

*l'intègre*

Lionel Porcheron  
Arnaud Bégyn



# LE FORMULAIRE BCPST 1<sup>e</sup> et 2<sup>e</sup> années

Toutes les formules  
de chimie, physique  
et mathématiques

DUNOD

# LE FORMULAIRE BCPST

## 1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> années

# Consultez nos parutions sur dunod.com

Dunod Éditeur, édition de livres, Microsoft Press, ETSF, Ediscience, IntEditions

http://www.dunod.com/

Recherche [ ] [OK] Collections Index thématique

Ediscience  
ETSF  
IntEditions  
Microsoft Press

Accueil Contacts

Sciences et Techniques Informatique Gestion et Management Sciences Humaines

Adopter Mes pages

LES BIBLIOTHÈQUES DES MÉTIERS

LES NEWSLETTERS

Interviews

Réinventer les RH : urgence !  
Olivier Verrier

Business 2008 : exigez la nouvelle formule !  
Thierry de laetoz

toutes les interviews  
Club Enseignants  
Inscrivez-vous!

Événements

Découvrez le vidéothon  
Profession dirigeant

En librairie ce mois-ci

Développement personnel et coaching : découvrez le BOUQUIN SITE  
microbooks.com !

100 librairies

Bacchus 2008  
Enjeux, stratégies et pratiques dans la filière vitivinicole  
Jean-Pierre Couderc, Hervé Harnis, François d'Hauville, Etienne Montaigne

Profession dirigeant  
De la conception du changement à l'action  
Gérard Roth, Michal Kurtyka

PYTHON  
Petit guide à l'usage du développeur agile  
Tarek Ziadé

150 petites expériences de psychologie de sport  
pour mieux comprendre les champions... et les autres  
Yvan Paquet, Pascal Legrain, Elisabeth Rosnet, Stéphane Rusinek

Bibliothèque du DSI  
Gestion industrielle  
Métiers de la vigne et du vin  
Marketing et Communication  
Directeur d'établissement social et médico-social  
Toutes les bibliothèques

Action sociale  
Psychologie  
Développement personnel et Bien-être  
Entreprise  
Expertise comptable  
Informatique et NTIC  
Industrie  
Toutes les newsletters

bibliothèques des métiers newsletters microbooks.com ediscience.net expert-sup.com notice légale

# LE FORMULAIRE BCPST

## 1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> années

Toutes les formules de chimie,  
physique et mathématiques

**Lionel Porcheron**

*Ingénieur de l'ENSEEIH à Toulouse*

**Arnaud Bégyn**

*Professeur au lycée Pierre de Fermat à Toulouse*

*Avec la collaboration de :*

*Valéry Prévost - Professeur au lycée Hoche à Versailles*

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autori-

sation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2008  
ISBN 978-2-10-053791-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>IX</b>
<b>Chapitre 1 : Mathématiques</b>	<b>1</b>
<b>1. Algèbre</b>	<b>1</b>
1.1 Nombres entiers, nombres rationnels	1
1.2 Polynômes et fractions rationnelles	2
1.3 Généralités sur les applications	5
1.4 Applications linéaires – Espaces vectoriels	6
1.5 Matrices – Déterminants – Systèmes linéaires	11
1.6 Réduction des endomorphismes	16
<b>2. Analyse</b>	<b>18</b>
2.1 Nombres réels	18
2.2 Nombres complexes	18
2.3 Suites	21
2.4 Fonctions réelles de la variable réelle	25
2.5 Dérivation	31
2.6 Intégration	37
2.7 Équations différentielles	42
2.8 Séries	44
2.9 Fonctions de plusieurs variables	46
<b>3. Géométrie</b>	<b>50</b>
3.1 Courbes dans le plan	50
3.2 Propriétés élémentaires dans le plan	51
3.3 Produit scalaire et norme dans le plan	53
3.4 Droites dans le plan	55

3.5	Projection orthogonale dans le plan	57
3.6	Cercles dans le plan	58
3.7	Mesure d'un angle dans le plan	59
3.8	Propriétés élémentaires dans l'espace	60
3.9	Produit scalaire et norme dans l'espace	62
3.10	Plans dans l'espace	64
3.11	Projection orthogonale dans l'espace	66
3.12	Droites dans l'espace	67
3.13	Sphères dans l'espace	68
3.14	Mesure d'un angle dans l'espace	69
3.15	Produit vectoriel	70
<b>4.</b>	<b>Probabilités</b>	<b>71</b>
4.1	Théorie des ensembles	71
4.2	Dénombrément	73
4.3	Calcul des probabilités	75
4.4	Variables aléatoires discrètes	77
4.5	Vecteurs aléatoires discrets	82
4.6	Variables aléatoires à densité	87
4.7	Vecteurs aléatoires à densité	90
4.8	Théorèmes limites et approximation	96
<b>Chapitre 2 :</b>	<b>Chimie</b>	<b>98</b>
<b>1.</b>	<b>Atomistique</b>	<b>98</b>
1.1	Spectroscopie	98
1.2	Modèle ondulatoire	99
1.3	Atome polyélectronique	100
1.4	Architecture moléculaire	101
<b>2.</b>	<b>Cinétique</b>	<b>103</b>
2.1	Vitesse de réaction	103
2.2	Étude expérimentale	105
2.3	Mécanismes réactionnels	105
2.4	Catalyse	107
<b>3.</b>	<b>Solutions aqueuses</b>	<b>108</b>
3.1	Réactions acido-basiques	108
3.2	Réactions de complexation	110
3.3	Réactions de précipitation	111
3.4	Réactions d'oxydoréduction	111
3.5	Diagrammes potentiel-pH	114
<b>4.</b>	<b>Thermodynamique</b>	<b>115</b>
4.1	Fonctions d'état	115
4.2	Potentiel chimique	116
4.3	Grandeurs standard de réaction	116

4.4	Équilibres chimiques	118
4.5	Équilibres liquide–vapeur	120
4.6	Équilibres solide – liquide	123
<b>5.</b>	<b>Chimie organique</b>	<b>125</b>
5.1	Nomenclature	125
5.2	Stéréochimie de conformation	126
5.3	Les alcènes	131
5.4	Hydrocarbures aromatiques	133
5.5	Amines	134
5.6	Groupe carbonyle	135
5.7	Acides carboxyliques	138
5.8	Halogénoalcanes	139
5.9	Alcools	140
5.10	Spectroscopie infrarouge	143
5.11	Spectroscopie RMN (Résonance Magnétique Nucléaire)	144

## **Chapitre 3 : Physique** **145**

<b>0.</b>	<b>Éléments de mathématiques</b>	<b>145</b>
0.1	Différentielles	145
0.2	Équations différentielles	146
<b>1.</b>	<b>Électronique</b>	<b>147</b>
1.1	Lois générales	147
1.2	Régime transitoire	148
1.3	Régime variable	149
1.4	Montages avec amplificateur opérationnel	150
<b>2.</b>	<b>Thermodynamique</b>	<b>151</b>
2.1	Gaz parfait	151
2.2	Premier et second principes de la thermodynamique	151
2.3	Changements de phase d'un corps pur	156
2.4	Machines thermiques	158
2.5	Énergie libre – Enthalpie libre	159
2.6	Diffusion de particules	161
2.7	Diffusion thermique	161
<b>3.</b>	<b>Mécanique du point</b>	<b>162</b>
3.1	Cinématique	162
3.2	Lois générales de la mécanique	164
3.3	Oscillateurs	167
<b>4.</b>	<b>Mécanique des fluides</b>	<b>168</b>
4.1	Statique des fluides	168
4.2	Dynamique des fluides	169



4.3	Actions de contact dans un fluide	169
4.4	Écoulements parfaits	170
4.5	Bilans sur les écoulements	172
<b>5.</b>	<b>Optique</b>	<b>172</b>
5.1	Généralités	172
5.2	Optique géométrique	173
5.3	Interférences lumineuses	175
<b>Annexe A : Primitives usuelles</b>		<b>179</b>
<b>Annexe B : Développements limités</b>		<b>181</b>
<b>Annexe C : Formules trigonométriques</b>		<b>183</b>
1.	Angles remarquables	183
2.	Relations trigonométriques	184
<b>Annexe D : Unités et constantes fondamentales</b>		<b>187</b>
1.	Unités du Système International	187
1.1	Unités principales du système international	187
1.2	Unités secondaires du système international	188
1.3	Unités courantes du système international	188
1.4	Multiples décimaux pour les unités	188
2.	Constantes fondamentales	189
3.	Ordres de grandeurs	189
<b>Annexe E : Constantes chimiques</b>		<b>190</b>
1.	Potentiels standards redox	190
2.	Constantes d'acidité	191
3.	Zone de virage des principaux indicateurs colorés	192
<b>Annexe F : Tableau périodique</b>		<b>193</b>
<b>Index</b>		<b>197</b>

# Avant-propos

Dans ce formulaire, sont rassemblés les principaux résultats des cours de mathématiques, de physique et de chimie établis tout au long des deux années de classes préparatoires dans les filières BCPST. Ce formulaire s'avérera fort utile aussi bien pendant votre « prépa » que lorsque la période fatidique des concours approchera.

Il a été scindé en quatre parties : les parties relatives aux mathématiques, à la physique et à la chimie, chacune d'entre elles rassemblant les principaux résultats établis en cours pour chacune des filières auxquelles s'adresse cet ouvrage. À la fin de l'ouvrage, figurent en annexes les données qui ne sont pas nécessairement à connaître, mais qui sont néanmoins fort utiles au quotidien.

