Adil BENNIS
Jean-Marc DUFOUR
Viet Hung DO

Mai 2007
P2009

EE 345 – Traitement du signal

TP 4 – Filtres RC et RL

L'objectif de ce travail est d'étudier la chaîne de traitement associée à des montages électriques simples.

Sommaire

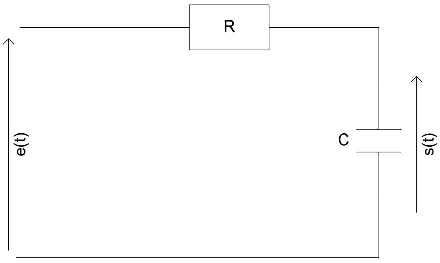
Introduction

Ce TP est une application de la théorie du Traitement du Signal à un cas concret. Nous étudierons deux montages simples de l'électronique analogique : un circuit RC et un circuit RL, qui forment chacun un filtre analogique.

Ces études se distingueront en deux parties : l'une théorique où l'analyse analogique du filtre sera faite et l'autre pratique où le filtre sera numériquement réalisé avec le logiciel Matlab.

1. *Travail de préparation*

Le montage que l'on propose est un circuit RC :



Nous allons chercher à caractériser s(t) en fonction de e(t) d'une façon analogique puis numérique.

1. Filtre analogique

Question 1 : Equation différentielle.

D'après la loi des mailles, on a :

$$e(t) = u_R(t) + s(t)$$
$$= R.i(t) + s(t)$$

Or la relation dans un condensateur est : $i(t) = C.\frac{ds(t)}{dt}$

Donc :

$$e(t) = RC.\frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

L'équation différentielle du circuit est donc :

$$\boxed{RC.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)}$$

Question 2 : Fonction de transfert

Passons l'équation différentielle dans l'espace de Fourier :

$$RC.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \Leftrightarrow RC.(2\pi jf).S(f) + S(f) = E(f)$$

Donc :

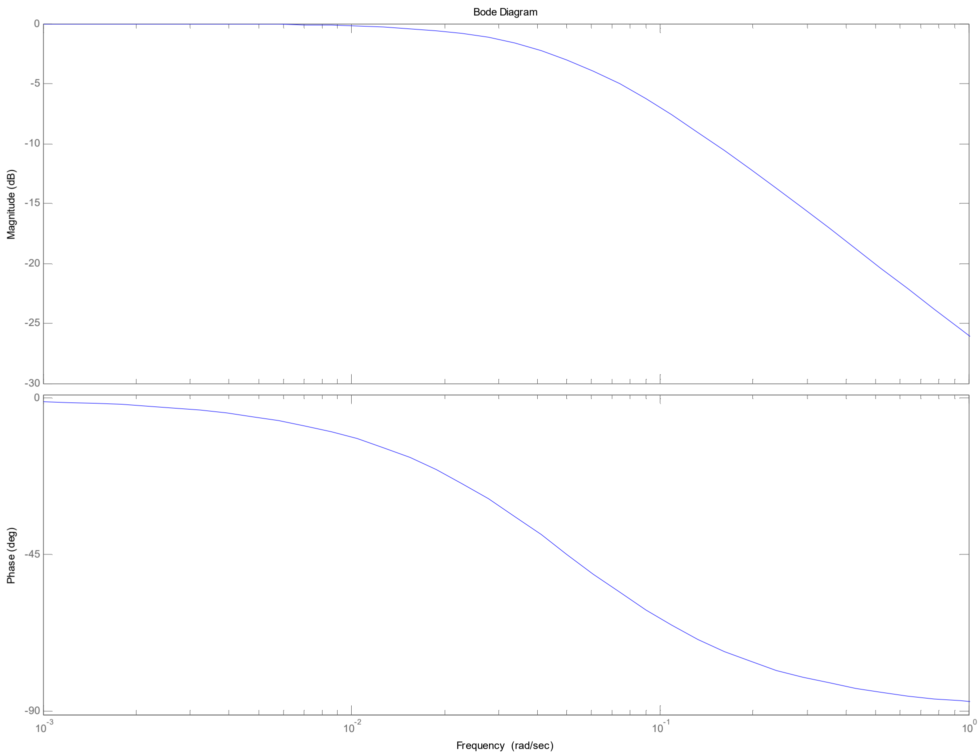
$$S(f)[1 + RC.2\pi jf] = E(f)$$

D'où la fonction de transfert :

$$\boxed{H(f) = \frac{S(f)}{E(f)} = \frac{1}{1 + RC.2\pi jf}}$$

Question 3 & 4 : Diagramme de Bode et fonction du circuit

On trace le diagramme de Bode de notre système à l'aide de Matlab :



On reconnaît bien un filtre passe-bas du premier ordre, comme on pouvait le reconnaître avec sa fonction de transfert. En effet, un filtre passe-bas à une équation du type :

$H(f)=\dfrac{1}{1+\dfrac{f}{f_0}}$, où f_0 est la fréquence de coupure du filtre, à partir de laquelle le signal est atténué.

Ici, $\boxed{f_0=\dfrac{1}{2\pi RC}}$.

