Laurence Carassus

Gilles Pagès

Finance de marché

Modèles mathématiques à temps discret

- Éléments de cours
- 24 problèmes d'examens
- Tous les corrigés commentés et détaillés

Vuibert

Table des matières

Avant-propos **xi**

0 Pour qui veut s'attaquer directement aux problèmes **1**

Première partie. Éléments de cours **11**

1 Introduction **13**
1.1 Sous-jacent 13
1.2 Actifs (ou produits) dérivés 15
1.3 Marchés financiers 18
1.4 Le modèle binomial à une période 21

2 Rappels de probabilités et d'analyse convexe **25**
2.1 Quelques notions de base en probabilités 25
2.2 Espérance conditionnelle 30
2.3 Martingales, surmartingales, sous-martingales 33
2.4 Temps d'arrêt, enveloppe de Snell et arrêt optimal 36
2.5 Chaînes de Markov 44
2.6 Supremum essentiel 48
2.7 Théorèmes de séparation et cônes polyhédraux 50

3 Modélisation des marchés discrets **53**
3.1 Modèle probabiliste 53
3.2 Actifs risqués et actif sans risque 54
3.3 Portefeuille, stratégie 57
3.4 Autofinancement 58
3.5 Financement avec entrée/sortie 61
3.6 Produits dérivés 65

4 Caractérisation de l'absence d'opportunité d'arbitrage **69**
4.1 Définitions 69
4.2 Viabilité et absence d'opportunité d'arbitrage 71

5 Évaluation et couverture de produits dérivés européens par arbitrage 77
5.1 Notion de prix et de stratégie de couverture pour les produits dérivés européens . . . 77
5.2 Évaluation d'actifs dérivés européens dans un marché viable . . . 79
5.3 Évaluation d'actifs dérivés européens réplicables dans un marché viable . 81
5.4 Application à différents types de sous-jacents . . . 85
5.5 Couverture approchée et autres problèmes connexes . . . 87

6 Évaluation et couverture des options européennes en marché complet 91
6.1 Définition et caractérisation d'un marché complet . . . 91
6.2 Démonstration du théorème de caractérisation probabiliste des marchés complets . . . 93
6.3 Deux applications de la théorie des marchés complets . . . 94
6.4 Algorithme d'évaluation d'options européennes dans un modèle markovien 96

7 Options européennes en marché incomplet : théorème de surréplication 109
7.1 Théorème de décomposition optionnel . . . 110
7.2 Preuve du théorème de surréplication . . . 114
7.3 Lien entre les probabilités martingales et leurs densités . . . 115

8 Options américaines 121
8.1 Prix et stratégie de couverture . . . 121
8.2 Options américaines en marché complet . . . 123
8.3 Options américaines en marché incomplet . . . 134

À vous de travailler maintenant 139

Avertissement 141

Deuxième partie. Autour du modèle binomial 143

9 Asymptotique d'un modèle binomial dissymétrique (**) 145
9.1 Présentation et motivations . . . 145
9.2 Énoncé . . . 146
9.3 Corrigé . . . 148
9.4 Commentaires . . . 151

10 À propos de couverture (**) 157
10.1 Présentation et motivations . . . 157
10.2 Énoncé . . . 157
10.3 Corrigé . . . 159
10.4 Commentaires . . . 164

11 De la « bouchère » à la « doubling strategy » : telle mère, telle fille... (**) 165
11.1 Présentation et motivations . . . 165
11.2 Énoncé . . . 165
11.3 Corrigé . . . 168
11.4 Commentaires . . . 171

Troisième partie. Quelques options exotiques 177

12 À propos d'options d'achat asiatiques (*) 179
12.1 Présentation et motivations . . . 179
12.2 Énoncé . . . 180
12.3 Corrigé . . . 182
12.4 Commentaires . . . 186

13 Arbre binomial et options exotiques (***) 191
13.1 Présentation et motivations . . . 191
13.2 Énoncé . . . 191
13.3 Corrigé . . . 193
13.4 Commentaires . . . 198

Quatrième partie. Quelques autres problèmes en marché complet 199

14 D'ici et de là-bas (*) 201
14.1 Présentation et motivations . . . 201
14.2 Énoncé . . . 202
14.3 Corrigé . . . 203
14.4 Commentaires . . . 206

15 Consommer et investir : l'optimal (**) 207
15.1 Présentation et motivations . . . 207
15.2 Énoncé . . . 209
15.3 Corrigé . . . 212
15.4 Commentaires . . . 216

Cinquième partie. Arrêt optimal et options américaines 221

Avertissement 223

16 Américaines et sans (trop de) regret (**) 225
16.1 Présentation et motivations . . . 225
16.2 Énoncé . . . 225
16.3 Corrigé . . . 227
16.4 Commentaires . . . 230

17 Retour sur le *Put* américain : la frontière libre (**) 231
17.1 Présentation et motivations . . . 231
17.2 Énoncé . . . 232
17.3 Corrigé . . . 234
17.4 Commentaires . . . 236

18 Contrôle d'une américaine par une européenne... (***) 239
18.1 Présentation et motivations . . . 239
18.2 Énoncé . . . 240
18.3 Corrigé . . . 241
18.4 Commentaires . . . 243

19 L'enveloppe de Snell est aussi un infimum (**) 245
19.1 Présentation et motivations . . . 245
19.2 Énoncé . . . 245
19.3 Corrigé . . . 246
19.4 Commentaires . . . 247

20 Formulation duale multiplicative de l'enveloppe de Snell (**) 249
20.1 Présentation et motivations . . . 249
20.2 Énoncé . . . 249
20.3 Corrigé . . . 250
20.4 Commentaires . . . 251

21 Temps d'arrêt optimal versus temps d'arrêt optimaux (***) 253
21.1 Présentation et motivations . . . 253
21.2 Énoncé . . . 253
21.3 Corrigé . . . 255
21.4 Commentaires . . . 259

22 À propos d'options digitales (***) 261
22.1 Présentation et motivations . . . 261
22.2 Énoncé . . . 261
22.3 Corrigé . . . 262
22.4 Commentaires . . . 264

23 L'enveloppe de Snell passera-t-elle à la limite ? (**) 267
23.1 Présentation et motivations . . . 267
23.2 Énoncé . . . 267
23.3 Corrigé . . . 268
23.4 Commentaires . . . 271

24 À propos d'options à la criée...(***) 273
24.1 Présentation et motivations . . . 273
24.2 Énoncé . . . 274
24.3 Corrigé . . . 275
24.4 Commentaires . . . 278

25 Alors, on swingue ? (**) 281
25.1 Présentation et motivations . . . 281
25.2 Énoncé . . . 282
25.3 Corrigé . . . 284
25.4 Commentaires . . . 286

26 La princesse et son dilemme paramétrique (**) 289
26.1 Présentation et motivations . . . 289
26.2 Énoncé . . . 290
26.3 Corrigé . . . 291
26.4 Commentaires . . . 295

Sixième partie. Marchés incomplets, marchés imparfaits 301

27 La transformation d'Esscher est-elle viable ? (**) 303
27.1 Présentation et motivations . . . 303
27.2 Énoncé . . . 303
27.3 Corrigé . . . 306
27.4 Commentaires . . . 310

28 Viable mais incomplet... (*) 311
28.1 Présentation et motivations . . . 311
28.2 Énoncé . . . 311
28.3 Corrigé . . . 313
28.4 Commentaires . . . 316

29 Modèle trinomial et viabilité (*) 317
29.1 Présentation et motivations . . . 317
29.2 Énoncé . . . 317
29.3 Corrigé . . . 319
29.4 Commentaires . . . 324

30 Volatilité stochastique et risques résiduels ? (**) 327
30.1 Présentation et motivations . . . 327
30.2 Énoncé . . . 328
30.3 Corrigé . . . 330
30.4 Commentaires . . . 335

31 Surréplication : trop cher ? (***) 337
31.1 Présentation et motivations . . . 337
31.2 Énoncé . . . 338
31.3 Corrigé . . . 342
31.4 Commentaires . . . 351

32 Viabilité et surréplication : cas de contraintes coniques (***) 353
32.1 Présentation et motivations 353
32.2 Énoncé 354
32.3 Corrigé 361
32.4 Commentaires 371

Bibliographie 375

Index 383

Avant-propos

Cet ouvrage propose des éléments de cours, ainsi que des problèmes *corrigés* sur le thème des mathématiques financières à temps discret. Visant un public varié, il est adapté aux étudiants de Master de mathématiques financières, mais aussi aux étudiants de Master de mathématiques appliquées ou préparant l'agrégation – et à leurs enseignants – à la recherche de problèmes d'application, notamment en vue de l'épreuve de modélisation. Nous pensons que les praticiens, souhaitant approfondir certaines notions de mathématiques financières, y trouveront aussi un intérêt.

Cet ouvrage peut être utilisé de diverses façons. On peut y voir un livre de problèmes corrigés permettant de s'entraîner aux mathématiques financières, aux probabilités et à certaines notions d'analyse convexe. Un tel livre n'existant pas à notre connaissance, c'est d'ailleurs ce qui en a motivé l'écriture. On y trouvera une gamme de problèmes variés, tant par leur sujet que par leurs difficultés mathématiques graduées (codifiées par les symboles (*), (**) et (***), du plus simple au plus complexe). La plupart des problèmes proposés sont des sujets d'examen donnés, au fil des ans, dans divers cours de mathématiques financières, Master 1, ex-DEA ou Master 2 dispensés dans les universités où les auteurs ont exercé : Université Pierre et Marie Curie-Paris 6 (Master 2 Probabilités & Finance dit « El Karoui »), Université Paris-Diderot-Paris 7 (Master 2 M2MO dit « L. Élie » et M1 et M2 ISIFAR), Université Reims Champagne-Ardenne (Master 2 SEP), Université Paris 1-Panthéon-Sorbonne (Master 1 et Master 2 MMMEF) et Université Paris 12-Paris-Est-Créteil (Master 1).

Les énoncés étant volontairement reproduits dans leur forme originelle, certaines répétitions sont inévitables et les notations peuvent varier marginalement sur certains points. Certains d'entre eux sont autosuffisants et pourraient être traités sans pratiquement aucune connaissance préalable en mathématiques financières. À cette fin, nous proposons le chapitre 0 : il présente un résumé très rapide des différentes notions utilisées et peut permettre un accès direct aux problèmes.

Ce livre est aussi destiné à tous ceux qui souhaitent se former aux mathématiques financières. Il propose donc plusieurs portes d'entrée correspondant aux divers niveaux de familiarité du lecteur avec la finance et leurs mathématiques. Le débutant voulant se former rapidement lira les chapitres 3 (éventuellement sans la section 3.5), 4, 6 et la section 8.2. Il aura alors acquis les bases des mathématiques financières à la « Lamberton-Lapeyre » (voir [Lamberton et Lapeyre (1997)], ouvrage qui reste pour nous l'ouvrage incontournable d'introduction aux mathématiques financières) : un prix est l'espérance, sous une bonne probabilité, des flux futurs (à une actualisation près). Les éléments de cours ont été écrits pour permettre aussi une autre approche, plus économique, de la notion de prix : un prix pour un vendeur est le montant minimum lui permettant de livrer le bien tout en restant solvable. Le chapitre 5 explicite cette approche et fait le lien avec l'approche probabiliste d'évaluation *via* l'espérance.

Insistons un instant sur un point structurel de ce livre. Le fait qu'il soit écrit en temps discret nous a permis de simplifier les outils probabilistes utilisés, et ainsi de pouvoir exposer et traiter directement les principaux aspects des problèmes d'évaluation en mathématiques financières. Malheureusement, cette simplification a un coût puisque les marchés discrets sont génériquement incomplets et perdent donc la plupart du temps la « bonne » propriété de complétude se traduisant en pratique par l'unicité de la « probabilité risque-neutre équivalente ». Nous proposons donc un dernier niveau de formation sur les marchés incomplets : ce sont les éléments de cours du chapitre 7 et de la section 8.3 ainsi que les problèmes de la partie VI. Si la crise de 2008 a eu un impact fort « à la baisse » sur le niveau de technicité des marchés financiers, elle a aussi révélé le caractère incomplet de (presque) tous les marchés financiers. Ce livre permettra donc aux lecteurs déjà au fait des bases des mathématiques financières de se former à la notion d'incomplétude et à ses conséquences.

Ainsi peut-on utiliser cet ouvrage comme indiqué plus haut, indifféremment comme un livre de problèmes corrigés ou, plus classiquement, commencer par les éléments de cours. Dans tous les cas, nous recommandons la lecture du chapitre 1. Il s'agit de planter le décor dans une introduction qui, s'affranchissant parfois de nos objectifs essentiellement mathématiques, propose une brève présentation des marchés financiers, organisés ou non, des produits financiers et de leurs dérivés. De notre point de vue, ce qui peut paraître comme un détour, est en fait indispensable à la compréhension de certains enjeux actuels de la finance de marché. Le chapitre 2 a également un statut particulier : c'est notre boîte à outils. Il réunit l'ensemble des notions nécessaires à la compréhension des éléments de cours et des problèmes. Néanmoins, ce livre nécessite – et présuppose donc – des connaissances minimales en probabilités, le chapitre 2 ne faisant que rappeler très succinctement les notions de base utilisées, avec pour but essentiel de préciser les notations.