Un effort tout particulier a été fait pour rendre ces formules les plus « lisibles » possible en détaillant la signification de chaque symbole et en précisant bien à chaque fois les conditions d'application de ces formules. Soulignons tout de même que l'apprentissage de ces formules ne se substitue pas à l'apprentissage du cours...

Merci à tous ceux qui ont accepté de collaborer à cet ouvrage et en particulier à tous ceux qui l'ont consciencieusement relu. Un grand merci également à Éric D'ENGINÈRES qui a assuré la coordination pas toujours facile mais dans les meilleurs délais de ce nouveau formulaire de la collection « J'intègre ».

Un suivi de la partie mathématiques est disponible à l'adresse : <http://arnaud.begyn.free.fr>

Lionel PORCHERON  
[Lionel.Porcheron@free.fr](mailto:Lionel.Porcheron@free.fr)



# Mathématiques

## 1. Algèbre

### 1.1 Nombres entiers, nombres rationnels

#### Factorielle – Définition

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

$n!$  : factorielle  $n$   
Par convention :  $0! = 1$

#### Permutations

$$\text{card}S_n = n!$$

$S_n$  : ensemble des permutations de  $n$  éléments. Ensemble des bijections de  $[1, n] \rightarrow [1, n]$

## Arrangements

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$(n, p) \in \mathbb{N}^2$  avec  $p \leq n$

On note  $A_n^p$  le nombre d'arrangements de  $p$  éléments à partir d'un ensemble de  $n$  éléments (c'est-à-dire le nombre de  $p$ -uplets composés d'éléments deux à deux distincts)

## Combinaisons

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$(n, p) \in \mathbb{N}^2$  avec  $p \leq n$

On appelle **combinaison** (notée  $\binom{n}{p}$ ) toute partie de cardinal  $p$  d'un ensemble à  $n$  éléments.

Par convention  $\binom{n}{p} = 0$  si  $n \in \mathbb{N} - \mathbb{Z}$  ou si  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \notin [0, n]$

## Combinaisons – Propriétés

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

$\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$

## Binôme de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$n \in \mathbb{N}$   
 $(x, y) \in \mathbb{C}^2$

 $\mathbb{Q}$  est dense

$$x < y \implies (\exists z \in \mathbb{Q} / x < z < y)$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

## 1.2 Polynômes et fractions rationnelles

## Polynôme

On note  $K[X]$  l'ensemble des fonctions polynômes de  $K$  dans lui-même, avec  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Par convention,  $X$  désigne la fonction polynôme identité  $X : x \in K \mapsto x \in K$ . Tout élément  $P$  de  $K[X]$  est appelé plus simplement polynôme, et sur la base canonique  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  il peut s'écrire  $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ , où les  $a_n$  sont éléments de  $K$  et sont tous nuls sauf pour un nombre fini de valeurs  $n$ .

## Degré d'un polynôme – Définition

$$\deg P = \max \{n \in \mathbb{N} / a_n \neq 0\}$$

$\deg P$  : degré du polynôme  $P$

## Degré d'un polynôme – Propriétés

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

$$(P, Q) \in K[X]$$

Lorsque  $\deg P \neq \deg Q$ , alors :  
 $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

## Dérivation

$$P' = \sum_{n \geq 1} n a_n X^{n-1}$$

$$P = \sum_n a_n X^n \in K[X]$$

$P'$  : polynôme dérivé de  $P$

## Racine d'un polynôme

$$P(\alpha) = 0$$

$\alpha$  est appelée **racine** du polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  si elle vérifie la propriété ci-contre.

Soit  $(\alpha_i)_{i \in I}$  la famille des racines deux à deux distinctes du polynôme  $P$ . Ce polynôme peut alors s'exprimer sous la forme  $P = Q \prod_{i \in I} (x - \alpha_i)^{m_i}$  où  $m_i$  est la multiplicité de la racine  $\alpha_i$  et  $Q$  un polynôme n'ayant pas de zéro dans  $\mathbb{K}$ .

### Multiplicité d'une racine d'un polynôme – Définition

Si  $P$  est un polynôme ( $P \in \mathbb{K}[X]$ ) et si  $a$  est un élément de  $\mathbb{K}$  ( $a \in \mathbb{K}$ ), on dit que  $a$  est racine de  $P$  de multiplicité  $m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) lorsque  $(X - a)^m$  divise  $P$  et  $(X - a)^{m+1}$  ne divise pas  $P$ . Par convention, si  $a$  n'est pas racine de  $P$  on dit que  $a$  est racine de  $P$  de multiplicité 0.

### Polynôme scindé

Un polynôme  $P \in K[X]$  est dit **scindé** sur  $K$  si et seulement si il existe  $\lambda \in K \setminus \{0\}$  et une famille d'éléments non nécessairement distincts  $(x_i)_{i \in [1, n]}$  tels que :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^n (X - x_i)$$

### Décomposition d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$

Tout polynôme  $P$  à coefficients complexes ( $P \in \mathbb{C}[X]$ ) non constant est scindé. Si on note  $x_1, \dots, x_n$  ses racines complexes deux à deux distinctes ( $\forall 1 \leq i \leq n, x_i \in \mathbb{C}$ ) alors on peut écrire :

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^n (X - x_i)^{\alpha_i}$$

où  $\lambda$  est un complexe non nul ( $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ) et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont des entiers naturels non nuls ( $\forall 1 \leq i \leq n, \alpha_i \in \mathbb{N}^*$ ). Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près dans le produit.

### Décomposition d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme  $P$  à coefficients réels ( $P \in \mathbb{R}[X]$ ) non constant se décompose en un produit de polynômes du premier degré et de polynômes du second degré dont le discriminant est strictement négatif. Si on note  $x_1, \dots, x_n$  ses racines réelles deux à deux distinctes ( $\forall 1 \leq i \leq n, x_i \in \mathbb{R}$ ) alors on peut écrire :

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^n (X - x_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^p (X^2 + y_j X + z_j)^{\beta_j}$$

où  $\lambda$  est un réel non nul ( $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ),  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont des entiers naturels non nuls ( $\forall 1 \leq i \leq n, \alpha_i \in \mathbb{N}^*$ ),  $\beta_1, \dots, \beta_p$  sont des entiers naturels non nuls ( $\forall 1 \leq j \leq p, \beta_j \in \mathbb{N}^*$ ),  $y_1, \dots, y_p$  et  $z_1, \dots, z_p$  sont des réels ( $\forall 1 \leq j \leq p, (y_j, z_j) \in \mathbb{R}^2$ ) vérifiant la condition :  $\forall 1 \leq j \leq p, y_j^2 - 4z_j < 0$ . Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près dans le produit.

### 1.3 Généralités sur les applications

#### Ensembles et applications

Soit  $f : E \longrightarrow F$  une application d'un ensemble  $E$  dans un ensemble  $F$ . Soient  $A$  une partie de  $E$  et  $B$  une partie de  $F$ .

On appelle image directe de  $A$  par  $f$  la partie de  $F$  définie par :

$$f(A) = \{f(x) \in F; x \in A\}$$

On appelle image réciproque de  $B$  par  $f$  la partie de  $E$  définie par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E; f(x) \in B\}$$

#### Application injective

$$\forall (x, y) \in E^2$$

$$(f(x) = f(y) \implies x = y)$$

Une application  $f$  est dite **injective** si et seulement si elle vérifie la propriété ci-contre.

#### Application surjective

$$\forall y \in F, \exists x \in E / f(x) = y$$

Une application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  est dite **surjective** si et seulement si elle vérifie la propriété ci-contre.

#### Théorème de la bijection réciproque

$f : E \rightarrow F$  est bijective si et seulement si il existe  $g : F \rightarrow E$  telle que  $g \circ f = id_E$  et  $f \circ g = id_F$ .

Dans ce cas, si  $f$  et  $g$  sont bijectives :  $g \circ f$  est bijective et  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .



## 1.4 Applications linéaires – Espaces vectoriels

### Espace vectoriel – Définition

Soit  $E$  un ensemble muni d'une loi interne  $E \times E \longrightarrow E$  notée  $+$  et d'une loi externe  $K \times E \longrightarrow E$  notée  $\cdot$  telles que :

- (i)  $\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$
- (ii)  $\exists e \in E; \forall x \in E, e + x = x + e = x$
- (iii)  $\forall x \in E, \exists x' \in E; x + x' = x' + x = e$
- (iv)  $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$
- (v)  $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- (vi)  $\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- (vii)  $\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \mu) \cdot x$
- (viii)  $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$

Dans ce cas l'élément  $e$  du (ii) est unique et est appelé vecteur nul de  $E$ , noté  $0_E$ . De même, l'élément  $x'$  du (iii) est aussi unique et est appelé opposé de  $x$ , noté  $-x$ .

### Sous-espace vectoriel

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel et  $F \subset E$ .  $F$  est dit **sous-espace vectoriel** de  $E$  si et seulement si il vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $0_E \in F$
- (2)  $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in K, \lambda x + y \in F$

### Sous-espace engendré par une partie

$\text{Vect}(A)$  est l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de  $A$ .  $E : K$ -espace vectoriel.  $A \subset E, x \in \text{Vect}(A)$  si et seulement si  $x$

s'écrit,  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ , où  $a_i \in A$  et  $\lambda_i \in K$ .

### Somme directe de sous-espaces vectoriels

$E = A \oplus B$  si et seulement si  $x \in E$  s'écrit de façon unique  $x = a + b$  avec  $a \in A$  et  $b \in B$ .

