Rappels de cours

- **P**ériode : une fonction est dite périodique, de période T, lorsqu'elle vérifie :

$$\boxed{f(t+T) = f(t) \quad \forall\ t}$$

On peut avoir affaire à deux types de périodicités : temporelles et spatiales.

- **T**outes les propriétés mathématiques (de linéarité principalement) des intégrales sont très utiles pour résoudre la plupart des exercices qui suivent.

Par exemple : $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$; $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$ ....etc.

- **V**aleur moyenne d'une fonction périodique :

Idée : sur une période, on calcule la valeur moyenne continue qui représente la même surface que celle obtenue en faisant : $\boxed{y_{moy} = \frac{A^+ - A^-}{T}}$

Quand la fonction devient trop " compliquée ", on calcule : $\boxed{y_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt}$

- **V**aleur moyenne d'une fonction non périodique :

Sur l'intervalle [a , b], et si la fonction est intégrable sur cet intervalle, $\boxed{y_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(t)\, dt}$

- **V**aleur efficace d'une fonction périodique : $\boxed{Valeur\ efficace = \sqrt{\frac{carré\ moyen}{T}}}$

Elle est intéressante car l'énergie mise en jeu dans le phénomène est proportionnelle au carré de l'amplitude de la fonction périodique.

- **M**athématiquement : $\boxed{y_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)\, dt}$

- **L**a valeur moyenne d'une fonction alternative est nulle $\Leftrightarrow \quad A^+ = A^-$
- **T**oute fonction périodique est la somme d'une composante continue -ou valeur moyenne (qui peut être nulle)- et d'une fonction alternative.
- **U**ne fonction alternative n'est pas forcément sinusoïdale.
- **U**ne fonction sinusoïdale est forcément alternative (sinon, on parle de fonction périodique).

Exercices avec solutions

Exercice 1

On considère le signal périodique suivant (figure 1).

1.1) Quelle est la valeur moyenne de ce signal?

1.2) Calculer la valeur efficace de V (t).

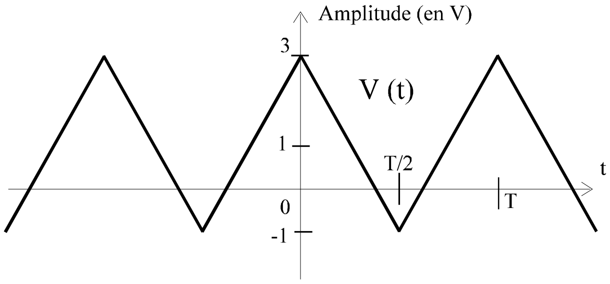
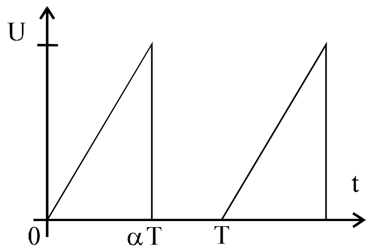


Figure 1

Exercice 2 : Résistance chauffante

On rappelle qu'en continu, la puissance dissipée par effet Joule par une résistance est donnée par $P_J = R\,i^2$.

Une résistance R de valeur 10 Ω est alimentée par un signal périodique, dont l'allure est donnée à la figure ci-dessous :



2.1) U = 220 V. Donner la valeur de α pour que la résistance dissipe 100 W.

2.2) Quelle est alors la valeur moyenne < U > de u (t) ?

Solutions

Exercice 1 :

1.1) Valeur moyenne de ce signal.

Il apparaît clairement que le signal périodique donné à étudier est un signal triangulaire symétrique -2V / +2V , décalé de +1V.
On sait (cf cours) qu'un signal périodique est la somme d'un signal alternatif (de valeur moyenne nulle) et d'une composante continue, égale à la valeur moyenne.

Ici, le signal triangulaire est la partie alternative du signal et la composante continue, égale à +1V est la valeur moyenne.

Dit autrement : si on décale V(t) de 1 V vers le bas, on retrouve un signal de valeur moyenne nulle.

$\boxed{\text{Conclusion : } V_{moyen} = +\,1V}$

[1 pt]

1.2) Valeur efficace de V (t).

V (t) est un signal du type : V (t) = f (t) + C^{ste}

avec :

f (t) = signal triangulaire symétrique, de valeur moyenne nulle et C^{ste} = valeur moyenne = +1 V.