Nous remercions vivement toutes celles et ceux qui ont participé à l'élaboration de cette première édition et, en tout premier lieu, nos étudiants qui, année après année, ont peiné sur tous ces problèmes et nous ont motivés pour leur en imaginer de nouveaux. Nous remercions également Catherine Dufresne-Wateau et Romain Blanchard pour leur relecture minutieuse du livre. Nos remerciements vont enfin à nos collègues, qui nous ont fait l'amitié d'en relire certaines parties : Anne-Laure Bronstein, Noufel Frikha, Céline Labart et Abass Sagna.

Malgré les nombreuses relectures, des coquilles sommeillent sûrement çà et là : nous remercions par avance les lecteurs qui voudront bien nous les signaler mais aussi nous faire part de leurs commentaires et suggestions.

Paris, le 15 juin 2015,
L. Carassus et G. Pagès

CHAPITRE 3

Modélisation des marchés discrets

3.1 Modèle probabiliste

Nous nous donnons un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un élément générique de Ω est parfois appelé *scénario* (cette terminologie est propre aux mathématiques financières). La probabilité $\mathbb{P}$ représente la probabilité réelle du « monde » Ω dans lequel nous nous plaçons et est appelée *probabilité historique*. Dans nos problèmes de calcul de prix d'actifs dérivés, son rôle est de distinguer les scenarii importants de ceux qui ne le sont pas : elle donne les ensembles de mesure nulle. Comme nous supposerons souvent que la probabilité historique charge tous les scenarii, celle-ci jouera donc un rôle mineur et d'autres probabilités seront introduites sur Ω.

Nous verrons que, dans le cas des marchés dits complets, on peut sans véritable perte de généralité supposer Ω fini. Le fait que Ω soit fini permet de simplifier les preuves bien sûr et offre également une présentation beaucoup plus aisée des principaux concepts. En particulier, on ne doit pas faire d'hypothèse d'intégrabilité et l'on peut s'épargner beaucoup d'égalités ou d'inégalités $\mathbb{P}$-*p.s.* Nous préciserons dans chaque chapitre dans quel contexte nous nous trouvons. Mais, sauf *mention explicite du contraire* (essentiellement dans les parties traitant des marchés incomplets), nous allons faire les trois hypothèses suivantes :

(i) l'espace Ω est supposé fini,

(ii) Ω est muni de sa *tribu grossière* $\mathcal{P}(\Omega)$ (engendrée par tous les scenarii élémentaires $\{\omega\}$, $\omega \in \Omega$),

(iii) $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$: la probabilité historique charge tous les scenarii.

Un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vérifiant (i), (ii) et (iii) est dit *non redondant*. La probabilité $\mathbb{P}$ sera aussi appelée probabilité *non redondante*. L'hypothèse de non redondance signifie qu'il n'y a pas dans Ω de scénario ω « inutile ».

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur un espace non redondant est entièrement caractérisée par la donnée d'une famille

$$p_\omega := \mathbb{P}(\{\omega\}), \quad \omega \in \Omega,$$

vérifiant :

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad p_\omega > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1.$$

Par ailleurs, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle, puisque, pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{P}(\Omega)$.

L'espace vectoriel $L^0_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires réelles sur Ω confond donc avec le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $|\Omega|$[1] des applications de Ω dans $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{R}^\Omega$. Il en est de même de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour $p \in]0, \infty[$ (l'indice $_{\mathbb{R}}$ sera souvent omis dans la suite). L'espérance par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$ sera notée $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ ou, plus simplement, $\mathbb{E}$ en l'absence d'ambiguïté. Elle est définie par

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega \, X(\omega).$$

À noter que, grâce à l'hypothèse de non-redondance, l'application

$$(X, Y) \mapsto \mathbb{E}(XY)$$

définit un véritable produit scalaire sur $\mathbb{R}^\Omega$.

Nous nous donnons un horizon de temps entier et fini $T \in \mathbb{N}^*$. En général, T correspond à l'horizon des actifs financiers à analyser.

Nous munissons alors l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ d'une filtration (voir définition 2.3.1), *i.e.* d'une suite croissante pour l'inclusion de sous-tribus de $\mathcal{F}$, notée $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \{0,\ldots,T\}}$. La sous-tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information « observable » ou « disponible » à chacun des instants $t \in \{0, \ldots, T\}$: la croissance pour l'inclusion rend compte du fait que l'information s'accumule au fil du temps. Le plus souvent, mais pas toujours, la tribu $\mathcal{F}_0$ sera la tribu triviale, *i.e.*,

$$\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$$

et la tribu terminale $\mathcal{F}_T$ la tribu grossière $\mathcal{P}(\Omega)$. La trivialité de $\mathcal{F}_0$ rend compte du fait que le présent est déterministe dès qu'il est observable et la grossièreté de $\mathcal{F}_T$ est – comme la non-redondance – une caractéristique de la minimalité du modèle.

3.2 Actifs risqués et actif sans risque

Considérons un marché financier constitué de $d + 1$ actifs négociables notés selon les cas $S^0, S^1, \ldots, S^d$ ou plus simplement $0, 1, \ldots, d$. Ce marché a pour horizon l'entier $T \in \mathbb{N}^*$ – on parle aussi de marché à T *périodes* – et $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ désignent de façon générique les $T + 1$ instants de cotation de ce marché. La nature des actifs financiers variera de problèmes en problèmes (actions sans dividendes, actifs négociables « associés » à des actions distribuant des dividendes, taux de change, taux d'intérêt). Pour chaque $t \in \{0, \ldots, T\}$, S^i_t désigne le prix (ou valeur ou cotation) de l'actif S^i à l'instant t[2]. Les S^i_t sont modélisés par des variables aléatoires *positives*, définies sur le *même* espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$, où l'on rappelle que $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \{0,\ldots,T\}}$.

[1] $|A|$ désigne ici le cardinal de l'ensemble A.

[2] Il est implicite dans cette définition que ce marché fonctionne sans coût de transaction, qu'il n'y a donc pas de prix *bid* et *ask* pour les actifs sous-jacents. Il s'agit là évidemment d'une restriction peu réaliste même si elle est souvent adoptée.

Nous nous plaçons dans un cadre où, à chaque instant t, les prix des actifs négociables du marché sont observables et ne dépendent que de l'information « disponible » en t. Cela se traduit par le fait que, pour tout $t \in \{0, \dots, T\}$, les prix $(S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)$ des actifs à la date t sont $\mathcal{F}_t$-mesurables. En particulier, ceci est équivalent à $\sigma(S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d) \subset \mathcal{F}_t$, où $\sigma(S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)$ désigne la plus petite tribu sur Ω rendant les variables aléatoires S_t^i, $i = 0, \dots, d$, mesurables (voir définition 2.1.4). Comme $\mathcal{F}_t$ est croissante pour l'inclusion, on en déduit qu'en fait

$$\mathcal{F}_t^{S^0 \dots S^d} := \sigma(S_s^0, S_s^1, \dots, S_s^d,\ i = 0, \dots, d,\ s = 0, \dots, t) \subset \mathcal{F}_t,$$

soit encore, en termes plus synthétiques, la suite $(S_t^0, \dots, S_t^d)_{t \in \{0, \dots, T\}}$ est $\underline{\mathcal{F}}$-adaptée. On considère d'ailleurs souvent pour $\underline{\mathcal{F}}$ la filtration $(\mathcal{F}_t^{S^0 \dots S^d})_{t \in \{0, \dots, T\}}$ appelée *filtration propre* et engendrée par la suite des prix $(S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)_{t \in \{0, \dots, T\}}$.

3.2.1 Définition

En termes de modélisation, nous distinguerons l'actif S^0 des autres actifs. Mathématiquement, nous imposerons que

$$S_0^0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, t \in \{1, \dots, T\}, \qquad S_t^0 > 0.$$

Grâce à l'hypothèse $S_t^0 > 0$, l'actif S^0 permet de transférer, éventuellement à perte, de l'argent d'une date à l'autre. La quantité S_t^0 représente la capitalisation à la date t d'une unité monétaire placée dans l'actif 0 à la date 0. Cet actif rend donc compte de la rémunération des liquidités, ainsi que de leur coût d'emprunt au jour le jour. Il est souvent appelé *numéraire*. Cet actif est relié à la notion de taux d'intérêt. En effet, la quantité définie, pour tout $t \in \{1, \dots, T\}$, par

$$r_t := \frac{S_t^0 - S_{t-1}^0}{S_{t-1}^0} = \frac{S_t^0}{S_{t-1}^0} - 1,$$

désigne le rendement de l'actif S^0 entre $t-1$ et t et n'est autre que le taux d'intérêt d'un placement fait en t, entre t et $t+1$. Il s'agit donc du processus des taux d'intérêt à court terme, *i.e.* le montant des intérêts requis ou versé en t pour 1 euro emprunté ou placé en $t-1$. Ceci est équivalent à affirmer que $\frac{1}{1+r_t}$ est le prix en $t-1$ d'un 0-coupon versant 1 euro en t. Évidemment, on obtient que

$$S_t^0 = \prod_{s=1}^{t} (1 + r_s). \tag{3.2.1}$$

Notons que l'on désigne souvent S^0 sous le nom d'*actif sans risque*, à tort (puisque que l'on ne suppose même pas $r_t > 0$).

Par extension, les d autres actifs négociables du marché $S^1, \dots, S^d$ sont appelés *actifs risqués*. Nous noterons$S_t := (S_t^1, \dots, S_t^d)$ le vecteur des prix des actifs risqués à l'instant t et $\mathbf{S}_t := (S_t^0, S_t)$ le vecteur des prix de l'ensemble des $d+1$ actifs.

Ainsi, si l'on résume les hypothèses faites :

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est non redondant,

(ii) $\underline{\mathcal{F}}$ est une filtration telle que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$,

(iii) $\mathbf{S} = (S^0, S)$ est $\underline{\mathcal{F}}$-adapté,

(iv) $S_0^0 = 1$ et $S_t^0 > 0$, $\forall t \in \{1, \ldots, T\}$.

NOTATION : Un tel marché financier est désigné par

$$\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}, \underline{\mathcal{F}}, S^0, S).$$

Dans l'énoncé de certaines définitions, théorèmes et dans certains problèmes, nous considérerons un espace Ω infini non dénombrable et nous ne pourrons plus faire la première hypothèse (i) ; dans ce cas le marché sera alors noté

$$\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \underline{\mathcal{F}}, S^0, S).$$

Dans les sections 3.3, 3.4 et 3.5, certaines définitions ou propositions sont données en se référant à $\mathcal{F}$ sans préciser si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ ou non, car ces énoncés, bien que donnés dans le cadre Ω fini, seront aussi utilisés dans le cadre infini.

Remarquons que, dans le cadre des modèles à temps continu, le numéraire S^0 et les actifs risqués S^i ne sont habituellement pas des processus de même nature probabiliste. Ce n'est pas le cas pour les marchés en temps discret. Mais nous allons voir dans le paragraphe suivant que, cependant, le numéraire S^0 joue un rôle particulier au sein des actifs négociables.

3.2.2 Actualisation

La *valeur actualisée* d'un actif négociable est sa valeur exprimée en unités de numéraire : à chaque instant $t \in \{0, \ldots, T\}$, nous définissons donc la valeur actualisée de l'actif i par

$$\widetilde{S}_t^i := \frac{S_t^i}{S_t^0}.$$

Dans un univers déterministe, c'est la quantité de liquidités qu'il faut détenir à l'origine ($t = 0$) et qui, placée dans le numéraire S^0 entre les dates 0 et t, aura pour valeur capitalisée S_t^i à la date t. L'actualisation consiste donc à évaluer les prix des actifs, non plus en unités monétaires (€), mais en unités de numéraire. On étalonne ainsi l'évolution des actifs risqués à l'aune de l'actif dit « sans risque », *i.e.* à la rémunération des liquidités.

Il est à noter que $\widetilde{S}_t^0 = 1$ identiquement pour $t \in \{0, \ldots, T\}$.

