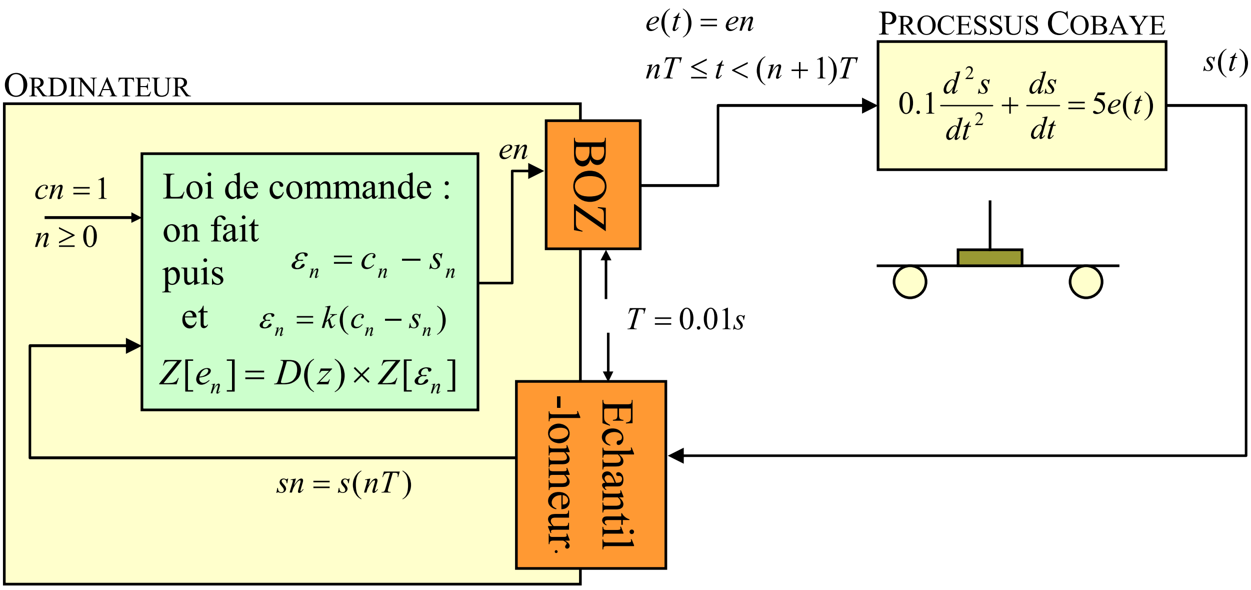
Signaux et Systèmes Discrets

En temps discret, la fonction de transfert en Z tu manieras
et la formule de discrétisation sans hésiter tu diras.



1. Système discret

Un tel système émet des signaux discrets aux instants $t_n = nT$ multiples de la période d'échantillonnage T en réponse aux signaux discrets mesurés à l'entrée aux mêmes instants.

A. Trois représentations des processus discrets :

Comme pour les systèmes continus, il existe trois représentations équivalentes:

- **L'équation aux différences** (abréviation **EaD**) par exemple : $y_n = 0.5y_{n-1} + y_{n-2} + 0.5e_n$, qui peut être donnée sous forme matricielle:

$$\begin{cases} X_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} X_n + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} e_n, & \text{équation d'état} \\ y_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} X_n, & \text{équation d'observation} \end{cases} \quad \text{en posant } X_n = \begin{bmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

- **La Fonction de transfert (en z)** : ici $\frac{Y(z)}{E(z)} = F(z) = \frac{0.5}{1 - 0.5z^{-1} - z^{-2}} = \frac{0.5z^2}{z^2 - 0.5z - 1}$

- **Le Produit de convolution** : $y(k) = (h * e)(k)$, où $h(k) = Z^{-1}(F(z))$ est la réponse impulsionnelle, on note que c'est bien **la transformée inverse de la fonction de transfert** $F(z)$

  Si e et h sont causaux $\Rightarrow y(k) = \sum_{i=0}^{k} h(k-i)e(i) = \sum_{i=0}^{k} h(i)e(k-i)$.