Par définition :

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T V^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(f(t)+C^{ste}\right)^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt + \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\times 1\,dt}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T C^2\,dt}_{=C^2}$$

Il ne reste donc qu'une intégrale à calculer (la première), soit :

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T V^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt + \mathrm{C}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt + 1 \quad \text{car C = 1}$$

- Calcul de $\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt$:

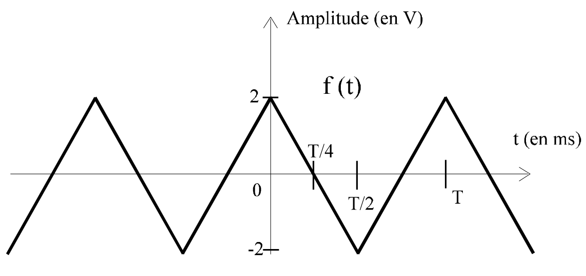


Figure 1

f(t) est donnée à la figure 1 ci-contre. C'est un signal triangulaire symétrique -2V/+2V, de période T

Sur la figure 1 bis, qui représente $f^2(t)$, on s'aperçoit que le fait d'élever au carré donne une période qui devient T / 2 et que l'axe Oy est axe de symétrie (en effet, la surface de -T/4 à 0 est la même que de 0 à T/4....même chose sur chaque intervalle de durée T/4).

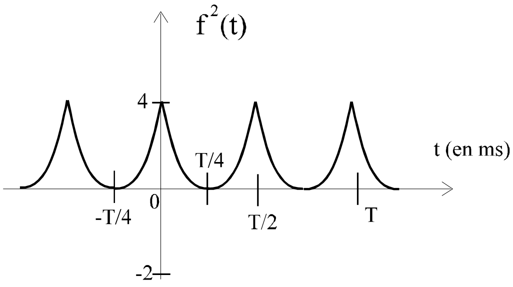


Figure 1 bis

Dans les calculs, on peut utiliser les égalités suivantes :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt = \frac{4}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{0} f^2(t)\,dt = \mathrm{J}$$

Une rapide étude nous donne l'équation de f (t) **de -T/ 4 à 0**, soit f (t) = $\frac{8t}{T}+2$ sur cet intervalle.

D'où J = $\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt = \frac{4}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{0} f^2(t)\,dt = \frac{4}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{0}\left(\frac{8t}{T}+2\right)^2 dt = \frac{4}{3}$ après calculs.

Conclusion : la valeur efficace V_{eff} = $\sqrt{1+\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1{,}52\,V$

Exercice 2 :

2.1) La puissance dissipée par effet Joule (par une résistance) en continu vaut $P_J = R\,i^2$.
En régime variable, $P_J = Ri_{eff}^2$, et i_{eff}^2 est le courant équivalent (au carré) qui causerait la même dissipation d'énergie en continu (par période).

$$\Rightarrow \quad P_J = Ri_{eff}^2 = R\left(\frac{U_{eff}^2}{R^2}\right) = \frac{U_{eff}^2}{R}$$

Calculons $U_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T}\frac{U^2t^2}{(\alpha\,T)^2}dt = \frac{U^2}{\alpha^2T^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\alpha T} = \frac{U^2\alpha^3T^3}{3\alpha^2T^3} \Leftrightarrow \boxed{U_{eff}^2 = \frac{\alpha\,U^2}{3}}$

D'où : P_J = 100 W = $\frac{\alpha\,U^2}{3R}$, et enfin : $\boxed{\alpha = \frac{100\times 3\times R}{U^2}}$

Application Numérique : **α = 0,062**

2.2) Calcul de la valeur moyenne de U, notée < U > :

$$< U >= \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T}\frac{Ut}{\alpha\,T}dt = \frac{U}{T^2\alpha}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\alpha T} = \frac{U\alpha^2T^2}{2T^2\alpha} = \frac{\alpha\,U}{2}$$

Donc $\boxed{< U >= \frac{\alpha\,U}{2}}$

Application Numérique : **< U > = 6,82 V**

Exercices avec réponses

Exercice 1 : Valeur moyenne et valeur efficace

Rappeler les définitions de ymoy, yeff lorsque y = f (t) est une fonction périodique, avec t appartenant à [t1, t1+ T], T étant la période de y.
Etablir les relations existant entre ymoy, yeff, Ymoy et Yeff dans les cas suivants :

1.1) Y = y + C (C est une constante réelle).