Question 5 : Réponse impulsionnelle

Déterminons la réponse impulsionnelle du système.
Pour cela, on calcule la transformée de Fourier de $x(t)=e^{-at}.u(t)$, où u(t) est un échelon.

$$X(f)=TF[x(t)]=TF[e^{-at}.u(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t).e^{-2\pi jft}dt$$

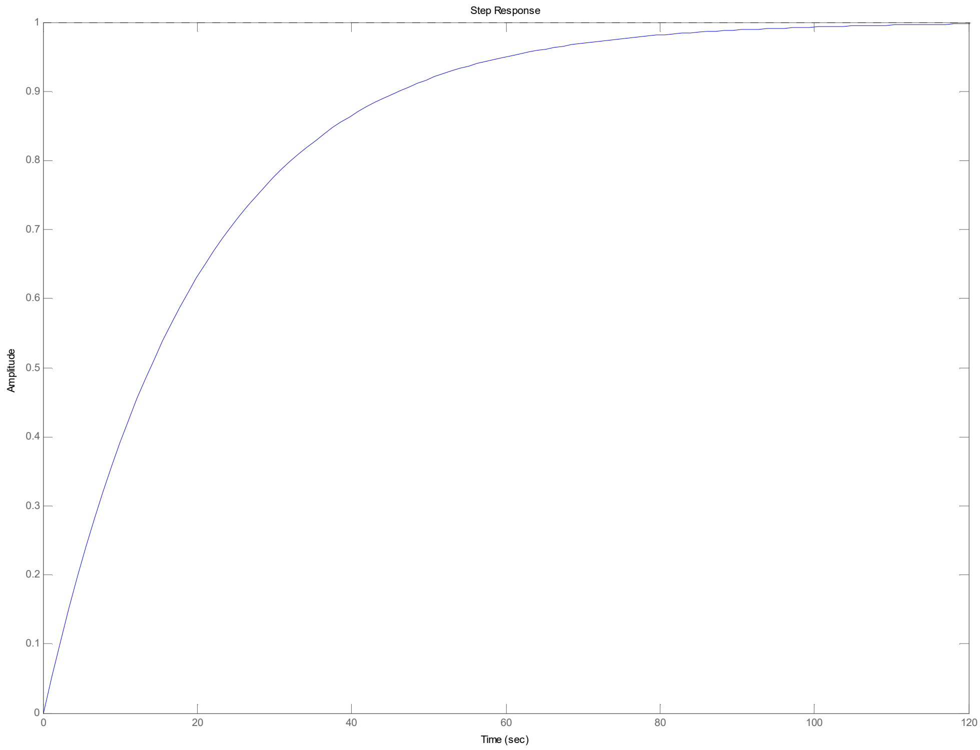
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-at}.u(t).e^{-2\pi jft}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-at}.e^{-2\pi jft}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-(a+2\pi jf)t}dt$$

$$= \left[-\frac{e^{-(a+2\pi jf)t}}{a+2\pi jf} \right]_0^{+\infty} = -\frac{e^{-\infty} - e^0}{a+2\pi jf} = \frac{1}{a+2\pi jf}$$ Qui est la fonction d'un filtre passe-bas.

La réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas est donc une *exponentielle négative*.

Question 6 : Représentation

On trace maintenant la réponse impulsionnelle calculée par Matlab :



On voit que cette réponse est une fonction du type $1-e^{-x}$, ce qui correspond à nos calculs.

2. Filtre numérique

Dans cette partie, la variable temps est discrétisée et est représentée sous la forme nT_e
Nous continuons notre étude dans le but de trouver un modèle de notre système.

Question 1 : Expression de s([n+1]Te)

L'équation $RC.\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)$ devient $RC.\frac{ds(t)}{dt}+s(nT_e)=e(nT_e)$

Or on sait que :

$$\frac{ds(t)}{dt}=\frac{s([n+1]T_e)-s(nT_e)}{T_e}$$

Donc l'équation se simplifie :

$$RC.\frac{s([n+1]T_e)-s(nT_e)}{T_e}+s(nT_e)=e(nT_e)\Rightarrow\frac{RC}{T_e}.s([n+1]T_e)=e(nT_e)-(1-\frac{RC}{T_e})s(nT_e)$$

D'où $\boxed{s([n+1]T_e)=\frac{T_e}{RC}e(nT_e)-(\frac{T_e}{RC}-1)s(nT_e)}$

Dans la suite, on appellera $a=1-\frac{T_e}{RC}$ et $b=\frac{T_e}{RC}$.

Donc $\boxed{s([n+1]T_e)=b.e(nT_e)+a.s(nT_e)}$

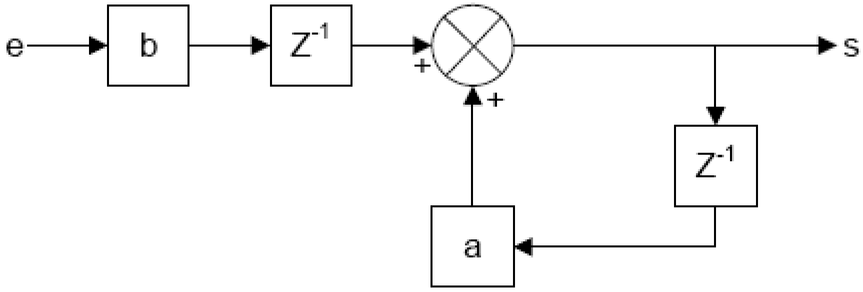
Question 2 : Algorithme de calcul

On peut écrire l'algorithme suivant, qui reprend l'équation aux récurrences énoncée ci-dessus, et qui sera implémenté plus tard sous Matlab :

```
function s=filtreRC(e)
      %Conditions initiales
    s(1)=0;
      %Parametres
    fc=1000;
    RC=1/(2*pi*fc);
    Te=1/44100;
    n=length(e);
      %Calcul
    for i=1:n-1
        s(i+1)=(-(Te/RC-1))*s(i) + e(i)*(Te/RC);
    end
end
```