Exercice avec solution: Trouver la réponse indicielle du processus discret dont la réponse impulsionnelle est une rampe unité ($T = 0.1s$)
Réponse : $s_k = 0.1k(k+1)/2 \quad ,k \geq 0$ (on utilise *)

- **Introduction d'un retard dans la boucle :**
  On distingue deux cas extrêmes pour le délai de traitement introduit par l'exécution du programme : **(1)** soit le calcul des sorties occupe un temps négligeable devant T (l'ordinateur fait beaucoup d'autres choses), **(2)** soit le calcul des sorties est la raison d'un délai T dû au traitement (l'ordinateur ne fait que ce calcul).

B.Equation aux différences (équivalent discret de l'équation différentielle)

Exemple d' EaD récursive :
$s_n = s_{n-1} + ae_{n-1}$ est l'intégrateur discret. Sa réponse impulsionnelle est un échelon discret et dure un temps infini (on parle de filtre Réponse Impulsionnelle Infinie, en anglais IIR).

Exemple d' EaD non récursive :
le dérivateur discret $s_n = e_n - e_{n-1}$ est à réponse impulsionnelle finie (durée $2T$, RIF en anglais FIR).

Résolution d'une Equation aux Différences :
Comme pour la résolution d'une équation différentielle, on somme de la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène) et une solution particulière de l'équation avec second membre. Pour la première, on écrit une équation caractéristique dont on utilise les racines.

EXERCICE AVEC SOLUTION :
Calculer ainsi la réponse indicielle du processus discret d'EaD $s_n = 0.9s_{n-1} + 0.1e_{n-1}$. Représenter l'allure obtenue. Quel processus continu développe une réponse semblable ?
SOLUTION : $s_n = 1 - 0.9^n$ pour $n > 0$ *(* premier ordre type, constante de temps $\tau = -T/\ln(0.9)$ *).*

C.Fonction de transfert en z (ou FT en z)

On tire de la FT en z des informations comme en temps continu, avec des différences à noter (on vérifie par exemple sur le processus discret : $s_n = 0.5s_{n-1} + e_{n-1}$):

- **Ordre :** degré en z du dénominateur D(z) de la fonction de transfert F(z)
- **Causalité :** $\deg_z(F(z)) \leq 0$. Sinon, dans l'équation aux différences, la sortie y(n) dépend de x(n+k), k>0 (c'est à dire une valeur future de l'entrée ? ! @ #).
  Exemple : lissage non causal : $y_n = (x_{n-1} + x_{n+1})/2$
- **VIRI et VFRI** :
  $V.I.R.I = \lim_{z\to\infty} F(z)$ et $V.F.R.I. = \lim_{z\to 1} F(z)$ = gain statique (car $p \to 0 \Rightarrow z = e^{Tp} \to 1$)
- **Réponse impulsionnelle** : $X(z) = 1,\ Y(z) = F(z)$, $h(k) = Z^{-1}\left[F(z)\right]$
- **Réponse indicielle** : $X(z) = \dfrac{z}{z-1}$ donc $y(n) = Z^{-1}\left[\dfrac{zF(z)}{z-1}\right]$
- **Réponse harmonique** : $p \to j\omega$ se traduit par $z \to e^{j\omega T}$, d'où la réponse harmonique ou fréquencielle, Gain = $\left|F(e^{j\omega T})\right|$ et Phase = $\angle F(e^{j\omega T})$.