$E = A \oplus B \Leftrightarrow E = A + B$  et  $A \cap B = \{\vec{0}\}$ .

Généralisation à un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels :

$$E = \sum_{i \in I} E_i$$

$$\forall (i, j) \in I^2 \quad E_i \cap \sum_{j \neq i} E_j = \{0\}$$

$(E_i)_{i \in I}$  : famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ .

Si la somme des  $E_i$  vérifie les deux propriétés ci-contre, elle est dite **directe**.

Dans ce cas :  $\forall x \in E$ , il existe une unique décomposition  $x = \sum_{i \in I} x_i$

avec  $x_i \in E_i$ .

### Sous-espaces vectoriels supplémentaires

$$E = \bigoplus_{i \in I} E_i$$

$(E_i)_{i \in I}$  : famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ .

Ils sont dits **supplémentaires** si et seulement s'ils sont en somme directe et que leur somme est égale à  $E$ .

### Intersection de deux sous-espaces vectoriels

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $K$  et  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel.

En dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un sous-espace vectoriel supplémentaire.

### Dimension des espaces vectoriels usuels

Les ensembles  $K[X], \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), K^{\mathbb{N}}$  et  $V(\Omega, \mathbb{R})$  sont des espaces vectoriels sur  $K$  (respectivement  $\mathbb{R}$ ) de dimension infinie.

Les ensembles  $K^n, K_n[X]$  et  $\mathcal{M}_{np}(K)$  sont des espaces vectoriels sur  $K$  de dimension finie :

$$\dim K^n = n, \quad \text{et} \quad \dim K_n[X] = n + 1, \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{M}_{np}(K) = np.$$

### Croissance de la dimension

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $K$  de dimension finie et  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $F \subset G$ . Alors  $\dim F \leq \dim G$  et si les deux dimensions sont égales alors  $F = G$ .

### Juxtaposition de bases

Soit  $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $\mathcal{B}_i$  une base de  $E_i$ . Alors on a :

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}_i \text{ est une base de } E \iff E = \bigoplus_{i=1}^n E_i.$$

### Rang d'une famille finie de vecteurs

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $K$  et  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . Dans ce cas  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie. Sa dimension est appelée rang de la famille  $\mathcal{F}$ , notée  $\text{rg}(\mathcal{F})$ .

### Famille génératrice

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel de  $E$  sur  $K$ .

On dit que cette famille est **génératrice** si et seulement si tout élément  $x$  de  $E$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire des  $x_i$ , c'est-à-dire qu'il existe une famille  $(\lambda_i)_{i \in I}$  telle que :  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ , ou encore  $E = \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$ .

### Famille libre

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

$(x_i)_{i \in I}$  : famille finie de vecteurs de  $E$

$(\lambda_i)_{i \in I}$  : famille finie de scalaires de  $K$

Une famille est **libre** si elle vérifie la propriété ci-contre.

Elle est dit liée dans le cas contraire.

### Propriétés fondamentales des familles

- Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
- Toute sous famille d'une famille libre est une famille libre.
- Si  $(x_1, \dots, x_n)$  libre et  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  liée, alors  $x_{n+1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$
- Une famille comportant le vecteur nul, ou deux vecteurs égaux, ou un vecteur combinaison linéaire des autres est liée.

### Base d'un espace vectoriel – Définition

Une **base** de  $E$  est une famille finie de vecteurs  $(x_i)_{i \in I}$  de  $E$  libre et génératrice.

### Théorie de la dimension

Un  $K$ -espace vectoriel est dit de **dimension finie** si et seulement si  $E$  admet au moins une famille génératrice de dimension finie.

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie, alors :

1.  $E$  admet au moins une base de dimension finie.

2. Toutes les bases de  $E$  sont finies et ont le même cardinal appelé **dimension** de  $E$  et noté  $\dim E$ .

### Propriétés des familles libres et des familles génératrices

Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$

- Toute famille libre de  $E$  comporte au plus  $n$  éléments.
- Toute famille génératrice de  $E$  comporte au moins  $n$  éléments.

### Somme directe et dimension

$$E = A \oplus B \Leftrightarrow E = A + B \text{ et } \dim E = \dim A + \dim B$$

### Application linéaire – Définition

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in K :$$

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

On dit que  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$  si et seulement si elle vérifie la propriété ci-contre.  $\mathcal{L}(E, F)$  est l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

### Isomorphisme – Endomorphisme – Automorphisme

- Un **isomorphisme** d'espaces vectoriels est une application linéaire de  $E$  dans  $F$  bijective.
- Un **endomorphisme** de  $E$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E$ .
- Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif. On note  $\mathcal{GL}(E)$  l'ensemble des automorphismes de  $E$ .

### Applications linéaires et famille de vecteurs

$\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$ , et pour toute famille finie  $\mathcal{F}$  d'éléments de  $E$  :

$$-f(\text{Vect}(\mathcal{F})) = \text{Vect}(f(\mathcal{F})).$$

– si  $\mathcal{F}$  est liée alors  $f(\mathcal{F})$  est liée.

– si  $f(\mathcal{F})$  est libre, alors  $\mathcal{F}$  est libre. La réciproque est vraie si  $f$  est injective.

– si  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $E$ , alors  $f(\mathcal{F})$  est génératrice de  $F$  et la réciproque est vraie si  $f$  est surjective.

–  $f$  est bijective si et seulement si il existe une base  $B$  de  $E$  telle que  $f(B)$  est une base de  $F$ . Dans ce cas, c'est vrai pour toute base  $B$  de  $E$ .

### Image et noyau d'une application linéaire – Définition

$$\text{Im } f = \{y \in F / \exists x \in E, f(x) = y\}$$

$$\text{Im } f = f(E)$$

On appelle **image** de  $f$ , le sous-espace vectoriel de  $F$  noté  $\text{Im } f$  défini ci-contre.

$$\text{Ker } f = \{x \in E / f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$$

On appelle **noyau** de  $f$ , le sous-espace vectoriel de  $E$  noté  $\text{Ker } f$  défini ci-contre.

### Rang d'une application linéaire – Définition

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $K$  et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Si  $\text{Im } f$  est de dimension finie,  $\dim \text{Im } f$  s'appelle **rang** de  $f$  et se note  $\text{rg } f$ .

### Opérations sur les applications linéaires

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $K$ ,  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $\lambda$  un scalaire ( $\lambda \in K$ ). On définit alors les opérations suivantes :

- **Addition** : l'application  $f + g : x \in E \mapsto f(x) + g(x)$  est linéaire de  $E$  dans  $F$

- **Multiplication par un scalaire** : l'application  $\lambda.f : x \in E \mapsto \lambda.f(x)$  est linéaire de  $E$  dans  $F$ . L'ensemble  $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $K$ .

- **Réciproque** : si  $f$  est un isomorphisme alors l'application réciproque  $f^{-1}$  est linéaire de  $F$  dans  $E$

### Composition d'applications linéaires

Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois espaces vectoriels sur  $K$ ,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . On a alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ .

### Application linéaire à partir de l'image d'une base

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $K$  de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Alors  $f$  est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs  $f(e_1), \dots, f(e_p)$ . On a en effet :

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i, \implies f(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(e_i).$$

De plus :  $f$  est injective,  $\iff (f(e_1), \dots, f(e_p))$  est libre,  $f$  est surjective  $\iff (f(e_1), \dots, f(e_p))$  est génératrice de  $F$ ,  $f$  est un isomorphisme  $\iff (f(e_1), \dots, f(e_p))$  est une base de  $F$

### Formule du rang

$$\dim E = \text{rg } f + \dim(\text{Ker } f)$$

$E$  : espace vectoriel de dimension finie  
 $f$  : application linéaire  
 $\text{rg } f$  : rang de  $f$   
 $\text{Ker } f$  : noyau de  $f$

### Applications linéaires – Cas de la dimension finie

- (1)  $f$  isomorphisme
- (2)  $f$  injective
- (3)  $f$  surjective
- (4)  $\text{rg } f = n$

$E$  et  $F$  : deux espaces vectoriels de même dimension  $n$  sur  $K$   
 $f \in \mathcal{L}(E, F)$   
 Les propositions ci-contre sont deux à deux équivalentes.

- (1)  $f$  automorphisme
- (2)  $f$  injective
- (3)  $f$  surjective
- (4)  $\text{rg } f = n$

$E$  : espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $K$   
 $f \in \mathcal{L}(E)$   
 Les propositions ci-contre sont deux à deux équivalentes.

### Image et noyau d'une application linéaire – Propriétés

$$\begin{aligned} f \text{ surjective} &\iff \text{Im } f = F \\ f \text{ injective} &\iff \text{Ker } f = \{0\} \end{aligned}$$

$f$  application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

### Projecteur – Définition

Si  $E = A \oplus B$ ,  $p : x = a + b \in E \mapsto a \in A$  est un projecteur sur  $A$  parallèlement à  $B$ .

## 1.5 Matrices – Déterminants – Systèmes linéaires

## Matrices – Définition

On appelle matrice à  $m$  lignes et  $n$  colonnes, toute application de  $[1, \dots, n] \times [1, \dots, m] \rightarrow \mathbb{K}$ .

## Ensemble des matrices

On note  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices à  $m$  lignes et  $n$  colonnes. C'est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

## Matrices et applications linéaires

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$$

$f$  : application linéaire de  $E$  dans  $F$ , deux espaces vectoriels de dimension finie.

