce cas est $(0, 2)$.
**2.b.iii.** Montrer que l'hypothèse $\operatorname{tr}(B) = 0$ est impossible si $\det(B) > 0$.
**2.c.** Nous étudions maintenant le cas où $\det(B) < 0$. Que peut-on dire du signe de $\lambda$ et $\mu$ ? n déduire la signature de $q_1$ (vous pouvez traiter le cas $\lambda > 0$, l'autre cas étant identique).
**2.d.** Si $\det(B) = 0$, l'une des valeurs est nulle, par exemple on suppose $\mu = 0$. Discuter le signe de $\lambda$ en fonction de celui de $\operatorname{tr}(B)$, et en déduire la signature selon le signe de $\operatorname{tr}(B)$ (une rédaction plus rapide que dans les questions précédentes sera acceptée).
**2.e.** Résumer la question (de **2.b** à **2.d**) par un tableau qui en fonction de la trace et du déterminant de $B$ donne la signature de la forme quadratique associée.

**3.** Revenons à la matrice $A$.
**3.a.** Soit $q_0$ la forme quadratique de matrice $I_2$ dans la base canonique. En utilisant $q_0$ et un résultat du cours dont vous rappelerez l'énoncé, démontrez qu'il existe des réels $\lambda$ et $\mu$ et

une matrice $P$ inversible tels que ${}^tPAP = I_2$ et ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. On note $B$ la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

**3.b.*** Montrer que $\det(A) = \det(B)$ et $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$, et en déduire que les résultats de **2** s'adaptent à $A$.

**3.c.** Application : indiquez les signatures des formes quadratiques dont les matrices relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.** Dans tout cet exercice, on considère deux réels strictements positifs $\alpha$ et $\beta$ et la fonction $f_{\alpha\beta}$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_{\alpha\beta}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**1.** Montrer qu'en dehors de $(0,0)$, $f_{\alpha\beta}$ est de classe $C^1$, et exprimer $\nabla f_{\alpha\beta}(x,y)$.

**2.** Considérons un vecteur $e = (e_1, e_2)$ non nul de $\mathbb{R}^2$.

**2.a.** Montrer que si $e_1 = 0$ ou si $e_2 = 0$, alors $f_{\alpha\beta}$ est continue en $(0,0)$ dans la direction du vecteur $e$.

**2.b.** Montrer que lorsque $e_1$ et $e_2$ sont tous deux non nuls, $f_{\alpha\beta}$ est continue en $(0,0)$ dans la direction du vecteur $e$ si et seulement si $\alpha + \beta > 2$.

**2.c.** Montrer que lorsque $\alpha + \beta > 2$, $f_{\alpha\beta}$ est continue en $(0,0)$.

**3.** On s'intéresse à la dérivabilité de $f_{\alpha\beta}$ en $(0,0)$.

**3.a.** Etudier l'existence des dérivées partielles en $(0,0)$.

**3.b.** Montrer que lorsque $\alpha+\beta > 3$, $f_{\alpha\beta}$ est dérivable en $(0,0)$ dans la direction de tout vecteur $e$, et calculer $\partial_e f_{\alpha\beta}(0,0)$.

**4.** Dans cette question, on suppose $\alpha = \beta = 1/2$.

**4.a.** $a$ étant un réel strictement positif fixé, calculez les dérivées des fonctions $x \mapsto \ln(x^2 + a)$ et $x \mapsto (x^2 + a)(\ln(x^2 + a) - 1)$.

**4.b.** On considère le pavé $P = [1; 2] \times [1; 2]$. Calculez l'intégrale :

$$\iint_P \frac{xy}{x^2 + y^2} dxdy.$$

**5.** On revient au cas $\alpha$ et $\beta$ quelconques. Pour $r \in ]0; 1[$, on pose :

$$D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}.$$

On pose également :

$$W_{\alpha,\beta} = \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha(\theta) \sin^\beta(\theta) d\theta$$

et :

