PRÊTS ET EMPRUNTS

Sommaire

Notations

S : Capital en t_0

i : taux intérêts (simple)

t : date courante

T : échéance

$\Gamma = T - t$ (exprimé en fraction d'année)

2) Les intérêts simples

- Définition: A chaque période, **les intérêts simples** ne sont pas incorporés au capital pour le calcul des intérêts de la période suivante. Généralement les intérêts simples s'appliquent pour des opérations de court terme (inférieur à un an).

2.1) Les intérêts post-comptés

- Ils sont payés en Γ : $I_{po} = S \times i \times \Gamma$

- La valeur acquise $\bar{S}$ par un capital est le montant du capital augmenté de l'intérêt post-comptés :

$$\bar{S} = S + I_{po} = S + S \times i \times \Gamma = S\left(1 + i \times \Gamma\right)$$

2.2) Les intérêts pré-comptés

- Les intérêts pré-comptés sont payés en avance.
- i_e= taux d'intérêt pré-compté $\left(i_e \neq i \right)$
- Intérêt pré-compté : $I_{pré} = S \times i_e \times \Gamma$
- Emprunt en $t_0 : S - S \times i_e \times \Gamma = S\left(1 - i_e \times \Gamma\right)$
- L'emprunteur remboursera S à échéance Γ.

2. 3) Taux de rendement φ

- Intérêt post-compté :

$$\varphi \times \Gamma = \frac{S\left(1 - i_e \times \Gamma\right) - S}{S} = i_e \times \Gamma \quad \Rightarrow \quad \varphi = i$$

- Intérêt pré-compté :

$$\varphi' \times \Gamma = \frac{S - S\left(1 - i_e \times \Gamma\right)}{S\left(1 - i_e \times \Gamma\right)} = \frac{S \times i_e \times \Gamma}{S\left(1 - i_e \times \Gamma\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi' = \frac{i_e \times \Gamma}{1 - i_e \times \Gamma}$$

Condition d’équilibre $\varphi' \equiv \varphi$

$$\Rightarrow \quad i \times \Gamma = \frac{i_e \times \Gamma}{1 - i_e \times \Gamma} \qquad \Rightarrow \quad i = \frac{i_e}{1 - i_e \times \Gamma}$$

3) Les intérêts composés

- Un capital est placé à **intérêts composés** lorsqu'à la fin de chaque période, l'intérêt simple est ajouté au capital initial et aux intérêts simples des périodes précédentes pour déterminer l'intérêt simple produit pendant les périodes suivantes.

3.1) Valeur acquise par un capital

- **La valeur acquise** par un capital au bout de Γ périodes correspond à la valeur du capital à la fin de la $\Gamma^{ième}$ période.

$$S_\Gamma = S_0\left(1+i\right)^\Gamma$$

$$\begin{array}{cccccc}
t=0 & t=1 & t=2 & - - - \quad t=\Gamma-2 & t=\Gamma-1 & t=\Gamma \quad > \text{tps} \\
S_0 & S_1 = S_0 + S_0 i & S_2 = S_1 + S_1 i & S_{\Gamma-2} & S_{\Gamma-1} & S_\Gamma = S_0\left(1+i\right)^\Gamma \\
 & = S_0\left(1+i\right) & = S_1\left(1+i\right) & & & \\
 & & = S_0\left(1+i\right)^2 & & &
\end{array}$$

Valeur actuelle : $S_0 = \frac{S_\Gamma}{(1+i)^\Gamma}$

Taux : $(1+i)^\Gamma = \frac{S_\Gamma}{S_0}$ **Intérêts :** $i = \sqrt[\Gamma]{\frac{S_\Gamma}{S_0}} - 1$

L'intérêt produit est égal à la différence entre la valeur acquise et la valeur du capital initial :

$$I_{total} = S_\Gamma - S_0 = S_0\left[(1+i)^\Gamma - 1\right]$$

3.2) Valeur actualisée

$$\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\text{date de référence}}$$

$$\underset{\substack{S_0}}{t=0}\quad \underset{i_1}{\overline{\qquad\qquad}}\quad \underset{S_1}{t=1}\quad i_2\; - - - \quad \underset{S_{t-1}}{t-1}\;\overline{\qquad}\;\underset{S_t}{\text{t}}\;\overline{\qquad}\;\underset{S_{t+1}}{t+1}\; - - - \;\overline{\qquad}\;\underset{S_\Gamma}{\Gamma}\; > \text{tps}$$

