

Annexe mathématique au chapitre 2

Les démonstrations de l'annexe mathématique sont tirées de Caves et Jones, op. cit., p.267-270.

La variation des revenus réels

On étudie l'effet des termes de l'échange sur le revenu réel d'une économie ouverte. La démonstration part de la fonction d'utilité collective de l'économie :

$$U = U(D_I, D_A)$$

Différencions totalement U :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial D_I} dD_I + \frac{\partial U}{\partial D_A} dD_A$$

Cette expression énonce que lorsque les quantités consommées varient, l'utilité varie d'un montant qui dépend de l'utilité marginale d'un bien multipliée par la variation de la quantité consommée de ce bien. L'aspect arbitraire de l'indice d'utilité peut être supprimé en divisant les deux termes par l'utilité marginale du bien I.

$$\frac{dU}{\frac{\partial U}{\partial D_I}} = dD_I + \left[\frac{\frac{\partial U}{\partial D_A}}{\frac{\partial U}{\partial D_I}} \right] dD_A$$

Le terme de gauche n'est positif que si l'utilité a augmenté. En outre, c'est une mesure de la variation de l'utilité exprimée en unités du bien I ; appelons cette variation du revenu réel exprimée en unités du bien I dY. Le terme de droite peut être simplifié, puisque l'expression entre crochets est le taux marginal de substitution, soit la quantité du bien I que l'on doit ajouter pour compenser la perte d'une unité du bien A le long d'une courbe d'indifférence. Mais dans un équilibre de marché, cette quantité correspond au prix relatif du bien A :

$$p = \frac{P_A}{P_I}$$

Donc, dY peut se réécrire pour exprimer l'écriture fondamentale d'une variation du revenu réel :

$$(A2.1) \quad dY = dD_I + p dD_A$$

(A2.1) indique que toute variation de la combinaison de consommation affecte le revenu réel. La contrainte de budget s'écrit :

$$(A2.2) \quad D_I + p D_A = Q_I + p Q_A$$

Elle précise que l'origine de toute variation du revenu réel se trouve soit dans une variation de la combinaison des dotations en biens, soit dans une variation des termes de l'échange. La différentiation de (A2.2) donne :

$$dD_I + p.dD_A + D_A .dp = dQ_I + p.dQ_A + Q_A .dp$$

On peut réarranger cette dernière écriture pour faire apparaître dY. Nous obtenons alors :

$$dY = dQ_I + p.dQ_A + Q_A .dp - D_A .dp$$

et finalement :

$$(A2.3) \quad dY = -(D_A - Q_A)dp + (dQ_I + p.dQ_A)$$

L'effet des termes de l'échange correspond à la première écriture du membre de droite, $-(D_A - Q_A)dp$. Il peut être calculé aussi bien du côté des exportations que des importations. Si le pays est importateur du bien A, alors $(D_A - Q_A) = M$, quantités importées du bien A avant le changement des termes de l'échange, et $-M.dp$ représente l'effet des termes de l'échange. Dans ce cas, dp positif signifie que les termes de l'échange se détériorent et le revenu réel du pays diminue du montant $M.dp$, montant proportionnel au volume initial des importations. Si le pays est exportateur du bien A, alors $-(D_A - Q_A) = X$, quantités exportées du bien A avant le changement des termes de l'échange, et $X.dp$ représente l'effet des termes de l'échange. Dans ce cas, dp positif signifie que les termes de l'échange s'apprécient et le revenu réel augmente de $X.dp$, montant proportionnel au volume initial des exportations.

La seconde expression du membre de droite de l'égalité désigne la somme pondérée par les prix de toute variation de la combinaison de production du pays. C'est un effet-volume encore désigné sous le nom d'effet de spécialisation. S'il est positif, il signifie une dilatation de la frontière des possibilités de production du pays, donc une augmentation des capacités de production. Si les capacités n'évoluent pas, il prend une valeur nulle et exprime simplement le changement de productions opéré le long de la frontière pour maintenir l'égalité entre le prix relatif et le taux marginal de substitution technique en cas d'évolution des termes de l'échange.