$M = (a_{ij})_{i \in [1,m], j \in [1,n]}$  : matrice associée à l'application linéaire  $f$

$\mathcal{B} = (e_j)_{j \in [1,n]}$  : base de  $E$

$\mathcal{B}' = (f_i)_{i \in [1,m]}$  : base de  $F$

## Changement de base

$$A' = Q^{-1}AP$$

$A'$  : matrice d'une application linéaire de  $E$  (dans la base base  $\mathcal{B}'$ ) vers  $F$  (dans la base base  $\mathcal{C}'$ )

$A$  : matrice de la même application linéaire de  $E$  (dans la base base  $\mathcal{B}$ ) vers  $F$  (dans la base base  $\mathcal{C}$ )

$P$  : matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$

$Q$  : matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{C}'$

Dans le cas d'un endomorphisme,  $Q = P$  (seulement deux bases sont nécessaires).

## Matrices inversibles

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $f$  un endomorphisme représenté par  $A$  dans une base. Les propriétés ci-dessous sont deux à deux équivalentes :

- (1)  $f$  est bijective.
- (2)  $A$  est inversible.

Dans ce cas,  $\text{Mat}(f^{-1}) = A^{-1}$ .

Système linéaire – Définition

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

On peut interpréter ce système comme l'équation  $AX = B$  avec  $A = (a_{ij})_{i \in [1,n], j \in [1,p]}$  par le vecteur  $X = (x_i)_{i \in [1,p]}$  (vecteur inconnu). Ce produit est égal au vecteur second membre :  $B = (b_i)_{i \in [1,n]}$

Système de Cramer

Dans le cas d'un système de Cramer,  $n = p = \text{rg } A$ . Le système admet alors une solution unique.

Somme de deux matrices

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$$

$$\begin{aligned} M &= (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \\ N &= (\beta_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \\ M + N &= (\gamma_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

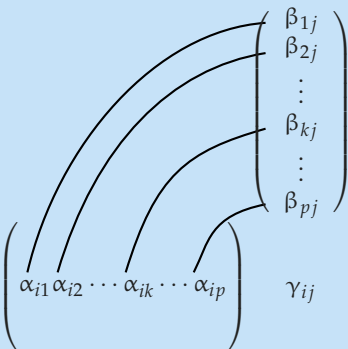
Produit d'une matrice par un scalaire

$$M = \lambda N$$

$$\gamma_{ij} = \lambda \cdot \alpha_{ij}$$

$$\begin{aligned} \lambda &\in \mathbb{K} \\ M &= (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \\ N &= (\gamma_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

Produit de matrices



$$\begin{aligned} M &= (\alpha_{ik}) \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K}) \\ N &= (\beta_{kj}) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ MN &= (\gamma_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \\ \gamma_{ij} &= \sum_{k=1}^p \alpha_{ik} \cdot \beta_{kj} \end{aligned}$$



## Propriétés des opérations sur les matrices

$$(M + N)P = MP + NP$$

$$(\mu M)(\lambda N) = \mu\lambda(MN)$$

$$(MN)P = M(NP)$$

$$(M, N) \in (\mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K}))^2, P \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$$

$$M \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K})$$

$$N \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$$

$$(\lambda, \mu)^2 \in \mathbb{K}^2$$

$$M \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K})$$

$$N \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$$

$$N \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$$

**Attention :** En général,  $MN \neq NM$

## Formule du binôme pour les matrices

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$(A, B) \in \mathbb{M}_p(\mathbb{K}) \text{ tel que } AB = BA$$

## Règles de calcul de la matrice d'une application linéaire

Soient  $f$  et  $g$  deux applications linéaires et  $\lambda$  un scalaire ( $\lambda \in K$ ). Alors on a, dans des bases fixées :

$$\text{Mat}(\lambda f + g) = \lambda \text{Mat}(f) + \text{Mat}(g)$$

$$\text{Mat}(g \circ f) = \text{Mat}(g)\text{Mat}(f)$$

$f$  isomorphisme  $\Leftrightarrow \text{Mat}(f)$  inversible

$$\text{Mat}(f^{-1}) = (\text{Mat}(f))^{-1} \quad \text{si } f \text{ est un isomorphisme}$$

## Transposée d'une matrice - Règles de calcul

$${}^t(A + \lambda B) = \lambda {}^t A + {}^t B$$

$${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$$

$${}^t({}^t A) = A$$

$${}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1}$$

si  $n = p$  et  $A$  inversible

$$(A, B) \in \mathcal{M}_{np}(K)^2$$

$$\lambda \in K$$

## Matrices symétriques

Une matrice  $M$  carrée d'ordre  $n$  ( $M \in \mathcal{M}_n(K)$ ) est dite symétrique lorsque  $M = {}^t M$ . On note  $\mathcal{S}_n(K)$  l'ensemble des matrices symétriques d'ordre  $n$ .

### Rang d'une matrice

Soit  $M$  une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes ( $M \in \mathcal{M}_{np}(K)$ ). On note  $f$  l'endomorphisme associé à  $M$  par rapport à la base canonique  $\mathcal{B}_{\text{cano}}$  de  $K^n$  :  $M = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_{\text{cano}})$ . Par définition le rang de  $M$ , noté  $\text{rg } M$ , est égal au rang de  $f$ .

### Rang de la transposée

Si  $M$  est une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes ( $M \in \mathcal{M}_{np}(K)$ ), alors  $\text{rg } M = \text{rg } {}^t M$ .

### Matrices semblables

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$  ( $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$ ). On dit que  $A$  et  $B$  sont semblables lorsqu'il existe une matrice inversible  $P$  carrée d'ordre  $n$  telle que :  $A = PBP^{-1}$ .

Dans ce cas si  $E$  est un espace vectoriel sur  $K$  de dimension  $n$  alors il existe  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  bases de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tels que :  $A = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_1)$  et  $B = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_2)$ .

### Rang d'un système linéaire

Si  $(S)$  est un système linéaire et  $A$  sa matrice associée ( $M \in \mathcal{M}_{np}(K)$ ), alors par définition le rang de  $(S)$ , noté  $\text{rg } (S)$ , est égal au rang de  $A$ .

### Opérations élémentaires sur les lignes – Définition

Soit  $(S)$  une système linéaire. On appelle opérations élémentaires sur les lignes les opérations suivantes :

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

$$L_i \longleftrightarrow \alpha L_i \quad \text{si } \alpha \neq 0$$

$$L_i \longleftrightarrow L_i + \beta L_j$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des scalaires  $((\alpha, \beta) \in K^2)$  et  $(i, j)$  des numéros de ligne.

### Opérations élémentaires sur les lignes – Propriété

Les opérations élémentaires sur les lignes ne changent ni le rang d'un système, ni son ensemble de solutions.

### Forme réduite de Gauss d'un système linéaire

Soit  $(S)$  un système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues. Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire, effectuées dans le cadre de l'algorithme du pivot de Gauss, permettent d'aboutir à un système linéaire  $(S')$ , équivalent à  $(S)$ , de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots \cdots \cdots + a_{1p} = b_1 \\ \vdots \\ a_{rr}x_r + \cdots + a_{rp}x_p = b_r \\ \vdots \\ 0 = b_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b_n \end{array} \right.$$

où  $r = \text{rg}(S)$ . L'algorithme du pivot de Gauss permet donc de calculer le rang d'un système, et donc celui d'une matrice ou d'une application linéaire.

### Ensemble des solutions d'un système linéaire

Soit  $(S)$  un système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues. Alors :

- l'ensemble  $\mathcal{S}$  de ses solutions est soit vide, soit un singleton, soit infini.
- la solution générale du système  $(S)$  s'écrit comme la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène associé.
- l'ensemble des solutions du système homogène associé est un sous-espace vectoriel de  $K^p$  de dimension  $p - \text{rg}(S)$

## 1.6 Réduction des endomorphismes

### Valeur propre – Définition

$\exists x \in E, x \neq 0$  tel que :

$$f(x) = \lambda x$$

$f \in \mathcal{L}(E)$

$\lambda \in \mathbb{K}$  : **valeur propre** de  $f$

Autre formulation :  $f - \lambda \text{Id}_E$  est non injectif.

### Spectre d'un endomorphisme

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on appelle spectre de  $f$  noté  $\text{Sp}(f)$  l'ensemble :

$$\text{Sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \exists x \in E \setminus \{0\} / f(x) = \lambda x\}$$

$\text{Sp}(f)$  correspond à l'ensemble des valeurs propres de  $f$ .

## Vecteur propre – Définition

$$x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K}$$

$$f(x) = \lambda x$$

$x \in E$  : **vecteur propre** de  $f$   
 $f \in \mathcal{L}(E)$   
 (alors  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ )

## Sous-espace propre – Définition

$$E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$$

$E_\lambda(f)$  : **sous-espace propre** associé à  $\lambda$   
 $f \in \mathcal{L}(E)$   
 $\lambda \in \text{Sp}(f)$   
 $E_\lambda(f)$  est l'ensemble des vecteurs propres de  $f$  associés à la valeur propre  $\lambda$ .

## Diagonalisabilité – Définition

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $K$  de dimension finie et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On dit que  $f \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable si et seulement si il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ .

On dit que  $M \in \mathcal{M}_n(K)$  est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice diagonale  $D$  semblable à  $M$ .