Question 3 : Représentation graphique

Ce calcul peut être représenté par un système automatique comme celui-ci :



Question 4 : Fonction de Transfert en z

On rappelle que :
$s([n+1]T_e) = b.e(nT_e) + a.s(nT_e)$

Lorsque l'on passe en z :
$z.S(z) = a.S(z) + b.E(z) \Rightarrow S(z).(z-a) = b.E(z)$

Donc :
$$S(z) = \frac{b}{z-a} E(z)$$

D'où la fonction de transfert en z, $\boxed{H(z) = \frac{b}{z-a}}$

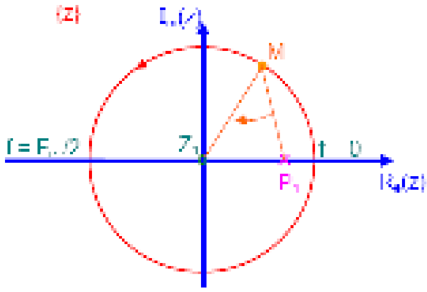
Pour respecter la convergence, et donc la stabilité du système, il faut que les pôles (les racines du dénominateur) soient compris dans le cercle unité. Il faut donc que l'on ait $|a| \leq 1$.

Question 5 : Interprétation Graphique

Pour interpréter graphiquement la fonction de transfert en z, il faut l'analyser en prenant z comme l'affixe d'un point complexe parcourant le cercle unité : $z = e^{i\theta}$.

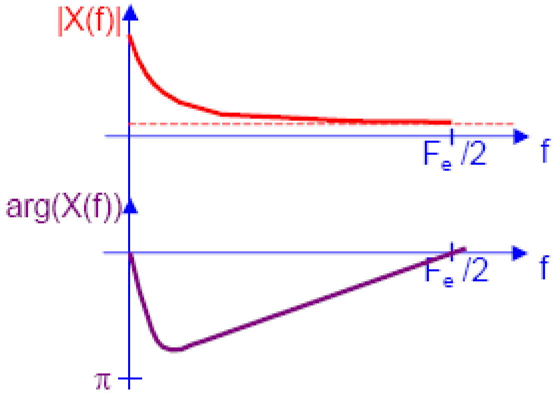
On écrit alors la fonction de transfert comme le quotient de deux polynômes :
$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$. Les racines de B sont appelées les zéros de H et les racines de A ses pôles.

La réponse en fréquence peut être obtenue quand le point M, d'affixe z, parcourt le cercle unité :



La phase de H(f) est l'angle indiqué ici en orange, entre les pôles et les zéros, de base M. Son module est l'inverse de la distance PM.

La réponse en fréquence du filtre est donc :



Les fréquences faibles ne sont pas beaucoup amplifiées alors que les fréquences fortes le sont. C'est donc bien un filtre passe-bas.

Remarque : Nous n'avons jamais discuté, en cours ou en TD de cette méthode pour faire le lien entre espace des z et espace des fréquences.
NB : Les illustrations proviennent du cours d'Y. DUROC sur les liens entre Tz et TF.

Question 6 : Réponse impulsionnelle causale

Nous allons calculer la transformée en z inverse de H(z) pour trouver la réponse impulsionnelle causale du système :

$$H(z) = \frac{b}{z-a} \Rightarrow H(z)[z-a] = b \Rightarrow H(z).z - H(z).a = b$$

Donc

$$h([n+1]) - a.h(n) = b \Rightarrow h([n+1]) = b + a.h(n)$$

Le domaine de convergence est les couples de valeurs telles que la somme des h(n) soit absolument convergente.

Il nous faut donc $\sum_{n=0}^{+\infty} h(n)$ absolument convergente.

Or la règle de d'Alembert nous affirme que cette somme converge si et seulement si
$\left|\frac{h(n+1)}{h(n)}\right| \leq k < 1$

Nous avons $\left|\frac{h(n+1)}{h(n)}\right| = \left|a + \frac{b}{h(n)}\right| \leq |a| + \left|\frac{b}{h(n)}\right|$.

Il faut donc choisir a et b tels que :

$$\begin{cases} |a| < 1 \\ |b| < 1 - |a|.|\max(h(n))| \end{cases}$$

Question 7 : Vérification du résultat obtenu

Le cours, comme la littérature, indique qu'un autre moyen de calculer la réponse impulsionnelle causale est de calculer l'intégrale de la Tz avec la méthode des résidus. N'ayant jamais entendu parler outre mesure de cette méthode, nous ne nous risquerons pas à faire ce calcul ici.

2. *Partie pratique*

1. Application sur Matlab

Question 1 : Signaux

Nous générons trois signaux :
- une impulsion parfaite
- un échelon retardé
- une sinusoïde de fréquence 1200Hz

Chacun de ces signaux est échantillonné à 44,1 kHz sur 500 échantillons.
Leur représentation se trouve à la question 3.

