

**Suites arithmétiques**

**I. Exemple 1:**

La production d'une entreprise de matériel électronique était , pour 2006, de 6 000 appareils. L'entreprise prévoit une augmentation de production de 100 appareils par an. Compléter le tableau suivant :

|                   |       |       |       |       |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|
| <b>Année</b>      | 2006  | 2007  | 2008  | 2009  |
| <b>Production</b> | 6 000 | ..... | ..... | ..... |

On obtient ainsi une suite de nombre 6000 ; 6100 ; 6200 ; 6300 en ajoutant 100 à chaque nombre pour obtenir le suivant.

**II. Définition**

On note  $U_1, U_2, U_3$  et  $U_4$  les productions respectives des années 2006, 2007, 2008 et 2009 . Soit  $U_n$  la production de l'année  $n$  et  $U_{n-1}$  la production de l'année précédente.  $U_n$  est forme une suite arithmétique. Donner :

- ✓ son premier terme  $U_1 = \dots\dots\dots$
- ✓ Sa raison  $r = \dots\dots\dots$

La suite des nombres de la production est une **suite arithmétique**.

Le premier terme ou terme de rang 1 est noté  $U_1$  ;

La raison est notée  $r$ .

Le terme de rang  $n$  est noté  $U_n$  ;

Le terme précédent de rang  $n - 1$  est noté  $U_{n-1}$

Dans ces conditions :

$$U_n = U_{n-1} + r.$$

Par exemple :

$$U_2 = U_1 + r ;$$

$$U_3 = U_2 + r, \text{ etc.}$$

**III. Comment calculer directement un terme d'une suite arithmétique ?**

D'après ce qui précède on a :

$$U_2 = U_1 + r ;$$

$$U_3 = U_2 + r,$$

$$U_4 = U_3 + r ;$$

$$U_5 = U_4 + r,$$

$$U_6 = U_5 + r ;$$

$$U_7 = U_6 + r,$$

En additionnant les termes membre à membre, on montre que :

$$U_7 = U_1 + 6 \times r = U_1 + (7 - 1) \times r$$

En déduire le terme général  $U_n$  de la suite arithmétique en fonction uniquement de son premier terme  $U_1$  , du rang  $n$  et de la raison  $r$ .

$$U_n = \dots\dots\dots$$

Plus généralement on admet donc que pour tout  $n > 1$ :

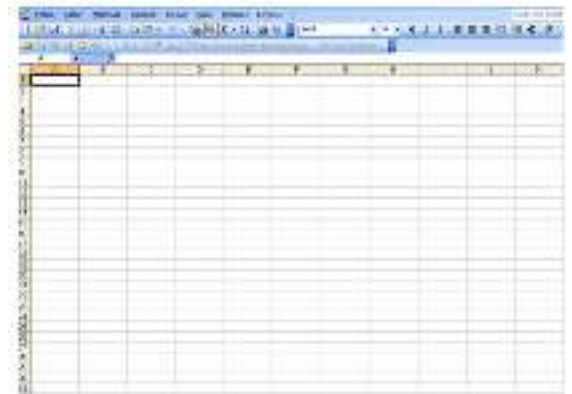
$$U_n = U_1 + (n - 1) r.$$

**IV. Application :**

Soit la suite géométrique  $u_n$  de premier terme  $u_1 = 6000$  et de raison  $r = 100$

**1. Utilisation d'EXCEL.**

- Ouvrir EXCEL.
- En **A1** : taper « **Rang n** ».
- En **A2** : taper « **1** »
- En **B1** : taper « **Termes de la suite  $u_n$**  »
- En **B2** : taper « 6000 »

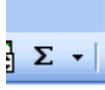
**Calculs de rangs n.**

- Dans la case **A3** : Taper « = **A2 + 1** ».
  - **Incrémentation de la première colonne**: clic gauche de la souris sur le carré noir dans le coin droit de la case A3 (une petite croix apparaît).
- En maintenant le clic gauche enfoncé, sélectionner toutes les valeurs jusqu'à la ligne 21.  
Valider en appuyant sur « **Entrée** »

**Calculs des termes de la suite  $u_n$ .**

- En case **B3** : taper « **B2+100** ».
- **Incrémentation de la deuxième colonne**: clic gauche de la souris sur le carré noir dans le coin inférieur droit de la case B3 (une petite croix apparaît). En maintenant le clic gauche enfoncé, sélectionner toutes les valeurs jusqu'à la ligne 21.
- Valider en appuyant sur « **Entrée** ».