## Diagonalisabilité – Propriété

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $K$  de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On a alors équivalence des propositions :

- (i)  $f$  est diagonalisable
- (ii) il existe une matrice associée à  $f$  qui est diagonalisable
- (iii) toutes les matrices associées à  $f$  sont diagonalisables

## Existence de valeurs propres complexes

Toute matrice carrée à coefficients complexes possède au moins une valeur propre.

## Liberté d'une famille de vecteurs propres

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On a alors :  
 1) une famille finie de vecteurs propres associées à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre

2) une famille obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre

### Condition suffisante de diagonalisabilité

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $f$  admet  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes alors  $f$  est diagonalisable.

### Diagonalisation des matrices symétriques réelles

Toute matrice carrée symétrique réelle est diagonalisable. En particulier les valeurs propres dans  $\mathbb{C}$  d'une matrice symétrique réelle sont réelles.

## 2. Analyse

### 2.1 Nombres réels

#### Présentation

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \left\{ \begin{array}{l} a \leq b \implies a + c \leq b + c \\ \left\{ \begin{array}{l} a \leq b \\ 0 \leq c \end{array} \right. \implies ac \leq bc \end{array} \right.$$

Toute partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure dans  $\mathbb{R}$ .

#### Partie entière – Définition

$$\forall x \in \mathbb{R} : \\ E(x) \leq x < E(x) + 1$$

$x \in \mathbb{R}$   
 $E(x)$  : partie entière de  $x$   
 $E(x)$  est l'unique entier relatif vérifiant la propriété ci-contre.

### 2.2 Nombres complexes

## Forme cartésienne / Forme polaire d'un nombre complexe

$$z = a + ib$$

$$\text{Si } z \neq 0, z = \rho e^{i\theta}$$

$z$  : nombre complexe ( $z \in \mathbb{C}$ )  
 $a$  : partie réelle de  $z$  ( $a \in \mathbb{R}$ ), on la note aussi  $\text{Re}(z)$   
 $b$  : partie imaginaire de  $z$  ( $b \in \mathbb{R}$ ), on la note aussi  $\text{Im}(z)$   
 $\rho$  : module de  $z$ , ( $\rho \in \mathbb{R}_+$ )  
 $\theta$  : argument de  $z$ , ( $\theta \in \mathbb{R}$ )

## Nombre complexe conjugué – Définition

$$z = a + ib$$

$$\bar{z} = a - ib$$

$z \in \mathbb{C}$  : nombre complexe  
 $\bar{z} \in \mathbb{C}$  : nombre complexe conjugué de  $z$   
 $a$  : partie réelle de  $z$  et de  $\bar{z}$   
 $b$  : partie imaginaire de  $z$

## Nombre complexe conjugué – Propriétés

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$$

$z$  : nombre complexe  
 $\bar{z}$  : nombre complexe conjugué de  $z$

$$\bar{\bar{z}} = z$$

si  $z$  est réel

$$\bar{\bar{z}} = -z$$

si  $z$  est imaginaire pur

## Module d'un nombre complexe

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$|z|$  : module de  $z$

## Module d'un produit – Module d'un quotient

$$|zz'| = |z| \cdot |z'|$$

$$z' \neq 0 \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$z \in \mathbb{C}$  : nombre complexe  
 $z' \in \mathbb{C}$  : nombre complexe

## Inégalité triangulaire

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$z \in \mathbb{C}$  : nombre complexe  
 $z' \in \mathbb{C}$  : nombre complexe

## Identité remarquable pour le module

Pour  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes  $((z, z') \in \mathbb{C}^2)$  on a :  $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')$ .

## Exponentielle d'un nombre complexe imaginaire pur – Définition

Pour  $\theta$  nombre réel ( $\theta \in \mathbb{R}$ ), on définit l'exponentielle complexe de  $i\theta$  par la formule :  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

## Exponentielle d'un nombre complexe imaginaire pur – Propriété

Pour  $\theta$  et  $\theta'$  nombres réels  $((\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2)$ , on a :

- (i)  $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' [2\pi]$ .  
 (ii)  $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 [2\pi]$ .

## Exponentielle d'un nombre complexe – Définition

Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on définit l'exponentielle complexe de  $z$  par la formule :  $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)}$ .

## Exponentielle d'un nombre complexe - Propriété

Pour  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$  et  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$  on a :

- (i)  $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$   
 (ii)  $\operatorname{Arg}(e^z) = \operatorname{Im}(z) [2\pi]$   
 (iii)  $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$   
 (iv)  $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z = z' [2i\pi]$   
 (v)  $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 0 [2i\pi]$

## Résolution des équations du second degré à coefficients réels

On considère l'équation d'inconnue  $z$  nombre complexe ( $z \in \mathbb{C}$ ) :  $az^2 + bz + c = 0$  où  $a, b$  et  $c$  sont des nombres réels  $((a, b, c) \in \mathbb{R}^3)$  tels que  $a \neq 0$ .

On calcule le discriminant de l'équation :  $\Delta = b^2 - 4ac$ . On a trois cas :

- $\Delta > 0$  : deux solutions réelles  $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$   
 -  $\Delta = 0$  : une solution réelle  $z = \frac{-b}{2a}$  (appelée racine double)  
 -  $\Delta > 0$  : deux solutions complexes pures conjuguées  $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Caractérisation des solutions de  $az^2 + bz + c = 0$ 

$z_1$  et  $z_2$  sont les deux solutions de l'équation (avec la convention  $z_1 = z_2$  si  $\Delta = 0$ ) si et seulement elles sont solution du système d'équations

$$\begin{cases} x + y = -\frac{b}{a} \\ xy = \frac{c}{a} \end{cases}$$
Factorisation de  $a \cos(\theta) + b \sin(\theta)$ 

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Il existe  $(r, \phi) \in \mathbb{R}^2$  tel que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  :  
 $a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = r \cos(\theta + \phi)$

On peut prendre :  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\cos(\phi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  et  $\sin(\phi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

## Formule de Moivre

$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta = e^{in\theta} - (e^{i\theta})^n$  avec  $\theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$

## Formule d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$x \in \mathbb{R}$

## Racines nièmes d'un complexe

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \right)$$

Les  $z_k$  sont les solutions de l'équation  $z^n = r e^{i\varphi}$ .

$(k, n) \in \mathbb{N}^2$  avec  $0 \leq k \leq n - 1$

$z \in \mathbb{C}$

$r \in \mathbb{R}_+$

En particulier, les racines nièmes de l'unité :  $z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$

## 2.3 Suites

## Convergence – Définition

On dit qu'une suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** vers une limite  $l \in \mathbb{K}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon$$



On dit qu'une suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si :  

$$\exists l \in \mathbb{K}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon$$

### Divergence – Définition

On dit qu'une suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$  si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \geq A.$$

On dit qu'une suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $-\infty$  si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \leq A$$

Dans les deux cas ci-dessus, on dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente de première espèce. On dit qu'une suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente de seconde espèce lorsqu'elle n'est ni convergente, ni divergente de première espèce.

### Suite majorée, minorée ou bornée

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. On dit qu'elle est majorée (resp. minorée) lorsqu'il existe un réel  $M$  ( $M \in \mathbb{R}$ ) tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$  (resp.  $u_n \geq M$ ). On dit qu'elle est bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée, ou encore, de façon équivalente, lorsqu'il existe un réel  $M$  positif ( $M \in \mathbb{R}^+$ ) tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ .

### Somme des $n$ premiers entiers

Soit  $n$  un entier naturel ( $n \in \mathbb{N}$ ). On a : 
$$\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

### Suites extraites des rangs pairs et impairs

Soit  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. Si les suites extraites  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ont la même limite  $l$  (finie ou infinie) alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $l$ .

### Opérations sur les limites

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites numériques admettant une limite, et  $\alpha$  un nombre réel ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ). On peut faire les opérations suivantes sur les limites :

- **somme** :  $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$  sauf forme indéterminée  $\infty - \infty$

- **produit** :  $\lim u_n v_n = \lim u_n \lim v_n$  sauf forme indéterminée  $0 \times \infty$

- **multiplication par un réel** :  $\lim \alpha u_n = \alpha \lim u_n$  sauf forme indéterminée  $0 \times \infty$

- **quotient** :  $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$  sauf formes indéterminées  $\frac{0}{0}$  et  $\frac{\infty}{\infty}$

### Signe d'une suite de limite non nulle

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique ayant une limite non nulle (éventuellement infinie). Si cette limite est strictement positive, alors  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang ; si cette limite est strictement négative, alors  $v_n < 0$  à partir d'un certain rang.

### Passage aux limites dans une inégalité

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites numériques admettant une limite. On suppose qu'à partir d'un certain rang :  $u_n \leq v_n$ . On a alors :  $\lim u_n \leq \lim v_n$ .

### Théorème des gendarmes (limites finies)

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites numériques. On suppose qu'à partir d'un certain rang :  $u_n \leq v_n \leq w_n$  et que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers un même limite finie  $l$ . Dans ce cas la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge aussi vers  $l$ .

### Théorème des gendarmes (limites infinies)

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites numériques. On suppose qu'à partir d'un certain rang :  $u_n \leq v_n$ . Dans ce cas :

- si  $\lim u_n = +\infty$  alors  $\lim v_n = +\infty$ ,
- si  $\lim v_n = -\infty$  alors  $\lim u_n = -\infty$

### Théorème de la limite monotone

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique.

- Si elle est croissante alors soit elle est majorée et convergente, soit elle est non majorée et divergente vers  $+\infty$ .
- Si elle est décroissante alors soit elle est minorée et convergente, soit elle est non minorée et divergente vers  $-\infty$ .