$$I_r(\alpha, \beta) = \iint_{D_r} f_{\alpha\beta}(x,y) dxdy.$$

**5.a.** Exprimez $I_r(\alpha, \beta)$ à l'aide de $W_{\alpha,\beta}$.

**5.b.** Etudiez si la limite de $I_r(\alpha, \beta)$ lorsque $r$ tend vers 0 existe, et si oui, la calculer.

**Exercice 3.** Soit $p$ un entier au moins égal à 2. On se donne un pavé $P$ de $\mathbb{R}^2$ contenant toutes les parties considérées dans cet exercice. On rappelle que :

$$\cap_{i=1}^{p} A_i = (\cap_{i=1}^{p-1} A_i) \cap A_p.$$

**1.** Soit $E_1, ..., E_p$ des parties de $\mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$1_{\cap_{j=1}^{p} E_j} = 1_{E_1} ... 1_{E_p}.$$

En déduire que si $E_1, ..., E_p$ sont Jordan-mesurables, alors $E_1 \cap ... \cap E_p$ est Jordan-mesurable.
**2.** Soit $A$, $B$, $C$ trois parties Jordan-mesurables.
**2.a.** Calculer $1 - 1_{A\cup B\cup C}$ en fonction de $1 - 1_A$, $1 - 1_B$ et $1 - 1_C$.
**2.b.** Déduire de **2.a** que :

$$1_{A\cup B\cup C} = 1_A + 1_B + 1_C - 1_{A\cap B} - 1_{B\cap C} - 1_{A\cap C} + 1_{A\cap B\cap C}.$$

**2.c.** Déduire de **2.b** et **1** que $A \cup B \cup C$ est Jordan-mesurable, et exprimer $m(A \cup B \cup C)$ en fonction de mesures d'ensembles $A$, $B$, $C$ et de leurs intersections.
**3.** En suivant un plan analogue à celui de la question **2**, expliquer comment montrer que si $A$, $B$, $C$, $D$ sont des parties Jordan-mesurables, alors il en est de même de $A\cup B\cup C\cup D$, et donner une formule analogue pour la mesure de cet ensemble. **Attention : il n'est pas demandé de tout refaire, seulement de donner les grandes lignes de la démonstration.**

# Partiel de septembre 2002

L'exercice 1 est un exercice type, à savoir faire les yeux fermés. L'exercice 2 est **clq**, avec toutefois des questions **moy** (1.c, 2.b) et une qustion **diffc** (au niveau de la rédaction), la question 3. L'exercice 3 est **clq** mais de niveau intermédiaire entre **fcl** et **moy**. La question 1.a est **moy**.

**Exercice 1.** Soit $\varphi$ la forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $q$ la forme quadratique associée.
**1.** Donnez l'expression de $\varphi((x, y, z), (x', y', z'))$ et de $q(x, y, z)$.
**2.** Calculez $\det(M)$. $\varphi$ est-elle définie positive ? définie négative ?
**3.** On pose $e_1 = \varepsilon_1$. Déterminez l'orthogonal $F$ de $e_1$ relativement à la forme quadratique $q$. Quelle est la dimension de $F$ ?
**4.** Choisissez un vecteur $e_2 \in F$ tel que $q(e_2) > 0$. Trouver un vecteur $e_3$ qui est $q-$ orthogonal à $e_1$ et à $e_2$.
**5.** Montrer que $(e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et exprimer la matrice de $q$ dans cette base. Déterminez la signature de $q$. Ce résultat contredit-il les deux derniers de la question **1** ?

**Exercice 2.** On se donne deux entiers $m$ et $n$ tels que $m \leq n$, et on se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique $\cdot$ et de sa norme euclidienne canonique :

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} = \sqrt{u \cdot u}$$

(notée $\|u\|_2$ dans le cours). On se donne également une matrice d'ordre $n \times m$, $A$ et un vecteur colonne $b$ de taille $n$. On définit enfin $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \|Ax - b\|^2.$$