1.2) Y = |y| (fonction redressement).

1.3) Y = f(t + τ) (Changement d'origine).

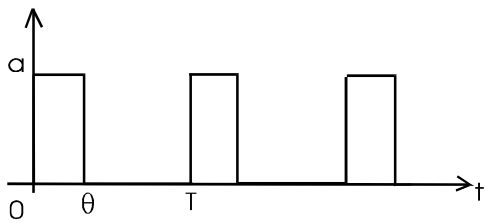
1.4) Y = f(-t) (Symétrie de le courbe /axe)

1.5) Y = -f(-t) (Symétrie de la courbe /à un point).

Exercice 2 : valeur moyenne, valeur efficace

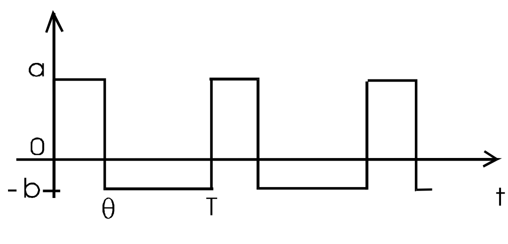
En utilisant au mieux les résultats de l'exercice 1, calculer la valeur moyenne, puis la valeur efficace des fonctions suivantes :

2.1) Fonction "créneaux"

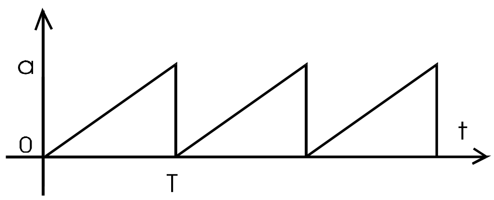


2.2) même question dans le cas particulier où θ = T/2

2.3) Fonction "créneaux alternés"

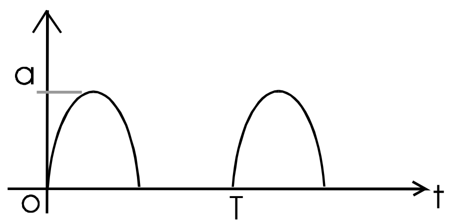


2.4) Fonction dents de scie à flancs verticaux

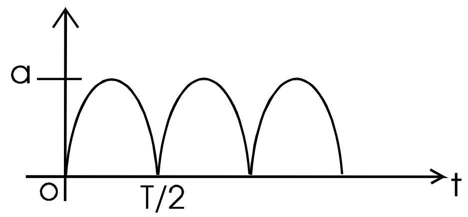


2.5) Fonction "sinusoïde redressée"

2.5.1) Simple alternance



2.5.2) Double alternance



2.6) $y = a\,t^2$ pour $t \in [0\,;\,T]$

2.7) $y = a\,t^3$ pour $t \in [0\,;\,T]$

Réponses :

Exercice 1 :

1.1) $Y = y + C$

Relations entre valeurs moyennes : $Y_{moy} = y_{moy} + C$

Entre valeurs efficaces : $Y_{eff}^2 = y_{eff}^2 + C^2 + \underbrace{2\,C\,y_{moy}}_{terme\ d'interférence}$

Remarque : l'énergie de la somme des deux vibrations est égale à la somme de l'énergie de chacune des vibrations plus un terme " croisé " mettant en jeu le produit des valeurs moyennes.
Ce produit pouvant d'ailleurs être nul si l'une ou les deux vibrations ont une valeur moyenne nulle.

1.2) $Y = |y|$

Valeurs moyennes : si on appelle $\mathbf{A^+}$ l'aire totale au dessus de zéro sur une période, et $\mathbf{A^-}$ l'aire totale au dessous de zéro sur une période, alors on a :

$Y_{moy} = \dfrac{A^+ + A^-}{T}$ et $y_{moy} = \dfrac{A^+ - A^-}{T}$ On peut donc en déduire que $\boxed{Y_{moy} - y_{moy} = \dfrac{2A^-}{T}}$.

Valeurs efficaces : lorsqu'on élève au carré, les surfaces sont les mêmes, donc $\boxed{Y_{eff} = y_{eff}}$.

1.3) $Y = f(t + \tau)$
La valeur moyenne et la valeur efficace sont inchangées par changement d'origine des temps car les surfaces décrites sont les mêmes.