- Dans la cellule A22 taper  $S_{20}$

- En case **B22** : cliquer le symbole  de la barre d'outils (assurez-vous que les cellules B2 à B22 soient sélectionnées)
- Valider en appuyant sur « **Entrée** ».

**Conclusion :**

- Donner la valeur du terme de rang 20, noté  $u_{20}$
- Donner le nombre total d'appareils produits en 20 années de services.

**2. Utilisation du formulaire.**

- ✓ Recopier dans le formulaire, la formule permettant de calculer la somme des  $n$  premiers termes d'une suite arithmétique en fonction du terme de rang 1,  $u_1$ , du terme de rang  $n$ ,  $u_n$  et de la raison  $r$
- ✓ A partir du texte de l'exemple donner les valeurs suivantes :  $u_1 =$  \_\_\_\_\_  $r =$  \_\_\_\_\_
- ✓ Calculer le terme de rang 20, noté  $u_{20} =$  \_\_\_\_\_
- ✓ Calculer (utiliser la formule recopiée précédemment) :  $S_{20} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{20} =$  \_\_\_\_\_
- ✓ Lire la valeur de la somme du tableau et la comparer avec celle calculée.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

| 1  | rang n | terme de la suite |
|----|--------|-------------------|
| 2  | 1      | 6000              |
| 3  | 2      | 6100              |
| 4  | 3      | 6200              |
| 5  | 4      | 6300              |
| 6  | 5      | 6400              |
| 7  | 6      | 6500              |
| 8  | 7      | 6600              |
| 9  | 8      | 6700              |
| 10 | 9      | 6800              |
| 11 | 10     | 6900              |
| 12 | 11     | 7000              |
| 13 | 12     | 7100              |
| 14 | 13     | 7200              |
| 15 | 14     | 7300              |
| 16 | 15     | 7400              |
| 17 | 16     | 7500              |
| 18 | 17     | 7600              |
| 19 | 18     | 7700              |
| 20 | 19     | 7800              |
| 21 | 20     | 7900              |
| 22 | S20    | 139000            |

**3. Exploitation.**

En suivant l'énoncé de l'exemple 1, calculer en utilisant  $U_n = U_1 + (n - 1) r$  :

- a) la production en 2012 :  $U_7 = \dots\dots\dots$  ;
  
- b) au bout de combien d'années l'entreprise atteindra-t-elle une production de 7 000 appareils ?  
 $\dots\dots\dots$
  
- c) la production en 2020 :  $U_{15} = \dots\dots\dots$  ;

**Suites géométriques****1) Activité**

Un agent de maintenance est embauché dans une entreprise. La première année, son salaire mensuel  $S_1$  s'élève à 1 100 €. Elle sera augmentée de 3% chaque année, au 1<sup>er</sup> janvier.

1.1 Calculer en euro le montant du salaire mensuel  $S_2$  de la deuxième année.

Donner un résultat arrondi au centième.

AIDE : utiliser le coefficient multiplicateur pour appliquer le pourcentage

1.2 Calculer en euro le montant du salaire mensuel  $S_3$  de la troisième année.

Donner un résultat arrondi au centième.

1.3 On note  $S_n$  le salaire de l'année  $n$  et  $S_{n-1}$  le salaire de l'année précédente.

Entourer la formule permettant de calculer le salaire  $S_n$  en fonction de  $S_{n-1}$ .

$$S_n = 0,03 \times S_{n-1} \quad S_n = 0,03 + S_{n-1} \quad S_n = 1,03 \times S_{n-1} \quad S_n = S_{n-1} : 1,03$$

*Conclusion* : Les nombres  $S_1, S_2, \dots, S_n$  définissent une *suite géométrique* de  $n$  termes.

Donner la valeur du premier terme  $S_1$  :

Donner la valeur de la raison  $q$  :

*Application* : Calculer le terme de rang 6 de cette suite noté,  $S_6$ .

Donner le résultat arrondi au centième.

## 2) Détermination des termes d'une suite géométrique.

Soit la suite géométrique  $u_n$  de premier terme  $u_1 = 1\,100$  et de raison  $q = 1,03$ .