Les $\widetilde{S}_t^i$ sont évidemment des variables aléatoires positives définies sur Ω, $\mathcal{F}_t$-adaptées (en particulier $\widetilde{S}_t^i$ n'a évidemment aucune raison d'être connue à la date initiale).
Nous définissons alors le vecteur des prix actualisés des actifs risqués par

$$\widetilde{S} := (\widetilde{S}^1, \ldots, \widetilde{S}^d).$$

3.3 Portefeuille, stratégie

Tout agent (ou opérateur ou investisseur) sur le marché décrit ci-dessus va se constituer un portefeuille et va donc détenir à chaque instant $t \in \{1, \ldots, T\}$ un certain nombre de chacun des actifs du marché. Dès la diffusion des cotations à l'instant $t-1$, cet agent, au vu des informations disponibles à cet instant, c'est-à-dire $\mathcal{F}_{t-1}$, va prévoir une modification de la composition de son portefeuille qui *sera effective à l'instant t*.

Nous noterons donc Φ_t^i la *quantité* d'actif i détenue en portefeuille à la date t, ou, plus précisément, « sur la période $]t-1, t]$ ».

Chaque Φ_t^i est une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$ associé au marché. Nous notons $\Phi_t := (\Phi_t^1, \ldots, \Phi_t^d)$ le vecteur aléatoire des quantités d'actifs risqués détenues à la date $t \in \{0, \ldots, T\}$, $\Phi = (\Phi_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ le processus (vectoriel) de ces quantités et, enfin, avec des notations évidentes, $\boldsymbol{\Phi} := (\Phi^0, \Phi)$.
Le choix de $\boldsymbol{\Phi}_t$ ne dépend que de l'information disponible à la date $t-1$ pour tout $t \geq 1$: $\boldsymbol{\Phi}_t$ est $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurable.

La suite $\Phi = (\Phi_t^i)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ est donc supposée *prévisible*.

Le cas $t = 0$ est un peu particulier et nous verrons que les quantités investies à cette date n'interviennent pas réellement. Dès que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\boldsymbol{\Phi}_0$ étant $\mathcal{F}_0$-mesurable, c'est une constante.

Par extension, nous dirons qu'un processus $\boldsymbol{\Phi}$ est *prévisible* si

$$\boldsymbol{\Phi}_t \text{ est } \mathcal{F}_{t-1}\text{-mesurable, } t \in \{1, \ldots, T\} \text{ et } \boldsymbol{\Phi}_0 \text{ est } \mathcal{F}_0\text{-mesurable.}$$

Définition 3.3.1 Une suite $(\boldsymbol{\Phi}_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ de vecteurs $\underline{\mathcal{F}}$-prévisibles à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$ est appelée *portefeuille* ou *stratégie*.

La définition suivante est propre au cas où Ω est infini.

Définition 3.3.2 Dans le cas où Ω est infini, les stratégies sont dites $\mathcal{P}$-admissibles si, en outre, pour tout t, $(\Phi : \widetilde{S})_t$ est $\mathbb{Q}$-intégrable (voir la définition 2.3.4) lorsque $\mathbb{Q}$ parcourt une famille $\mathcal{P}$ de probabilités (voir le théorème 4.2.3 ci-après pour la définition de $\mathcal{P}$).

D'après la remarque 3.4.4 ci-après, cela revient à supposer que la valeur du portefeuille est intégrable pour toute probabilité risque-neutre équivalente. On notera que, par exemple, les stratégies Φ bornées sont toujours admissibles.

Remarque 3.3.3 Nous avons choisi d'adopter la convention selon laquelle les stratégies sont prévisibles. Ce choix a été fait par souci de cohérence avec la modélisation en temps continu. On peut alternativement choisir les stratégies adaptées. On suppose alors que, pour tout $t = 0, \ldots, T-1$, Φ_t^i représente la quantité d'actif i détenue sur la période $[t, t+1[$ pour $i = 0, \ldots, d$. Il faut alors modifier les définitions qui suivent en conséquence.

Le produit $\Phi_t^i S_t^i$ correspond au *montant* investi en actif $i = 0, \ldots, d$ à la date $t \in \{0, \ldots, T\}$. En conséquence, la valeur d'un tel portefeuille (ou stratégie) est donnée à chaque instant t par

$$V_t^{\boldsymbol{\Phi}} = \sum_{i=0}^{d} \Phi_t^i S_t^i = \Phi_t^0 S_t^0 + \Phi_t . S_t = \boldsymbol{\Phi}_t . \mathbf{S}_t .$$

Remarque 3.3.4 Nous ferons la convention suivante : $X.Y$ désignera systématiquement le produit scalaire des vecteurs aléatoires X par Y dans leur espace d'états. Ainsi, pour chaque $\omega \in \Omega$, $\Phi_t.S_t(\omega)$ résulte d'un produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_t(\omega)$ d'un produit scalaire dans $\mathbb{R}^{d+1}$.

Souvent, la valeur initiale du portefeuille joue un rôle particulier, elle sera notée x,

$$x = V_0^{\mathbf{\Phi}} = \Phi_0^0 S_0^0 + \Phi_0.S_0. \tag{3.3.1}$$

Si $x > 0$, il faut un capital pour initialiser la stratégie, si $x < 0$, à l'inverse, ce portefeuille dégage un « profit » au départ.
La valeur actualisée d'un portefeuille à la date $t \in \{0, \ldots, T\}$ est définie par

$$\widetilde{V}_t^{\mathbf{\Phi}} := \frac{V_t^{\mathbf{\Phi}}}{S_t^0} = \Phi_t^0 + \Phi_t.\widetilde{S}_t = \mathbf{\Phi}_t.\widetilde{\mathbf{S}}_t$$

où $\widetilde{\mathbf{S}}_t = \dfrac{\mathbf{S}_t}{S_t^0} = (\mathbf{1}, \widetilde{S}_t)$ pour tout $t \in \{0, \ldots, T\}$.

3.4 Autofinancement

Nous allons dans un premier temps traduire la notion d'autofinancement d'un portefeuille. Comme l'indique son nom, il s'agit de construire, date après date, un portefeuille se finançant lui-même : la liquidation du portefeuille de la date précédente permet exactement de construire celui de la date suivante.
Considérons donc les deux quantités suivantes pour $t \in \{1, \ldots, T\}$

– la valeur du portefeuille juste après les cotations de l'instant $t - 1$ est donnée par

$$\mathbf{\Phi}_{t-1}.\mathbf{S}_{t-1} = \Phi_{t-1}^0 S_{t-1}^0 + \Phi_{t-1}.S_{t-1},$$

– la valeur du portefeuille après le redéploiement décidé par l'investisseur au vu des cotations de $t - 1$ et juste avant celles de t est donnée par

$$\mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_{t-1} = \Phi_t^0 S_{t-1}^0 + \Phi_t.S_{t-1}.$$

La conservation de la valeur – pendant financier de la loi de conservation de la masse – induit l'égalité immédiate suivante

$$\mathbf{\Phi}_{t-1}.\mathbf{S}_{t-1} = \mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_{t-1}.$$

D'où la définition suivante.

Définition 3.4.1 Un portefeuille $(\mathbf{\Phi}_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ de vecteurs $\underline{\mathcal{F}}$-prévisibles à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$ est autofinancé si, pour $t \in \{1, \ldots, T\}$,

$$\mathbf{\Phi}_{t-1}.\mathbf{S}_{t-1} = \mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_{t-1}. \tag{3.4.1}$$

Ceci se réécrit

$$\Delta\mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_{t-1} = 0, \qquad t \in \{1, \ldots, T\}.$$

Soit encore, en utilisant la forme actualisée obtenue en divisant par S^0_{t-1},

$$\Delta\mathbf{\Phi}_t.\widetilde{\mathbf{S}}_{t-1} = 0, \qquad t \in \{1, \ldots, T\}. \tag{3.4.2}$$

Remarquons que, d'après l'hypothèse d'autofinancement (3.4.1), pour tout $t \in \{1, \ldots, T\}$,

$$\begin{aligned} \Delta V_t^{\mathbf{\Phi}} &= V_t^{\mathbf{\Phi}} - V_{t-1}^{\mathbf{\Phi}} \\ &= \mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_t - \mathbf{\Phi}_{t-1}.\mathbf{S}_{t-1} \\ &= \mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_t - \mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_{t-1} = \Phi_t.\Delta\mathbf{S}_t. \end{aligned}$$

D'où, l'identité

$$\Delta V_t^{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}_t.\Delta\mathbf{S}_t, \quad t \in \{1, \ldots, T\}. \tag{3.4.3}$$

La notion d'autofinancement se traduit donc par le fait que la variation de valeur du portefeuille entre deux instants successifs $t-1$ et t ne provient que de la variation des cours entre ces mêmes instants. En sommant les relations (3.4.3) entre les instants 1 et t, pour tout $t \in \{1, \ldots, T\}$, on obtient alors

$$V_t^{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}_0.\mathbf{S}_0 + \sum_{s=1}^{t} \mathbf{\Phi}_s.\Delta\mathbf{S}_s. \tag{3.4.4}$$

La valeur d'un portefeuille autofinancé est donc à chaque instant la somme de l'investissement initial $x = \mathbf{\Phi}_0.\mathbf{S}_0$ et des gains algébriques réalisés au fil des cotations.

L'équation (3.4.2) s'interprète à son tour, en séparant actifs risqués et sans risque, et en utilisant que $\widetilde{S}_t = 1$,

$$\Delta\Phi_t^0 = -\Delta\Phi_t.\widetilde{S}_{t-1}. \tag{3.4.5}$$

Ceci signifie que l'on peut remanier son portefeuille autofinancé comme l'on veut sur les actifs risqués, sous réserve de se financer ou de placer ses excédents de liquidités en numéraire. En remarquant que, par hypothèse (voir l'équation (3.3.1)), $\Phi_0^0 = x - \Phi_0.S_0$ et, par autofinancement, $\Phi_1^0 = x - \Phi_1.S_0$, on établit par une récurrence immédiate l'identité

$$\Phi_t^0 = x - \Phi_1.S_0 - \sum_{s=2}^{t} \Delta\Phi_s.\widetilde{S}_{s-1}, \quad t \in \{2, \ldots, T\}. \tag{3.4.6}$$

En d'autres termes, le processus des quantités d'actif sans risque $(\Phi_t^0)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ est entièrement déterminé par le couple constitué de l'investissement initial x et du processus $\Phi = (\Phi_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ des quantités investies en actifs risqués. On voit même que $(\Phi_t^0)_{t\in\{1,\ldots,T\}}$ est entièrement déterminé par x et $\Phi = (\Phi_t)_{t\in\{1,\ldots,T\}}$. Nous allons poursuivre le raisonnement et montrer que la valeur d'un portefeuille autofinancé $\mathbf{\Phi}$ dans son ensemble est caractérisée par x et $(\Phi_t)_{t\in\{1,\ldots,T\}}$. Nous verrons, comme annoncé précédemment, que la stratégie à l'instant 0 n'intervient pas dans la détermination de

$V^{\mathbf{\Phi}}$. Reprenons la démonstration de l'identité (3.4.4), mais en considérant cette fois le processus des valeurs actualisées et en remarquant que $\Delta\widetilde{S}_t^0 = 0$. Il vient alors que

$$\begin{aligned}
\Delta\widetilde{V}_t^{\mathbf{\Phi}} &= \widetilde{V}_t^{\mathbf{\Phi}} - \widetilde{V}_{t-1}^{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}_t.\widetilde{\mathbf{S}}_t - \mathbf{\Phi}_{t-1}.\widetilde{\mathbf{S}}_{t-1} \\
&= \mathbf{\Phi}_t.\widetilde{\mathbf{S}}_t - \mathbf{\Phi}_t.\widetilde{\mathbf{S}}_{t-1} = \mathbf{\Phi}_t.\Delta\widetilde{\mathbf{S}}_t \\
&= \Phi_t.\Delta\widetilde{S}_t. \qquad (3.4.7)
\end{aligned}$$

En sommant entre les instants 1 et t, pour tout $t \in \{1,\ldots,T\}$, et en utilisant l'équation (3.3.1), on obtient :

$$\widetilde{V}_t^{\mathbf{\Phi}} = x + \sum_{s=1}^{t} \Phi_s.\Delta\widetilde{S}_s, \quad t \in \{2,\ldots,T\}. \qquad (3.4.8)$$

soit encore

$$V_t^{\mathbf{\Phi}} = S_t^0 \left(x + \sum_{s=1}^{t} \Phi_s.\Delta\widetilde{S}_s \right). \qquad (3.4.9)$$

Définition 3.4.2 On appellera *caractéristiques du portefeuille autofinancé* $\mathbf{\Phi} = (\Phi^0, \Phi)$ – au sens de sa valeur – le couple $(x, (\Phi_t)_{t\in\{1,\ldots,T\}})$, où $x = \Phi_0^0 + \Phi_0.S_0$ et l'on notera de manière alternative

$$V_t^{x,\Phi} := V_t^{\mathbf{\Phi}}$$

la valeur du portefeuille autofinancé $\mathbf{\Phi}$ à l'instant t.