1.4) Y = f(-t)

Lorsque on change t en -t, on ne change pas la valeur moyenne, ni la valeur efficace, car la forme des courbes est inchangée. Cela revient à faire dérouler le temps “ à l’envers ”.

1.5) Y = -f(-t)

La valeur moyenne change de signe, mais pas la valeur efficace.

Exercice 2 :

2.1) $y_{moy} = \frac{a\theta}{T}$ $y_{eff} = a\sqrt{\frac{\theta}{T}}$ 2.2) $y_{moy} = \frac{a}{2}$ $y_{eff} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

2.3) Fonction créneaux alternés

On peut utiliser le résultat de l’exercice 1.1 et l’appliquer aux créneaux de la question 2.1: en effet, la valeur moyenne est celle des créneaux de la question 2.1, mais décalée de **- b** et ayant une amplitude qui vaut **a + b**

$\Rightarrow y_{moy} = (a+b)\frac{\theta}{T} - b \cdot$

On peut toutefois refaire ce calcul : $y_{moy} = \frac{1}{T}\left[\int_0^\theta a\,dt - \int_\theta^T b\,dt\right] = \frac{1}{T}\left[a\theta - bT + b\theta\right] = (a+b)\frac{\theta}{T} - b \cdot$

Pour la valeur efficace, on utilise les mêmes résultats de l’exercice 1.1) , ce qui donne :

$y_{eff}^2 = \frac{(a+b)^2\,\theta}{T} - 2b\frac{(a+b)\,\theta}{T} + b^2$ Soit, après simplifications : $\boxed{y_{eff}^2 = \frac{(a^2-b^2)\,\theta}{T} + b^2}$

Vérification : $y_{eff}^2 = \frac{1}{T}\left[\int_0^\theta a^2\,dt + \int_\theta^T b^2\,dt\right] = \frac{1}{T}\left[a^2\theta + b^2T - b^2\theta\right] = \frac{(a^2-b^2)\,\theta}{T} + b^2$, qui est le résultat prévu.

2.4) Fonction dents de scie à flancs verticaux

$y_{moy} = \frac{a}{2}$ et $y_{eff} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

On remarquera que $y_{eff} > y_{moy}$.

2.5) Fonction sinusoïde redressée

2.5.1) simple alternance :

$y_{moy} = \frac{a}{\pi}$ et $y_{eff} = \frac{a}{2}$

2.5.2) double alternance :

$y_{moy} = \frac{2a}{\pi}$ et $y_{eff} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Conseil : ces valeurs sont à connaître parfaitement.....

2.6) y = a t^2 pour t $\in$ [0 ; T].

$y_{moy} = \frac{aT^2}{3}$ et $y_{eff} = \frac{aT^2}{\sqrt{5}}$

On notera la dépendance en T^2 des résultats.

2.7) y = a t^3 pour t $\in$[0 ; T]

$y_{moy} = \frac{aT^3}{4}$ et $y_{eff} = \frac{aT^3}{\sqrt{7}}$

Cette fois ci, la dépendance est en T^3.

Exercices à préparer

Exercice 1 : Chaleur molaire moyenne

La chaleur molaire du chrome est donnée, en $J.mol^{-1}.K^{-1}$, en fonction de la température absolue, par la formule :

$$C = 22,4 + 9.88.10^{-3}\,T - \frac{1,84.10^{-5}}{T^2}$$

Calculer la chaleur molaire moyenne entre 0°C et 300°C.

Exercice 2 : Fonction hyperbolique.

On donne (pour u tendant vers 0) : **ln (1 + u) ~ u - u^2/2 + u^3/3 + ...**

2.1) Calculer la valeur moyenne de la fonction y = k / t entre les deux instants t1 et t2.
2.2) Exprimer cette valeur moyenne sous la forme d'un développement limité de trois termes en fonction de Δt = t2 - t1 .
2.3) Donner le développement limité à 3 termes de la valeur y3 de y pour l'instant t3 = (t2 + t1) / 2 en fonction de Δt . En déduire l'erreur absolue que l'on commet en confondant la valeur moyenne de y entre t1 et t2 avec y3 .