### 2.1 Utilisation d'EXCEL.

- Ouvrir EXCEL.
- En **A1** : taper « **Rang n** ».
- En **A2** : taper « **1** »
- En **B1** : taper « **Termes de la suite  $S_n$**  »
- En **B2** : taper « **1 100** »

#### Calculs de rangs $n$ .

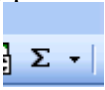
- En case **A3** : Taper « = **A2 + 1** ».
- **Incrémentation de la première colonne**: clic gauche de la souris sur le carré noir dans le coin droit de la case A3 (une petite croix apparaît). En maintenant le clic gauche enfoncé, sélectionner toutes les valeurs jusqu'à la ligne 31.
- Valider en appuyant sur « **Entrée** »

#### Calculs des termes de la suite $u_n$ .

- En case **B3** : taper « =**B2\*1,03** ».
- **Incrémentation de la deuxième colonne**: clic gauche de la souris sur le carré noir dans le coin inférieur droit de la case B3 (une petite croix apparaît). En maintenant le clic gauche enfoncé, sélectionner toutes les valeurs jusqu'à la ligne 43.
- Valider en appuyant sur « **Entrée** ».

#### Valeurs arrondies :

- A l'aide de la souris, sélectionner les termes de la suite de  $u_3$  à  $u_{30}$ .
- Dans « **Format** » : sélectionner :cellule ; Dans « **catégorie** » choisir « **nombre** ».
- Choisir le **nombre de décimales :2** ; puis « **OK** »

- **En case B44** : cliquer le symbole  de la barre d'outils (assurez-vous que les cellules B2 à B43 soient sélectionnées)
- Valider en appuyant sur « **Entrée** ».

#### Conclusion :

- Donner la valeur du terme de rang 30, noté  $u_{30}$ .
- Donner la somme des salaires de 42 années de services.

### 2.2 Utilisation du formulaire.

- Recopier dans le formulaire, la formule permettant de calculer le terme de rang  $n$ ,  $u_n$ , de cette suite géométrique en fonction du terme de rang 1,  $u_1$  et de la raison  $q$