Question 2 : Synthèse du filtre

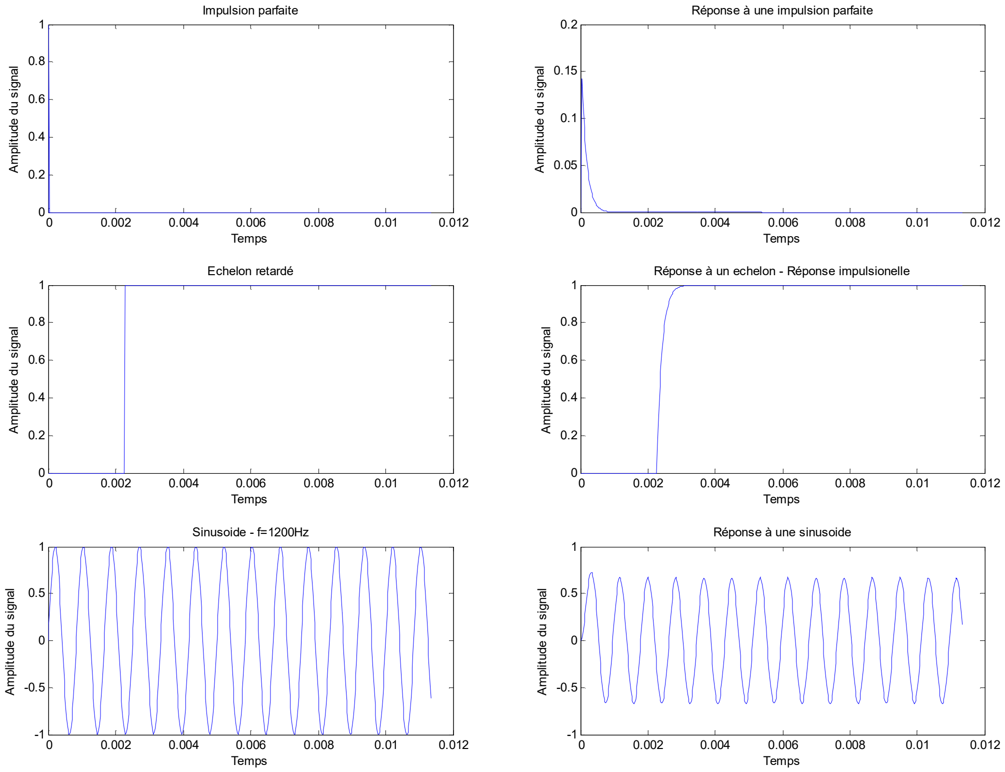
Le filtre est réalisé comme une fonction Matlab. Le script est exactement celui de la question 2 de la partie 1.2.

On veut une fréquence de coupure à 1kHz. Or on a vu que $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$.

On prendra donc : $RC = \frac{1}{f_0.2\pi}$

Question 3 : Réponses des signaux

Nous appliquons au filtre les trois signaux générés plus haut.
Voici leurs réponses :



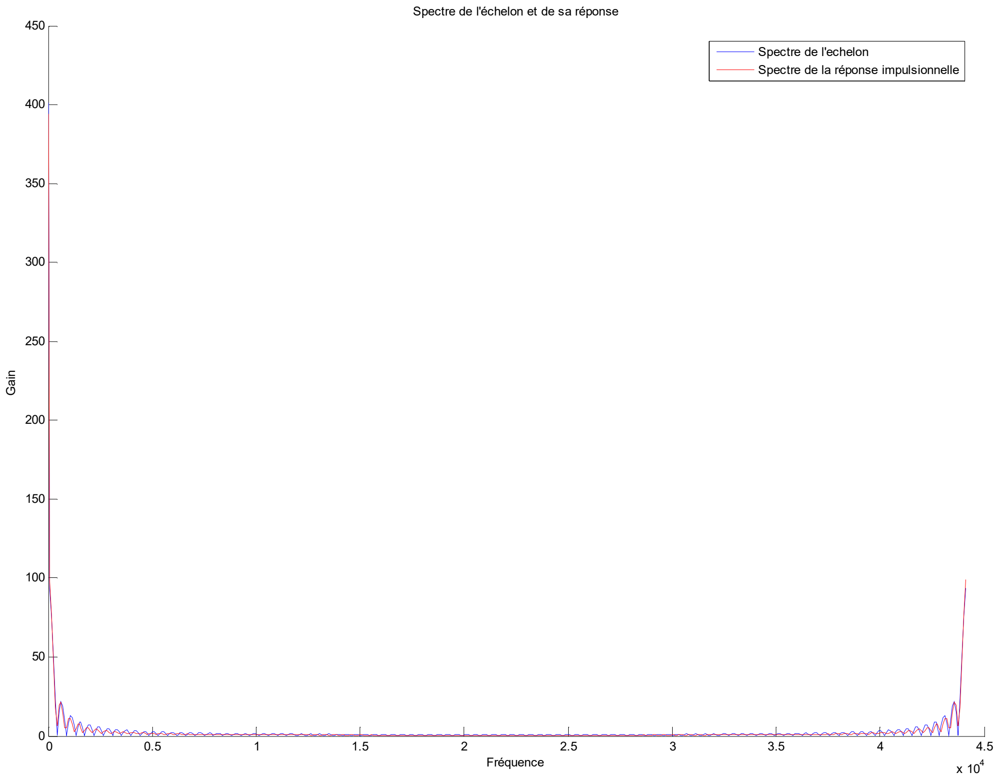
On voit bien que la réponse impulsionnelle est une exponentielle, ce qui concorde avec les résultats théoriques. De plus, il s'agit de la courbe de charge d'un condensateur, ce qui est effectivement le cas (puisque nous étudions la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC).