Réciproquement, étant donné $x \in \mathbb{R}$ et $(\Phi_t)_{t\in\{1,\ldots,T\}}$, un processus vectoriel $\underline{\mathcal{F}}$-prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on peut construire $(\Phi_t^0)_{t\in\{1,\ldots,T\}}$ grâce à l'identité (3.4.6) de telle sorte que le portefeuille $\mathbf{\Phi} = (\Phi_t^0, \Phi_t)_{t\in\{1,\ldots,T\}}$ soit autofinancé et que $V_t^{x,\Phi} = V_t^{\mathbf{\Phi}}$. On notera que Φ_0^0 et Φ_0 ne sont pas complètement identifiés : on sait juste que $x = V_0^{x,\Phi} = V_0^{\mathbf{\Phi}} = \Phi_0^0 + \Phi_0.S_0$.

Remarque 3.4.3 Les stratégies à la date 0 ne sont pas très importantes pour définir la valeur d'une stratégie autofinancée puisque $V_0^{\mathbf{\Phi}} = \Phi_1^0 + \Phi_1.S_0$. On peut adopter plusieurs conventions :

(*i*) $\Phi_0^0 = \Phi_1^0$ et $\Phi_0 = \Phi_1$,

(*ii*) $\Phi_0^0 = 0$ et $\Phi_0.S_0 = x$, *i.e* on débute la stratégie sans liquidités,

(*iii*) $\Phi_0^0 = x$ et $\Phi_0 = 0$, *i.e* on débute la stratégie sans actifs risqués.

Chacune de ces possibilités présente des avantages et des inconvénients, aussi choisirons-nous de ne pas spécifier Φ_0^0 et Φ_0. *Il faudra donc, dès à présent, considérer* $\Phi = (\Phi_t)_{t\in\{1,\ldots,T\}}$ *lorsque l'on écrit* $V_t^{x,\Phi}$.

Remarque 3.4.4 La transformée du processus $\tilde{S}$ par Φ est spécifiée dans la définition 2.3.4 par $(\Phi : \tilde{S})_t = \Phi_0.\tilde{S}_0 + \sum_{s=1}^t \Phi_s.\Delta\widetilde{S}_s$. Et donc, d'après les formules (3.4.8) et (3.3.1),

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_t^{\mathbf{\Phi}} &= x - \Phi_0.\tilde{S}_0 + (\Phi : \tilde{S})_t \\
&= \Phi_0^0 + (\Phi : \tilde{S})_t.
\end{aligned}$$

Remarque 3.4.5 Si l'on choisit des stratégies adaptées, la condition d'autofinancement change. En effet, à la date $t \in \{1, \ldots, T\}$, l'investisseur – au vu de l'information disponible à la date t en l'espèce $\mathcal{F}_t$ – réajuste sa stratégie $\mathbf{\Phi}_{t-1}$ détenue entre $[t-1, t[$, en $\mathbf{\Phi}_t$ détenue entre $[t, t+1[$; ce réajustement se fait à la cotation de la date t et l'autofinancement s'écrit

$$\mathbf{\Phi}_{t-1}.\mathbf{S}_t = \mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_t.$$

3.5 Financement avec entrée/sortie

Contrairement à la section précédente, nous allons envisager d'autoriser à chaque instant l'intervenant, soit à recevoir, soit à dépenser de l'argent en dehors des actifs financiers du marché. Ainsi, c'est le cas, par exemple, si l'intervenant reçoit un salaire ou décide de consommer en dehors des actifs financiers du marché, une partie de l'argent investi. Ce montant est décidé au vu de l'information disponible à la date t. Nous noterons donc

c_t le *montant* de liquidités dépensé ou reçu localement à la date t.

Chaque c_t est une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$ associé au marché financier, elle est supposée $\mathcal{F}_t$-adaptée.

Les notions liées à l'autofinancement avec entrée/sortie seront utiles pour parler de stratégie minimale de couverture (voir définition 5.1.3) et aussi, plus directement, pour modéliser et résoudre le problème de consommation optimale (voir problème 15).

Définition 3.5.1 Une suite $(c_t)_{t \in \{0,\ldots,T\}}$ de variables aléatoires $\underline{\mathcal{F}}$-adaptées à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée *processus d'entrée/sortie locale*. Si $c_t \geq 0$, on parle de *consommation locale*.

Le choix fait dans la section précédente pour définir la valeur du portefeuille $\mathbf{\Phi}$ ne tenait pas compte de l'apport ou du retrait d'argent à chaque date. Nous allons donc maintenant considérer la valeur du portefeuille une fois l'entrée/sortie locale effectuée, que nous noterons $V_t^{\mathbf{\Phi},c}$, et donnée par

$$V_t^{\mathbf{\Phi},c} := V_t^{\mathbf{\Phi}} - c_t = \mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_t - c_t, \qquad t \in \{0, \ldots, T\}.$$

Il est naturel de le désigner sous le nom de *valeur nette d'entrée/sortie* associée au portefeuille $\mathbf{\Phi}$ et au processus d'entrée/sortie locale c (par extension nous appellerons souvent portefeuille le couple $(\mathbf{\Phi}, c)$). *Les deux processus de valeur $V^{\mathbf{\Phi}}$ et $V^{\mathbf{\Phi},c}$ coïncident évidemment en l'absence d'entrée/sortie locale $c \equiv 0$.*

La valeur actualisée d'un portefeuille $(\mathbf{\Phi}, c)$ est définie par

$$\widetilde{V}_t^{\mathbf{\Phi},c} := \frac{V_t^{\mathbf{\Phi},c}}{S_t^0} = \Phi_t^0 + \Phi_t.\widetilde{S}_t - \tilde{c}_t = \mathbf{\Phi}_t.\widetilde{\mathbf{S}}_t - \tilde{c}_t$$

où $\tilde{c}_t = \frac{c_t}{S_t^0}$ pour tout t (processus d'entrée/sortie locale actualisé).

Intéressons-nous maintenant à la variation de la richesse de l'investisseur entre deux instants $t-1$ et t, pour $t \in \{1, \ldots, T\}$.

Considérons les trois quantités suivantes :

– la valeur du portefeuille juste après les cotations de l'instant $t-1$ est

$$\mathbf{\Phi}_{t-1}.\mathbf{S}_{t-1} = \Phi^0_{t-1}S^0_{t-1} + \Phi_{t-1}.S_{t-1},$$

– l'entrée/sortie locale en $t-1$ est c_{t-1},

– la valeur du portefeuille après le redéploiement – décidé par l'investisseur au vu des cotations de $t-1$ et juste avant celles de t – et avant l'entrée/sortie locale à l'instant t est

$$\mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_{t-1} = \Phi^0_t S^0_{t-1} + \Phi_t.S_{t-1}.$$

En appliquant à nouveau, la loi de conservation de la valeur, on obtient

$$\mathbf{\Phi}_{t-1}.\mathbf{S}_{t-1} - c_{t-1} = \mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_{t-1}$$

Ceci conduit à la définition ci-après.

Définition 3.5.2 Un portefeuille $(\mathbf{\Phi}_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ de vecteurs $\underline{\mathcal{F}}$-prévisibles à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$ est dit financé par un processus d'entrée/sortie locale $(c_t)_{t=0,\ldots,T}$ si, pour $t \in \{1,\ldots,T\}$,

$$\mathbf{\Phi}_{t-1}.\mathbf{S}_{t-1} - c_{t-1} = \mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_{t-1}. \tag{3.5.1}$$

Ceci se réécrit pour tout $t\in\{1,\ldots,T\}$ en

$$\Delta\mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_{t-1} = -c_{t-1}. \tag{3.5.2}$$

Sous forme actualisée, on obtient pour tout $t\in\{1,\ldots,T\}$

$$\Delta\mathbf{\Phi}_t.\widetilde{\mathbf{S}}_{t-1} = -\tilde{c}_{t-1}. \tag{3.5.3}$$

Remarquons d'après la loi de conservation (3.5.1) que, pour $t\in\{1,\ldots,T\}$

$$\begin{aligned}\Delta V^{\mathbf{\Phi},c}_t &= V^{\mathbf{\Phi},c}_t - V^{\mathbf{\Phi},c}_{t-1} = \mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_t - c_t - (\mathbf{\Phi}_{t-1}.\mathbf{S}_{t-1} - c_{t-1})\\ &= \mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_t - c_t - \mathbf{\Phi}_t.\mathbf{S}_{t-1} = \mathbf{\Phi}_t.\Delta\mathbf{S}_t - c_t.\end{aligned}$$

D'où l'identité fondamentale

$$\Delta V^{\mathbf{\Phi}}_t = \mathbf{\Phi}_t.\Delta\mathbf{S}_t - c_t, \qquad t\in\{1,\ldots,T\}. \tag{3.5.4}$$

Comme précédemment, l'investissement initial nécessaire à la mise en œuvre de la stratégie sera noté x, et vérifie donc

$$x = V^{\mathbf{\Phi},c}_0 = \Phi^0_0 + \sum_{i=1}^d \Phi^i_0 S^i_0 - c_0.$$

Nous allons nous appuyer sur cette formulation pour définir les caractéristiques d'un portefeuille. En effet, il est évident à partir de la formule (3.5.3) que

$$\Phi^0_t = \Phi^0_{t-1} - \left(\Delta\Phi_t.\widetilde{S}_{t-1} + \tilde{c}_{t-1}\right).$$

Ainsi, comme par définition $\Phi_0^0 = x - \Phi_0.S_0 + c_0$, et d'après la formule (3.5.1), $\Phi_1^0 = x - \Phi_1.S_0$. Par une récurrence immédiate, on obtient pour $t \in \{2, \ldots, T\}$,

$$\Phi_t^0 = x - \Phi_1.S_0 - \sum_{s=2}^{t} \left(\Delta\Phi_s.\widetilde{S}_{s-1} + \tilde{c}_{s-1} \right). \tag{3.5.5}$$

En d'autres termes, pour le processus d'entrée/sortie $(c_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ donné, l'équation de financement par entrée/sortie (3.5.1) permet de déterminer entièrement le processus des quantités d'actifs sans risque $(\Phi_t^0)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ à partir de l'investissement initial x et du processus Φ des quantités investies en actifs risqués. Comme dans le cas autofinancé, nous allons voir que la valeur du portefeuille $V^{\mathbf{\Phi},c}$ ne dépend pas de c_0 et $\mathbf{\Phi}_0$. Reprenons la preuve de la relation (3.5.4), mais en utilisant le processus des valeurs actualisées. En remarquant que $\Delta\widetilde{S}_t^0 = 0$, il vient que pour $t \in \{1, \ldots, T\}$

$$\begin{aligned} \Delta\widetilde{V}_t^{\mathbf{\Phi},c} &= \widetilde{V}_t^{\mathbf{\Phi},c} - \widetilde{V}_{t-1}^{\mathbf{\Phi},c} = \mathbf{\Phi}_t.\widetilde{\mathbf{S}}_t - \tilde{c}_t - \left(\mathbf{\Phi}_{t-1}.\widetilde{\mathbf{S}}_{t-1} - \tilde{c}_{t-1} \right) \\ &= \mathbf{\Phi}_t.\mathbf{\Delta}\widetilde{S}_t - \tilde{c}_t = \Phi_t.\Delta\widetilde{S}_t - \tilde{c}_t. \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

En sommant entre les instants 1 et t, on obtient pour tout $t \in \{1, \ldots, T\}$

$$\widetilde{V}_t^{\mathbf{\Phi},c} = x + \sum_{s=1}^{t} \Phi_s.\Delta\widetilde{S}_s - \sum_{s=1}^{t} \tilde{c}_s, \tag{3.5.7}$$

ou encore

$$V_t^{\mathbf{\Phi},c} = S_t^0 \left(x + \sum_{s=1}^{t} \Phi_s.\Delta\widetilde{S}_s - \sum_{s=1}^{t} \tilde{c}_s \right). \tag{3.5.8}$$

Définition 3.5.3 On appellera caractéristiques – au sens de sa valeur – du portefeuille $\mathbf{\Phi} = (\Phi^0, \Phi)$ financé par le processus entrée/sortie c, le triplet $(x, (\Phi_t)_{t\in\{1,\ldots,T\}}, (c_t)_{t\in\{1,\ldots,T\}})$ où $x = \Phi_0^0 + \Phi_0.S_0 - c_0$ et nous noterons de manière alternative

$$V_t^{x,\Phi,c} := V_t^{\mathbf{\Phi},c}$$

la valeur à l'instant t d'un portefeuille $\mathbf{\Phi}$ financé par le processus entrée/sortie c.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\Phi := (\Phi_t)_{t\in\{1,\ldots,T\}}$ un processus vectoriel à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $\underline{\mathcal{F}}$-prévisible et $c := (c_t)_{t\in\{1,\ldots,T\}}$ un processus réel $\underline{\mathcal{F}}$-adapté, alors on peut construire $(\Phi_t^0)_{t\in\{1,\ldots,T\}}$ grâce à l'identité (3.5.5), de telle sorte que $(\mathbf{\Phi}_t)_{t\in\{1,\ldots,T\}}$ soit financé par entrée/sortie et que $V_t^{x,\Phi,c} := V_t^{\mathbf{\Phi},c}$. Encore une fois, Φ_0^0, Φ_0 et c_0 ne sont pas complètement identifiés puisque l'on sait juste que $x = \Phi_0^0 + \Phi_0.S_0 - c_0$.