- Donner les valeurs suivantes :  $u_1 =$  \_\_\_\_\_  $q =$  \_\_\_\_\_

- Calculer le terme de rang 30, noté  $u_{30} =$  \_\_\_\_\_

**Suites numériques.**

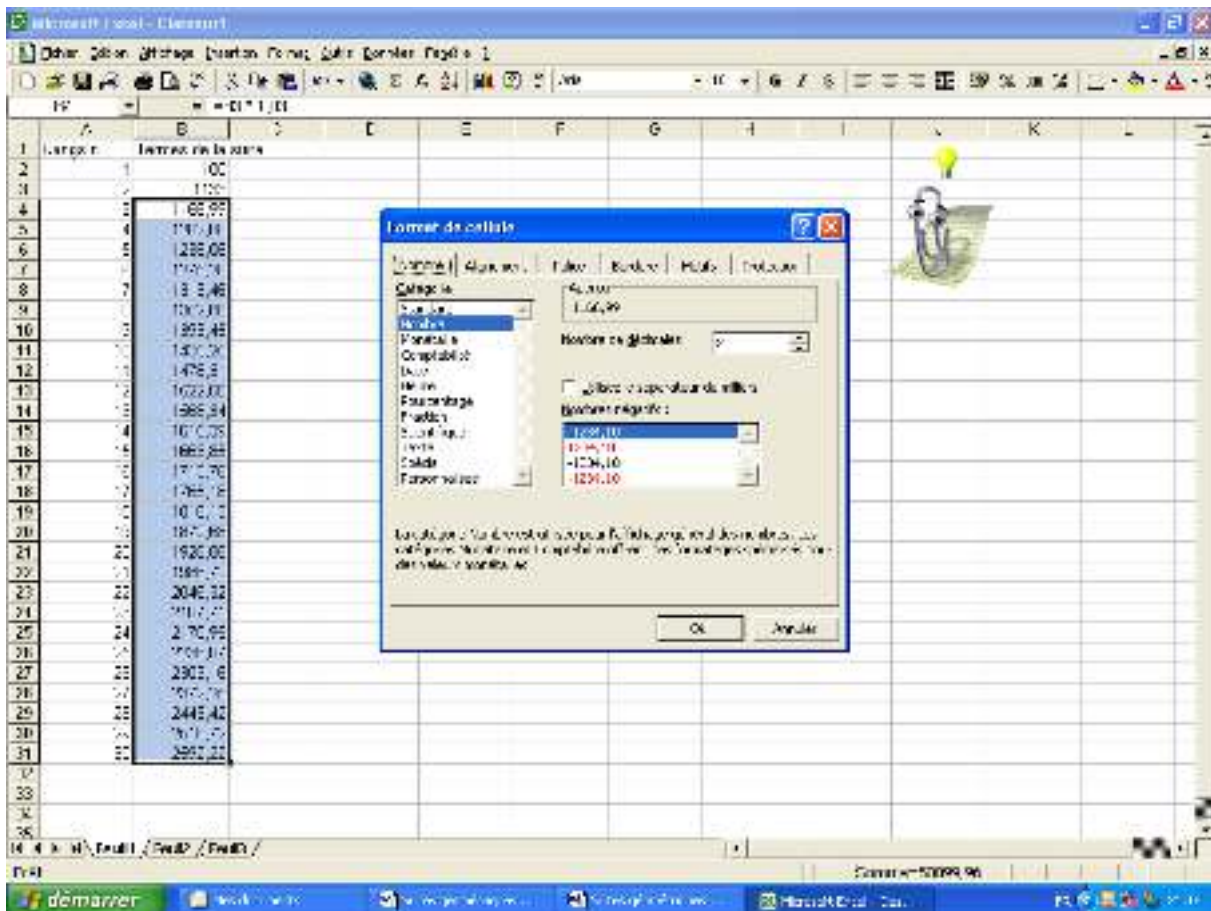
**3) Exploitation.**

On considère que les termes de la suite  $u_n$  correspondent aux montants des salaires mensuels de cet salarié  $S_n$  exprimés en euro et arrondi au centime.

- Donner le salaire mensuel  $S_{10}$  en euros de cet ouvrier au bout de 10 ans.

- Donner le salaire mensuel  $S_{30}$  en euros de cet ouvrier au bout de 30 ans.

Tableau Excel :



La somme des k premiers termes d'une suite géométrique est donnée par la formule suivante :

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = U_1 \times U_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Dans cette formule :

- $U_1$  est le premier terme de cette suite
- $q$  est la raison de la suite

Cet ouvrier devra travailler et cotiser à la sécurité sociale au moins pendant 42 ans pour espérer toucher à sa retraite une pension satisfaisante.

- Calculer le total des sommes perçues par cet ouvrier au bout de 42 ans de service.

### SUITES ARITHMÉTIQUES : Exercices

1. Soit une suite arithmétique  $(U_n)$  de premier terme  $U_1 = 1$  et de raison  $r = 3$ .
  1. Écrivez les quatre premiers termes de la suite.
  2. Calculez le terme de rang 100.
  
2. Calculez la raison d'une suite arithmétique de premier terme - 2 et dont le 15<sup>e</sup> terme est égal à 33.
  
3. Pierre souhaite acheter un caméscope d'une valeur de 1 200 €. Fin janvier il ne dispose que de 870 €, mais en faisant des économies cette somme évolue régulièrement à la fin de chaque mois selon le tableau ci-dessous.

| <i>Mois</i>             | Janvier | Février | Mars  | Avril | Mai   | ..... |
|-------------------------|---------|---------|-------|-------|-------|-------|
| <i>Somme disponible</i> | ...     | 940     | 1010  | 1080  | ...   | ...   |
| $U_n$                   | $U_1$   | $U_2$   | $U_3$ | $U_4$ | $U_5$ | ...   |
| <i>n(rang)</i>          | 1       | 2       | 3     | 4     | 5     | ...   |

On note  $U_1$  la somme disponible fin janvier.

