Exercices : Dérivée d'une fonction

Exercice 1 : Calculez les dérivées des fonctions suivantes, définies sur P :

a – $f(x) = 2x^2 - 7x + 9$

b – $f(x) = 3x^2 - 4x - 5$

c – $f(x) = 3 - 4x$

d – $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 3$

Exercice 2 : Déterminez l'équation de la tangente à la courbe (*C*)représentant la fonction f au point *A* d'abscisse x_A dans les cas suivants :

a – $f(x) = x^2 + 3x - 12$ $\quad x_A = 5$

b – $f(x) = x^3 - 3x + 6$ $\quad x_A = 1$

Exercice 3 : Dressez le tableau des variations de la fonction suivante :

$f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ sur $I = [-1; 4]$

Exercice 4 : Le coût total de production d'un article varie en fonctions du nombre d'objets x fabriqués suivant la formule : $C(x) = x^2 - 24x + 225$.

1° - Calculez : $C(1)$; $C(10)$; $C(15)$; $C(20)$; $C(25)$.

2° - Etudiez et représentez graphiquement $C(x)$ pour $I = [1 ; 25]$. Quelle est la nature de la courbe obtenue ?

3° - Les articles sont vendus 16 € pièce. On désigne par $V(x)$ le montant correspondant à la vente de x articles. Exprimer $V(x)$ en fonction de x. Représenter graphiquement $V(x)$.

4° - Exprimez le résultat bénéficiaire **B** (x) en fonction de x (On rappelle que le bénéfice B est obtenu en soustrayant le coût de fabrication *C* à la recette *V*).Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximum ? Calculez-le.

Exercice 5 : L'entreprise RAVEL fabrique des appareils à cire. Le nombre d'appareils fabriqués par jour est n. Le coût de fabrication, en euros, de ces n appareils est donné par la relation :

$C(n) = n^2 + 160n + 800$ avec $5 \leq n \leq 60$

1° - Quel est le coût de fabrication de 50 appareils ?

2° - Le bénéfice B réalisé pour la vente de n appareils est donné par $B(n) = -n^2 + 90n - 800$

a – Sachant que le bénéfice B est obtenu en soustrayant le coût de fabrication *C* à la recette R, retrouver la recette obtenue pour la vente d'un appareil à cire.

b – Pour connaître le bénéfice maximum :

- Calculer $B'(x)$ où B' est la dérivée de la fonction B définie par :

  $B(x) = -x^2 + 90x - 800$ sur $I = [5 ; 60]$
- Calculer la valeur n_m qui annule $B'(x)$.
- Dressez le tableau de variations de la fonction $B(x)$.
- Tracer la courbe représentant le bénéfice B dans l'intervalle [5 ; 60].
- Calculer la valeur de B correspondante et placer dans le repère le point de coordonnées (n_m ; B (n_m)).
- Préciser le nombre d'appareils à fabriquer pour obtenir le bénéfice maximum. Quel est ce bénéfice maximum ?

Exercice 1 : Calculez les dérivées des fonctions suivantes, définies sur P :

a – $f'(x) = 4x - 7$

b – $f'(x) = 6x - 4$

c – $f'(x) = -4$

d – $f'(x) = \frac{1}{2}x + 4$

Exercice 2 : Déterminez l'équation de la tangente à la courbe (C)représentant la fonction f au point A d'abscisse x_A dans les cas suivants :

a – $f(x) = x^2 + 3x - 12$ $\quad x_A = 5$

- Calculons $f(5) = 5^2 + 3\times5 - 12 = 25 + 15 - 12 = 28$
- Calculons la dérivée : $f'(x) = 2x + 3$ soit : $f'(5) = 2\times5 + 3 = 13$
- Équation de la tangente : y = ax + b soit y = 13x + b soit 28 = 13 × 5 + b