On remarque que $e^{j\omega T}$ est périodique en ω, et de période $\omega_{échantillonnage} = 2\pi / T$, c'est donc le cas également pour l'expression $F(e^{j\omega T})$. En conséquence,

LA REPONSE HARMONIQUE D'UN PROCESSUS DISCRET EST PERIODIQUE EN ω, DE PERIODE $\omega_{ech} = 2\pi / T$

- **Stabilité EBSB (entrée bornée, sortie bornée) :** La condition de stabilité EBSB des systèmes en temps continus $\mathrm{Re}(pôles) < 0$ devient: $|pôles| < 1$ pour les systèmes en temps discret. En effet,

$$\boxed{Re(p) < 0 \Leftrightarrow |e^{Tp}| < 1}$$

Un processus discret dont tous les pôles sont dans le cercle unité du plan complexe, strictement, répond à une entrée bornée par une sortie bornée. Egalement, sa réponse impulsionnelle est sommable en valeur absolue.

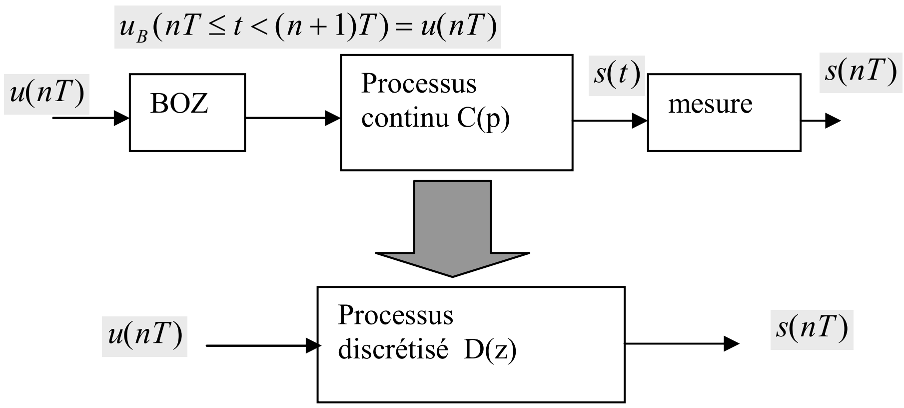
- Relation entre un pôle réel continu p_1 et un pôle discret z_1 « équivalent » $z_1 = e^{Tp_1}$
Application : comment reproduire en discret un régime exponentiel stable avec temps de réponse à 5% valant 0.3 seconde, soit un econstante de temps de $0.1s$?
Très simplement, créer un filtre discret muni d'un pôle $z_1 = e^{-10T}$, on vérifiera aisément avec Matlab, $Z_1 = e^{-0.1}$ si $T = 0.01s$
- Relation entre une paire de pôles complexes conjugués $p_1, \overline{p}_1$ et les pôles z_1 et $\overline{z}_1$ d'un processus discret équivalent : le calcul est un peu plus long, mais le principe est identique,
Si l'on cherche par exemple à reproduire le comportement des pôles continus $p = -1 \pm i$, quels sont les pôles en z à installer, quel est le dénominateur de la fonction de transfert en z correspondante ?
Solution : $z = e^{-T} e^{\pm iT}$, $z^2 - 2z\cos(T)e^{-T} + e^{-2T}$

EXERCICES 6 :

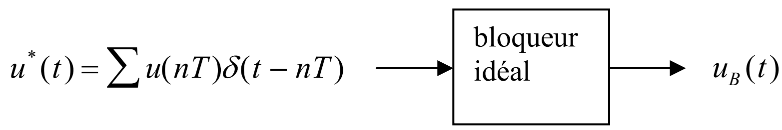
1- calculer les fonctions de transfert de $s_n = 0.9s_{n-1} + 0.1e_{n-1}$ et $s_n = s_{n-1} - 0.25s_{n-2} + 0.5e_{n-1}$ étudier les informations contenues dans ces fonctions de transfert
2- Inversement, quelle est l'équation aux différences à programmer pour réaliser le filtre PID discret $PID(z) = 1 + \dfrac{2z}{z-1} + \dfrac{0.5(z-1)}{z}$. Est ce un filtre causal ?
3- Calculer par les résidus la réponse impulsionnelle de $s_n = 0.9s_{n-1} + 0.1e_{n-1}$; est ce un processus stable ? V.I.R.I. ? V.F.R.I. ?