En particulier une suite monotone admet toujours une limite (éventuellement infinie).

### Suites équivalentes – Définition

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites numériques. On dit qu'elles sont équivalentes lorsqu'il existe une suite  $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que, à partir d'un certain rang,  $u_n = (1 + \epsilon_n)v_n$  et  $\lim \epsilon_n = 0$ . On le note  $u_n \sim v_n$ .

### Suites équivalentes – Critère

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites numériques. On suppose qu'à partir d'un certain rang  $v_n$  ne s'annule pas. On a alors  $u_n \sim v_n$  si et seulement si  $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ .

## Suites équivalentes – Propriétés

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites numériques.

- **réflexivité** : on a  $u_n \sim u_n$ .
- **symétrie** : si  $u_n \sim v_n$  alors  $v_n \sim u_n$ .
- **transitivité** : si  $u_n \sim v_n$  et  $v_n \sim w_n$  alors  $u_n \sim w_n$ .

## Suites équivalentes – Règles de calcul

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites numériques. On suppose que  $u_n \sim v_n$  et  $\alpha_n \sim \beta_n$ .

- **produit** : on a alors  $\alpha_n u_n \sim \beta_n v_n$ .
  - **quotient** : si  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, alors  $\frac{u_n}{\alpha_n} \sim \frac{v_n}{\beta_n}$ .
  - **puissances entières** : pour tout  $\alpha \in \mathbb{Z}$ ,  $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$  (pour  $\alpha < 0$ , il faut que  $u_n$  et  $v_n$  ne s'annulent pas à partir d'un certain rang).
  - **puissances réelles** : pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $|u_n|^\alpha \sim |v_n|^\alpha$  (pour  $\alpha < 0$ , il faut que  $u_n$  et  $v_n$  ne s'annulent pas à partir d'un certain rang).
- Par contre on ne peut ni additionner les équivalents, ni les composer par une fonction.

## Suites équivalentes et limites

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites numériques.

- 1) On suppose que  $u_n \sim v_n$  et que  $\lim v_n$  existe. Dans ce cas  $\lim u_n$  existe et  $\lim u_n = \lim v_n$ .
- 2) On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a une limite finie  $l$  non nulle. Dans ce cas  $u_n \sim l$ .

## Equivalents usuels

Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique telle que  $\lim x_n = 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On a :  $\ln(1 + x_n) \sim x_n$      $e^{x_n} - 1 \sim x_n$      $(1 + x_n)^\alpha - 1 \sim \alpha x_n$  et :  
 $\sin x_n \sim x_n$      $\cos x_n - 1 \sim -\frac{x_n^2}{2}$      $\tan x_n \sim x_n$ .

## Suite arithmétique

$$u_n = u_{n-1} + r$$

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$$

$u_n$  :  $n^{\text{e}}$  terme de la suite

$r$  : raison

$u_1$  : premier terme de la suite

$S_n$  : somme des  $n$  premiers termes de la suite  $u_n$

## Suite géométrique

$$u_n = q \cdot u_{n-1}$$

$$u_n = q^{n-p} u_p$$

$$S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad q \neq 1$$

$u_n$  :  $n^{\text{e}}$  terme de la suite

$q$  : raison de la suite

$u_1$  : premier terme de la suite

$S_n$  : somme des  $n$  premiers termes de la suite  $u_n$

## Suites réelles monotones

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **croissante** si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$$

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **décroissante** si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$$

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **strictement croissante** si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$$

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **strictement décroissante** si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$$

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **(strictement) monotone** si et seulement si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

## Suites adjacentes

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \\ (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ (v_n - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{array} \right.$$

Si deux suites réelles vérifient les propriétés ci-contre, ces suites sont dites **adjacentes**.

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent vers la même limite finie.

## 2.4 Fonctions réelles de la variable réelle

## Application en escalier

On dit qu'une fonction  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  est en escalier si et seulement s'il existe une famille  $(a_i)_{i \in [0, n]}$  telle que  $(a_0, \dots, a_n) \in [a; b]^{n+1}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et une famille  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$  tels que :

$$\begin{cases} a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b \\ \forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \forall x \in ]a_i; a_{i+1}[ , f(x) = \lambda_i \end{cases}$$

### Application majorée – minorée – bornée

Une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite :

- **majorée** si et seulement s'il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in X, f(x) \leq A$ .
- **minorée** si et seulement s'il existe  $B \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in X, f(x) \geq B$ .
- **bornée** si et seulement s'il existe  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\forall x \in X, B \leq f(x) \leq A$ .

### Limites

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application.

On dit que  $f$  admet une **limite  $l$  en  $a \in \bar{I}$**  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

On dit que  $f$  admet une **limite  $l$  en  $+\infty$**  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

On dit que  $f$  admet comme **limite  $+\infty$  en  $a \in \bar{I}$**  si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \eta \implies f(x) \geq A$$

On dit que  $f$  admet comme **limite  $+\infty$  en  $+\infty$**  si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geq B \implies f(x) \geq A$$

On dit que  $f$  admet comme **limite  $-\infty$  en  $-\infty$**  si et seulement si :

$$\forall A < 0, \exists B < 0, \forall x \in I, x \leq B \implies f(x) \leq A$$

### Limite à droite ou à gauche en un point

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On dit que  $f$  a une limite  $l$  à droite en  $a \in \bar{I}$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, 0 < x - a < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

On dit que  $f$  a une limite  $l$  à gauche en  $a \in \bar{I}$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, -\eta < x - a < 0 \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

On dit que  $f$  admet comme limite  $+\infty$  à droite en  $a \in \bar{I}$  si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, 0 < x - a < \eta \implies f(x) \geq A$$

On dit que  $f$  admet comme limite  $-\infty$  à gauche en  $a \in \bar{I}$  si et seulement si :

$$\forall A < 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, -\eta < x - a < 0 \implies f(x) \leq A$$

## Composition suite-fonction

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $a \in \bar{I}$  et que  $f$  a pour limite  $b$  en  $a$ . Dans ce cas la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $b$ .

## Opérations sur les limites

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications admettant une limite en  $a \in \bar{I}$ . Soit  $\alpha$  un nombre réel ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ). On peut faire les opérations suivantes sur les limites :

- **somme** :  $\lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g$  sauf forme indéterminée  $\infty - \infty$

- **produit** :  $\lim_a fg = \lim_a f \lim_a g$  sauf forme indéterminée  $0 \times \infty$

- **multiplication par un réel** :  $\lim_a \alpha f = \alpha \lim_a f$  sauf forme indéterminée  $0 \times \infty$

- **quotient** :  $\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g}$  sauf formes indéterminées  $\frac{0}{0}$  et  $\frac{\infty}{\infty}$

## Composition de limites

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications. On suppose que  $f$  a une limite  $b \in \bar{J}$  en  $a \in \bar{I}$  et que  $g$  a pour limite  $l$  en  $b$ . Dans ce cas la fonction  $g \circ f$  a pour limite  $l$  en  $a$ .

## Voisinnages – Définition

**Voisinage d'un point** : soit  $a \in \mathbb{R}$ . On appelle voisinage de  $a$  tout intervalle du type  $[a - \eta, a + \eta]$  où  $\eta > 0$

**Voisinage de  $+\infty$**  : on appelle voisinage de  $+\infty$  tout intervalle du type  $[A, +\infty[$  où  $A > 0$

**Voisinage de  $-\infty$**  : on appelle voisinage de  $-\infty$  tout intervalle du type  $] -\infty, A]$  où  $A > 0$

## Signe local d'une fonction de limite non nulle

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application ayant une limite  $l$  non nulle (éventuellement infinie) en  $a \in \bar{I}$ . Si cette limite est strictement positive, alors  $f(x) > 0$  pour  $x$  au voisinage de  $a$  ; si cette limite est strictement négative, alors  $f(x) < 0$  au voisinage de  $a$ .

## Passage aux limites dans une inégalité

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications admettant une limite en  $a \in \bar{I}$ . On suppose qu'au voisinage de  $a$  :  $f(x) \leq g(x)$ . On a alors :  $\lim_a f \leq \lim_a g$ .

### Théorème des gendarmes (limites finies)

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  des applications. On suppose qu'au voisinage de  $a : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  et que les applications  $f$  et  $g$  admettent une même limite finie  $l$  en  $a \in \bar{I}$ . Dans ce cas l'application  $h$  admet aussi  $l$  pour limite en  $a \in \bar{I}$ .

### Théorème des gendarmes (limites infinies)

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications. Soit  $a \in \bar{I}$ . On suppose qu'au voisinage de  $a : f(x) \leq g(x)$ . Dans ce cas :

- si  $\lim_a f = +\infty$  alors  $\lim_a g = +\infty$ ,
- si  $\lim_a g = -\infty$  alors  $\lim_a f = -\infty$ .

### Théorème de la limite monotone

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application monotone sur  $I$ . Elle admet alors une limite (finie ou infinie) en tout point  $a \in \bar{I}$ .

### Fonctions négligeables – Définition

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications. On dit que  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a \in \bar{I}$  lorsqu'il existe une application  $\epsilon$  telle que, au voisinage de  $a$ ,  $f = \epsilon g$  et  $\lim_a \epsilon = 0$ . On le note  $f =_a o(g)$ .

### Fonctions équivalentes – Définition

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications. On dit qu'elles sont équivalentes au voisinage de  $a \in \bar{I}$  lorsque  $f =_a g + o(g)$ . On le note  $f \sim_a g$ .