L'expression (A2.3) peut être modifiée de façon à faire apparaître le degré d'ouverture de l'économie. Si l'on multiplie et l'on divise à la fois la première expression du membre de droite par p , puis que l'on divise les deux membres par Y , nous obtenons :

$$(A2.4) \quad \frac{dY}{Y} = -\frac{p.(D_A - Q_A)}{Y} \cdot \frac{dp}{p} + \frac{dQ_I + p.dQ_A}{Y}$$

$p.(D_A - Q_A)$ désigne les importations ou les exportations (selon le cas) en valeur et non plus en volume ; $p.(D_A - Q_A)/Y$ donne donc le degré d'ouverture de l'économie en % du PIB initial ; dp/p est la variation relative des termes de l'échange. Ainsi, on obtient une formulation de la contribution des termes de l'échange à la croissance de la richesse. Par exemple, une économie dont le degré d'ouverture initial sur l'extérieur est de 10% et qui subit une dégradation de 1% de ses termes de l'échange sur un an voit sa croissance annuelle se réduire de 0,1%.

La seconde expression du membre de droite désigne toujours la variation de la combinaison de production du pays, en % du PIB initial. C'est donc ni plus ni moins que l'expression de la contribution des capacités de production à la croissance de la richesse. La somme des deux contributions donne le taux de croissance économique du pays, dY/Y . A l'aide de l'expression (A2.4), on présente au § 221 une estimation simple, sur la période 1966-96, des effets des termes de l'échange sur la croissance annuelle

moyenne de plusieurs économies développées et en développement. La référence utilisée est celle des exportations en % du PIB.

Les effets de substitution et de revenu

Toute variation de prix exerce à la fois un effet de substitution et un effet de revenu sur la quantité demandée. La décomposition peut être réalisée pour de petites variations des prix si l'on se sert de l'expression de la variation du revenu réel donnée par (A2.3). On simplifie l'analyse en supposant que l'économie ne croît pas, donc que $dQ_I + p \cdot dQ_A = 0$.

La demande de tout bien dépend de tous les prix et du revenu. Par conséquent, dans un modèle à deux biens, elle dépend du prix relatif p du bien agricole et du revenu réel Y . La demande de bien agricole du pays domestique est donc :

$$(A2.5) \quad D_A = D_A(p, Y)$$

On différencie cette expression par rapport à p pour obtenir :

$$\frac{dD_A}{dp} = \frac{\partial D_A}{\partial p} + \frac{\partial D_A}{\partial Y} \cdot \frac{dY}{dp}$$

Le premier terme représente l'effet de substitution d'une augmentation de prix : à mesure que p augmente, le demande de A baisse le long de la même courbe d'indifférence. Le second terme illustre les deux aspects de l'effet de revenu décrits dans le § 213. Le second terme est composé de deux éléments. Le premier, dY/dp , montre comment le revenu réel est affecté par l'augmentation de p . Compte tenu de la simplification posée, à savoir l'absence de réaction de la production, dY/dp se réduit ici à $-(D_A - Q_A)$, puisque toute réaction de la production le long de la frontière des productions a un impact négligeable sur le revenu réel. Si le bien A est importé, alors $dY/dp < 0$.

Le second élément exprime la variation de la demande de bien A résultant de l'augmentation d'une unité du revenu lorsque p est constant. Ce n'est pas un nombre pur puisque D_A est mesuré en unités de A et Y en unités de bien I. Pour éliminer ce problème, on définit la propension marginale du pays à consommer du bien A par :

$$\alpha_A = p \left(\frac{\partial D_A}{\partial Y} \right)$$

Cette propension est un nombre pur compris entre 0 et 1 si aucun bien n'est inférieur. L'équation (A2.6) suivante donne la décomposition de dD_A/dp entre effet de substitution et effet de revenu :

$$(A2.6) \quad \frac{dD_A}{dp} = \frac{\partial D_A}{\partial p} - \alpha_A \cdot \frac{D_A - Q_A}{p}$$

Si A est importé, (A2.6) révèle que les effets de revenu et de substitution se combinent ensemble pour réduire sa demande à mesure que p augmente. Par contre, si A est exporté, l'effet de revenu produit par une hausse de p devient positif et contrecarre partiellement ou complètement l'effet de substitution négatif.