**1.** On définit les fonctions $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\ell : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ :

$$q(u) = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2,$$

$$\ell(x) = Ax - b.$$

On a donc $f = q \circ \ell$.
**1.a.** Calculez les dérivées partielles de $q$. En déduire que $q$ est de classe $C^1$, et la valeur de $D_u q(h)$.
**1.b.** En revenant à la définition, calculez $D_x \ell(h)$.
**1.c.** Déduire des questions précédentes la valeur de $D_x f(h)$, puis que $\nabla f(x) = 2^t A(Ax - b)$.
**2.** On suppose qu'il existe un vecteur $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \geq f(x^*)$. Soit $e$ un vecteur non nul. On définit la fonction $\phi_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\phi_e(t) = f(x^* + te)$.
**2.a.** Montrer que $\phi_e$ est minimale en 0. Montrer que $\phi_e$ est dérivable en 0 et que $\phi'_e(0) = 0$.
**2.b.** En déduire que $\nabla f(x^*) = 0$.
**2.c.** En utilisant **2.b** et le dernier résultat de **1.c**, montrez que :

$$^tAAx^* = {}^tAb.$$

**2.d.** Si $^tAA$ est inversible, montrez qu'il y a un et un seul $x^*$ solution, et donnez son expression.
**3.** A quelle occasion avez-vous vu une formule analogue en cours ? Expliquez très précisément pourquoi on a obtenu le même résultat (par une méthode différente).

**Exercice 3.** On se donne un pavé $P$ de $\mathbb{R}^2$ contenant toutes les parties mises en jeu dans cet exercice. On admettra qu'une réunion (finie) de parties Jordan-mesurables est Jordan-mesurables.
**1.** Soit $A_1, ..., A_n$, $n$ parties de $\mathbb{R}^2$.
**1.a.** Montrez que :

$$1_{\cup_{i=1}^n A_i} \leq \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}.$$

**1.b.** Supposant que toutes les parties sont Jordan-mesurables, qu'en déduit-on concernant $\mu(\cup_i A_i)$ (la réponse sera utile dans **2.b**) ?

**2.** Soit $A$ une partie satisfaisant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_\varepsilon$ pavés $P_1, ..., P_{N_\varepsilon}$ tels que :

$$A \subset \cup_{i=1}^{N_\varepsilon} P_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \mu(P_i) \leq \varepsilon.$$

On note $B_\varepsilon = \cup_{i=1}^{N_\varepsilon} P_i$.
**2.a** $B_\varepsilon$ est-il nécessairement un pavé ? Justifiez.
**2.b.** Montrer que :

$$0 \leq 1_A - 0 \leq 1_{B_\varepsilon} \quad \text{et} \quad \mu(B_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

**2.c.** En déduire que $A$ est Jordan-mesurable et que $\mu(A) = 0$.

**3.** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $S$ le segment joignant les points $(0, 0)$ et $(1, a)$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit $n$ un entier au moins égal à 1. On pose, pour $k$ variant de 0 à $n - 1$ :

$$P_{k,n} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \left[a\frac{k}{n}, a\frac{k+1}{n}\right].$$

**3.a.** Montrer que pour tout $n$, on a :

$$S \subset \cup_{k=0}^{n-1} P_{k,n}.$$

**3.b.** Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu(P_{k,n}) = \frac{a}{n}.$$

**3.c.** Que peut-on en déduire pour $S$ (justifier) ?

# Première Interrogation d'Analyse-algèbre 4, 2003

L'exercice 1 est encore un exercice type à savoir faire les yeux fermés, l'exercice 2 est intermédiaire entre **moy** et **diffc**. C'est un excellent moyen de travailler le chapitre 2 au niveau théorique.

**Cours :** Donner l'énoncé complet du théorème de Cauchy-Schwarz vu en cours. Faire la démonstration complète de la partie inégalité.

**Exercice 1.** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique. On considère la forme quadratique $q$ définie par :

$$q(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2 + 8xy + 4xz.$$

**1.** $q$ est-elle définie positive ? Définie négative ? (On attend des justifications impliquant le minimum de calculs).
**2.** Déterminer l'expression de la forme bilinéaire symétrique $\varphi$ associée, ainsi que la matrice de $q$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
**3.** On se donne la base $\varepsilon_1 = (1, 1, 0)$, $\varepsilon_2 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_3 = (0, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.
**3.a.** Déterminer la matrice de $q$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ en utilisant la définition.
**3.b.** Indiquez deux autres méthodes pour obtenir ce résultat. On attend une description précise des méthodes, un calcul posé, mais il n'est pas demandé d'effectuer le calcul final.
**4.**
**4.a.** Soit $e_1 = (1, 0, 0)$. Déterminez $F = e_1^\perp$.
**4.b.** Déterminez un vecteur $e_2 \in F$ tel que $q(e_2) < 0$.
**4.c.** Déterminez un vecteur $e_3$ non nul dans $e_1^\perp \cap e_2^\perp$.
**4.d.** Montrer que $(e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminez la matrice de $q$ dans cette base.
**4.e.** Déterminer la signature de $q$. Le résultat obtenu est-il en accord avec vos réponses à la question **1** ?