Remarque 3.5.4 Les stratégies et la consommation à la date 0 ne sont pas très importantes pour définir la valeur d'une stratégie financée par entrée/sortie puisque $V_0^{\mathbf{\Phi},c} = \Phi_1^0 + \Phi_1.S_0 - c_0$. On peut adopter plusieurs conventions, chacune privilégiant le choix d'une consommation nulle en 0 :

(*i*) $\Phi_0^0 = \Phi_1^0$, $\Phi_0 = \Phi_1$ et $c_0 = 0$,

(ii) $\Phi_0^0 = 0$, $\Phi_0.S_0 = x$ et $c_0 = 0$,

(iii) $\Phi_0^0 = x$, $\Phi_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

Au vu de ces commentaires, *nous choisissons de ne pas de spécifier* Φ_0^0 *et* Φ_0 dans la suite. Nous allons introduire une notion de consommation cumulée et, de ce fait, il est pratique de choisir $c_0 = 0$.

Il faudra donc dès à présent considérer des suites $\Phi = (\Phi_t)_{t\in\{1,\dots,T\}}$ *et* $c = (c_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ *avec* $c_0 = 0$ *lorsque l'on écrit* $V_t^{x,\Phi,c}$.

Remarque 3.5.5 Un portefeuille $\mathbf{\Phi}$ financé par entrée/sortie est autofinancé si et seulement $c = 0$.

On voit alors que ces caractéristiques sont $(x, \Phi, 0)$. Nous adopterons bien évidemment les notations de la section précédente et noterons (x, Φ) en lieu et place de $(x, \Phi, 0)$, soit encore

$$V_t^{\mathbf{\Phi},0} = V_t^{\mathbf{\Phi}} \text{ et } V_t^{x,\Phi,0} = V_t^{x,\Phi}.$$

Nous déduisons immédiatement de l'équation (3.5.8) les propriétés de linéarité et de croissance suivantes du processus $(V_t^{x,\Phi,c})_{t\in\{0,\dots,T\}}$.

Proposition 3.5.6 (a) L'application

$$(x, \Phi, c) \longmapsto (V_t^{x,\Phi,c})_{t\in\{0,\dots,T\}}$$

est linéaire.

(b) L'application $c \mapsto (V_t^{x,\Phi,c})_{t\in\{0,\dots,T\}}$ est décroissante au sens où, si $c_t \le c'_t$ pour tout $t\in \{0, \dots, T\}$, alors

$$V_t^{x,\Phi,c} \ge V_t^{x,\Phi,c'}, \quad t\in \{0, \dots, T\}.$$

(c) Pour tout $t\in \{0, \dots, T\}$, l'application $x \mapsto V_t^{x,\Phi,c}$ est strictement croissante.

Définition 3.5.7 À partir d'une suite $(c_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ d'entrée/sortie locale (voir définition 3.5.1), le *processus d'entrée/sortie cumulée* est défini par $C_0 = c_0 = 0$ et

$$C_t = S_t^0 \sum_{s=1}^{t} \frac{c_s}{S_s^0}, \quad t\in \{1, \dots, T\}. \tag{3.5.9}$$

Alors $\tilde{c}_t = \Delta\widetilde{C}_t$ et il est équivalent de se donner le processus C ou le processus c.

Lorsqu'il s'agit de consommation locale, i.e. $c_t \ge 0$, le processus de consommation cumulée actualisé $\widetilde{C}$ est croissant.

On obtient alors d'après l'équation (3.5.8),

$$V_t^{x,\Phi,C} = V_t^{x,\Phi} - C_t. \tag{3.5.10}$$

Nous utiliserons les caractéristiques (x, Φ, c) ou (x, Φ, C) selon les problèmes rencontrés. Remarquons que, dans un cadre déterministe, choisir la consommation cumulée revient à réaliser trois opérations. Tout d'abord, nous actualisons toutes les consommations locales en zéro, $i.e$ pour tout $s \in \{0, \dots, t\}$ nous calculons $\frac{c_s}{S_s^0}$. Cela a alors un sens de les sommer, $i.e$ $\sum_{s=1}^{t} \frac{c_s}{S_s^0}$. Il suffit alors de capitaliser la valeur obtenue jusqu'en t pour obtenir C_t.

3.6 Produits dérivés

Nous avons vu qu'un actif optionnel est un actif basé sur un actif sous-jacent *négociable* (*i.e.* s'échangeant sur un marché négociable). C'est en cela que l'on parle de produit *dérivé*, sous-entendu « de son actif sous-jacent ». Ce sous-jacent peut être l'un des actifs S^i ou tout ou partie du panier constitué des $d+1$ actifs S^i.

3.6.1 Actif européen

Définition 3.6.1 Toute variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable H est appelée *actif conditionnel*, *actif contingent* ou *actif dérivé* européen.

Remarque 3.6.2 Nous verrons que les actifs conditionnels donnés en exemple sont associés à des variables aléatoires H positives ou nulles. Cependant, lorsque nous traiterons d'évaluation, il sera commode de considérer des actifs conditionnels négatifs. En effet, le prix de sous-réplication ou prix d'achat de H (voir définition 5.1.2) s'exprime comme étant le prix de surréplication ou prix de vente (voir définition 5.1.1) de $-H$ (ceci sera prouvé dans le lemme 5.1.1).

Notons que, comme $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$, toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ est un actif dérivé européen. Acheter (resp. vendre) l'actif conditionnel H revient à recevoir (resp. verser) le flux H à la date de *maturité* (ou *date d'exercice*) T relative à H. On parlera parfois de contrat d'option européen relatif à l'actif contingent H.
Signalons la terminologie anglo-saxonne très utilisée de *payoff*. Sur un plan plus probabiliste, notons que dans le cas d'un marché non redondant, $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$, toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ est donc un actif conditionnel. Notons enfin qu'un actif conditionnel peut dépendre de tout l'historique des cours des différents actifs jusqu'en T.

Dans cette famille d'actifs contingents, nous allons distinguer grossièrement deux classes.

La première est constituée des actifs contingents les plus simples, c'est-à-dire ne dépendant que de la valeur $\mathbf{S_T}$ du vecteur des prix du marché à l'instant T. Les anglophones les regroupent sous le terme de « plain vanilla » (appellation surtout évocatrice pour les gros consommateurs de glace outre-atlantique pour lesquels la glace à la vanille représente la crème glacée standard). Les plus connus sont sans nul doute les options (européennes) d'achat et de vente – respectivement appelées *call* et *put* en anglais – sur un actif S^i. Les actifs contingents correspondants sont :

– $H = \max(S^i_T - K, 0) = (S^i_T - K)_+$ pour l'option d'achat de *prix d'exercice* K et d'échéance T,

– $H = \max(K - S^i_T, 0) = (K - S^i_T)_+$ pour l'option de vente de *prix d'exercice* K et d'échéance T.

Pour une introduction plus fonctionnelle aux produits dérivés, notamment les options, nous renvoyons à la section 1.2. Diverses combinaisons de ces options de base, aux patronymes fleuris, existent sous forme négociable ou synthétique comme les options *spread*, les *straddle*, *butterfly*, etc.

– $H = (S^i_T - K_1)_+ - (S^i_T - K_2)_+$, $K_2 > K_1$ pour l'*écart vertical haussier* (ou *bullish spread* en anglais) à base de *calls* de prix d'exercice K_1 et K_2. L'écart vertical haussier correspond à l'achat d'un *call* et la vente simultanée d'un autre *call* de même date d'exercice mais dont le prix d'exercice est supérieur à celui du *call* acheté. L'intérêt de cette stratégie est de profiter des hausses de prix tout en minimisant le risque de perte encouru.

– $H = (S^i_T - K_1)_+ - (S^i_T - K_2)_+$, $K_1 > K_2$ pour l'*écart vertical baissier* (ou *bearish spread* en anglais) à base de *calls* de prix d'exercice K_1 et K_2. L'écart vertical baissier correspond à l'achat d'un *call* et la vente simultanée d'un autre *call* de même date d'exercice mais dont le prix d'exercice est inférieur à celui du *call* acheté. L'intérêt de cette stratégie est de profiter des baisses de prix tout en minimisant le risque de perte encouru.

– $H = (K - S^i_T)_+ + (S^i_T - K)_+$ pour l'option *straddle* (ou *stellage* pour les francophones) de *prix d'exercice* K. Il s'agit donc d'acheter (ou vendre) simultanément un *put* et un *call* de mêmes prix et dates d'exercice. Il s'agit d'une stratégie où l'on anticipe une forte volatilité des prix à la hausse ou à la baisse.

– $H = -(K_2 - S^i_T)_+ - (S^i_T - K_2)_+ + (S^i_T - K_1)_+ + (K_3 - S^i_T)_+$ pour l'option *butterfly* de prix d'exercices K_1, K_2 et K_3 avec $K_3 < K_2 < K_1$. Il s'agit donc de vendre un straddle de prix d'exercice K_2 et d'acheter un *call* de prix d'exercice K_1 et un *put* de prix d'exercice K_3. Les trois options ont même échéance. En général, on suppose le straddle à la monnaie, *i.e.* $K_2 = S^i_0$; le *put* et le *call* sont alors en dehors de la monnaie. Il s'agit d'une stratégie où l'on anticipe une faible volatilité des prix (à la hausse ou à la baisse).

Citons également pour finir les *options digitales* associées à l'actif contingent

$$H := \mathbf{1}_{\{S^i_T \geq K\}}$$

qui paient donc 1 si S^i_T est supérieur à K et 0 sinon. Notons que ces produits (et quelques-unes de leurs variantes aux vertus amortissantes supposées) sont sortis de la sphère des marchés financiers et ont été massivement diffusés dans le grand public par différents établissements bancaires de détail à l'orée des années 1990 avec des fortunes médiatiques diverses, notamment lorsque ces produits sont arrivés à échéance au terme d'une descente aux enfers de leur actif sous-jacent.

L'autre classe d'options est appelée parfois « options dépendant de la trajectoire » (*path-dependent* en anglais) ou « options exotiques". Elles sont associées à des actifs contingents dépendant de toute la trajectoire d'un ou plusieurs actifs risqués $(S^i_t)_{t\in\{0,\ldots,T\},1\leq i\leq d}$ (voir en particulier les problèmes de la partie III). Citons comme premiers exemples, le *call asiatique* sur l'actif i associé à l'actif contingent

$$H := \left(\frac{1}{T - T_0} \sum_{t=T_0+1}^{T} S^i_t - K\right)_+ \qquad \text{où} \qquad T_0 \leq T - 1.$$

Le *call* asiatique (*Asian call*) est donc une option d'achat de prix d'exercice K mais dont l'actif sous-jacent est formellement la moyenne sur $T - T_0$ instants de l'actif S^i entre $t = T_0 + 1$ et $t = T$ (voir le problème 13).

Le *partial lookback call* (ou option d'achat partiellement sans regret) est associé à l'actif contingent

$$H(\lambda) := \max\left(S^i_T - \lambda \min_{t\in\{T_0,\dots,T\}} S^i_t, 0\right) = \left(S^i_T - \lambda \min_{t\in\{T_0,\dots,T\}} S^i_t\right)_+, \quad \lambda\in [1,+\infty[.$$

Lorsque $\lambda = 1$, cette option est appelée *lookback call* ou *sans regret*. Elle est effectivement sans regret en cela que, dans ce cas,

$$H(1) = S^i_T - \min_{t\in\{T_0,\dots,T\}} S^i_t.$$

Il s'agit donc d'une option d'achat sur l'actif sous-jacent S^i dont le prix d'exercice est le minimum observé de l'actif en question sur $T_0 + 1$ instants entre $t = T_0$ et $t = T$: sauf « malchance » (le minimum est précisément atteint à l'instant T...) l'option est toujours dans la monnaie et son détenteur est « certain » de pouvoir tirer un profit brut (*i.e.* hors prime) de son exercice (voir les problèmes 12, 13 et 16).

Autre exemple, les *options barrières* européennes, comme le « *call* européen *Up and Out* » de prix d'exercice $K > 0$ et de barrière L telle que $L > S_0$ et $L > K$ et dont le *payoff* s'écrit

$$H := (S^i_T - K)_+ \times \prod_{t=0}^{T} \mathbf{1}_{\{S^i_t<L\}} = (S^i_T - K)_+ \times \mathbf{1}_{\{\max_{1\le t\le T} S^i_t<L\}}.$$

Si le cours du sous-jacent reste toujours sous la barrière L, l'option d'achat de prix d'exercice K est « activée ». Les options attachées à ces actifs contingents exotiques sont en majorité des contrats « gré à gré » (ou *Over-The-Counter*) entre contreparties identifiées. Notons que l'on peut imaginer dissocier l'actif intervenant dans la partie *call* et celui apparaissant dans la partie « barrière ».

