



# Les emprunts indivis

Administration Économique et Sociale

Mathématiques

XA100M



Les emprunts **indivis** sont les emprunts faits auprès **d'un seul prêteur**.


On va étudier le cas où le prêteur met à disposition de l'emprunteur un capital pour une durée fixée à l'avance, et où l'emprunteur rembourse ce capital selon un rythme convenu et verse des intérêts à échéances périodiques.

## 1. LE CAS GÉNÉRAL

Lors de chaque annuité (remboursement), on fait la part entre

- La somme qui participe au **remboursement du capital emprunté** ;
- La somme qui participe au **remboursement de l'intérêt**.

La somme qui participe au remboursement du capital emprunté s'appelle l'**amortissement**.



Si  $A_p$  est l'annuité de la période  $p$ , c'est-à-dire le montant payé **à la fin** de la période  $p$ , on a

$$\Rightarrow A_p = I_p + M_p$$

avec

- L'intérêt créé pendant la période  $p$  et remboursé en fin de cette période, noté  $I_p$  ;
- L'amortissement de la période  $p$ , noté  $M_p$ .

## Situation

Emprunt d'un capital  $D_0$  au taux d'intérêt  $i$  par période pendant  $n$  périodes.

## Notations

- Le capital restant dû en **début** de période  $p$  est noté  $D_{p-1}$  ;
- Le montant de l'annuité payée en **fin** de période  $p$  est noté  $A_p$  ;
- L'intérêt versé en **fin** de la période  $p$  est noté  $I_p$  ;
- L'amortissement versé en **fin** de la période  $p$  est noté  $M_p$ .

## Principe

☞ À chaque début de période  $p$ , on a une dette  $D_{p-1}$ , c'est la somme qui reste due et crée un intérêt  $I_p = D_{p-1}i$  pendant la période. À la fin, de la période, on rembourse l'annuité  $A_p$  qui paye l'intérêt  $I_p$  et contribue au remboursement de la dette :  $A_p = I_p + M_p$ . La dette de début de période  $p + 1$  est alors  $D_p = D_{p-1} - M_p$ .

◀◀ C'est le même principe que la méthode de calcul de la valeur actuelle d'une suite d'annuités certaines temporaires (chapitre *Annuités*, §3.1) avec  $A_0 = 0$  et où la dette était notée  $V$  au lieu de  $D$ .

On résume la situation par période dans un tableau, appelé

**tableau d'amortissement.**



## Tableau d'amortissement

Période	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période
1	$D_0$	$I_1 = D_0 i$	$M_1$	$A_1 = I_1 + M_1$
2	$D_1 = D_0 - M_1$	$I_2 = D_1 i$	$M_2$	$A_2 = I_2 + M_2$
3	$D_2 = D_1 - M_2$	$I_3 = D_2 i$	$M_3$	$A_3 = I_3 + M_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$p$	$D_{p-1} = D_{p-2} - M_{p-1}$	$I_p = D_{p-1} i$	$M_p$	$A_p = I_p + M_p$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$D_{n-1} = D_{n-2} - M_{n-1}$	$I_n = D_{n-1} i$	$M_n$	$A_n = I_n + M_n$

La dette en fin de  $n^e$  période (donc en début de  $n + 1^e$ ) doit être totalement payée donc

$$\Rightarrow D_n = D_{n-1} - M_n = 0.$$

## Coût de l'emprunt

La somme remboursée au total est la somme de toutes les annuités versées, c'est-à-dire  $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ ,

la somme empruntée au début est  $D_0$

le coût de l'emprunt est donc

$$\rightarrow A_1 + A_2 + \dots + A_n - D_0.$$

## Somme restant à payer

La somme qui reste à payer au début de la période  $p + 1$  est la valeur actuelle des  $n - p$  annuités restantes (c'est la somme qui va être remboursée par les  $n - p$  annuités restantes, intérêt compris).

◀◀ D'après le chapitre *Annuités*, §3.1, on a donc

$$\text{☞ } D_p = \sum_{k=p+1}^n A_k(1+i)^{p-k}$$

Pour chaque valeur de  $k$  comprise entre  $p + 1$  et  $n$ , on calcule  $A_k(1+i)^{p-k}$  puis on fait la somme de tous les termes calculés.

$$D_p = A_{p+1}(1+i)^{-1} + A_{p+2}(1+i)^{-2} + \cdots + A_{n-1}(1+i)^{-(n-1-p)} + A_n(1+i)^{-(n-p)}.$$

## Somme empruntée

En particulier, la somme due en début de première période,  $D_0$ , est la somme empruntée.