1.
  - a) Reportez la valeur de  $U_1$  dans le tableau ci-dessus.
  - b) Calculez  $U_2 - U_1$ ;  $U_3 - U_2$ ; et  $U_4 - U_3$ .
  - c) Que remarquez-vous ?
  - d) La remarque précédente étant supposée vraie pour tous les mois de l'année, calculez la valeur de  $U_5$  et reportez-la dans le tableau.
2. Montrez que la suite des sommes disponibles est arithmétique. Précisez son premier terme et sa raison (notée  $r$ ).
3.
  - a) Calculez la valeur du terme de rang 6.
  - b) Retrouvez ce résultat en utilisant la relation:  $U_n = U_1 + (n - 1) r$ .
  - c) Cette somme est-elle suffisante pour acheter le caméscope ?
4. À partir de sa prise de décision (fin janvier), combien de mois Pierre devra-t-il attendre pour pouvoir réaliser son achat ?
4. On considère la suite  $S$  des nombres  $U_n$  définis par  $U_n = 6n - 1$  pour  $n$  entier naturel compris entre 1 et 50
  1. Calculer les quatre premiers termes :  $U_1, U_2, U_3$  et  $U_4$  de la suite  $S$ .
  2.
    - a. Calculer  $U_2 - U_1$  et  $U_3 - U_2$ .
    - b. Pour  $1 \leq n \leq 50$  calculer  $U_{n+1} - U_n$ .
    - c. Quelle est la nature de cette suite ?
  3. Pour  $1 \leq n \leq 50$ , la somme  $S_n$  des  $n$  premiers termes de la suite  $S$  est donnée par :
 
$$S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n).$$
    1. Vérifier cette relation pour  $n = 4$ .
    2. Montrer que pour  $1 \leq n \leq 50, S_n = 3n^2 + 2n$ .
    3. Déterminer le nombre  $n$  pour lequel  $S_n = 4\ 880$

## SUITES GÉOMÉTRIQUES

I. Soit une suite géométrique  $(U_n)$  de premier terme  $U_1 = 16$  et de raison  $r = \frac{1}{2}$

1. Écrivez les cinq premiers termes de la suite.
2. Calculez le terme de rang 10.

II. Soit  $(U_n)$  une suite géométrique telle que  $U_1 = 2$  et  $U_5 = 162$ .  
Calculez sa raison.

### III. Séries du Capitaine Renard

Les séries Renard forment des suites géométriques; elles sont à la base des normes employées dans l'industrie (valeur des résistances électriques, dimensions des outils pour les fabricants, ...).

Complétez le tableau ci-dessous des 10 premiers termes de la série **R 20**. (Les résultats sont donnés à 0,01 près.)

| $U_1$    | $U_2$       | $U_3$       | $U_4$ | $U_5$ | $U_6$ | $U_7$ | $U_8$ | $U_9$ | $U_{10}$ |
|----------|-------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| <b>1</b> | <b>1,12</b> | <b>1,25</b> |       |       |       |       |       |       |          |

IV. La production d'une entreprise était en 2001 de 12 000 appareils. Cette entreprise prévoit une augmentation annuelle de 5 % par rapport à l'année précédente.

1. Calculez
  - a) la production prévue pour l'année 2002;
  - b) la production prévue pour l'année 2003.
2. En prenant  $U_1 = 12\ 000$ ,  $U_2 = 12\ 600$  et  $U_3 = 13\ 230$ 
  - a) vérifiez que  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  sont les trois premiers termes d'une suite géométrique;
  - b) déterminez la raison de cette suite;
  - c) calculez la production prévue en **2010**.

V. Votre employeur vous donne le choix entre deux propositions de rémunération :

**Première proposition** : salaire mensuel brut 1 200 € la première année puis augmentation de 40 € du salaire mensuel tous les ans, au 1<sup>er</sup> janvier.

**Deuxième proposition** : salaire mensuel brut 1 000 € la première année puis augmentation de 5 % du salaire mensuel tous les ans, au 1<sup>er</sup> janvier.

On se propose d'étudier quelle est la proposition la plus intéressante pour vous.

On note :

- $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ , le salaire mensuel brut, de la première, deuxième, troisième, ... **n-ème** année pour la première proposition ;
- $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ , le salaire mensuel brut, de la première, deuxième, troisième, ..., nième année pour la deuxième proposition.
  1. Calculez  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $U_4$  et  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_4$ .
  2. Donnez la nature et la raison de chacune des suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$
  3. Exprimez  $U_n$  et  $V_n$  en fonction de  $n$ .
  4. Calculez pour les deux propositions le salaire mensuel brut pour la dixième et la onzième année.
  5. À partir de quelle année la deuxième proposition est-elle plus intéressante?