**Exercice 2.** Soit $E$ un espace euclidien. Pour tout s.e.v. $F$ de $E$, $\pi_F$ la projection orthogonale de $E$ sur $F$.
**1.** Montrer que pour tout $u \in E$, $\|\pi_F(u)\| \leq \|u\|$, avec égalité si et seulement si $u \in F$.
**2.** Soit $u \in F \cap G$. Déterminez $(\pi_F \circ \pi_G)(u)$.
**3.** On suppose dans la question **3** qu'il existe un s.e.v. $H$ de $E$ tel que $\pi_F \circ \pi_G = \pi_H$.
**3.a.** A l'aide de **2**, donner une relation entre $F$, $G$ et $H$.
**3.b.** * Soit $u \in H$. Montrez successivemnt, à l'aide de raisonnements par l'absurde, que $u \in G$, puis que $u \in F$.
**3.c.** Résumer la question **3** sous la forme d'une proposition.
**4.** On cherche désormais des conditions assurant que $\pi_F \circ \pi_G = \pi_H$.
**4.a.** * A l'aide de la question **2**, montrez que la condition nécessaire et suffisante est que $\pi_G(F^\perp) \subset F^\perp$.
**4.b.** Montrer qu'une condition suffisante est $\pi_F \circ \pi_G = \pi_G \circ \pi_F$.

# Seconde interrogation d'Analyse-algèbre 4, mai 2003

Les questions 1 et 2 de l'exercice 1 sont **clq** (seule la fin de 2.c est **moy** au niveau de la rédaction), la question 3 est **diffc**). L'exercice 2 est **diffc**, je vous conseille fortement de faire des dessins (avec $n = 2$) et d'essayer de comprendre géométriquement ce que signifie cette hypothèse). La question 1 de l'exercice 3 est **fcl**, la question 2 est **fcl** pour celui qui connaît bien son cours, sinon **moy**, et la question 3 est **diffc**.

**Exercice 1.**
**1.** **1.a.** Rappeler les définitions d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé dans $\mathbb{R}^n$.
**1.b.** On définit dans $\mathbb{R}^2$ les ensembles $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et $B = A \setminus \{(0,0)\}$. $A$ est-il ouvert ? fermé ? (justifier).
**1.c.** Montrer que $(0,0) \in \overline{B}$.
**2.** Etant donnés deux réels strictement positifs $\alpha$ et $\beta$ et un réel $\gamma$, on définit la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in B, \quad f(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x+y}, \quad f(0,0) = \gamma.$$

**2.a.** Montrer que $f$ est continue sur $B$.
**2.b.** On suppose que $\alpha + \beta > 1$. Montrer qu'il existe une valeur de $\gamma$ pour laquelle $f$ est continue sur $A$.
**2.c.** On suppose $\alpha + \beta = 1$. Montrer que pour toute direction $h \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, il existe une valeur de $\gamma$ (dépendant de $h$) de sorte que $f$ soit continue en $(0,0)$ dans la direction $h$. Peut-on trouver une valeur de sorte que $f$ soit continue en $(0,0)$ (justifier soigneusement) ?
**2.d.** On pose $\gamma = 0$. Etudier les continuités directionnelles de $f$ en $(0,0)$ lorsque $\alpha + \beta < 1$.
**2.e.** En déduire la condition nécessaire et suffisante sur $\alpha$ et $\beta$ pour que $f$ soit continue en $(0,0)$ lorsque $\gamma = 0$.
**3.** Désormais, on suppose que $\gamma = 0$. Soit $a, b, c, d$ quatre réels strictement positifs. Etudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction $g : A \to \mathbb{R}$ définie par $g(0,0) = 0$ et :

$$\forall (x,y) \in B, \quad g(x,y) = \frac{x^a y^b}{x^c + y^d}.$$

On pourra, par exemple, se ramener au cas de $f$ en introduisant une bijection (explicite) $\varphi : A \to A$ telle que

$$(\varphi(x,y) \to (0,0)) \Leftrightarrow ((x,y) \to (0,0))$$

et telle que $g \circ \varphi$ soit une fonction $f$ avec des coefficients $\alpha$ et $\beta$ explicites en fonction de $a, b, c, d$.