Depuis la crise de 2008, les transactions sur de tels produits se sont considérablement réduites jusqu'à devenir un marché de niche à l'exception notable des marchés des changes (FX pour *Foreign Exchange*) où la famille des options barrières que nous venons d'introduire est omniprésente et assimilée à des options « vanille ». La crise de 2008 a donc eu un impact fort « à la baisse » sur le niveau de technicité des marchés financiers.

3.6.2 Actif américain

Nous allons maintenant définir la seconde famille d'actifs contingents, appelée *actifs contingents américains*. La différence fondamentale est qu'ici la date d'exercice n'est pas forcément T, mais tout « temps d'arrêt » (voir définition 2.4.1) antérieur à T.

Définition 3.6.3 Le processus aléatoire $H = (H_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ est appelé actif contingent (ou conditionnel) américain si, pour tout $t\in \{0,\dots,T\}$,

$$H_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable.}$$

Acheter le contrat d'option (ou option américaine) relatif à l'actif contingent H assure à son détenteur le droit de recevoir *une et une seule fois* à une date éventuellement aléatoire – mais honnête – τ de son choix le flux H_τ.

Par « honnête », on entend que la décision de s'arrêter en t, lorsque l'on suit la règle d'arrêt donnée par la variable aléatoire τ, doit être prise en fonction de l'information disponible à la date t lorsque $\tau = t$ (attention !, il ne s'agit pas ici de la définition probabiliste d'un temps honnête). Ceci se traduit en termes mathématiques pour τ par le fait que

$$\forall t \in \{0, \ldots, T\},\ \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Ceci n'est autre que la définition classique d'un $\underline{\mathcal{F}}$-temps d'arrêt (voir définition 2.4.1).

Vendre le contrat d'option (ou option américaine) relatif à l'actif contingent H impose à son vendeur de verser une et une seule fois à la date aléatoire « honnête » τ, *choisie par l'acheteur*, le flux H_τ.

Remarquons tout d'abord que, contrairement au cas européen, il y a une dissymétrie entre la position de l'acheteur et du vendeur. Remarquons également que la date d'exercice est aléatoire : si dans le scénario ω, je décide d'exercer en $\tau(\omega)$ le contrat me versera $H_{\tau(\omega)}(\omega)$ à cette date et dans cet état du monde.

En d'autres termes un actif contingent américain est une suite de variables aléatoires $\underline{\mathcal{F}}$-adaptées.

Nous traiterons en détail le cas de ces options dans le chapitre 8. Signalons l'existence d'options en apparence encore plus générales connues sous le nom d'options à la criée (ou *shout option*) dans lesquelles on n'exige plus de l'actif contingent qu'il soit adapté à la filtration $\underline{\mathcal{F}}$ (*cf.* problème 24).

CHAPITRE 26

La princesse et son dilemme paramétrique (**)

26.1 Présentation et motivations

Le but du problème est de résoudre le problème d'arrêt optimal relatif à une suite *i.i.d.* finie de $T+1$ variables aléatoires $Z_0, \ldots, Z_T$ uniformément réparties sur $[0,1]$.

Le titre du problème provient d'une mise en situation naturelle de l'énoncé mathématique en forme de conte pour (grands) enfants. Un roi, désespéré de voir sa fille unique et préférée rester célibataire, lui propose un marché : chaque jour lui sera présenté un prétendant choisi au hasard parmi les $T+1$ jeunes gens en situation de se marier dans le royaume. La princesse disposera de 24 heures pour évaluer à sa convenance le prétendant, au terme desquelles elle pourra, soit l'accepter pour époux, soit le récuser à jamais. Faute d'avoir arrêté son choix auparavant, elle devra s'accommoder au jour T du dernier d'entre eux. Ce problème a longtemps été popularisé sous le nom de *problème de la secrétaire* puisqu'il est aisément transposable à la recherche d'un employé par un employeur.

La question qui se pose alors, si l'on admet que la Raison d'État impose à la princesse d'accepter les règles du jeu, est : quelle stratégie la princesse doit-elle adopter pour optimiser son choix (sous-entendu en moyenne) ?

Nous allons faire l'hypothèse que la princesse a fait des études poussées en Probabilités et maîtrise la théorie de l'arrêt optimal. Elle décide donc dans un premier temps de rationaliser sa procédure d'évaluation en attribuant une note entre 0 et 1 (par convention) à chaque prétendant. Elle suppose en outre que les valeurs des prétendants successifs sont des variables aléatoires indépendantes de même loi μ sur $[0,1]$. Pour ce qui nous concerne, nous spécifierons rapidement cette loi μ en la loi uniforme sur $[0,1]$ pour faciliter les calculs. Le dilemme de la princesse devient alors « paramétrique ».

Ce problème admet une version non paramétrique légèrement différente, en cela que la princesse va chercher non pas à optimiser la valeur de son prétendant en moyenne mais à maximiser la probabilité que son futur époux soit effectivement le meilleur de la liste des prétendants. La stratégie optimale du problème s'avère alors ne pas dépendre de la loi de probabilité de la valeur des prétendants (mais l'indépendance est toujours requise dans cette autre approche). Cette version du problème est notamment disponible sousla forme d'un exercice résolu dans [Baldi *et al.* (2000)].

Par cohérence avec notre présentation de la théorie de l'arrêt optimal au chapitre 2, nous avons choisi de faire débuter le processus quotidien de sélection à la date 0, ce qui induit par convention un nombre $T+1$ de prétendants. Ceci n'a néanmoins aucune influence sur les résultats asymptotiques relatifs aux temps d'arrêt optimaux et à la satisfaction moyenne de la princesse au niveau de précision choisi.

26.2 Énoncé

AVERTISSEMENT : On admettra dans tout le problème que les résultats de la théorie de l'arrêt optimal relatifs à la formule de programmation dynamique, aux temps d'arrêt optimaux, établis pour une suite de variables aléatoires positives $(Z_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ définie sur un espace probabilisé fini (voir section 2.4) s'étendent au cas où cette suite est définie sur un espace probabilisé quelconque $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sous réserve que les Z_t vérifient

$$\mathbb{E}\, Z_0 + \cdots + \mathbb{E}\, Z_T < +\infty.$$

Pour plus de détails (notamment sur la délicate question des extrema *essentiels* non utilisés ici), on pourra consulter [Neveu (1972)] ou les éléments de cours.

Soit donc $(Z_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ une telle suite de variables aléatoires réelles intégrables, *indépendantes* et de *même loi* μ. On pose $F(z) := \mu([0,z])$, $z \in \mathbb{R}_+$, sa fonction de répartition et $K(z) := \displaystyle\int_{[0,z]} v\mu(dv)$, $z \in \mathbb{R}_+$. On note $(U_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ son enveloppe de Snell par rapport à la filtration naturelle de $(Z_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ (définie pour tout $t\in \{0,\ldots,T\}$ par $\mathcal{F}_t := \sigma(Z_0,\ldots,Z_t)$).

1.a. Montrer à l'aide d'une récurrence descendante que, pour tout $t\in \{0,\ldots,T\}$,

$$U_t := \max(Z_t, u_{t+1})$$

où $u_t := \mathbb{E}\, U_t,\ t\in \{0,\ldots,T-1\}$, $u_T := \mathbb{E}\, Z_0$ et $u_{T+1} := -\infty$.

1.b. Établir la relation de récurrence

$$\forall\, t \in \{0,\ldots,T-1\},\ u_t = u_{t+1}F(u_{t+1}) + \mathbb{E}\, Z_0 - K(u_{t+1}).$$

2.a. Soit θ_* le plus petit temps d'arrêt optimal. Montrer que

$$\theta_* = \min\big\{t\in \{0,\ldots,T\} \,|\, Z_t \geq u_{t+1}\big\}.$$

2.b. Vérifier que le processus prévisible croissant $(A_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ associé à la surmartingale $(U_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ *via* la décomposition de Doob (voir proposition 2.3.8) est donné par $A_0 = 0$ et

$$\forall\, t \in \{1,\ldots,T\}, \quad A_t = \sum_{s=1}^{t}(Z_{s-1} - u_s)_+.$$

En déduire que le plus grand temps d'arrêt $\theta^* := \min\big\{t\in \{0,\ldots,T\} \,|\, U_t > u_{t+1}\big\} \wedge T$.

3. Dans la suite du problème, on suppose que $\mu := U([0,1])$ (loi uniforme sur $[0,1]$).

3.a. Montrer que, pour tout $T \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \{0,\dots,T\}$, $u_t := v_{T-t}$ où la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est définie par

$$v_0 := 1/2 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} := \frac{1+v_n^2}{2}.$$

3.b. Calculer les premiers termes de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$. Montrer que $v_n \uparrow 1$ quand $n \to +\infty$.

3.c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{1-v_{n+1}} - \dfrac{1}{1-v_n} = \dfrac{1}{1+v_n}$. En déduire que $v_n = 1 - \frac{2}{n} + o(1/n)$ (on pourra utiliser la convergence au sens de Césaro).

3.d. Montrer qu'il existe une constante réelle $c \neq 0$, que l'on déterminera, telle que

$$v_n = 1 - \frac{2}{n} + \frac{c\log n}{n^2} + o\left(\frac{\log n}{n^2}\right).$$

(On pourra utiliser que la suite $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \log n$ converge vers une limite strictement positive γ appelée constante d'Euler).

4. Montrer que, pour toute variable aléatoire θ à valeurs dans $\{0,\dots,T\}$,

$$\mathbb{E}\,\theta = \sum_{t=0}^{T-1} \mathbb{P}(\theta > t).$$

En déduire que

$$\mathbb{E}\,\theta_* = \sum_{t=0}^{T-1} v_t\, v_{t+1} \cdots v_{T-1} = v_0 \cdots v_{T-1}\left(1 + \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{v_0 \cdots v_{t-1}}\right).$$

5. En déduire un équivalent de $\dfrac{\mathbb{E}\,\theta_*^{(T)}}{T}$ lorsque T tend vers $+\infty$ (où $\theta_*^{(T)}$ désigne le plus petit temps d'arrêt optimal relatif à la date T). Puis, de façon analogue, donner un équivalent de la satisfaction moyenne optimale de la princesse, supposée avoir adopté cette stratégie optimale.

26.3 Corrigé

1.a. On part de la définition de l'enveloppe de Snell (voir définition 2.4.7) :

$$U_T = Z_T \quad \text{et} \quad U_t = \max\big(Z_t, \mathbb{E}(U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t)\big),\ t \in \{0,\dots,T-1\},$$

et l'on raisonne par récurrence descendante. Le résultat est évident pour $t = T$ puisque $U_T = Z_T$ et que $u_{T+1} := -\infty$ par convention. Soit $t \in \{0,\dots,T-1\}$. Supposons que $U_{t+1} = \max\big(Z_{t+1}, u_{t+2}\big)$.

$$U_t = \max\big(Z_t, \mathbb{E}(U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t)\big).$$

Comme, par hypothèse, Z_{t+1} est indépendant de $\mathcal{F}_t$, il en est de même de U_{t+1} qui est une fonction déterministe de Z_{t+1}, si bien que $\mathbb{E}\big(U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t\big) = \mathbb{E}\,(U_{t+1}) = u_{t+1}$. Par suite,

$$U_t = \max\big(Z_t, u_{t+1}\big).$$

1.b. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} u_t &= \mathbb{E}(U_t) = \mathbb{E}\big(\max(Z_t, u_{t+1})\big) \\ &= \mathbb{E}\big(\max(Z_0, u_{t+1})\big) \qquad \text{(car les } Z_t \text{ ont même loi)} \\ &= \mathbb{E}\big(Z_0 \mathbf{1}_{\{Z_0 > u_{t+1}\}}\big) + \mathbb{E}\big(u_{t+1}\mathbf{1}_{\{Z_0 \le u_{t+1}\}}\big) \\ &= \mathbb{E}(Z_0) - \mathbb{E}\big(Z_0\mathbf{1}_{\{Z_0 \le u_{t+1}\}}\big) + u_{t+1}F(u_{t+1}) \\ &= \mathbb{E}(Z_0) - K(u_{t+1}) + u_{t+1}F(u_{t+1}). \end{aligned}$$

2.a. Le plus petit temps d'arrêt optimal θ_* est défini par $\theta_* = \min\big\{t \in \{0,\ldots,T\}\,|\,U_t = Z_t\big\}$ (voir si nécessaire le corollaire 2.4.17). Vue la forme de U_t établie à la question **1.a.**, il est alors clair que

$$\theta_* = \min\big\{t \in \{0,\ldots,T\}\mid \max(Z_t, u_{t+1}) = Z_t\big\} = \min\big\{t \in \{0,\ldots,T\}\,|\,Z_t \ge u_{t+1}\big\}.$$

2.b. Par construction, $A_t - A_{t-1} = -\mathbb{E}(U_t - U_{t-1}\,|\,\mathcal{F}_{t-1}) = U_{t-1} - \mathbb{E}(U_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1})$. Or, $U_t = \max(Z_t, u_{t+1})$ est indépendant de $\mathcal{F}_{t-1}$ donc $\mathbb{E}(U_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(U_t) = u_t$, d'où

$$A_t - A_{t-1} = \max(Z_{t-1}, u_t) - u_t = (Z_{t-1} - u_t)_+.$$

Le résultat annoncé en découle puisque le processus $(A_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ est nul en 0.