### Fonctions négligeables ou équivalentes – Critère

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications. On suppose que dans un voisinage de  $a \in \bar{I}$  l'application  $g$  ne s'annule pas (sauf éventuellement en  $a$ ). On a alors  $f =_a o(g)$  si et seulement si  $\lim_a \frac{f}{g} = 0$ , et  $f \sim_a g$  si et seulement si  $\lim_a \frac{f}{g} = 1$ .

### Fonctions équivalentes - Propriétés

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  des applications et  $a \in \bar{I}$ .

- **réflexivité** : on a  $f \sim_a f$ .
- **symétrie** : si  $f \sim_a g$  alors  $g \sim_a f$ .
- **transitivité** : si  $f \sim_a g$  et  $g \sim_a h$  alors  $f \sim_a h$ .

## Fonctions équivalentes – Règles de calcul

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$  des applications. On suppose que  $f \sim_a g$  et  $u \sim_a v$ .

- **produit** : on a alors  $uf \sim_a vg$ .

- **quotient** : si  $u$  et  $v$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , alors  $\frac{f}{u} \sim_a \frac{g}{v}$ .

- **puissances entières** : pour tout  $\beta \in \mathbb{Z}$ ,  $f^\beta \sim_a g^\beta$  (pour  $\beta < 0$ , il faut que  $f$  et  $g$  ne s'annulent pas au voisinage de  $a$ ).

- **puissances réelles** : pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $|f|^\beta \sim_a |g|^\beta$  (pour  $\beta < 0$ , il faut que  $f$  et  $g$  ne s'annulent pas au voisinage de  $a$ ).

- **Composition par une suite** : si  $f \sim_a g$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite numérique de limite  $a$ , alors  $f(u_n) \sim g(u_n)$ .

Par contre on ne peut ni additionner les équivalents, ni les composer par une fonction.

## Fonctions équivalentes et limites

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications et  $a \in \bar{I}$ .

1) On suppose que  $f \sim_a g$  et que  $\lim_a g$  existe. Dans ce cas  $\lim_a f$  existe et  $\lim_a f = \lim_a g$ .

2) On suppose que  $f$  a une limite finie  $l$  non nulle en  $a$ . Dans ce cas  $f \sim_a l$ .

## Équivalents usuels

Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ . On a :  $\ln(1+x) \sim_0 x$      $e^x - 1 \sim_0 x$      $(1+x)^\beta - 1 \sim_0 \beta x$  et :  $\sin x \sim_0 x$      $\cos x - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}$      $\tan x \sim_0 x$ .

## Continuité – Définitions

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . On dit que  $f$  est continue à gauche en  $a$  lorsque  $\lim_{a^-} f = f(a)$ . On dit que  $f$  est continue à droite en  $a$  lorsque  $\lim_{a^+} f = f(a)$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  lorsque  $\lim_a f = f(a)$ . On dit que  $f$  est continue sur  $I$  lorsqu'elle est continue en tout point de  $I$ .

## Continuité – Critère

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ .  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $f$  est continue à droite et à gauche en  $a$ .

## Opérations sur les fonctions continues

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues sur  $I$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Les fonctions  $f + g$ ,  $fg$  et  $\lambda f$  sont aussi continues sur  $I$ .



De plus, si la fonction  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  alors les fonctions  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont continues sur  $I$ .

### Composition et continuité

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications où  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  tels que  $f(I) \subset J$ . Si  $f$  et  $g$  sont respectivement continues en  $a$  et  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est continue en  $a$ . Par conséquent, si  $f$  est continue sur  $I$  et  $g$  est continue sur  $J$ , avec  $f(I) \subset J$ , alors  $g \circ f$  est continue sur  $I$ .

### Théorème des valeurs intermédiaires

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Dans ce cas  $f$  prend toute valeur comprise entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , c'est-à-dire :

$$\forall y \in [f(a), f(b)], \quad \exists c \in [a, b]; \quad y = f(c).$$

Par conséquent, si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et si  $f$  est continue sur  $I$  alors  $f(I)$  est un intervalle.

### Théorème de continuité sur un segment

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Dans ce cas  $f$  est bornée sur  $[a, b]$  et atteint ses bornes, c'est-à-dire :

$$\exists (c, d) \in [a, b]^2; \quad \forall x \in [a, b], \quad f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors de dire que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment :

$$f([a, b]) = [f(c), f(d)].$$

### Théorème de la bijection

Une fonction  $f$  continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  est une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $f(I)$ . L'application réciproque  $f^{-1}$  est continue et a même monotonie que  $f$ ; son graphe se déduit de celui de  $f$  par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation  $y = x$ ; si  $f$  est impaire alors  $f^{-1}$  l'est aussi.

## Fonctions trigonométriques circulaires réciproques

$$\text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\forall x \in ]-1, 1[ :$$

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

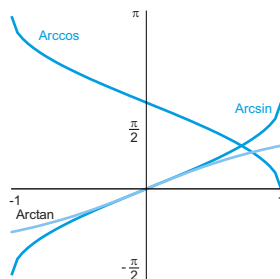
$$\forall x \in ]-1, 1[ :$$

$$\text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\forall x \in \mathbb{R} :$$

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



## 2.5 Dérivation

## Dérivabilité en un point – Définitions

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  a une dérivée à droite en  $a \in I$  si et seulement si

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe et est finie ; dans ce cas cette limite est appelée dérivée à droite de  $f$  en  $a$ , notée  $f'_d(a)$ .

On dit que  $f$  a une dérivée à gauche en  $a \in I$  si et seulement si

$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe et est finie ; dans ce cas cette limite est appelée dérivée à gauche de  $f$  en  $a$ , notée  $f'_g(a)$ .

On dit que  $f$  est dérivable en  $a \in I$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe et est finie ; dans ce cas cette limite est appelée dérivée à droite de  $f$  en  $a$ , notée  $f'(a)$ .

## Dérivabilité en un point – Critère

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ .  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en  $a$  avec  $f'_g(a) = f'_d(a)$ . Dans ce cas :  $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$ .

## Dérivabilité en un point – Interprétation graphique

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ . On note  $C_f$  la courbe représentative de  $f$ .

- 1) Si  $f$  dérivable à droite en  $a$  alors  $C_f$  admet une demi-tangente à droite au point d'abscisse  $a$ , d'équation  $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$ .
- 2) Si  $f$  dérivable à gauche en  $a$  alors  $C_f$  admet une demi-tangente à gauche au point d'abscisse  $a$ , d'équation  $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$ .
- 3) Si  $f$  dérivable en  $a$  alors  $C_f$  admet une tangente au point d'abscisse  $a$ , d'équation  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .
- 4) Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  (respectivement limite à droite ou à gauche) existe et est infinie alors  $C_f$  admet une tangente (respectivement demi-tangente) verticale au point d'abscisse  $a$ .

### Dérivabilité d'une application réciproque

Soit  $f : I \rightarrow J$  une application où  $I$  et  $J$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est une bijection de  $I$  sur  $J = f(I)$  et qu'elle est dérivable sur  $I$ . Dans ce cas  $f^{-1}$  est dérivable en tout point  $y_0 = f(x_0) \in J$  tel que  $f'(x_0) \neq 0$  et on a :

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

### Dérivation et continuité

Soient un point  $a \in I$  et une fonction  $f : I \rightarrow K$ , si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

### Propriétés des dérivées

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $I$  dans  $K$  dérivables en  $a$ , alors :

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

$$g(a) \neq 0, \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

$$g(a) \neq 0, \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

## Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

$f : I \rightarrow K$ , où  $I$  est un intervalle, est dite dérivable sur un intervalle  $J \subset I$  si et seulement si :  $\forall a \in J$ ,  $f$  est dérivable en  $a$ .

## Formule de Leibniz

$f : I \rightarrow K$  et  $g : I \rightarrow E$  on suppose que  $\lambda$  et  $f$  sont dérivables sur  $I$  :

Alors  $f \cdot g$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et  $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$

## Classe d'une fonction

Soient  $f : I \rightarrow K$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on dit que  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  si et seulement si  $f$  est  $k$  fois dérivable sur  $I$  et  $f^{(k)}$  est continue sur  $I$ .

## Théorème de Rolle

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ ,  $f(a) = f(b)$  ; alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$f'(c) = 0$$

## Théorème des accroissements finis

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $a < b$ , continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Il existe  $c \in ]a, b[$  :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

## Inégalité de Taylor-Lagrange

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f$  de classe  $C^n$  sur  $[a, b]$ ,  $(n + 1)$  fois dérivable sur  $]a, b[$  et telle que  $\forall t \in ]a, b[$ ,  $\|f^{(n+1)}(t)\| \leq M$  alors :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

### Reste intégral

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[a, b]$  alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt}_{\text{Reste de Laplace}}$$

### Formule de Taylor-Young

$f : I \rightarrow E$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , si  $f$  est  $\mathcal{C}^n$  au voisinage de  $a (a \in I)$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

### Difféomorphisme – Définition

Soient  $f : I \rightarrow J$  avec  $I, J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ , on dit que  $f$  est un  **$\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme** de  $I$  sur  $J$  si et seulement si :

- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$
- $f$  est bijective
- $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$

### Dérivée et monotonie

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On a alors :  $f$  est croissante (respectivement décroissante) sur  $I$  si et seulement si pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) \geq 0$  (respectivement  $f'(x) \leq 0$ ).

De plus, si pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) > 0$  (respectivement  $f'(x) < 0$ ) alors  $f$  est strictement croissante (respectivement décroissante) sur  $I$ .