On voit également que les autres signaux sont atténués car leurs fréquences sont au dessus de la fréquence de coupure, 1000Hz.

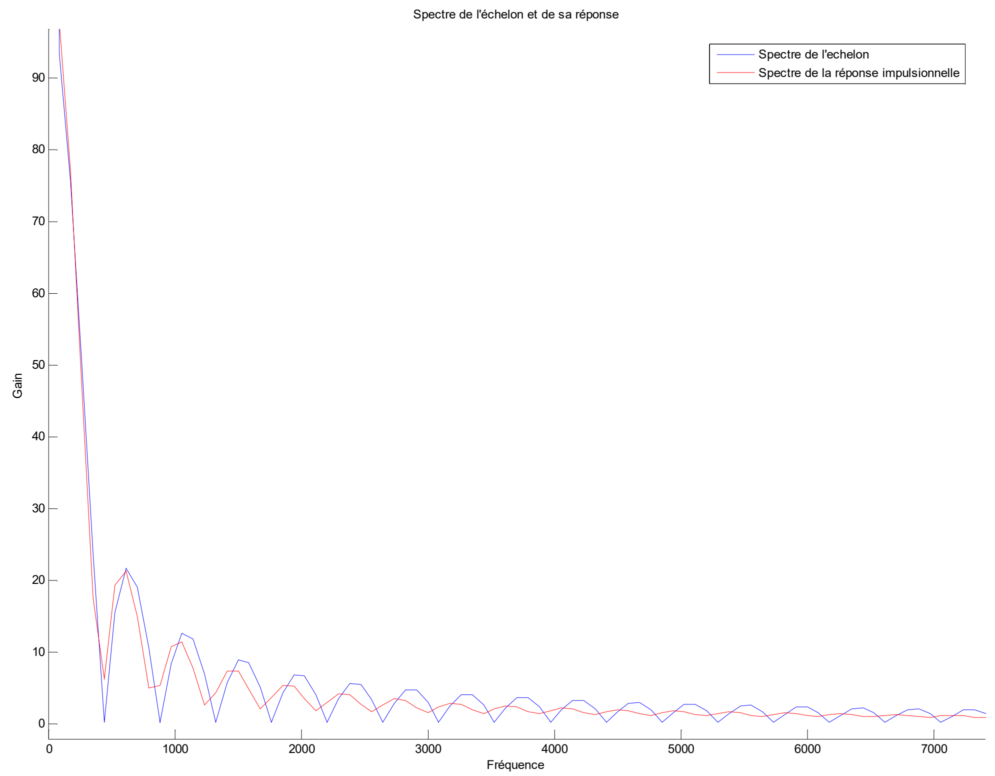
Question 4 : Spectre de la réponse impulsionnelle

Regardons maintenant les résultats dans l'espace des fréquences.

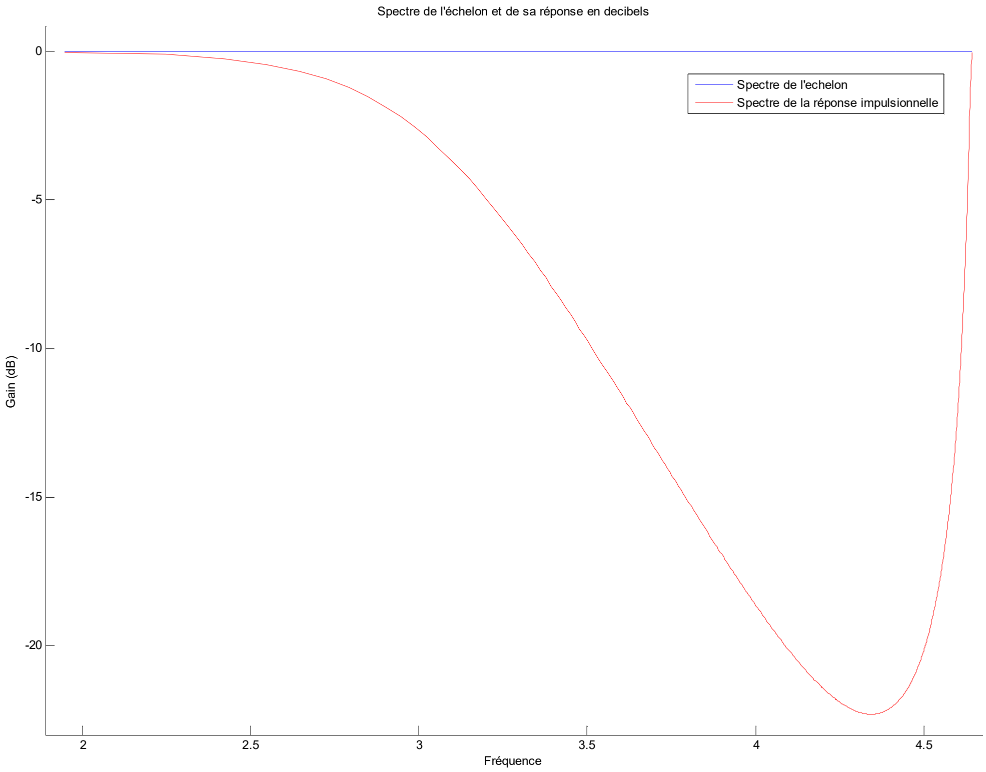
Spectre en linéaire :
On voit nettement que les deux courbes sont similaires.