Lors d'un emprunt sur  $n$  périodes, au taux  $i$  par périodes, en remboursant  $A_k$  à la période  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), on peut emprunter

$$\Rightarrow D_0 = \sum_{k=1}^n A_k(1+i)^{-k}$$

Pour chaque valeur de  $k$  comprise entre 1 et  $n$ , on calcule  $A_k(1+i)^{-k}$  puis on fait la somme de tous les termes calculés.

$$D_0 = A_1(1+i)^{-1} + A_2(1+i)^{-2} + \dots + A_{n-1}(1+i)^{-(n-1)} + A_n(1+i)^{-n}.$$

# Amortissement

On peut relier l'amortissement d'une période à l'amortissement de la période précédente.

$$M_{p+1} = (1 + i)M_p + A_{p+1} - A_p.$$

En effet,  $A_{p+1} = M_{p+1} + I_{p+1}$  donc  $M_{p+1} = A_{p+1} - I_{p+1}$ .

Puis,

$$I_{p+1} = D_p i \quad \text{donc} \quad M_{p+1} = A_{p+1} - D_p i.$$

Puis

$$D_p = D_{p-1} - M_p$$

donc

$$(1) \quad M_{p+1} = A_{p+1} - D_{p-1} i + M_p i.$$

Or,

$$D_{p-1} i = I_p \quad \text{et} \quad A_p = M_p + I_p$$

donc

$$(2) \quad D_{p-1} i = A_p - M_p.$$

En reportant (2) dans (1), on obtient

$$M_{p+1} = A_{p+1} - A_p + M_p + M_p i = (1 + i)M_p + A_{p+1} - A_p.$$

## 2. LE CAS PARTICULIER DES ANNUITÉS CONSTANTES

### 2.1. Somme empruntable.

Dans le cas général, on a vu que

$$D_0 = A_1(1+i)^{-1} + A_2(1+i)^{-2} + \cdots + A_{n-1}(1+i)^{-(n-1)} + A_n(1+i)^{-n}.$$

Ici,

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_{n-1} = A_n = a.$$

On a donc

$$D_0 = a \left[ (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n} \right].$$

On reconnaît la somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique de premier terme  $(1+i)^{-1}$  et de raison  $(1+i)^{-1}$ , donc

$$D_0 = a(1+i)^{-1} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-1}} = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}.$$



Lors d'un emprunt pendant  $n$  périodes, au taux  $i$  par période, en remboursant  $a$  par période, on peut emprunter

$$\Rightarrow D_0 = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}.$$



◀◀ Voir le chapitre *Annuités*, §3.2.2.



## 2.2. Valeur de l'annuité.

Lorsqu'on veut acheter un bien, on connaît la valeur de ce bien, c'est cette somme  $D_0$  qu'on veut emprunter. Quelles annuités doit-on payer pour rembourser cet emprunt lors d'un emprunt pendant  $n$  périodes, au taux  $i$  par période à annuités constantes ?

On a vu que

$$D_0 = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}.$$

donc

$$\Rightarrow a = D_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}.$$



Les expressions

$$D_0 = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

et

$$a = D_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

ne sont que deux expressions différentes d'une même formule.

N'en retenez qu'une et retrouvez l'autre immédiatement.

### 2.3. Dette en début de période.

Dans le cas général, on a vu que

$$D_p = A_{p+1}(1+i)^{-1} + A_{p+2}(1+i)^{-2} + \cdots + A_{n-1}(1+i)^{-(n-1-p)} + A_n(1+i)^{-(n-p)}.$$

Ici,


$$A_{p+1} = A_{p+2} = \cdots = A_{n-1} = A_n = a.$$

On a donc

$$D_p = a \left[ (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-p-1)} + (1+i)^{-(n-p)} \right].$$

On reconnaît la somme des  $n-p$  premiers termes d'une suite géométrique de premier terme  $(1+i)^{-1}$  et de raison  $(1+i)^{-1}$ , donc

$$D_p = a(1+i)^{-1} \frac{1 - (1+i)^{-(n-p)}}{1 - (1+i)^{-1}} = a \frac{1 - (1+i)^{p-n}}{i}.$$



Lors d'un emprunt pendant  $n$  périodes, au taux  $i$  par période, en remboursant  $a$  par période, la dette en début de  $p + 1^{\text{e}}$  période (c'est-à-dire, la dette après paiement de l'annuité de  $p^{\text{e}}$  période) est

$$\Rightarrow D_p = a \frac{1 - (1 + i)^{p-n}}{i}.$$

## 2.4. Lien entre somme empruntée et dette.

Il n'est pas nécessaire de connaître l'annuité pour calculer la dette en début de  $p + 1^{\text{e}}$  période à partir de la somme empruntée. En effet, on a