**Exercice 2.** On dit qu'une norme sur $\mathbb{R}^n$ est uniformément convexe si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon \in ]0;1[, \quad \exists \delta \in ]0;1[, \quad (\|x\| = 1,\ \|y\| = 1,\ \|x-y\| \geq \varepsilon) \Longrightarrow (\|(x+y)/2\| \leq 1 - \delta).$$

Pour chacune des trois normes vues en cours, étudier si elle est uniformément convexe sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

**Exercice 3.** Soit $(E, \|.\|)$ un espace préhilbertien, $q$ une forme quadratique sur $E$. On considère les hypothèses :

**(H1)** $q$ est définie positive.

**(H2)** $\exists \alpha > 0,\ \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad q(u) \geq \alpha \|u\|^2$.

**1.** Montrer **(H2)** $\Rightarrow$ **(H1)**.
**2.** On suppose que $E$ est euclidien. Soit $S = \{v \in E, \quad \|v\| = 1\}$. Montrer que $\inf_{v \in S} q(v) > 0$,

et en déduire que (**H1**) $\Rightarrow$ (**H2**).
**3.** Montrer à l'aide d'un contre-exemple qu'en dimension infinie, on peut avoir **(H1)** et non **(H2)**.

# Partiel de mai 2003

L'exercice 1 est **clq**, sauf A.4.b et B.4 qui sont **diffc**. L'exercice 2 est **clq**, mais presqu'aucun élève n'avait réussi les questions 4 et 5 : traitez-les avec soin. L'exercice 3 est de difficulté **moy** à **diffc**, c'est un excellent exercice pour réviser l'aspect théorique sur la différentiabilité.

**Exercice 1.** On considère dans tout cet exercice la matrice symétrique d'ordre $p$ :

$$A_p(\lambda) = \left(\lambda^{|j-i|}\right)_{1\leq i,j\leq n},$$

où $p$ est un entier au moins égal à 2, et $\lambda$ un réel. Ainsi, on a par exemple :

$$A_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $q_p$ la forme quadratique de matrice $A_p(\lambda)$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\varphi_p$ la forme bilinéaire symétrique associée. On admettra sans démonstration les énoncés suivants :

**E1.** Pour tout $p \geq 2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A_p(\lambda)) = (1-\lambda^2)^{p-1}$.

**E2.** Soit $E$ un espace vectoriel muni d'une forme quadratique $q$ de signature $(s,t)$ et $F$ un s.e.v. de $E$. On note $(s_F, t_F)$ la signature de la restriction de $q$ à $F$. Alors $s_F \leq s$ et $t_F \leq t$.

**E3.** Soit $E$ un espace vectoriel muni d'une forme quadratique $q$. On note $A$ la matrice de $q$ dans une base de $E$. Si $\det(A) < 0$, alors la signature de $q$ est de la forme $(s,t)$ avec $s+t = n$ et $t$ impair. Si $\det(A) > 0$, alors la signature de $q$ est de la forme $(s,t)$ avec $s+t=n$ et $t$ pair.

La question **A.4** n'est pas nécessaire pour la suite et peut être passée.

**Partie A.** On suppose dans toute cette partie que $p = 2$.

**A.1.** Donner les expressions de $q_2$ et de $\varphi_2$.

**A.2.** A l'aide du critère trace-déterminant vu en TD, discuter la signature de la forme quadratique $q_2$ selon la valeur de $\lambda$.

**A.3.** On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trouver un vecteur $e_2$ de $\mathbb{R}^2$ (dépendant de $\lambda$) de sorte que la matrice de $q_2$ dans la base $(e_1, e_2)$ soit diagonale à éléments diagonaux dans $\{-1, 0, 1\}$. Retrouver les résultats de **A.2** concernant la signature de $q_2$. On note $\Lambda$ l'ensemble des réels $\lambda$ pour lesquels $q_2$ est définie positive.