On voit en zoomant que le spectre du signal filtré est tout de même un peu atténué.



Spectre en décibels :



On voit là une nette différence. En effet, le spectre du signal d'entrée est constant car il ne comporte pas de fréquences : il s'agit d'une brusque variation seule.
Le spectre du signal filtré par contre, est la caractéristique du filtre. On constate alors qu'il s'agit effectivement d'un filtre passe-bas.

Sa fréquence de coupure est 1kHz=10^3 Hz. C'est pour cela que la courbe descend à partir du point noté 3 en échelle logarithmique des fréquences.

La remontée à environ 20kHz est due à l'échantillonnage. On a vu dans les TP précédents qu'un signal échantillonné est très différent du signal parfait théorique, qui n'existe pas, que nous devrions avoir. Ici, cela se traduit par cette incongruité au niveau du spectre. Elle signifie que les fréquences au delà de 20kHz ne seront pas atténuées. En vérité, on ne doit pas avoir un signal comportant ces fréquences puisqu'alors le théorème de Shannon ne serait pas vérifié.

Le spectre sur le domaine étudié est donc exactement celui auquel nous nous attendions. Nous avons synthétisé un filtre passe-bas de fréquence de coupure 1kHz.

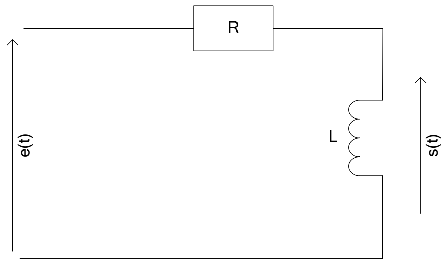
Question 5 : Filtre RL

Suivant le même raisonnement, nous synthétisons un filtre Rl. Voici son algorithme :

```
function s=filtreRL(e)
       %Conditions initiales
    s(1)=0;
       %Paramètres
    L=0.001;
```

```
    f0=5000;
    R=2*pi*L*f0;
    Te=1/44100;
    n=length(e);
       %Calcul
    for i=1:n-1
        s(i+1)=e(i+1)-e(i)-(Te*R - L)*s(i)/L;
    end
end
```

Nous sommes partis d'un circuit RL :



L'équation différentielle est :

$$\begin{cases} e(t) = R.i(t) + s(t) \\ s(t) = L.\dfrac{di(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = \displaystyle\int \dfrac{s(t)}{L} \end{cases} \Rightarrow e(t) = \frac{R}{L}\int s(t) + s(t) \Rightarrow \frac{de(t)}{dt} = \frac{R}{L}s(t) + \frac{ds(t)}{dt}$$

Donc, lorsque l'on échantillonne les signaux :

$$\frac{e([n+1]T_e) - e(nT_e)}{T_e} = \frac{R}{L}s(nT_e) + \frac{s([n+1]T_e) - s(nT_e)}{T_e}$$

D'où l'équation aux récurrences :

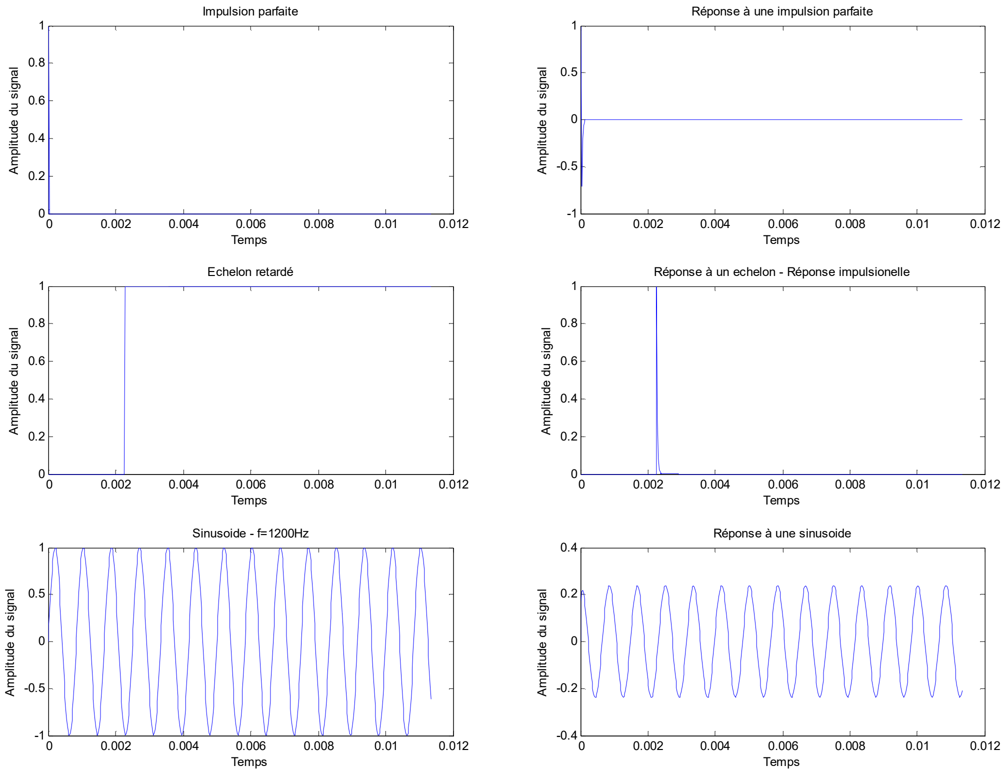
$$s([n+1]T_e) = e([n+1]T_e) - e(nT_e) - \frac{T_e.R - L}{L}s(nT_e)$$

C'est cette équation que nous implémentons dans l'algorithme.