$$D_p = a \frac{1 - (1 + i)^{p-n}}{i}$$

et


$$a = D_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

donc

$$\begin{aligned} D_p &= D_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \frac{1 - (1 + i)^{p-n}}{i} \\ &= D_0 \frac{1 - (1 + i)^{p-n}}{1 - (1 + i)^{-n}} \end{aligned}$$

puis, en multipliant numérateur et dénominateur par  $(1 + i)^n$ , on obtient

$$D_p = D_0 \frac{(1 + i)^n - (1 + i)^p}{(1 + i)^n - 1}.$$



Lors d'un emprunt de  $D_0$ , pendant  $n$  périodes, au taux  $i$  par période, la dette en début de  $p+1^{\text{e}}$  période (c'est-à-dire, la dette après paiement de l'annuité de  $p^{\text{e}}$  période) est

$$\Rightarrow D_p = D_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}.$$



## 2.5. Amortissement.

Dans le cas général, on a vu la relation

$$M_{p+1} = (1 + i)M_p + A_{p+1} - A_p.$$

Ici,  $A_{p+1} = A_p$  donc

$$M_{p+1} = (1 + i)M_p.$$



Dans un emprunt par annuités constantes, les amortissements sont en suite géométrique de raison  $1 + i$ .

Le premier amortissement est

$$M_1 = A_1 - I_1 = a - D_0 i.$$

Or,

$$a = D_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

donc

$$M_1 = D_0 i \frac{(1 + i)^{-n}}{1 - (1 + i)^{-n}} = D_0 \frac{i}{(1 + i)^n - 1}.$$

Puisque  $M_p = (1 + i)M_{p-1}$ , on a  $M_p = (1 + i)^{p-1}M_1$  et donc

$$M_p = D_0 \frac{i(1 + i)^{p-1}}{(1 + i)^n - 1}.$$



### 3. UN EXEMPLE

On emprunte un capital de 76000 € au taux d'intérêt annuel 10% pour 5 ans. Les remboursements se font à la fin de chaque année par annuités constantes. Le montant de chaque annuité est

$$a = D_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} = 76000 \times \frac{0,1}{1 - \frac{1}{1,1^5}} = 20048,61 \text{ €}.$$

Le capital dû en début de 1<sup>re</sup> année est donc  $D_0 = 76000 \text{ €}$ . Pendant la première année, cette somme produit un intérêt, en euros, de

$$I_1 = D_0 i = 76000 \times 0,1 = 7600.$$

L'annuité est  $A_1 = 20048,61 \text{ €}$ , de sorte que l'amortissement en euros de cette première année est

$$M_1 = A_1 - I_1 = 20048,61 - 7600 = 12448,61.$$



Période	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période
1	76000 €	7600 €	12448,61 €	20048,61 €
2				
3				
4				
5				

Le capital dû en début de 1<sup>re</sup> année est  $D_0=76000$  €. L'amortissement de cette première année est  $M_1 =12448,61$  € donc le capital dû en début de 2<sup>e</sup> année est, en euros,

$$D_1 = D_0 - M_1 = 76000 - 12448,61 = 63551,39.$$

Pendant la deuxième année, cette somme produit un intérêt, en euros, de

$$I_2 = D_1 i = 63551,39 \times 0,1 = 6355,14.$$

L'annuité est  $A_2 =20048,61$  €, de sorte que l'amortissement en euros de cette deuxième année est

$$M_2 = A_2 - I_2 = 20048,61 - 6355,14 = 13693,47.$$

Période	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période
1	76000 €	7600 €	12448,61 €	20048,61 €
2	63551,39 €	6355,14 €	13693,47 €	20048,61 €
3				
4				
5				

En répétant ce qu'on a fait pour la deuxième année, on construit pas-à-pas le tableau

Période	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période
1	76000 €	7600 €	12448,61 €	20048,61 €
2	63551,39 €	6355,14 €	13693,47 €	20048,61 €
3	49857,92 €	4985,80 €	15062,82 €	20048,61 €
4	34795,10 €	3479,51 €	16569,10 €	20048,61 €
5	18226 €	1822,6 €	18226 €	20048,61 €

## Méthode rapide

Le montant de chaque annuité est obtenu par

$$A_p = a = D_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}.$$

En utilisant la formule

$$D_p = a \frac{1 - (1 + i)^{p-n}}{i}$$

on remplit rapidement la colonne *capital dû*. En utilisant

$$I_p = D_{p-1} i,$$

on remplit alors rapidement la colonne *intérêt*. Enfin, en utilisant

$$M_p = A_p - I_p,$$

on remplit rapidement la colonne *amortissement*.

Tout cela est facilement programmable avec un logiciel tableur.



Un autre exemple, de calcul de prêt immobilier, est disponible sur

<http://www.univ-montp3.fr/miap/ens/AES/XA100M/>