L'élasticité de la demande d'importations

L'élasticité de la demande d'importations est définie par :

$$(A2.7) \quad \varepsilon = -\frac{dM}{dp} \cdot \frac{p}{M}$$

Le signe négatif sert à faire de l'élasticité un nombre positif. M se rapporte aux importations de bien A :

$$M = D_A - Q_A$$

Par conséquent :

$$\varepsilon = -\frac{D_A \cdot dD_A \cdot p}{M \cdot D_A \cdot dp} + \frac{Q_A \cdot dQ_A \cdot p}{M \cdot Q_A \cdot dp}$$

L'expression pour le premier terme du membre de droite découle directement de l'écriture (A2.6) . Désignons par s le négatif de l'élasticité de substitution pure dans la demande et par m , la propension marginale à importer, qui se confond avec la propension marginale à consommer le bien importé dans le pays domestique, α . Enfin, définissons l'élasticité de la production concurrençant les importations, e , qui mesure la réaction de la production.

$$s = -\frac{p}{M} \cdot \frac{\partial D_A}{\partial p}, m = p \cdot \frac{\partial D_A}{\partial Y}, e = \frac{p \cdot dQ_A}{M \cdot dp}$$

La combinaison de ces définitions donne la décomposition finale de l'élasticité de la demande d'importations :

$$(A2.8) \quad \varepsilon = s + m + e$$

La condition de stabilité de Marshall-Lerner

Dans un monde d'échanges à deux biens, la stabilité des échanges exige qu'une augmentation du prix relatif du bien agricole réduise la demande excédentaire mondiale de nourriture. Cette condition peut être exprimée en fonction de l'élasticité-prix de la demande d'importations des deux pays. Elle est connue sous le nom de condition de stabilité de Marshall-Lerner.

La demande excédentaire mondiale en bien A est représentée par la différence entre la demande excédentaire du pays domestique, c'est-à-dire ses importations M, et l'offre excédentaire de l'étranger, c'est-à-dire ses exportations. Les exportations de nourriture ont une valeur équivalente à la demande excédentaire étrangère en bien I, qui est M^*/p (exprimée en bien A). La demande excédentaire mondiale de A est donc $M - M^*/p$, ou demande réciproque de l'économie domestique. La stabilité de l'équilibre mondial exige une augmentation de p pour faire diminuer la demande excédentaire mondiale en bien A. Par conséquent, on doit vérifier :

$$\frac{dM}{dp} < \frac{d\left(\frac{M^*}{p}\right)}{dp}$$

Cette première expression peut être réarrangée pour faire apparaître les variations relatives du prix et des importations. Pour cela, on divise par p les dénominateurs des deux termes de l'inégalité puis l'on divise le numérateur du terme de gauche par M et le numérateur du terme de droite par M^*/p . Ainsi nous obtenons :

$$(A2.9) \quad \frac{dM}{M} \cdot \frac{p}{dp} < \frac{d\left(\frac{M^*}{p}\right)}{\frac{M^*}{p}} \cdot \frac{p}{dp}$$

Le terme de gauche est, au signe près, l'élasticité-prix de la demande d'importations domestique de l'écriture (A2.7). Le terme de droite peut se réécrire :

$$\frac{d\left(\frac{M^*}{p}\right)}{\frac{M^*}{p}} \cdot \frac{p}{dp} = \frac{dM^*}{M^*} \cdot \frac{p}{dp} - 1$$

C'est l'expression de la demande d'importations étrangère. En effet, on sait que cette dernière élasticité correspond à la variation relative des quantités importées par l'étranger engendrée par une variation du prix des biens importés. Comme l'économie étrangère importe le bien industriel, le prix relatif du bien importé est alors $1/p$. Exprimée en fonction de p , l'élasticité-prix étrangère de la demande d'importations est donc bien ici positive (une hausse de p accroît la demande étrangère d'importations du bien I). Finalement, l'écriture (A2.9) se borne à vérifier que :

$$(A2.10) \quad \varepsilon + \varepsilon^* > 1$$

(A2.10) est la condition de stabilité de Marshall-Lerner. Cette expression suggère que la stabilité du marché nécessite des courbes de demande réciproque qui ne soient pas trop inélastiques.