Alors : b = 28 – 65 = -37 ; L'équation de la tangente est : y = 13x - 37

b – $f(x) = x^3 - 3x + 6$ $\quad x_A = 1$

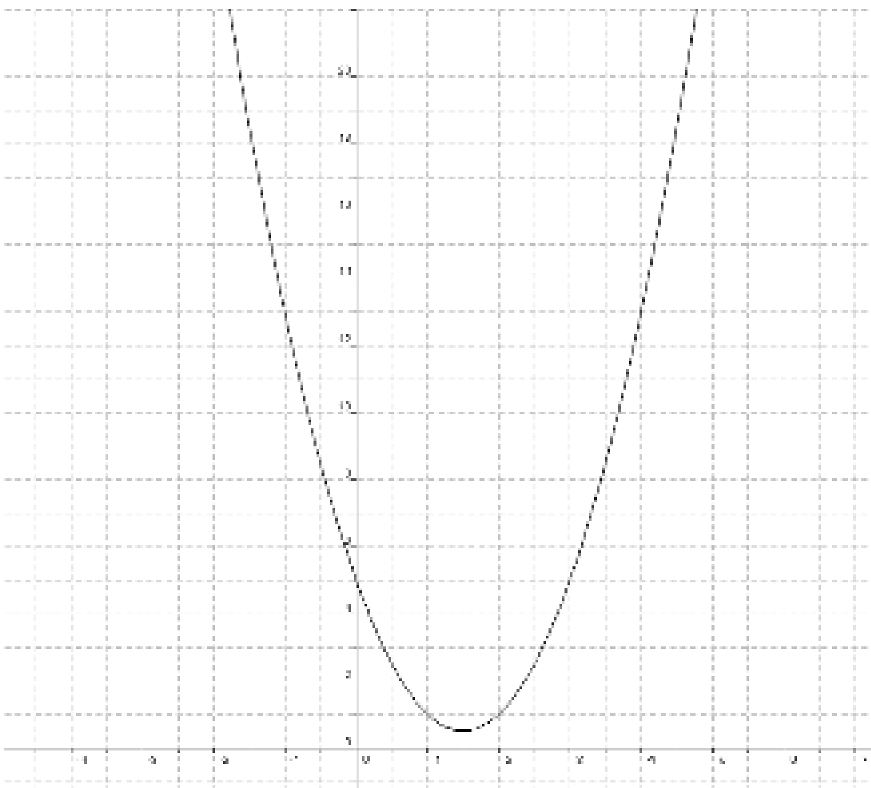
- Calculons $f(1) = 1^3 - 3\times1 + 6 = 1 - 3 + 6 = 4$
- Calculons la dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 3$ soit : $f'(1) = 3\times1 - 3 = 0$
- Équation de la tangente : y = ax + b soit y = 0x + b soit 4 = 0 × 1 + b

Alors : b = 4 ; L'équation de la tangente est : y = 0x + 4 soit y =4

Exercice 3 : Dressez le tableau des variations des fonctions suivantes :

a – $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ sur I = [- 1; 4]