2. Discrétisation d'un processus continu commandé à travers un bloqueur d'ordre zéro

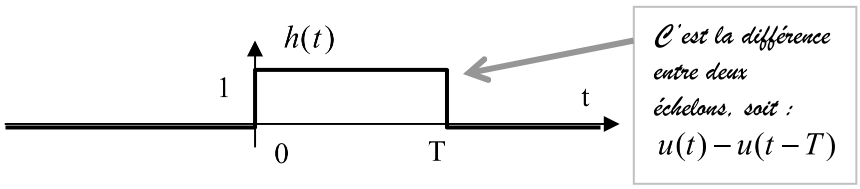
Un ordinateur qui pilote un processus continu applique un signal de commande bloqué (constant par morceaux) sur l'entrée $u(t)$ et ne connaît la sortie $s(t)$ qu'aux instants d'échantillonnage. Compte tenu de quoi, il est possible de calculer à partir de l'équation différentielle du processus la relation entre les u(nT) et les s(nT) sous la forme d'une équation aux différences : cette opération porte le nom de discrétisation, et remplace le processus continu de fonction de transfert C(p) par un processus discret D(z) équivalent aux instants d'échantillonnage.



Pour établir la formule de discrétisation qui calcule D(z) à partir de C(p) et de T, on introduit la fonction bloqueur idéal qui engendre le signal bloqué $u_B(t)$ à partir du signal échantillonné $u^*(t)$ dans la chaîne $u(nT) \to s(nT)$:



La réponse impulsionnelle du bloqueur idéal est donc l'impulsion de largeur T et de hauteur un ci-dessous :



D'où la fonction de transfert du bloqueur idéal : $BOZ(p) = L(h(t)) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{e^{-Tp}}{p} = \dfrac{1 - e^{-Tp}}{p}$

On sait donc maintenant calculer la transformée de Laplace de la sortie $s(t)$ comme suit :

$\tilde{s}(p) = \tilde{u}^*(p)(\dfrac{1 - e^{-Tp}}{p})C(p) = \tilde{u}^*(p)G(p)$ $G(p)$ est la fonction de transfert du processus bloqué (processus plus bloqueur). Il vient alors pour $s(t)$ et $S(z)$:

$$s(t) = L^{-1}\left[\tilde{s}(p)\right] = L^{-1}\left[U(z)G(p)\right] \textbf{ car } \tilde{u}^*(p) = U(z)$$

$$S(z) = Z\left[s(kT)\right] = Z\left[L^{-1}(U(z)G(p))\right] = U(z)Z\left[L^{-1}(G(p))\right] = D(z)U(z)$$

d'où la formule de discrétisation suivante :

> POUR UN PROCESSUS C(P) COMMANDE A TRAVERS UN BLOQUEUR D'ORDRE ZERO, ET ECHANTILLONNE AVEC LA PERIODE T, D(Z) EST EQUIVALENT A C(P) AUX INSTANTS NT
>
> $$C(P) \xrightarrow{discrétisation} D(z) = Z\left[L^{-1}(G(p))\right] = (1-z^{-1})Z\left[L^{-1}\left(\frac{C(p)}{p}\right)\right]$$

Remarques :

* dans MATLAB la formule de discrétisation est résolue par la fonction `c2d`

** une table qui contient à la fois les transformées de Laplace et les transformées en Z permet de calculer $Z\left[L^{-1}(\ldots)\right]$ sur le papier par lecture directe.