Exercice 3 : redressement polyphasé

On considère un système de n tensions sinusoïdales de période T, toutes déphasées de $\frac{2\pi}{n}$.
En utilisant les redresseurs appropriés, ces n tensions sinusoïdales sont redressées.
La tension qui en résulte est unidirectionnelle (en trait plein sur la figure 2).
Sur une période T, on compte n calottes complètes et identiques, comme représenté sur la figure 2 ci-dessous :

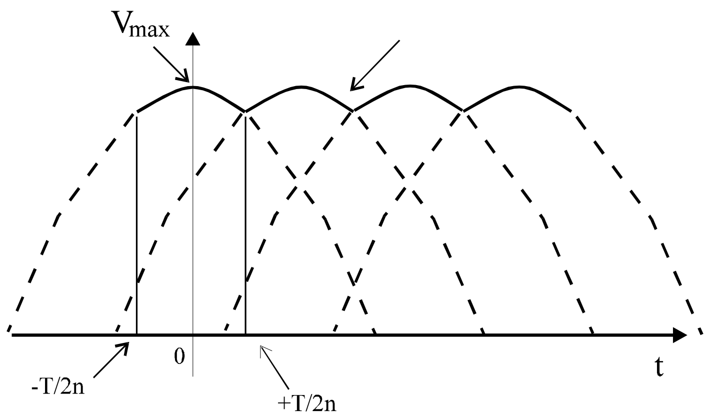


Figure 2

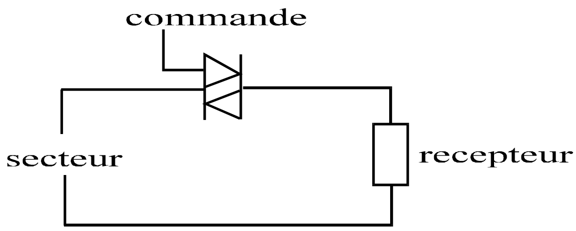
La première de ces calottes sinusoïdales est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, c'est à dire entre les instants -T/2n et +T/2n

3.1) Calculer la valeur moyenne de cette tension unidirectionnelle, obtenue par redressement de n tensions sinusoïdales déphasées de 2π / n.
3.2) Calculer la valeur efficace de cette tension.
3.3) Application numérique : V_{max} = 300 V

Calculer V_{moy} et V_{eff} pour n = 2 , n= 3 et n =6 et conclure.

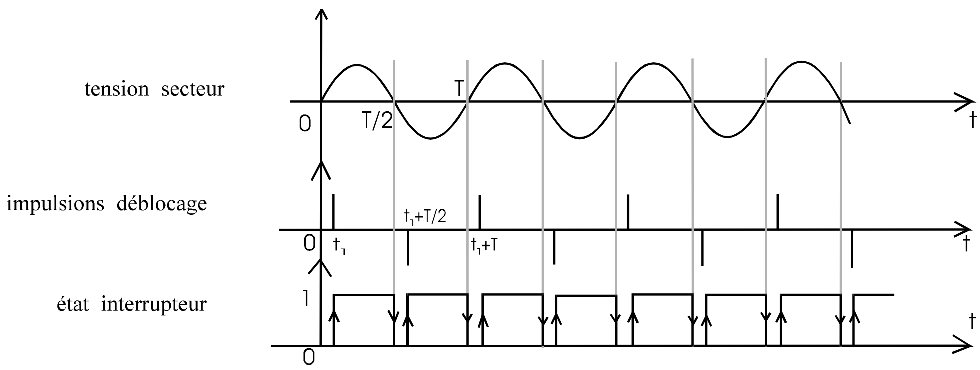
Exercice 4 : Principe d'un gradateur.

On alimente un récepteur, supposé purement résistif, à l'aide d'un interrupteur bidirectionnel commandé. Le dispositif de commande n'est pas étudié dans cet exercice.



La tension d'alimentation est celle délivrée par le secteur (f=50 Hz), de valeur efficace 220 V.
Lorsque l'interrupteur est ouvert, le courant qui traverse le récepteur, soit i, est nul.
Lorsque l'interrupteur est fermé, la chute de tension à ses bornes est nulle.

Un exemple est donné, pour lequel on représente les impulsions de déblocage et les périodes pendant lesquelles l'interrupteur commandé est fermé (valeur 1) ou ouvert (valeur 0).



4.1) Représenter I aux bornes du récepteur en fonction du temps pour t_1 quelconque, compris entre 0 et T/2.

4.2) Calculer le courant efficace I_{EFF} traversant le récepteur de même que U_{EFF} en fonction d'un angle θ, avec $\theta / 2\pi = t_1 / T$ (T période de la tension d'alimentation).
Commenter le résultat obtenu en fonction du paramètre θ.