$$V_t\left(S_0, S_1, ..., S_\Gamma, i_k\right) = S_0\left(1+i_1\right)\left(1+i_2\right).....\left(1+i_\Gamma\right) + S_1\left(1+i_2\right)\left(1+i_3\right).....\left(1+i_\Gamma\right) + ...$$

$$.... + S_{t-1}\left(1+i_t\right) + S_t + S_{t+1}\left(1+i_t\right)^{-1} + S_{t+2}\left(1+i_{t+1}\right)^{-1}\left(1+i_{t+2}\right)^{-1} + ...$$

$$.... + S_\Gamma\left(1+i_{t+1}\right)^{-1}\left(1+i_{t+2}\right)^{-1}......\left(1+i_{\Gamma-1}\right)^{-1}\left(1+i_\Gamma\right)^{-1}$$

Cas particulier où le taux est constant

$$V_t\left(S_0,S_1,....,S_\Gamma,i\right)=S_0\left(1+i\right)^t+S_1\left(1+i\right)^{t-1}+....+S_{t-1}\left(1+i\right)+S_t+S_{t+1}\left(1+i\right)^{-1}+....$$
$$....+S_\Gamma\left(1+i\right)^{-(\Gamma-t)}$$

Propriétés:

1) $V_t\left(S_0,S_1,....,S_\Gamma,i\right)=\left(1+i\right)^t V_0\left(S_0,S_1,....,S_\Gamma,i\right)$

2) V_t est une application linéaire.

3.3) Taux équivalents et Taux proportionnels

- Deux taux correspondants à des périodes de capitalisation différentes sont dits **équivalents** lorsque, à intérêts composés, ils donnent au bout du même temps de placement, à un même capital initial, la même valeur acquise.

- Deux taux correspondant à des périodes de capitalisation différentes sont dits **proportionnels** lorsque leur rapport est égal au rapport de leur période respective.

3.4) Les annuités

- Les **annuités** sont des sommes monétaires payables à intervalles de temps constants.

- L'objectif d'une suite d'annuité est la constitution d'un capital.

Les différentes annuités

$t=1$	$t=2$	$t=3$	$------$	$t=\Gamma-1$	$t=\Gamma$	> temps
a	a	a		a	a	constantes
a	$a+r$	$a+2r$		$a+\left(\Gamma-2\right)\mathrm{r}$	$a+\left(\Gamma-1\right)\mathrm{r}$	arithmétique
a	aq	aq^2		$aq^{\Gamma-2}$	$aq^{\Gamma-1}$	géométrique

3.4.1) Les annuités constantes

- Soient Γ versements égaux à a euros. Le premier versement a lieu à la date $t=1$.Les intérêts sont composés au taux annuel i. La valeur acquise à la date $t=\Gamma$ est :

$$S_{\Gamma} = a\,\frac{\left[(1+i)^{\Gamma}-1\right]}{i}$$

3.4.2) Les annuités en progression arithmétique

$$S_\Gamma = \left(a + \frac{r}{i}\right)\frac{\left[(1+i)^\Gamma - 1\right]}{i} - \frac{\Gamma \times r}{i}$$

r : raison

3.4.3) Les annuités en progression géométrique

$$S_{\Gamma} = a\left(\frac{q^{\Gamma} - (1+i)^{\Gamma}}{q - (1+i)}\right)$$

q : raison de la progression géométrique

$q \neq (1+i)$

3.5) Applications

3.5.1) Effets de commerce à intérêts composés

- S_Γ : valeur nominale de l'effet négocié exprimée en euros
- Γ : la durée de l'effet exprimée en année
- i_e : le taux annuel d'escompte pour un euro

- Selon le principe de l'escompte, S_Γ représente le valeur acquise par la valeur actuelle A de l'effet au bout de Γ années.

$$S_\Gamma = A\left(1+i_e\right)^{\Gamma} \quad \Leftrightarrow \quad A = S_\Gamma\left(1+i_e\right)^{-\Gamma}$$

3.5.2) Le calcul des rentes

- Une personne est titulaire d'une **rente** lorsqu'elle est créancière de sommes qui lui seront versées à intervalles de temps constants.

- Une **rente temporaire** est une rente dont le nombre de termes est limité.

- Une **rente perpétuelle** (à termes constants) est une rente dont le nombre de termes est infini.