EXERCICES :

- Discrétiser le processus intégrateur $T(p) = 2/p$ commandé à travers un BOZ à la fréquence d'échantillonnage 100Hz. Comparer les réponses indicielles de $O(z)$ et de $T(p)$.
- Discrétiser COBAYE dans les mêmes conditions

3. Signaux et Systèmes Discrets avec Matlab

Matlab prend en compte les systèmes discrets. Lors de la définition de la fonction de transfert, il suffit d'ajouter la période d'échantillonnage en troisième argument :

- Définir N instants d'échantillonnage espacés de $T_{sampling}$:
```
>> t= [0 :N-1]*Tsampling ;
```
- Pour le processus de fonction de transfert $\frac{0.1}{z-1}$ et la fréquence d'échantillonnage $100Hz$ faire :
```
>> procdiscret = tf(0.1,[1 -1],0.01)
```
- On peut utiliser également la représentation d'état , représentation matricielle de l'EaD:
```
>> proc = ss([0 1;-1 -1],[0;1],[1 0],0,.001) ;
>> step(proc)
```
- On définit l'opérateur retard par la fonction de transfert
```
>> retard=tf(1,[1 0],0.01) % soit 1/z
```
- Pour discrétiser un processus continu commandé à travers un BOZ (en anglais zéro order hold ZOH):
```
>> proccontinu = tf(10,[1 0])
>> procdiscret=c2d(proccontinu,0.01)
```
- Addition d'un retard de traitement de T_s :
```
>> procretard = procdiscret*retard ;
```
- Système bouclé : comme dans le cas continu:
```
>> ftbf = feedback(procretard,1), ou
>> ftbf = procretard/(1+procretard)
```
- Réponses diverses , comme dans le cas continu :
```
>>step(retard)
>>impulse(procretard)
>>bode(procdiscret)
>>lsim(procdiscret,0 :10,[],0) %réponse rampe
```
- Calcul des pôles et zéros, du lieu des pôles : les fonctions de Matlab utilisées déjà en temps continu sont encore disponibles pour les systèmes en temps discret, comme par exemple
`damp, pzmap, eig, zeros, poles, rlocus, rlocfind, ... zgrid au lieu de sgrid`

- La fenêtre **ltiview** fonctionne aussi pour les systèmes discrets.
- **Simulink** fonctionne également : l'éditeur de schémas - blocs de Matlab simule les systèmes continus, discrets, ou hybrides; il existe un bloc zoh et une bibliothèque discrete de fonctions de transfert en z .

4. Etude d'un système bouclé discret

On procède sur l'exemple suivant où un calculateur asservit un processus intégrateur d'équation différentielle $\frac{ds}{dt} = 10e(t)$ à travers un bloqueur d'ordre zéro avec la fréquence d'échantillonnage de 100 Hz. La loi de commande programmée est : $e(nT) = k(c(n) - s(nT))$

k est un facteur multiplicatif, ou gain de la chaîne d'action, à programmer ; c(n) un signal de consigne discret engendré par le programme du calculateur ; s(nT) la nième valeur mesurée pour la sortie du processus intégrateur, à l'instant nT, e(nT) la nième commande appliquée par le calculateur à l'entrée du BOZ et maintenue à l'entrée e(t) du processus entre les dates nT et (n+1)T.

Le calcul de e(nT) à partir de c(n) et s(nT) est supposé instantané (<< période d'échantillonnage T= 0.01 s).La discrétisation du processus continu permet d'envisager un schéma-bloc entièrement discret :

Discrétisation : $\frac{10}{p} \xrightarrow{discretisation} D(z) =$

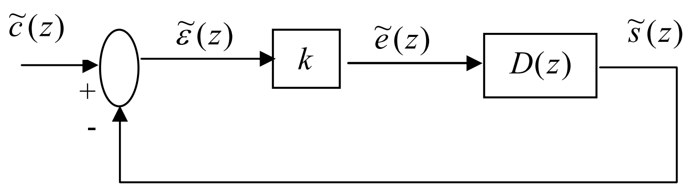
Quel est l'ordre de D ?

$D(z)$ est il stable EBSB ?

Quel est son gain statique ?

Quelle est la réponse impulsionnelle de D(z) ? $h_n = 10T = 0.1$ pour $n \geq 1$

SCHEMA-BLOC ENTIEREMENT DISCRET DE L'ASSERVISSEMENT ETUDIE (VALABLE AUX INSTANTS D'ECHANTILLONNAGE)



Avec $\tilde{s}(z) = Z[s(nT)]$, $\tilde{e}(z) = Z[e(nT)]$, etc...