**A.4.** Dans cette question uniquement, ou deux paramètres interviennent, on note $q_2^{(\theta)}$ la f.q. de matrice $A_2(\theta)$ dans la base canonique. Soit $\lambda \in \Lambda$ et $\mu \in \mathbb{R}$.
**A.4.a.** Montrer qu'il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $\mathbb{R}^2$ qui est orthonormée pour la forme quadratique $q_2^{(\lambda)}$ et orthogonale pour $q_2^{(\mu)}$.
**A.4.b.*** En suivant l'esprit du cours, comment feriez-vous pour la déterminer ? (On ne demande pas d'effectuer les calculs, juste d'expliquer la démarche).

**Partie B.** On revient au cas $p$ arbitraire. Bien que ce ne soit pas nécessaire, vous pouvez commencer (sur votre brouillon) par traiter les questions pour $p = 3$ si cela vous aide.

**B.1.** On suppose que $\lambda = 1$, et l'on note $e_1$ le premier vecteur de la base canonique.
**B.1.a.** Calculer $q_p(e_1)$. Calculer $A_p(1)e_1$ et en déduire le $q_p-$orthogonal de $e_1$, que nous noterons $F$.
**B.1.b.** Déterminez une base de $F$ et sa dimension (on ne demande pas de justifier que les vecteurs proposés forment une base).
**B.1.c.** En déduire une base dans laquelle la matrice de $q_p$ est diagonale avec éléments diagonaux $1, 0, 0, ..., 0$, puis la signature de $q_p$.

**B.2.** En suivant un plan analogue à **B.1**, donner la signature de $q_p$ et une base orthogonale lorsque $\lambda = -1$.

**B.3.** On suppose que $|\lambda| < 1$. Montrer que $q_p$ est définie positive.

**B.4.*** On suppose que $|\lambda| > 1$. En travaillant par récurrence sur $p$, donner la signature de $q_p$ (il est conseillé, sur son brouillon, de regarder les cas $p = 2$, déjà réglé en **A** et les passages de $p = 2$ à $p = 3$, éventuellement de $p = 3$ à $p = 4$).

**Exercice 2.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0, 0) = 0$ et pour tous $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + |y|}.$$

On note :

$$O^+ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y > 0\}$$
$$O^- = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y < 0\}$$
$$O^o = \mathbb{R}^* \times \{0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad y = 0\}.$$

**1.** Répondre aux questions suivantes en utilisant les moyens de ce cours : $O^+$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}^2$ ? fermé ? Mêmes questions pour $O^o$.

**2.** Simplifiez l'expression de $f$ sur $O^-$ (au niveau de la valeur absolue). En déduire que $f$ est $C^1$ sur $O^-$ et donner l'expression des dérivées partielles de $f$ sur $O^-$.

**3.** Montrer que $f$ est $C^1$ sur $O^+$ et donner l'expression des dérivées partielles de $f$ sur $O^+$. (On pourra soit utiliser un argument de symétrie par rapport au cas précédent pour éviter les calculs, soir reprendre un chemin analogue).

**4.** Etudier l'existence des dérivées partielles en un point $(x_0, 0) \in O^o$.

**5.** On étudie maintenant la fonction en $(0,0)$.
**5.a.** Montrer que $f$ est continue en $(0,0)$.
**5.b.** Montrer que $f$ admet en $(0,0)$ une dérivée directionnelle dans toute direction $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, et la calculer.
**5.c.** $f$ est-elle différentiable en $(0,0)$ (on justifiera la réponse) ?

**6.** On se propose de calculer $I = \int\int_E f(x,y)dxdy$ sur l'ensemble Jordan-mesurable :

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y \leq 1\}.$$

On se propose de le faire via un changement de variable : $(x,y) = \phi(u,v) = (v, y = u - v^2)$.
**6.a.** Déterminer le domaine $A = \phi^{-1}(E)$ image réciproque de $E$ par ce changement de variable. En dessiner une allure.
**6.b.** Ecrire le changement de variables en intégrant d'abord par rapport à $v$ (c'est-à-dire qu'on se ramenera à une expression du type $I = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(u)}^{\phi_2(u)} g(u,v)dv\right] du$, où $a$, $b$ sont des réels et $\phi_1$, $\phi_2$, $g$ des fonctions explicites à déterminer). Terminer le calcul de $I$.