4) Les emprunts indivis

- Il existe une grande variété d'emprunts. On les regroupe en deux catégories, selon que l'emprunteur s'adresse à un seul prêteur (indivis) ou à une multitude de prêteur (obligataire).

- Pour chacun de ces emprunts, les clauses du contrat entre prêteur et emprunteur précisent entre autres la durée de mise à disposition des fonds, le taux d'intérêt et les conditions de remboursement du capital emprunté.

4.1) La notion d'amortissement

- A la fin de la première période d'emprunt, donc à la date $t=1$, l'emprunteur verse à son prêteur une première annuité a_1, supérieure à l'intérêt de la premier période, de façon à payer non seulement l'intérêt, pour une période, de sa dette, mais encore à commencer le remboursement, c'est-à-dire **l'amortissement** de cette dette.

Notations :

- Γ : nombre de périodes sur la durée totale de l’emprunt.
- S_0 : capital emprunté au début de la période 1 (date $t=0$).
- S_k : capital restant dû au début de la période $(k+1)$.
- D_k: amortissement de la période k.
- a_k : annuité de la période k .
- i : taux d’intérêts sur une période.
- I_k : intérêts de la période k .

- En utilisant les notations, la définition d’un amortissement permet d’écrire d’ores et déjà deux relations :

$$a_k = I_k + D_k$$

$$S_k = S_{k-1} - D_k$$

4.2) Les relations fondamentales

Il existe cinq règles régissant les emprunts indivis.
Donnant lieu à 5 relations.

- **R1.** Le montant total de l'emprunt est égal a la somme des amortissements.

$$S_0 = D_1 + D_2 + ... + D_\Gamma$$

- **R2.** La dernière annuité est égale au dernier amortissement multiplié par le facteur d'intérêt.

$$a_\Gamma = D_\Gamma\left(1+i\right) \quad \text{car} \quad a_\Gamma = D_\Gamma + I_\Gamma \quad \text{avec} \begin{cases} I_\Gamma = S_\Gamma \times i \\ S_{\Gamma-1} = D_\Gamma \end{cases}$$

$$\text{d'où} \quad a_\Gamma = D_\Gamma + i \times D_\Gamma = D_\Gamma\left(1+i\right)$$

- **R3.** A la fin de la Γ-ième (i.e. dernière) période, le capital est entièrement remboursé.

$$S_\Gamma = 0 \;\text{ or }\; \mathrm{S}_\Gamma = S_{\Gamma-1} - D_\Gamma \;\text{ d'où }\; \mathrm{S}_{\Gamma-1} = D_\Gamma$$

- **R4.** Le capital emprunté est égal à la somme des valeurs actuelles des annuités assurant le service de l'emprunt.

$$S_0 = a_1\left(1+i\right)^{-1} + a_2\left(1+i\right)^{-2} + \ldots + a_\Gamma\left(1+i\right)^{-\Gamma}$$

- **R5.** Le capital restant dû à a la fin d'une période quelconque est égal à la valeur actuelle des annuités non échues.

$$S_k = a_{k+1}\left(1+i\right)^{-1} + a_{k+2}\left(1+i\right)^{-2} + \ldots + a_\Gamma\left(1+i\right)^{-\left(\Gamma-k\right)}$$

4.3) Cas particulier des annuités constantes

$$a_1 = a_2 = ... = a_\Gamma = a$$

- Lorsque les annuités sont constantes les amortissement suivent une progression géométrique de raison $\left(1+i\right)$:

$$D_{k+1} = D_k\left(1+i\right) \quad \Leftrightarrow \quad D_\Gamma = D_1\left(1+i\right)^{\Gamma-1}$$

Donc d'après les relations fondamentales :

$$(1) \quad \Rightarrow \quad D_1 = \frac{S_0 \times i}{(1+i)^{\Gamma} - 1}$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad S_0 = a\left(\frac{1-(1+i)^{-\Gamma}}{i}\right)$$

$$(3) \quad \Rightarrow \quad S_k = a\left(\frac{1-(1+i)^{-(\Gamma-k)}}{i}\right)$$

4.4) Cas particulier des amortissements constants

$$D_1 = D_2 = ... = D_\Gamma = D$$

•Lorsque les amortissements sont constants, les annuités suivent une progression arithmétique de raison $-\frac{S_0 \times i}{\Gamma}$:

$$a_{k+1} = a_k - \frac{S_0 \times i}{\Gamma} \quad \Leftrightarrow \quad a_\Gamma = a_1 - \left(\Gamma - 1\right) \frac{S_0 \times i}{\Gamma}$$

$$\Rightarrow \quad S_0 = \Gamma \times D$$

4.5) Tableau d’amortissement

Objet du financement : Travaux d'amélioration Habitation Principale
Identifiant :

Madame,

Vous nous avez fait part de votre projet.
A partir des éléments que vous nous avez communiqués, nous vous prions de trouver ci-après l'étude établie à votre intention.