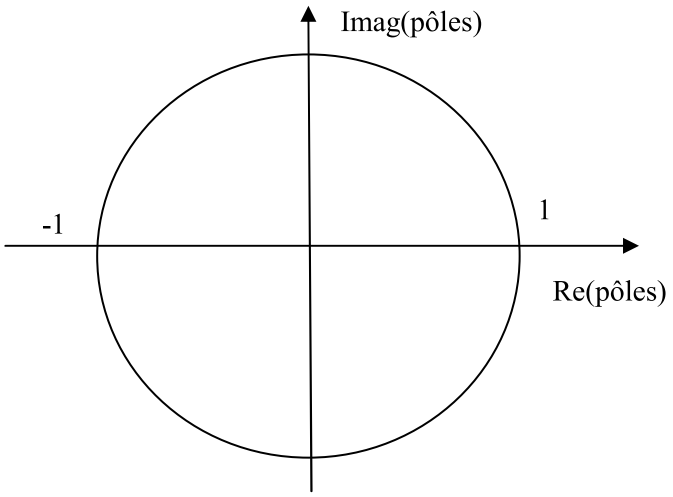
La fonction de transfert du système bouclé vaut donc : $FTBF(z) =$

Quel en est l'ordre ?

Quel en est le gain statique ?

Etudier la stabilité de l'asservissement selon k ?

ETABLIR LE LIEU DES POLES EN FAISANT VARIER K DE 0 A $+\infty$, NOTER LES 5 POINTS CORRESPONDANT A K= 0, 5, 10, 15, 20



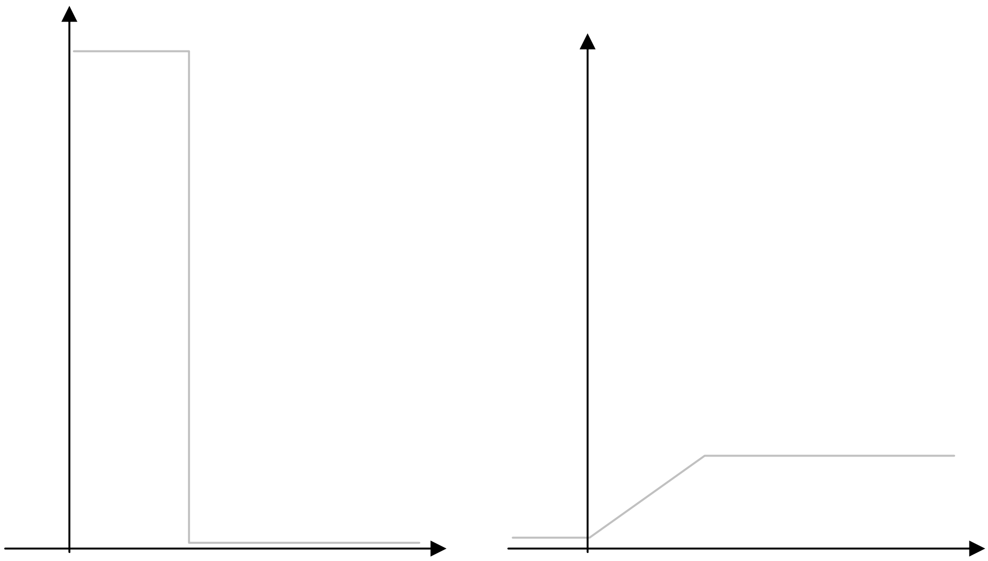
ETUDE DES REPONSES DE CET ASSERVISSEMENT SELON LA VALEUR DE K

- **Réponse pile** (caractéristique des systèmes discrets)

Vérifier que pour k= _____ l'asservissement étudié effectue une réponse de durée T et termine « pile » sur la valeur finale. Ce type de réponse est **impossible** pour un système continu.