**Exercice 3.** Les questions **2** et **3** sont indépendantes. Soit $\Omega$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\Omega$, et $a \in \Omega$.

Etant donné $h \in \mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{C}_{a,h}$ l'ensemble des applications $\gamma$ définies et continues sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\Omega$, différentiables en 0 et telles que $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = h$.

On dit que $f$ est quasi-différentiable en $a$ si il existe une application linéaire $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $\gamma \in \mathcal{C}_{a,h}$, $f \circ \gamma$ est dérivable en 0 et $(f \circ \gamma)'(0) = u(\gamma'(0))$. $u$ s'appelle une quasi-différentielle de $f$ en $a$.

**1.** Soit $h \in \mathbb{R}^n$.
**1.a.** Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tels que si $|t| \leq \varepsilon$, alors $a + th \in \Omega$.
On définit alors $\sigma : ]-\varepsilon; \varepsilon[ \to \mathbb{R}$ par $\sigma(t) = a + th$.
**1.b.** Montrer que $\sigma \in \mathcal{C}_{a,h}$.
**1.c.** Déduire de **1.b.** que si $f$ est quasi-différentiable en $h$ de quasi-différentielle $u$, elle admet une dérivée directionnelle dans toute direction $h$ et $\partial_h f(a) = u(h)$.
**1.d.** En déduire que $u$ est unique. On la note alors $q_a f$.

**2.** On suppose que $f$ est Lipschitzienne de rapport $k$ (i.e. $\forall a, b \in \Omega$, $|f(b) - f(a)| \leq k\|b - a\|$), et qu'elle admet des dérivées directionnelles dans toute direction, et que $h \to \partial_h f(a)$ est linéaire. Montrer que $f$ est quasi-différentiable et que $q_a f(h) = \partial_h f(a)$.

**3.** Montrer que si $f$ est différentiable en $a$, elle est quasi-différentiable en $a$, et $q_a f = D_a f$.

# Partiel de Septembre 2003

L'exercice 3 est **clq** et peut être traité très rapidemnt si vous savez prendre un peu de recul. L'exercice 2 est **clq**, sauf sa dernière question que je classe en **diffc**. Le dernier exercice est plus théorique. Ces questions sont **moy**, sauf celles précédées d'une étoile qui sont **diffc**.

**Exercice 1.** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, e_3)$ et dans lequel on considère les vecteurs $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_1 - e_2$, $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $E$ (on ne demande pas de le démontrer). On introduit également une forme bilinéaire symétrique $\varphi$ de forme quadratique associée $q$ en posant :

$$q(u_1) = q(u_2) = 1, \quad q(u_3) = -1, \quad \varphi(u_1, u_2) = \varphi(u_1, u_3) = \varphi(u_2, u_3) = 0.$$

**1.** Déterminez la signature de $\varphi$.
**2.** Déterminer $\{u_1, u_2\}^{\perp_\varphi}$.
**3.** Déterminer la matrice de $\varphi$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$.
**4.** Déterminer une base $\varphi-$orthogonale $(v_i)_i$ commençant par le vecteur $v_1 = e_2$.

**Exercice 2.** Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^5}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}.$$

**1.** Montrer que $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. Déterminez ses dérivées partielles, puis sa différentielle.
**2.**
**2.a.** Montrer que $f$ est continue en $(0, 0)$. (On pourra, par exemple, montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ voisins de $(0, 0)$, $|f(x, y)| \leq 2\|(x, y)\|_\infty$).
**2.b.** Montrer que $f$ admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions $h$ en $(0, 0)$, et les calculer.
**2.c.** En déduire les dérivées partielles de $f$ en $(0, 0)$.
**2.d.** Montrer à l'aide de **2.c** et de **1** que $f$ n'est pas $C^1$ en $(0, 0)$.
**2.e. *** A l'aide de **2.b**, étudier si $f$ est différentiable en $(0, 0)$.

**Exercice 3.** Les questions précédées d'une étoile sont plus difficiles. $O$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$.