Votre investissement	18 000,00 Euros
Votre apport personnel + subventions	0,00 Euros
Prêts extérieurs	0,00 Euros
Prêts sollicités	18 000,00 Euros

La synthèse des prêts immobiliers demandés est la suivante :

Type de prêt	Montant	Durée totale	Taux nominal	Echéance période 1	Nbre	Echéance période 2	Nbre	Assurance Emp1	Assurance Emp2	Garantie SCM	Hypothèque
BANQUE POPULA							-				
Immo classique	18 000	72	4.05 %	282.02	72			0 %	0 %		
EXTERIEURS											
APPORT	0										
TOTAL	18 000		Total	282.02							

FRAIS DE DOSSIER : 30,00 EUR FRAIS DE GARANTIE : 0,00 EUR FONDS DE GARANTIE SCM : 0,00 EUR

Nous restons à votre disposition pour tout renseignement complémentaire et vous prions d'agréer, Madame, l'expression de nos sentiments les meilleurs.

Chargé de clientèle : M(me)
Tél :

A compter du 6 janvier 2007, la Convention AERAS propose de nouvelles dispositions relatives à l'accès à l'assurance et au crédit pour les personnes présentant des risques aggravés de santé. Pour toute information, n'hésitez pas à contacter le numéro vert 0821 221 021 (0,12 EUR/mn).

L'échéancier (en EUR) serait le suivant (au 1 septembre 2007) :

Année	Intérêts	Commissions	Assurances	Amortissement	Total annuel des échéances	Capital restant dû
2007	238,50	0,00	0,00	889,58	1 128,08	17 110,41
2008	642,45	0,00	0,00	2 741,83	3 384,24	14 368,58
2009	529,31	0,00	0,00	2 854,97	3 384,24	11 513,62
2010	411,53	0,00	0,00	2 972,78	3 384,24	8 540,86
2011	288,86	0,00	0,00	3 095,41	3 384,24	5 445,44
2012	161,15	0,00	0,00	3 223,13	3 384,24	2 222,30
2013	33,88	0,00	0,00	2 222,30	2 256,16	0,00
Total	2 305,68	0,00	0,00	≈ 18 000	Frais de dossier	30,00
					Frais de garantie	0,00
					Fonds garantie SCM	0,00

Tableau d'amortissement

Périodes	Capital restant à amortir au début de la période	Intérêts	Annuités	Amortissements
1	S_0	$I_1 = S_0 \times i$	$a_1 = I_1 + D_1$	D_1
2	$S_1 = S_0 - D_1$	…	…	D_2
..	…	…	…	…
..	…	…	…	…
k	$S_{k-1} = S_{k-2} - D_{k-1}$	$I_k = V_{k-1} \times i$	$a_k = I_k + D_k$	D_k
..	…	…	…	…
n	$S_{\Gamma-1} = S_{\Gamma-2} - D_\Gamma$	$I_\Gamma = V_{\Gamma-1} \times i$	$a_\Gamma = I_\Gamma + D_\Gamma$	D_Γ
n+1	$S_\Gamma = 0$			$\sum_{k=1}^{\Gamma} D_k = S_0$

5) Les emprunts obligataires

- Dès que la capital à emprunter s'avère très important, l'emprunteur s'adresse à **une multitude de prêteurs**. L'emprunt total est alors fractionné en parts, chacune de ces parts étant représentée par **un titre de créance appelé obligation** d'où l'emprunt obligataire.

5.1) Caractéristiques d’un emprunt obligataire

- **Une obligation est un titre de créance** négociable représentant une fraction d’un emprunt à long terme émis par une collectivité et donnant à son possesseur le droit de percevoir un intérêts le plus souvent annuel et d’être remboursé de son titre à l’échéance.

- Toute émission d’un emprunt obligataire fait l’objet d’une **note d’information** portant le visa de l’AMF ou sont mentionnés :

  - le nombre d’obligations émises
  - la valeur nominale (faciale) des obligations
  - Le taux d’intérêt nominal
  - Le prix d’émission (souscription)
  - La durée de l’emprunt
  - La date de jouissance
  - La date de règlement des souscripteurs
  - Le prix de remboursement des obligations
  - Le système de remboursement
  - Le taux effectif (actuariel)

- **la valeur nominale** des obligations sert de base au calcul de l’intérêt.