De plus, le plus grand temps d'arrêt optimal est donné par $\theta^* := \min\big\{t \in \{0,\ldots,T\}\,|\,A_{t+1} > 0\big\} \wedge T$ (*cf.* proposition 2.4.18) ou de façon équivalente, puisque $(A_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ est croissant et issu de 0,

$$\theta^* = \min\big\{t \in \{0,\ldots,T\}\mid A_{t+1} - A_t > 0\big\} \wedge T.$$

D'après la question **1.a.**, il est immédiat (on utilise ici la convention $u_{T+1} = -\infty$) que

$$\theta^* = \min\big\{t \in \{0,\ldots,T\}\,|\,(U_t - u_{t+1})_+ > 0\big\} = \min\big\{t \in \{0,\ldots,T\}\,|\,U_t > u_{t+1}\big\}.$$

3.a. La relation de récurrence établie dans un cadre général à la question **1.b.** s'écrit ici

$$u_T = \frac{1}{2}, \qquad u_t = u_{t+1}^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u_{t+1}^2 = \frac{u_{t+1}^2 + 1}{2},\ t \in \{0,\ldots,T-1\}.$$

D'où le résultat.

3.b. Il est immédiat que

$$v_0 = \frac{1}{2},\ v_1 = \frac{5}{8},\ v_2 = \frac{89}{128},\ v_3 = \frac{24\,305}{32\,768},\ldots$$

D'une part, il est clair par récurrence que $v_n \le 1$ pour tout $n \ge 0$. D'autre part, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{2x} + \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x})^2 + 1 \ge 1$ donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2v_n} + \frac{v_n}{2} \ge 1$. La suite $(v_n)_{n\ge 0}$ croît donc vers une limite $\ell \in \big[\frac{1}{2}, 1\big]$ vérifiant $\ell = \frac{\ell^2+1}{2}$. Sa limite est donc 1.

3.c. Remarquons que

$$\frac{1}{1+v_n}+\frac{1}{1-v_n}=\frac{2}{1-v_n^2}=\frac{2}{1-(2v_{n+1}-1)}=\frac{1}{1-v_{n+1}}.$$

On en déduit par récurrence que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-v_n}-\frac{1}{1-v_0} &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+v_k}=n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+v_k}\right)\\ &\sim n\times\frac{1}{2} \qquad \text{lorsque } n\to+\infty\end{aligned}$$

d'après le théorème de Césaro. En d'autres termes, $\frac{1}{1-v_n}=\frac{n}{2}\left(1+\varepsilon_n\right)$ avec $\lim\limits_n \varepsilon_n=0$. Soit finalement

$$v_n=1-\frac{2}{n}\frac{1}{1+\varepsilon_n}=1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

3.d On repart de l'identité établie à la question **3.c.**, mais à partir du rang 1, soit, pour tout $n\geq 1$:

$$\frac{1}{1-v_n}=\frac{1}{1-v_1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1+v_k}.$$

On y réinjecte le développement limité obtenu au terme de cette même question. Ce qui conduit à

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-v_n} &= \frac{1}{1-v_1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2(1-\frac{1}{k}-\frac{\eta_k}{k})} \qquad \text{avec } \lim_n \eta_n=0\\ &= \frac{1}{1-v_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}1+\frac{1}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

Or, la suite $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\log n$ converge vers une limite finie γ (appelée constante d'Euler). D'où il ressort que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-v_n} &= \frac{1}{1-v_1}+\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}\big(\log n+\gamma-\frac{1}{n}+\varepsilon_n\big)+o\left(\log n\right)\\ &= \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\log n+o\left(\log n\right).\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}v_n &= 1-\frac{1}{\frac{n}{2}+\frac{\log n}{2}+o(\log n)}\\ &= 1-\frac{2}{n}\frac{1}{1+\frac{\log n}{n}+o(\frac{\log n}{n})}\\ &= 1-\frac{2}{n}\left(1-\frac{\log n}{n}+o\left(\frac{\log n}{n}\right)\right)\\ &= 1-\frac{2}{n}+\frac{2\log n}{n^2}+o\left(\frac{\log n}{n^2}\right).\end{aligned}$$

4. Ceci est une identité classique pour les variables aléatoires entières. On part de la remarque suivante :

$$\theta = \sum_{k=1}^{T} \mathbf{1}_{\{k \leq \theta\}}$$

d'où l'on déduit que

$$\mathbb{E}\left(\theta\right) = \sum_{k=1}^{T} \mathbb{P}(\theta \geq k) = \sum_{t=0}^{T-1} \mathbb{P}(\theta > t).$$

Passons au calcul de $\mathbb{P}(\theta_* > t)$. L'événement $\{\theta_* > t\}$ s'écrit au vu de la forme de θ_* établie à la question **2.a.**

$$\{\theta_* > t\} = \bigcap_{s=0}^{t} \{Z_s < u_{s+1}\}.$$

Les variables aléatoires Z_t étant indépendantes et de même loi, on en déduit que, pour tout $t \in \{0, \ldots, T-1\}$,

$$\mathbb{P}(\theta_* > t) = \prod_{s=0}^{t} \mathbb{P}(Z_s < u_{s+1}) = \prod_{s=1}^{t+1} \mathbb{P}(Z_0 < u_s).$$

D'après la question précédente, il vient alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}\left(\theta_*\right) & = & \displaystyle\sum_{t=0}^{T-1} \mathbb{P}(\theta_* > t) & \\
& = & \displaystyle\sum_{t=0}^{T-1} \mathbb{P}(Z_0 < u_1)\mathbb{P}(Z_0 < u_2) \cdots \mathbb{P}(Z_0 < u_{t+1}) & \\
& = & \displaystyle\sum_{t=0}^{T-1} u_1\, u_2 \cdots u_{t+1} & \\
& = & \displaystyle\sum_{t=0}^{T-1} v_{T-1}\, v_{T-2} \cdots v_{T-t-1} & \text{d'après la question } \textbf{3.a.} \\
& = & \displaystyle\sum_{s=0}^{T-1} v_s\, v_{s+1} \cdots v_{T-1} & \text{où l'on a posé } t := T-1-s.
\end{array}$$

On obtient finalement en mettant le produit $v_0 \ldots v_{T-1}$ en facteur

$$\mathbb{E}\left(\theta_*\right) = v_0 \ldots v_{T-1} \left(1 + \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{v_0 \ldots v_{t-1}}\right).$$

5. À partir du développement limité de la question **3.d.**, il vient pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{array}{rcl}
v_1 \cdots v_n & = & \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 - \frac{2}{k} + \frac{2\log k}{k^2} + o\left(\frac{\log k}{k^2}\right)\right)\right) \\
& = & \exp\left(-2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + a_k\right)\right)
\end{array}$$

où $a_k = O\left(\dfrac{\log k}{k^2}\right)$ est donc le terme général d'une série absolument convergente.

Par suite, lorsque $n \to +\infty$,

$$v_0 \cdots v_n \sim \frac{C}{n^2}$$

où C est une constante réelle strictement positive. Par conséquent,

$$\frac{1}{v_0 \cdots v_n} \sim \frac{n^2}{C}$$

ce qui entraîne par application des règles usuelles sur les équivalents dans les séries divergentes à termes positifs,

$$1+\sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{v_0 \cdots v_{t-1}} \sim 1+\frac{1}{C}\sum_{t=0}^{T-2} t^2 = 1+\frac{1}{C}\frac{(T-2)(T-1)(T-\frac{3}{2})}{3} \sim \frac{T^3}{3C} \quad \text{lorsque } T \to +\infty.$$

On en déduit, toujours par application des règles usuelles sur les équivalents, que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}\,\theta_*^{(T)}}{T} &= \frac{1}{T} v_0 \cdots v_{T-1}\left(1+\sum_{t=1}^{T-1}\frac{1}{v_0 \cdots v_{t-1}}\right)\\
&\sim \frac{C}{T(T-1)^2}\frac{T^3}{3C}\\
&\sim \frac{1}{3} \qquad \text{lorsque } T \to +\infty.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'enveloppe de Snell d'horizon T, notée $U^{(T)}$, vérifie (*cf.* section 2.4)

$$\mathbb{E}\,(Z_{\theta_*^{(T)}}) = \mathbb{E}\,(U_0^{(T)}) = v_T$$

donc la satisfaction moyenne de la princesse, si elle s'en tient à la stratégie optimale, se comportera asymptotiquement comme

$$\mathbb{E}\,(Z_{\theta_*^{(T)}}) = 1 - \frac{2}{T} + \frac{2\log T}{T^2} + o\left(\frac{\log T}{T^2}\right)$$

lorsque le nombre de prétendants tend vers $+\infty$.

26.4 Commentaires

▷ Sur un plan pratique, c'est la formule de la question **2.a.** pour le (plus petit) temps d'arrêt optimal, combinée avec la forme explicite des u_t *via* la suite (v_k) qui permet la résolution numérique du problème : on calcule les u_t, $t \in \{1,\ldots,T\}$, puis on « attend » d'observer un $Z_t \geq u_{t+1}$.

▷ Cette approche paramétrique peut être étendue à des lois plus générales μ, par exemple portées par tout $\mathbb{R}_+$. Cette dernière restriction est motivée par des considérations de politique intérieure : il semble sage d'éviter les notes négatives alors, qu'à l'inverse, s'autoriser éventuellement une échelle de notes non bornée supérieurement peut passer pour une forme d'habileté suprême...

De même, on supposera que 0 appartient au support de μ mais que $\mu(\{0\}) \neq 1$.

Tout d'abord, la question **3.a** peut être généralisée sans difficulté particulière sous la forme : soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite croissante définie par

$$v_0 = \mathbb{E}\, Z_0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n F(v_n) + \mathbb{E}\, Z_0 - K(v_n). \tag{26.4.1}$$

Alors, pour tout horizon fixé T du problème de la princesse, la « réduite » $(u_t^{(T)})_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ de l'enveloppe de Snell associée vérifie

$$\forall\, t \in \{0, \ldots, T\}, \quad u_t^{(T)} = v_{T-t}.$$

Dès que les fonctions de « répartition » F et K admettent des formes explicites (ce qui induit qu'il en est de même avec $\mathbb{E}\, Z_0 = \lim_{u\to+\infty} K(u)$), il est immédiat de calculer numériquement $(v_n)_{n\geq 0}$ à l'aide d'une calculatrice programmable (un ordinateur est inutile à ce stade si F et K sont vraiment explicites, *cf.* ci-après !). La « réduite » $(u_t^{(T)})_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ de l'enveloppe de Snell en découle aussitôt et, partant, la règle pratique d'arrêt optimal que la princesse doit mettre en œuvre après avoir évalué chaque prétendant.

Sur un plan plus théorique, on peut obtenir un certain nombre de résultats dans ce cadre général. On pose

$$\Phi(v) = vF(v) - K(v) + \mathbb{E}\, Z_0, \quad v \in \mathbb{R}_+.$$

En notant que, pour tout $v \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}\, Z_0 - K(v) = \int_{]v,+\infty[} y\mu(dy) \geq v\mu(v, +\infty[) = v(1 - F(v))$$

on déduit que $\Phi(v) \geq v$ et, par suite, que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

On définit la borne supérieure du support de μ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par

$$\ell^* = \inf \big\{ v \,|\, F(v) = 1 \big\}.$$

Noter que $\mathbb{E}\, Z_0 \in]0, \ell^*[$ car le support de μ contient 0, sans y être réduit, et que $\Phi(0) = 0$. Nous allons montrer que

$$\lim_n v_n = \ell^*.$$

D'une part, notons que, F étant continue à droite, $F(\ell^*) = 1$ et que, comme $\mu(]\ell^*, +\infty[) = 0$, il est clair que $K(\ell^*) = \mathbb{E}\, Z_0$. En conséquence, $\Phi(\ell^*) = \ell^*$, *i.e.* ℓ^* est un point fixe de Φ.