x	-1		1,5		4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	13	↘	0,5	↗	13

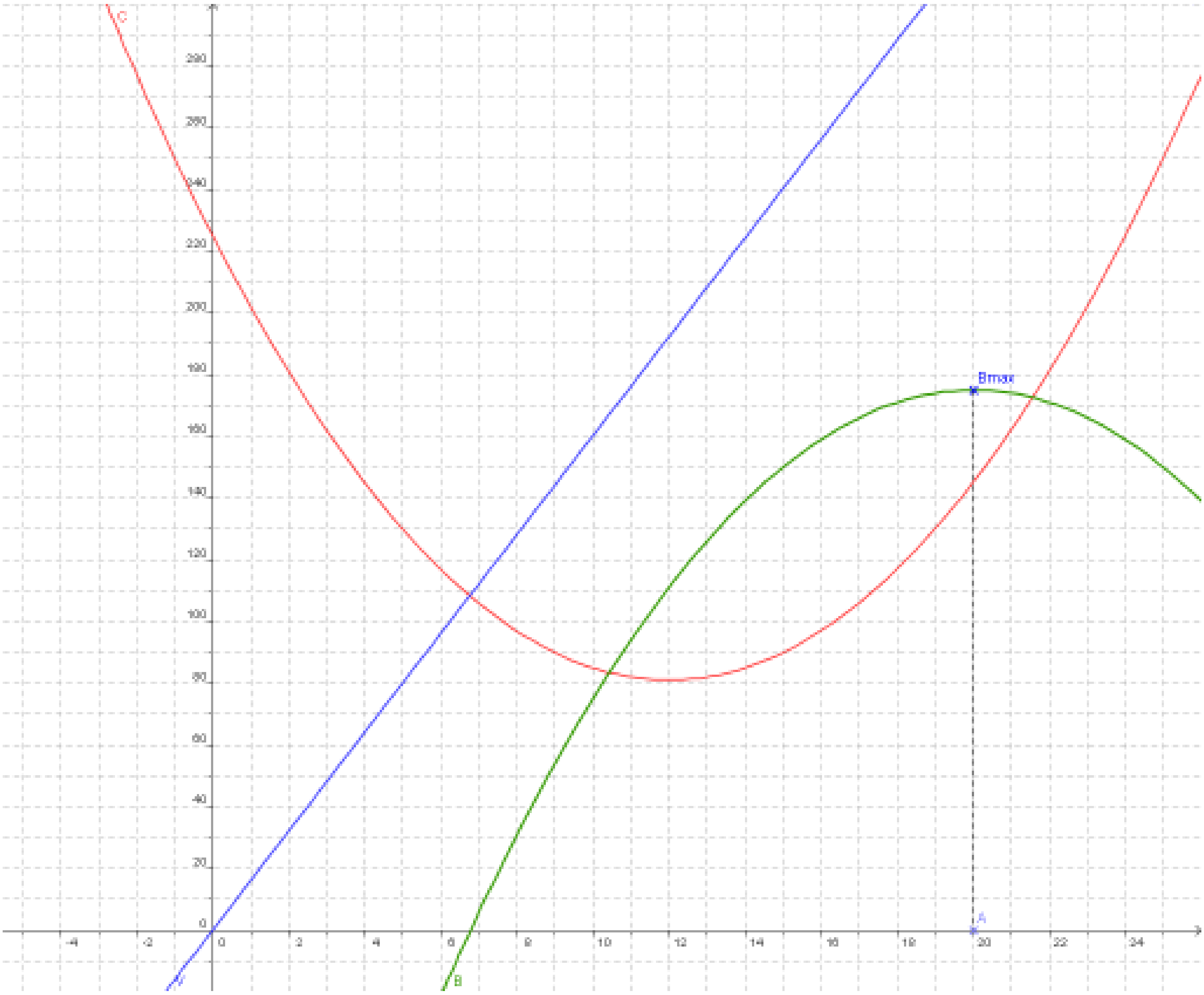


<u>Exercice 4 :</u> Le coût total de production d'un article varie en fonctions du nombre d'objets x fabriqués suivant la formule : $C(x) = x^2 - 24x + 225$.

1° - Calculez : $C(1)$; $C(10)$; $C(15)$; $C(20)$; $C(25)$.

x	1	10	15	20	25
$C(x)$	202	85	90	145	250

2° - Etudiez et représentez graphiquement $C(x)$ pour $I = [\ 1\ ;\ 25\ ]$. Quelle est la nature de la courbe obtenue ?



La courbe obtenue est une parabole.

3° - Les articles sont vendus 16 € pièce. On désigne par $V(x)$ le montant correspondant à la vente de x articles. Exprimer $V(x)$ en fonction de x. Représenter graphiquement $V(x)$.
$V(x) = 16\,x$.

4° - Exprimez le résultat bénéficiaire $B(x)$ en fonction de x (on rappelle que le bénéfice B est obtenu en soustrayant le coût de fabrication C à la recette V). Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximum ? Calculez-le.

$$B(x) = V(x) - C(x) = 16x - (x^2 - 24x + 225) = 16x - x^2 + 24x - 225 = -x^2 + 40x - 225$$

Le bénéfice est maximum pour 20 objets fabriqués, il s'élève à 175 €.

Exercice 6 :

1° - Coût de fabrication de 50 appareils :

$C(50) = 50^2 + 160 \times 50 + 800 = 2500 + 8000 + 800 = 11\,300$

2° - Le bénéfice B réalisé pour la vente de n appareils est donné par $B(n) = -n^2 + 90n - 800$

a – Recette obtenue pour la vente d'un appareil à cire.