- **Le taux d’intérêt nominal** sert à calculer le montant du coupon (intérêts).

- **Le montant du coupon** est obtenu en faisant le produit de la valeur nominale par le taux nominal. Il peut être fixe ou variable pendant la durée de l’emprunt.

- **Le prix d'émission** (souscription) est le prix payé par le souscripteurs pour devenir propriétaire d'une obligation (obligataire).

  L'obligation peut être émise :

  - **au pair** : prix émission = valeur nominale
  - **au dessous du pair** : prix émis < valeur nominale
  - **au dessus du pair** : prix émis > valeur nominale

- **Le prix de remboursement**

Les obligations sont amorties par remboursement :

- au pair c’est-à-dire à la valeur nominale.

- au dessus du pair c’est-à-dire à un prix supérieur à la valeur nominale (on parle de prime de remboursement).

- **Le système de remboursement**

  Les systèmes les plus utilisés sont les remboursement **in fine,** par annuités constantes ou par amortissement constants.

- **Le taux effectif (actuariel)**

  Ils est le taux réel de l’opération financière. Il y a de nombreuses raison qui expliquent que le taux réel de l’emprunt soit inférieur ou supérieur au taux nominale.

  Le taux effectif n’est pas le même pour le prêteur et l’emprunteur dès que les frais supportés par l’un ou l’autre ne sont pas identiques.

- **Cotation en bourse**

  Les obligations sont cotées en pourcentage de leur valeur nominale au pied du coupon (coupon couru non compris).

  Les coupon couru (montant des intérêts courus de la dernière échéance au jour de la cotation) est également exprimé en pourcentage de la valeur nominale et varie chaque jour de $\frac{1}{365}^{ième}$ du coupon annuel.

5.2) Emprunts remboursables « in fine »

Notations :

- v_0 : nombre d'obligation émises
- E : prix d'émission d'une obligation
- C : valeur nominale d'une obligation
- R : valeur de remboursement d'une obligation
- i : taux nominal d'intérêt

- L'émetteur reçoit $v_0 \times E$.

- L'émetteur verse à l'ensemble des obligataires :

  – à la fin de chaque année : $v_0 \times C \times i$
  (montant total des coupon)

  – à la fin de l'emprunt : $\left(v_0 \times C \times i\right) + \left(v_0 \times R\right)$
  (coupon de la dernière année augmenté du montant total du remboursement).

<u>5.3) Emprunts remboursables</u>

Le raisonnement théorique est le même que celui fait pour les emprunts indivis.

Soient : • $d_1, d_2, \ldots, d_n$: le nombre d'obligations amorties à chacun des tirages successifs.

• $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$: le nombre d'obligations vivantes (encore en circulation) après chaque tirage.

• $a_1, a_2, \ldots, a_n$: annuités consécutives.

- Comme pour les emprunts indivis, les deux relations suivantes sont vérifiées :

$$v_k = v_{k-1} - d_k \qquad\qquad v_0 = \sum_{k=1}^{\Gamma} d_k$$

- Pour une année donnée k , l’annuité a_k , se compose du montant des coupons et du montant du remboursement :

$$a_k = \underbrace{v_{k-1} \times C \times i}_{\text{montant du coupon}} + \underbrace{d_k \times R}_{\text{montant du reboursement}}$$

5.3.1) Emprunts remboursables par annuités constantes

- Le nombre d’obligations théoriquement amorties forment une progression géométrique de raison : $\left(1+\frac{C\times i}{R}\right)$

Donc $d_{k+1} = d_k\left(1+\frac{C\times i}{R}\right)$ $\qquad v_0 = d_1\frac{\left(1+\frac{C\times i}{R}\right)^{\Gamma}-1}{\frac{C\times i}{R}}$

5.3.2) Emprunts remboursables par amortissement annuel constant

- Chaque année, le nombre d'obligations amorties est identique : $d_1 = ... = d_\Gamma$.

- Ainsi chaque année sont amorties $\frac{v_0}{\Gamma}$ obligations (car $v_0 = d_1 + ... + d_\Gamma = \Gamma \times d$) .