$$\frac{\tilde{s}(z)}{\tilde{c}(z)} =$$

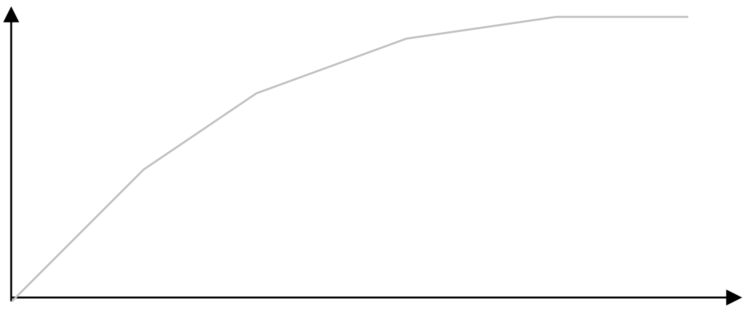
Représenter l'allure des signaux continus $e(t)$ et $s(t)$ dans la boucle durant la réponse indicielle :



- Réponse apériodique du premier ordre :

Pour 0<k<10 l'asservissement se comporte comme un processus constante de temps. Par exemple pour $k = 5$, $\frac{\tilde{s}(z)}{\tilde{c}(z)} = \frac{0.5}{z-0.5}$, la réponse indicielle vaut: $s(nT) = 1-(0.5)^n$ pour n>0.

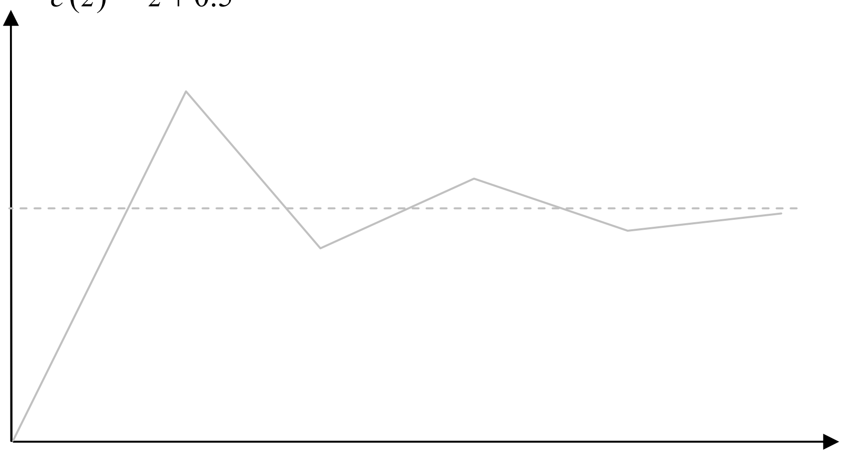
Représenter l'allure ci-dessous :



- Réponse oscillante du premier ordre :

Pour k >10 la réponse indicielle présente des oscillations.

Par exemple, pour k = 15, on obtient : $\dfrac{\tilde{s}(z)}{\tilde{c}(z)} = \dfrac{1.5}{z+0.5}$ et la réponse $s(nT) = 1-(-0.5)^n$



- Addition d'un retard pur dans la boucle:

Supposons qu'il faille T seconde pour calculer $e(nT)$ à partir de $c(n)$ et $s(nT)$. La loi de commande devient en pratique :

$$e(nT) = k(c(n-1) - s((n-1)T))$$

On a maintenant : $\tilde{e}(z) = kz^{-1}(\tilde{c}(z) - \tilde{s}(z))$; k est remplacé dans le schéma-bloc précédent par kz^{-1}.

La fonction de transfert devient :

$FTBF(z) =$

Quel est l'ordre du système asservi ?

Calculer son gain statique ?

Discuter la stabilité selon k > 0

Etablir le lieu des pôles, on portera les points correspondant à k nul, k = 2.5 et k = 10, à comparer avec le cas précédent (sans retard de traitement) :