La fonction de transfert qui en découle est :

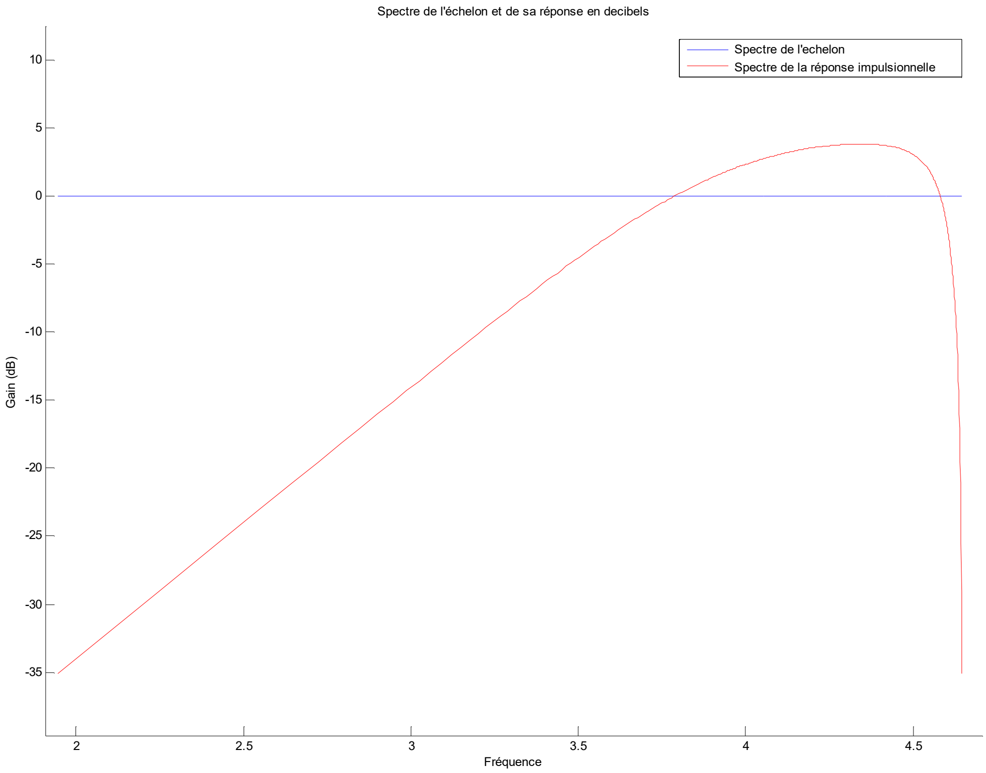
$H(f) = \dfrac{S(f)}{E(f)} = \dfrac{2\pi jf}{\dfrac{R}{L} + 2\pi jf} = \dfrac{j\dfrac{f}{R/2\pi L}}{1 + j\dfrac{f}{R/2\pi L}} = \dfrac{jf_0}{1 + jf_0}$ avec $f_0 = \dfrac{R}{2\pi L}$, qui est la fonction d'un filtre passe haut.

Voici les réponses des signaux :



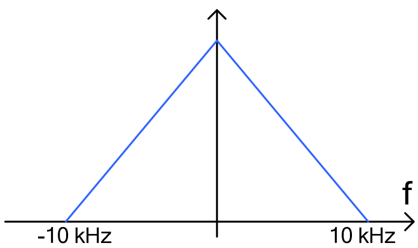
On a bien, comme attendu, une réponse impulsionnelle en exponentielle descendante et des signaux atténués. On remarque que le sinus est très atténué car sa fréquence est inférieure à la fréquence de coupure (1200Hz < 5kHz).

Regardons maintenant le spectre :
On a le spectre d'un filtre passe-haut, où la fréquence de coupure est à 5kHz (log(5000)=3,7).



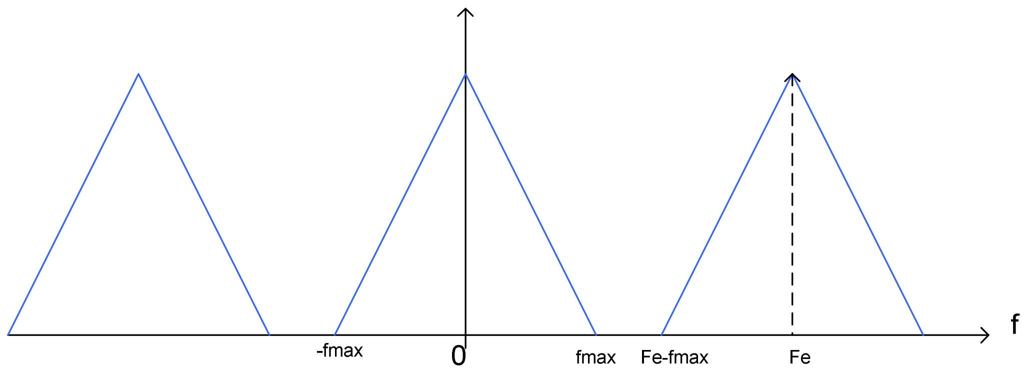
2. Echantillonnage et représentation spectrale

Considérons un signal audio dont le spectre s'étend sur l'intervalle $\left[-10kHz, 10kHz\right]$.
On le représentera comme suit :



Question 1 : Quelle doit être la fréquence d'échantillonnage pour obtenir un espacement de 6kHz entre deux motifs consécutifs du spectre du signal échantillonné à cette fréquence.