- Les annuités suivent une progression arithmétique décroissante de raison $-\frac{v_0}{\Gamma} \times C \times i$:

$$a_k = a_{k-1} - \frac{v_0}{\Gamma} \times C \times i$$

6) Taux effectifs de rendement et de revient

PRINCIPES

Définitions : Soit S, un capital emprunté sur n années donnant lieu au flux de trésorerie $\{a_k\}$, $k = 1, \ldots, n$. En tenant une comptabilité en capitalisant les soldes, au taux x, on a :

Dates	Soldes capitalisés
0	S
1	$S(1+x) - a_1$
2	$S(1+x)^2 - a_1(1+x) - a_2$
.	......
n	$S(1+x)^n - a_1(1+x)^{n-1} - a_2(1+x)^{n-2} - \ldots\ldots - a_n$

Par définition: le taux effectif est le taux x pour lequel le dernier solde est nul.

Le taux effectif est le taux pour lequel il y a **égalité** entre les valeurs actuelles des engagements réciproques : engagement du créancier et du débiteur (x est le taux qui égalise la valeur actuelle des encaissements et des décaissements liés à une opération).

Le taux effectif de rendement d'un emprunt obligataire à l'émission est le taux x solution de :

$$N_0 E = a_1 \left(1 + x\right)^{-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \left(1 + x\right)^{-n}$$

Si F désigne le montant des frais engagés à l'émission, **le taux effectif de revient** de cet emprunt, noté x', supporté par l'émetteur est donné par la résolution en x'

De l'équation:

$$N_0 E - F = a_1 \left(1 + x'\right)^{-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \left(1 + x'\right)^{-n}$$

Cas des annuités constantes :

Le taux brut de rendement à l'émission x vérifie :

$$N_0 E = a\frac{1-\left(1+x\right)^{-n}}{x} = a a_n^x$$

Soit x' les frais fixes à l'émission, le taux brut de revient pour le débiteur vérifie :

$$N_0 E - F = a\frac{1-\left(1+x'\right)^{-n}}{x'} = a a_n^{x'}$$

Or $a = N_0 R \frac{r}{1-\left(1+r\right)^{-n}}$ et $r = \frac{c}{R}$

Pour le taux de rendement : $$E = \frac{Rr}{1-\left(1+r\right)^{-n}} a_n^x$$

Pour le taux de revient : $$E - \frac{F}{N_0} = \frac{Rr}{1-\left(1+r\right)^{-n}} a_n^{x'}$$

Le cas des séries égales :

Les annuités sont en progression arithmétique de raison $\kappa = -N_0 c / n$

La valeur actualisée au taux i de la suite d'annuités notée $\overline{V}(i)$ est :

$$\overline{V}(i) = \frac{a_1}{(1+i)} + \frac{a_1+\kappa}{(1+i)^2} + ... + \frac{a_1+(n-1)\kappa}{(1+i)^n}$$

On simplifie,en calculant : $(1+i)\overline{V} - \overline{V} = \overline{V}i$

On obtient après simplification : $\overline{V}(i) = a_n^i \left(a_1 + \frac{\kappa}{i} + n\kappa \right) - \frac{n\kappa}{i}$

Les taux x et x' sont donc solutions des équations :

$$N_0 E = \overline{V}(x) \quad \text{et} \quad N_0 E - F = \overline{V}(x')$$

LA DETERMINATION DES TAUX EFFECTIF

L'équation à résoudre est de la forme : $Q(x) = h.$

Résolution par itération :

Consiste à trouver une suite $\{x_n\}$, convergeant vers la valeur vérifiant l'équation (exprimée en pourcentage).

Résolution par interpolation linéaire :

On cherche deux valeurs $(x_1 \text{ et } x_2 \; ; x_1 < x_2)$ encadrant h, avec : $Q(x_1) < h < Q(x_2)$.

L'interpolation linéaire donne : $$x \cong x_1 + (x_2 - x_1)\frac{h - Q(x)}{Q(x_2) - Q(x_1)}$$

Exemple de calcul d’un taux de revient d’un emprunt indivis :

Soit une entreprise, qui contracte un emprunt bancaire d’un montant égal à 200 000 u.m . Le remboursement est par annuités constantes sur 5 ans, au taux de 5%.

Les frais de dossier sont de 0.5% sur le montant prêté et il faut prélevés 50 u.m par annuité pour des frais de virement.

L’entreprise souhaite calculer le taux effectif de revient de cette opération après impôt, en retenant un taux d’impôt sur les sociétés de 36 2/3 %.