$B(n) = R(n) - C(n)$ soit : $B(n) + C(n) = R(n)$

$R(n) = -n^2 + 90n - 800 + n^2 + 160n + 800 = 250n$

b – Pour connaître le bénéfice maximum :

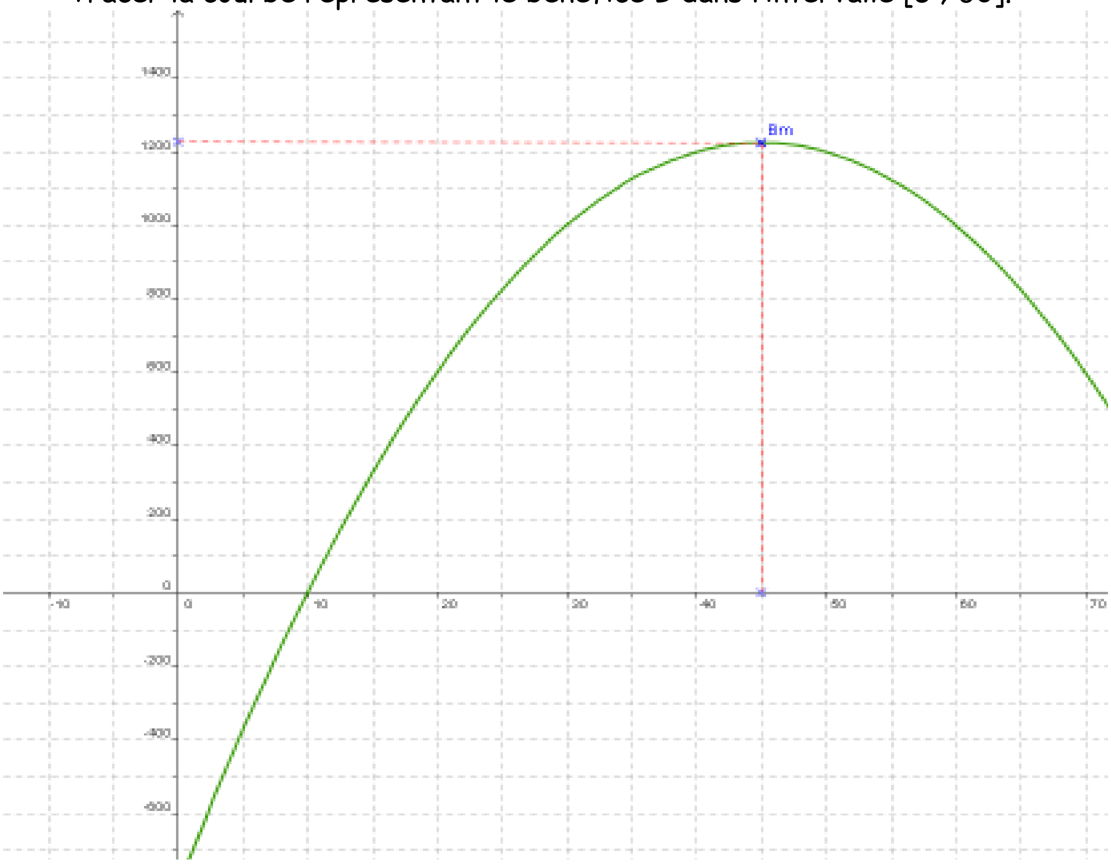
- Calcul de $B'(x)$: $B'(x) = -2x + 90$
- Calcul de la valeur n_m qui annule $B'(x)$:

$$B'(x) = 0 \text{ soit } -2x + 90 = 0 \text{ soit : } x = \frac{90}{2} = 45$$

- Dressez le tableau de variations de la fonction $B(x)$.

x	5		45		60
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	- 375	↗	1225	↘	1000

- Tracer la courbe représentant le bénéfice B dans l'intervalle [5 ; 60].



- Calcul de la valeur de B :

$B(45) = -45^2 + 90 \times 45 - 800 = -2025 + 4050 - 800 = 1225$ soit 1225 €

- Pour 45 appareils fabriqués le bénéfice est maximum. Ce bénéfice maximum s'élève à 1225 €