On sait que lorsque l'on échantillonne un signal, en respectant bien sur le théorème de Shannon, son spectre est répété indéfiniment tous les f_e.
Ainsi, le spectre théorique du signal échantillonné ressemble à ceci :



L'intervalle entre deux motifs consécutifs du spectre est donc $\Delta f = (F_e - f_{\max}) - f_{\max}$.
On veut $\Delta f = 6kHz$. Donc on doit choisir $F_e = \Delta f + 2.f_{\max} = 6 + 2.10 = 26kHz$

26kHz est la fréquence d'échantillonnage pour obtenir un espacement de 6kHz entre deux motifs consécutifs du spectre.

Question 2 : Avec cette fréquence d'échantillonnage, dans le cas d'un calcul de Transformée de Fourier Discrète, quel est le nombre d'échantillons N nécessaires pour obtenir un pas fréquentiel de 100Hz ?

Lors d'un calcul de Transformée de Fourier Discrète, on calcule le spectre du signal sur N échantillons temporels et on obtient N échantillons fréquentiels sur l'intervalle $\left[0, F_e\right]$.
On veut que l'espacement de deux points consécutifs, qui sont tous régulièrement espacés, soit de 100Hz.

On veut donc que $\dfrac{F_e - 0}{N} = 100Hz$. D'où $N = \dfrac{F_e}{100} = 260$

Il faut 260 points pour obtenir un incrément fréquentiel de 100Hz à 26kHz.

Question 3 : La valeur de N est-elle compatible avec l'usage de l'algorithme rapide FFT ?

La valeur de N trouvée n'est pas compatible avec l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide tel que nous le connaissons. En effet, cet algorithme suit le principe récursif de « Diviser pour régner » et divise le problème de taille N en deux sous-problèmes de taille $\dfrac{N}{2}$.

Il faut donc que N soit une puissance de 2.

Il existe des versions de l'algorithme de la FFT, tel que celle contenue dans MATLAB, qui calcule le spectre du signal quelque soit le nombre d'échantillons. Elles suppriment probablement autant d'échantillons qu'il faut pour obtenir une puissance de 2. Mais celle que nous connaissons ne le fait pas.

Question 4 : Le cahier des charges étant le suivant : espacement entre deux motifs consécutifs : 6 kHz à 10% ; incrément fréquentiel maximum 100Hz, quel nombre d'échantillons préconiseriez vous et pourquoi ? Quelle est alors la fréquence d'échantillonnage ?

Nous voulons un espacement entre deux motifs consécutifs de 6kHz à 10%.
Cela correspond à une fréquence d'échantillonnage de 26kHz à 10%.
On doit avoir $F_e \in [23.4kHz; 28.6kHz]$

On veut un incrément fréquentiel maximum de 100Hz. On peut alors prendre 256 échantillons, qui sont une valeur correspondant au calcul de la FFT et la fréquence d'échantillonnage serait donc 25,6kHz.

Mais rien ne nous oblige à se contenter de ce cas car nous n'avons pas d'incrément fréquentiel minimum. On pourrait très bien décider d'échantillonner beaucoup plus, et donc d'avoir un signal numérique beaucoup plus fidèle de la réalité.

Prenons par exemple $N = 4096$ et $F_e = 28kHz$. Nous avons alors un pas fréquentiel de 6,83Hz.

Remarque : Le sujet précise « temps de calcul minimum » sans pour autant préciser de valeur. C'est cette condition qui nous empêche de pouvoir choisir n'importe quel N, car l'on veut que le calcul de la FFT soit fait dans un temps raisonnable.
L'algorithme de la FFT ayant une complexité en $O(N\log(N))$, on pourrait calculer le nombre d'échantillons maximum pour un temps minimum donné et cela réduirait nos valeurs possibles pour N.

Question 5 : Quelle précaution généralement prise en compte avant d'effectuer un échantillonnage n'a pas été abordée dans cette partie ?

Outre le théorème de Shannon qui n'a pas été explicitement abordé dans cet exercice, sauf à la première question, la précaution dont il est question est un filtre anti-repliement, qui est un filtre analogique passe–bas de fréquence de coupure $\frac{F_e}{2}$, qui élimine les fréquences parasites dues aux erreurs d'acquisition du signal original.

Ce filtre permet d'éviter la dégradation du spectre et donc du signal échantillonné.

Conclusion

Ce TP nous a permis d'appliquer concrètement les connaissances et le savoir-faire acquis en Traitement du Signal (que ce soit en cours, TD, TP) dans un exemple parlant, puisque l'électronique simple fait partie du cursus de notre cycle préparatoire. Nous avons donc pu nous rendre compte de l'utilité du TDS et des risques que comporte l'échantillonnage.