D'autre part, on déduit de l'identité élémentaire,

$$vF(v) - K(v) = \int_{[0,v]} \underbrace{(v-u)}_{\geq 0} \mu(du), \ v \in \mathbb{R}_+,$$

que la fonction Φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement croissante sur $[\ell^*, +\infty[$ car égale à l'identité $v \mapsto v$. Enfin, remarquons que

$$\Phi(v) = v \quad \text{si et seulement si} \quad \int_{]v,+\infty[} \underbrace{(v-u)}_{<0} \mu(du) = 0.$$

Par conséquent $\Phi(v) = v$ si et seulement si $\mu(]v, +\infty[) = 0$, *i.e.* $v \geq \ell^*$ par construction de ℓ^*. Ceci montre que ℓ^* est l'unique point fixe de Φ sur $[0, \ell^*]$.

On vérifie enfin que la fonction Φ, continue à droite par construction, est en fait continue car elle a pour saut en $v \in \mathbb{R}_+$,

$$v\big(F(v) - F(v_-)\big) - \big(K(v) - K(v_-)\big) = 0.$$

Comme $v_0 = \mathbb{E}\, Z_0 = \Phi(0) \leq \ell^*$ et que ℓ^* est un point fixe de Φ, il est clair en itérant l'inégalité que, pour tout $n \geq 0$, $v_n = \Phi^n(0) \leq \ell^*$.

La suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est donc croissante, majorée par ℓ^* et n'a donc d'autre choix, par continuité de Φ, que de converger vers l'unique point fixe ℓ^* de Φ sur $[\Phi(0), \ell^*]$.

Cela signifie notamment que la satisfaction moyenne optimale de la princesse, quelle que soit la répartition des vertus des prétendants, tendra vers la satisfaction absolue lorsque la population de prétendants tend vers $+\infty$, *i.e.*,

$$\lim_{T \to +\infty} \big[u_0^{(T)} = \mathbb{E}\, Z_{\theta_*}^{(T)}\big] = \lim_{n \to +\infty} v_n = \ell^*.$$

Ce résultat mathématique est plus connu sous sa forme ancestrale non formalisée

Bienheureuses soient les princesses élevées dans de vastes royaumes,
Elles y croisent chaque jour moult preux chevaliers rougissant sous leur heaume.

(Ce qui n'est, somme toute, guère surprenant).

La formule donnant l'espérance du temps d'arrêt optimal $\theta_*^{(T)}$ obtenue à la question **4.** se généralise elle aussi aisément en

$$\mathbb{E}\left(\theta_*^{(T)}\right) = F(v_0) \ldots F(v_{T-1}) \left(1 + \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{F(v_0) \ldots F(v_{t-1})}\right).$$

Une fois encore, tout ceci se calcule sans peine si F et K s'expriment à partir de fonctions élémentaires. On peut néanmoins, comme dans le problème précédent, souhaiter se faire une idée précise *a priori* du comportement de $\mathbb{E}\left(\theta_*^{(T)}\right)$ lorsque T est très grand pour d'autres lois μ.

À titre d'exemple, nous allons traiter un second modèle paramétrique.

Un modèle de notation exponentiel : Ainsi, supposons que la princesse, sous l'influence d'études scientifiques poussées, décide d'adopter une notation peu académique entre 0 et $+\infty$. Il s'agit surtout pour elle de pouvoir traduire, de façon à peine voilée, son absence d'illusions sur les vertus des jeunes gens du royaume puisqu'elle fait l'hypothèse que sa loi de notation μ sera exponentiellement distribuée, de paramètre $\lambda > 0$. Le modèle choisi conduit à des fonctions F et K données classiquement par

$$F(z) = 1 - e^{-\lambda z} \quad \text{et} \quad K(z) = -ze^{-\lambda z} + \frac{1 - e^{-\lambda z}}{\lambda},\ z \in \mathbb{R}_+.$$

On vérifie alors sans peine que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est solution de la récurrence

$$v_0 = \frac{1}{\lambda}, \quad v_{n+1} = v_n + \frac{e^{-\lambda v_n}}{\lambda},\ n \geq 0.$$

On peut normaliser l'équation précédente en posant $y_n = \lambda v_n$, $n \geq 0$: la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est alors solution de la récurrence aisément calculable et libre de λ :

$$y_0 = 1, \quad y_{n+1} = y_n + e^{-y_n},\ n \geq 0.$$

(En fait, la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ correspond tout simplement au cas $\lambda = 1$). On sait donc, d'après ce qui précède, que $y_n \uparrow \ell^* = +\infty$. Mais on peut, comme pour la loi uniforme, faire beaucoup mieux. En effet, si l'on réécrit la relation de récurrence ci-dessus sous la forme

$$(y_n - y_{n-1})e^{y_{n-1}} = 1, \quad n \geq 1,$$

on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})e^{y_{k-1}} = n.$$

Comme, par ailleurs, la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ étant croissante, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})e^{y_{k-1}} \leq \int_0^{y_n} e^u\,du = e^{y_n} - 1.$$

On en déduit que $e^{y_n} \geq n+1$, soit encore,

$$y_n \geq \log(n+1), \quad n \geq 0.$$

En réinjectant cette inégalité dans l'équation initiale, on en obtient une dans l'autre sens, en l'espèce $y_{n+1} - y_n \leq e^{-\log(n+1)} = \frac{1}{n+1}$; soit, après sommation,

$$y_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

On a donc l'encadrement

$$\forall\, n \geq 0, \quad \log(n+1) \leq y_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Ceci se révèle néanmoins insuffisant pour conclure sur l'asymptotique de $\mathbb{E}\Big(\theta_*^{(T)}\Big)$. Posons maintenant $\bar{y}_n = y_n - \log n$, $n \geq 1$. Cette suite est positive et l'on constate par ailleurs qu'elle est décroissante puisque, pour tout $n \geq 1$,

$$\bar{y}_{n+1} - \bar{y}_n = \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + e^{-y_n} \leq e^{-y_n} - \frac{1}{n+1} = e^{-y_n} - e^{-\log(n+1)} \leq 0.$$

Donc la suite $(\bar{y}_n)_{n\geq 1}$ décroît vers une limite $c \geq 0$, *i.e.*,

$$y_n = \log n + c + \varepsilon_n,\ \varepsilon_n \downarrow 0 \quad \text{lorsque}\ \ n \uparrow +\infty.$$

En réinjectant à nouveau cette égalité dans l'équation de récurrence initiale, il vient, après multiplication par n,

$$n\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + n(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) = e^{-c}e^{-\varepsilon_n}.$$

D'où l'on déduit que $\lim_n n(\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n)=c'$ avec $c'=e^{-c}-1\leq 0$. Si $c'<0$, alors il existe un entier $n_0\geq 2$ tel que, pour tout $n\geq n_0$, $\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n\leq -\dfrac{c'}{2n}$, et partant,

$$\varepsilon_{n+1}\leq \varepsilon_{n_0}-c'\sum_{k=n_0}^{n}\frac{1}{2k}\longrightarrow -\infty \quad \text{lorsque} \quad n\to+\infty,$$

ce qui contredit la convergence de ε_n vers 0. Par suite, $c=0$. En conséquence, en revenant une troisième fois à l'équation originelle, on observe que

$$\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}=\frac{1-e^{-\varepsilon_n}}{n}.$$

Or, $\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{2n^2}$, d'où il ressort que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1-e^{-\varepsilon_k}}{k}=\varepsilon_1-\varepsilon_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Ceci assure la convergence de la série du membre de gauche.

On dispose maintenant d'une précision suffisante sur le comportement asymptotique de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ pour revenir à l'analyse de l'espérance du temps d'arrêt optimal $\theta_*^{(T)}$ lorsque $T\to+\infty$. En effet, au vu de ce qui précède et de la définition de la fonction de répartition, il vient :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}F(v_k) &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(1-e^{-y_k}\right)=\left(1-\frac{1}{e}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{e^{-\varepsilon_k}}{k}\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{e}\right)\exp\Big(-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{e^{-\varepsilon_k}}{k}\Big)\exp\Big(\sum_{k=1}^{n-1}O\big(\frac{e^{-2\varepsilon_k}}{k^2}\big)\Big)\\ &= \left(1-\frac{1}{e}\right)\exp\Big(-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\Big)\exp\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-e^{-\varepsilon_k}}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}O\Big(\frac{1}{k^2}\Big)\Big).\end{aligned}$$

Or, sachant que $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=\log n+\gamma+\eta_n$ où $\eta_n\to 0$ et γ désigne la constante d'Euler[1] et que $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-e^{-\varepsilon_k}}{k}<+\infty$, on en déduit l'existence d'une constante $\Xi\in\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\prod_{k=0}^{n-1}F(v_k)\sim\frac{\Xi}{n}\quad \text{lorsque}\quad n\to+\infty.$$

On en déduit que, lorsque $T\to+\infty$,

$$\frac{\mathbb{E}\,\theta_*^{(T)}}{T}\sim\frac{\Xi}{T^2}\left(1+\sum_{k=1}^{T-1}\frac{k}{\Xi}\right)\sim\frac{1}{2}.$$

[1] Il suffit de vérifier que $x_n=1+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$, $n\geq 1$, décroît, est minorée par y_n, donc tend vers une limite positive notée γ (en fait, $\gamma\approx 0,5772156649>0$).

Par ailleurs, l'enveloppe de Snell d'horizon T vérifie toujours dans ce modèle exponentiel

$$\mathbb{E}\, Z_{\theta_*}^{(T)} = \mathbb{E}\, U_0^{(T)} = v_T = \frac{y_T}{\lambda}.$$

Finalement, la satisfaction moyenne optimale de la princesse évoluera asymptotiquement comme

$$\mathbb{E}\, Z_{\theta_*}^{(T)} \sim \frac{\log T}{\lambda}$$

lorsque le nombre T de prétendants tend vers $+\infty$.

D'un point de vue plus général, et comme le sous-entend le titre du problème, l'approche paramétrique n'est pas la seule possible et sans doute pas la plus vraisemblable : il est rare en matière de mariage que l'on connaisse *a priori* la loi de la répartition statistique des qualités dans la population de son cœur (et encore moins une princesse, cela va de soi). On peut aussi critiquer le manque de « chic » du critère en moyenne. Une princesse plus ambitieuse choisira de *maximiser la probabilité de désigner le meilleur prétendant* ! Sous cette forme non paramétrique, on retrouve là un très vieux problème d'initiation à l'arrêt optimal, mysoginement connu sous le nom de « problème des secrétaires » (l'analogie étant aussi évidente que douteuse et dénuée de toute forme de romantisme !).

Pour plus de détails sur l'histoire et les différentes versions apparues au cours des temps de ce très ancien problème, nous renvoyons à l'article de Thomas S. Ferguson : « Who Solved the Secretary Problem ? » *Statistical Science*, **4**(3) :282-289, Août 1989. On pourra aussi consulter le site web d'*Images des Mathématiques*, 2009 (CNRS)

http ://images.math.cnrs.fr/Decision.html

Laurence Carassus, Gilles Pagès

Finance de marché

Modèles mathématiques à temps discret

Ce manuel est une introduction aux mathématiques financières à temps discret ainsi qu'aux concepts et techniques de modélisation utilisés par les professionnels de la finance de marché. Il est constitué **d'éléments de cours** et de **24 problèmes corrigés**, sélectionnés parmi les sujets d'examens de mathématiques financières élaborés, par les auteurs, au fil des ans.

Cet ouvrage s'adresse en priorité aux étudiants en Master de mathématiques appliquées (dès la première année) ou se préparant à l'épreuve de modélisation de l'Agrégation de mathématiques ainsi qu'aux élèves des écoles d'ingénieurs et des écoles de commerce se destinant à une carrière d'analyste quantitatif. Il sera également utile aux professionnels de la finance de marché puisque nombre des problèmes posés sont motivés par des cas concrets.

Sommaire :

I. Éléments de cours
II. Autour du modèle binomial
III. Quelques options exotiques
IV. Quelques autres problèmes en marché complet
V. Arrêt optimal et options américaines
VI. Marchés incomplets, marchés imparfaits

Laurence Carassus est professeur de mathématiques à l'université Reims Champagne-Ardenne. Cofondatrice du master « Ingénierie statistique et informatique de la finance, de l'assurance et du risque (ISIFAR) » de l'université Paris Diderot / Paris 7, elle mène ses recherches dans les domaines des probabilités, de l'optimisation, de l'économie et de la finance mathématique.

Gilles Pagès est professeur de mathématiques à l'université Pierre et Marie Curie / Paris 6. Coresponsable du Master 2 Probabilités & finance dit master « El Karoui » commun à l'UPMC et l'École polytechnique, il mène ses recherches dans les domaines des probabilités numériques, du calcul stochastique, de la quantification et des mathématiques financières.

ISBN 978-2-311-40136-3
9 782311 401363

www.VUIBERT.FR