L’annuité constante est : $a = \frac{S}{a_5^{0.05}} = \frac{200\ 000}{4,3294766} = 46\ 194,96 \text{ u.m}$

Tableau d’amortissement d’un emprunt indivis – annuités constantes

Période	Capital dû en début De période	Intérêts	Annuités	Amortissement
1	200 000,00	10 00,00	46 194,96	36 194,96
2	163 805,04	8 190,25	46 194,96	38 004,71
3	126 800,34	6290,02	46 194,96	39 904,94
4	85 895,39	4 294,77	46 194,96	41 900,19
5	43 995,20	2 199,76	46 194,96	43 995,20

Le **taux brut de revient** (x') vérifie l'équation :

$a = 46\ 194{,}96 + 50 = 46\ 244{,}96$ et $S - F = 200\ 000 - 0{,}005 * 200\ 000 = 199\ 000$

En utilisant MATLAB on trouve un taux de revient égal à 5.22 %.

Pour calculer **un taux net**, on dresse **l'échéancier des encaissements et décaissements** supportés par l'entreprise, en tenant compte des divers charges et de leur déductibilité.

Période	Capital	Intérêts nets	Autres frais nets	Amortissement	Encaissements Décaissements
0	200 000,00		633,33		199 366,67
1		6 333,33	31,67	36 194,96	42 559,96
2		5 187,16	31,67	38 004,71	43 223,54
3		4 382,68	31,67	39 904,94	44 319,29
4		2 721,92	31,67	41 900,19	44 653,78
5		1 393,18	31,67	43 995,20	45 420,05

Le taux effectif net de revient est le taux x' tel que :

$$199\ 366,67 = \frac{42\ 559,96}{1+x'} + \frac{43\ 223,54}{\left(1+x'\right)^2} + ... + \frac{45\ 420,05}{\left(1+x'\right)^5}$$

Posons :

$$Q\left(x'\right) = \frac{42\ 559,96}{1+x'} + \frac{43\ 223,54}{\left(1+x'\right)^2} + ... + \frac{45\ 420,05}{\left(1+x'\right)^5}$$

on trouve

$$\mathrm{Q}\left(3\%\right) = 203\ 864 \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}\left(4\%\right) = 198\ 086$$

L'interpolation linéaire donne :

$$x' = 3 + 1 * \frac{198\ 086\text{-}203\ 864}{198\ 086\text{-}203\ 864} = 3,78$$

Avec MATLAB on trouve 3,77 %.

Taux de rendement et de revient d'un emprunt obligataire

Soit un emprunt obligataire simplifié, composé de 1 000 titres de

1 000 u.m de nominal, de durée égale à 5 ans et de taux nominal égal à 5 %. On suppose que cet emprunt est remboursable par séries égales et comporte une prime de remboursement de 100 u.m.

Années	Nombres de titres À Rembourser (N_P)	Nombres de titres Remboursés (D_p)	Amortissements (D_pR)	Intérêts (N_pc)	Annuités $(a_p = D_pR + N_pc)$
1	1 000	200	220 000	50 000	270 000
2	800	200	220 000	40 000	260 000
3	600	200	220 000	30 000	250 000
4	400	200	220 000	20 000	240 000
5	200	200	220 000	10 000	230 000
TOTAL		1000	1 100 000	150 000	1 250 000

Supposons que **l'émetteur supporte des frais d'émission** de 5%. Le calcul de son **taux de revient brut** (x') prend en compte l'encaissement net de frais soit :

$$1\ 000\ 000 - 0,05 * 1\ 000\ 000 = 950\ 000$$

et les décaissement des annuités, donc :

$$950\ 000 = \frac{270\ 000}{1+x'} + \frac{260\ 000}{\left(1+x'\right)^2} + ... + \frac{230\ 000}{\left(1+x'\right)^5}$$

On obtient : $x' \cong 10,21\ \%$

En tenant compte de la fiscalité au taux t l'émetteur supporte en fait $(1-t)\ Nc$ comme charges financières. L'économie d'impôt sur les frais d'émission est de :

$$50\ 000 * 36\ 2/3\ \% = 18\ 333{,}33.$$

Le taux de revient net impôt, en retenant toujours un taux d'imposition égal à 36 2/3 %, est noté x'_{τ}, vérifie :

$$968\ 333 = \frac{251\ 667}{1+x'_{\tau}} + \frac{245\ 333}{\left(1+x'_{\tau}\right)^{2}} + \frac{239\ 000}{\left(1+x'_{\tau}\right)^{3}} + \frac{232\ 667}{\left(1+x'_{\tau}\right)^{4}} + \frac{226\ 333}{\left(1+x'_{\tau}\right)^{5}}$$

Soit :

$$x'_{\tau} \cong 7{,}59\ \%$$

Pour le calcul **du taux de rendement à l'émission**, on suppose que le remboursement est en fin d'échéance.