**Partie A.** Soit deux fonctions continues $\varphi_1$ et $\varphi_2$ de $O$ dans $\mathbb{R}$. On définit la fonction $\psi : O \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in O, \quad \psi(x) = \max\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\} = \frac{|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| + \varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{2}$$

(on ne demande pas de montrer la dernière relation).
**A.1.** Montrer que $\psi$ est continue sur $O$.
**A.2.** Soit $x_0 \in O$ et $h \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\varphi_1$ et $\varphi_2$ admettent en $x_0$ une dérivée directionnelle à droite dans la direction $h$. On rappelle que la définition de la dérivée directionnelle à droite est :

$$\partial_h^+ f(x_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left[ f(x_0 + th) - f(x_0) \right].$$

**A.2.a.** Montrer (par exemple en revenant à la définition de la dérivée directionnelle) que pour tout $i \in \{1, 2\}$, il existe une fonction $\varepsilon_i$ définie au voisinage à droite de 0 (dans $\mathbb{R}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$, de limite nulle à droite en 0 et telle que :

$$\varphi_i(x_0 + th) = \varphi_i(x_0) + t\partial_h^+ \varphi_i(x_0) + t\varepsilon_i(t).$$

**A.2.b.** On suppose que $\varphi_1(x_0) > \varphi_2(x_0)$. Montrer qu'on a encore $\varphi_1 > \varphi_2$ sur un voisinage de $x_0$ et en déduire l'existence et la valeur de $\partial_h^+ \psi(x_0)$. (On ne traite pas le cas $\varphi_1(x_0) < \varphi_2(x_0)$ qui serait analogue).
**A.2.c.** On suppose que $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$. Démontrer l'existence de $\partial_h^+ \psi(x_0)$ et la calculer. (On pourra utiliser **A.2.a** et séparer les cas $\partial_h^+ \varphi_1(x_0) > \partial_h^+ \varphi_2(x_0)$ et $\partial_h^+ \varphi_1(x_0) = \partial_h^+ \varphi_2(x_0)$).
**A.2.d.** Résumer sous forme la plus synthétique possible les résultats de la question **A.2.** On pourra introduire l'ensemble :

$$I(x_0) = \{i \in \{1, 2\}, \quad \psi(x_0) = \varphi_i(x_0)\}.$$

**A.3.** Commenter à l'aide de **2.** l'existence d'une dérivée à droite et à gauche en $x_0 = \pi/4$ dans le cas suivant : $O = \mathbb{R}$, $\varphi_1 = \sin$, $\varphi_2 = \cos$.

**Partie B.** Dans cette partie, on se donne un compact $K$ non vide de $\mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$), et l'on considère l'ensemble $O \times K$ des couples $(x, y)$ avec $x \in O$ et $y \in K$. C'est donc un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, qui est lui-même identifiable à $\mathbb{R}^{n+p}$ à l'aide d'une bijection linéaire canonique. La question **B.1** est délicate et non nécessaire pour la suite. N'y passez pas trop de temps. On se donne enfin une fonction $f : O \times K \to \mathbb{R}$ continue.
**B.1.*** $O \times K$ peut-il être un ouvert de $\mathbb{R}^{p+n}$ ? (On attend une réponse avec justification au programme de cet enseignement).
**B.2.** On pose, pour $a \in O$ :

$$M(a) = \sup_{y \in K} f(a, y) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \text{et} \quad \Lambda(a) = \{y \in K, \quad f(a, y) = M(a)\}$$

($M(a) = +\infty$ est équivalent au fait que l'ensemble des valeurs $\{f(a, y), y \in K\}$ est non majoré).
**B.2.a.** Montrer que pour tout $a \in O$, $M(a) \in \mathbb{R}$ et que $\Lambda(a)$ est un compact non vide de $\mathbb{R}^p$.
**B.2.b.** Montrer que pour tous $(a, b) \in O \times O$ :

$$|M(a) - M(b)| \leq \sup_{y \in K} |f(a, y) - f(b, y)|.$$

**B.2.c.** * Déduire de **B.2.b.** que $M$ est continue.
**B.3.** * Redémontrez le résultat de **A.1** à partir de **B.2.c.** (on attend une justification *complète*).