On calcul un taux brut, il prend en compte le décaissement initial liés à l'achat du titre, les coupons reçus chaque année et le remboursement du titre à l'échéance.

Il est noté x tel que :

$$1\,000 = \frac{50}{1+x} + \frac{50}{(1+x)^2} + \frac{50}{(1+x)^3} + \frac{50}{(1+x)^4} + \frac{1150}{(1+x)^5} \quad \Rightarrow \quad x \approx 6{,}75\ \%$$

Pour un remboursement du titre au bout de 1, 2, 3 ou 4 ans, on constate les taux de rendement bruts respective de 15 %, de 9,77 %, de 8,08 % et de 7,24 %.

Supposons que 25 jours après l'émission, le titre ait une valeur de marché de 900 u.m . Un acquéreur de cette obligation peut calculer **un taux de rendement à l'échéance** qui est un taux de rendement brut (**taux de rendement actuariel**) (r_a).

Ce taux est celui qui égalise la valeur de marché du titre à la valeur actualisée des revenus qu'il encaissera.

On retient pour le calcul obligataire une base exacte/exacte.

Il vient :

$$900 = \frac{50}{(1+r_a)^{\frac{340}{365}}} + \frac{50}{(1+r_a)^{1+\frac{340}{365}}} + \frac{50}{(1+r_a)^{2+\frac{340}{365}}} + \frac{50}{(1+r_a)^{3+\frac{340}{365}}} + \frac{50}{(1+r_a)^{4+\frac{340}{365}}}$$

On obtient $r_a \cong 9,4\ \%$. Si le cours était resté à 1 000, le rendement actuarielle aurait été de 6,85 %. Le tableau suivant montre les variations de taux actuariels, aux variations de prix.

Cours	700	800	900	1000	1100	1200	1300
Taux	15,79	12,34	9,39	6,85	4,62	2,62	0,8

7) Usufruit, nue propriété

- On appelle **évaluation** d'un emprunt à une certaine date et à un certain taux, notée μ, la somme des valeurs actuelles des annuités à venir de cet emprunt, le calcul étant fait une période avant le versement de la première annuité à venir.

- L'opération se fait à un taux t qui est généralement différent du taux nominal i, retenu à l'origine de l'emprunt pour le calcul des annuités.

- On appelle **usufruit total de l’emprunt** désigné par ϑ , la valeur, estimée dans les mêmes conditions que les annuités, des intérêts contenus dans ces annuités.

- On appelle **nue propriété totale de l’emprunt** désigné par ρ ,la valeur, estimée dans les mêmes conditions que les annuités, des amortissements contenus dans ces annuités.

- Par définition : $\mu = \vartheta + \rho$

EXEMPLE : On se situe au début de l'opération

$$\mu = a_1\left(1+t\right)^{-1} + a_2\left(1+t\right)^{-2} + \ldots + a_k\left(1+t\right)^{-k} + \ldots + a_\Gamma\left(1+t\right)^{-\Gamma}$$

avec t = taux d'escompte en général tel que $t \neq i$.

on a : $$\begin{aligned} a_1 &= I_1 + D_1 \\ a_2 &= I_2 + D_2 \\ &\ldots \end{aligned}$$

d'ou $$\mu = \left(I_1 + D_1\right)\left(1+t\right)^{-1} + \left(I_2 + D_2\right)\left(1+t\right)^{-2} + \ldots + \left(I_\Gamma + D_\Gamma\right)\left(1+t\right)^{-\Gamma}$$

$$\mu = \underbrace{I_1\left(1+t\right)^{-1} + I_2\left(1+t\right)^{-2} + \ldots + I_\Gamma\left(1+t\right)^{-\Gamma}}_{\vartheta \text{ usufruit total}} + \underbrace{D_1\left(1+t\right)^{-1} + D_2\left(1+t\right)^{-2} + \ldots + D_\Gamma\left(1+t\right)^{-\Gamma}}_{\rho \text{ nue propiété}}$$

MERCI

BONNE JOURNÉE