### Théorème sur la limite de la dérivée

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ . On suppose que  $f$  est continue sur  $I$ , dérivable sur  $I \setminus \{a\}$ .

- si  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$  (éventuellement limite à droite ou à gauche si  $a$  est une borne de  $I$ ) existe et est finie alors  $f$  est dérivable au point  $a$  (éventuellement à droite ou à gauche) et  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ .

- si  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$  (éventuellement limite à droite ou à gauche) existe et est infinie alors  $f$  n'est pas dérivable au point  $a$  (éventuellement à droite ou à gauche) et sa courbe représentative admet une tangente (éventuellement demi-tangente) verticale en ce point.

### Théorème de prolongement des fonctions de classe $C^1$

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ . On suppose que  $f$  est continue sur  $I$ , et  $C^1$  sur  $I \setminus \{a\}$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$  (éventuellement limite à droite ou à gauche si  $a$  est une borne de  $I$ ) existe et est finie alors  $f$  est  $C^1$  sur  $I$  et  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ .

### Extremum local ou global – Définitions

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

- 1) On dit que  $f$  admet un maximum (respectivement minimum) local au point  $a$  lorsqu'il existe un voisinage de  $a$  sur lequel  $f$  est majorée (respectivement minorée) par  $f(a)$ . Dans les deux cas on dit que  $f$  admet un extremum local au point  $a$ .
- 2) On dit que  $f$  admet un maximum (respectivement minimum) global sur  $I$  au point  $a$  lorsque  $f$  est majorée (respectivement minorée) sur  $I$  par  $f(a)$ . Dans les deux cas on dit que  $f$  admet un extremum global sur  $I$  au point  $a$ .

### Extremum local et dérivée

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a$  un point intérieur à l'intervalle  $I$ . Si  $f$  est dérivable et admet un extremum local au point  $a$  alors  $f'(a) = 0$ ; la réciproque est fautive en général.

### Convexité – Définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est dérivable sur  $I$ . On dit que  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est croissante sur  $I$ . La courbe représentative de  $f$  est alors au-dessus de ses tangentes.

### Développement limité – Définition

Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $f$  une fonction définie (au moins) sur un voisinage de  $a$ . On dit que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au point  $a$ , en abrégé  $DL_n(a)$  lorsqu'il existe  $n + 1$  réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que :  $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$ .

Le polynôme  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - a)^k$  est la partie régulière du  $DL_n(a)$  de  $f$ .

### Développement limité en $\pm\infty$ – Définition

Soit  $f$  une fonction définie (au moins) sur un voisinage de  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ). On dit que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ), en abrégé  $DL_n(+\infty)$  (respectivement  $DL_n(-\infty)$ ), lorsque la fonction  $g$ , définie par  $g(h) = f(1/h)$  admet un  $DL_n(0^+)$  (respectivement  $DL_n(0^-)$ ) :

$$g(h) =_{0^+} \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^n).$$

Dans ce cas :

$$f(x) =_{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \text{ (respectivement } =_{-\infty}$$

### Unicité de la partie régulière

Soit  $f$  une fonction admettant un  $DL_n(a)$  de partie régulière  $P_n(x)$ , avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = \pm\infty$ . Dans ce cas le choix de la partie régulière est unique.

### Opérateur de troncature – Définition

Soit  $p \in \mathbb{N}$ . On appelle opérateur de troncature d'ordre  $p$  l'application  $T_p : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}_p[X]$  qui à tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  associe le polynôme formé des termes de  $P$  de degré inférieur ou égal à  $p$ .

### Développement limité – Troncature

Soit  $f$  une fonction admettant un  $DL_n(a)$  de partie régulière  $P_n(x)$ , où  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $p$  entier naturel tel que  $0 \leq p \leq n$ ,  $f$  admet un  $DL_p(a)$  de partie régulière  $T_p(P_n(x))$ .

### Développement limité et régularité

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie (au moins) sur un voisinage de  $a$ . On a alors :

- $f$  est continue en  $a \iff f$  admet un  $DL_0(a)$ .
- $f$  est dérivable en  $a \iff f$  admet un  $DL_1(a)$ . Dans ce cas, si on note  $P_1(x)$  la partie régulière, alors la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point  $a$  a pour équation  $y = P_1(x)$ . On peut positionner la courbe localement par rapport à sa tangente en utilisant un développement limité de  $f$  à un ordre supérieur ou égal à 2.

Ces équivalences sont fausses pour les autres ordres de dérivation.

Lien entre  $DL_n(a)$  et  $DL_n(0)$ 

Soient  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = \pm\infty$ ) et  $n \in \mathbb{N}$ .

On définit une fonction  $g$  par  $g(h) = f(a+h)$  si  $a \in \mathbb{R}$  et  $g(h) = f(1/h)$  si  $a = \pm\infty$ .

Alors  $f$  admet un  $DL_n(a)$  de partie régulière  $P_n(x)$  si et seulement si la fonction  $g$  admet un  $DL_n(0)$  de partie régulière  $Q_n(x)$ .

Dans ce cas on a  $P_n(x) = Q_n(x-a)$  si  $a \in \mathbb{R}$  et  $P_n(x) = Q_n(1/x)$  si  $a = \pm\infty$ .

## Opérations sur les développements limités

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant un  $DL_n(a)$  de partie régulière respective  $P_n(x)$  et  $Q_n(x)$ , où  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

On a alors :

-  $f+g$  admet un  $DL_n(a)$  de partie régulière  $P_n(x) + Q_n(x)$  ;

-  $fg$  admet un  $DL_n(a)$  de partie régulière  $T_n(P_n(x)Q_n(x))$  ;

- si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f$  admet un  $DL_n(a)$  de partie régulière  $\lambda P_n(x)$ .

## Composition de développements limités

Soit  $f$  une fonction admettant un  $DL_n(a)$  de partie régulière  $P_n(x)$ , où  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $g$  une fonction admettant un  $DL_n(f(a))$  de partie régulière  $Q_n(x)$ .

Dans ce cas  $g \circ f$  admet un  $DL_n(a)$  de partie régulière  $T_n(Q_n \circ P_n(x))$ .

Développement limité de  $f$  à partir de celui de sa dérivée

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction  $C^1$  sur un voisinage de  $a$ . On suppose que  $f'$  admet un  $DL_n(a)$  de la forme :

$$f'(x) =_a \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Dans ce cas  $f$  admet un  $DL_{n+1}(a)$  de la forme :

$$f(x) =_a f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1})$$



### Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Soit  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une application continue sur un intervalle de  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Dans ce cas  $f$  admet sur  $I$  une infinité de primitives. De plus, si  $F$  et  $G$  sont deux primitives de  $f$  sur  $I$ , alors il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall x \in I$ ,  $F(x) = G(x) + C$ .

### Intégrale d'une fonction continue – Définition

Soit  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  une application continue sur un segment  $[a, b]$ . Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$  alors le nombre  $F(b) - F(a)$  ne dépend pas du choix de  $F$ , et est appelé intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$ , noté  $\int_a^b f(t) dt$ .

### Intégrale d'une fonction continue – Interprétation

Si  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  est une application continue et positive sur un segment  $[a, b]$ , alors  $\int_a^b f(t) dt$  est l'aire sous la courbe de  $f$  entre  $a$  et  $b$ . Dans le cas général où  $f$  est de signe non constant,  $\int_a^b f(t) dt$  est l'aire du domaine délimité par la courbe de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$ .

### Propriétés élémentaires de l'intégrale

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un segment  $[a, b]$  et  $c \in [a, b]$ . On a alors :

- 1) **Antisymétrie** :  $\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$
- 2) **Relation de Chasles** :  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$
- 3) **Positivité** : si  $a \leq b$  et  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f(t) dt \geq 0$ . De plus si  $\exists c \in [a, b]; f(c) \neq 0$  alors  $\int_a^b f(t) dt > 0$ .
- 4) **Linéarité** : si  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  alors  $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$ .
- 5) **Croissance** : si  $a \leq b$  et  $f \leq g$  sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

6) **Majoration en valeur absolue** : si  $a \leq b$  alors  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

### Primitives et intégrales d'une fonction continue

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Alors pour tout  $a \in I$ , l'application  $x \in I \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  qui s'annule en  $a$ .

### Théorème de la valeur moyenne

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue sur un segment  $[a, b]$ . On a alors :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

### Intégrale d'une fonction continue par morceaux – Définition

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application définie sur un segment  $[a, b]$ . On dit que  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  lorsqu'il existe des réels  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  tels que :

- 1)  $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $f$  est continue sur  $]x_i, x_{i+1}[$ ,
- 2)  $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x)$  existe et est finie,
- 3)  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$  existe et est finie.

Dans ce cas, pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , on note  $\phi_i$  le prolongement continue de  $f$  au segment  $[x_i, x_{i+1}]$ . On définit alors l'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  par la formule :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(t) dt.$$

### Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur un segment  $[a, b]$ . On suppose que  $f = g$  sur  $[a, b]$  sauf éventuellement d'un nombre fini de points.

On a alors :  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt$ .

### Intégrale d'une fonction à valeurs complexes – Définition

Soit  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$  une application définie sur un segment  $[a, b]$ . On pose :  $f_1 = \operatorname{Re} f$  et  $f_2 = \operatorname{Im} f$ , et on suppose que ces deux applications sont continues par morceaux sur  $[a, b]$ . On définit alors l'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  par la formule :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt.$$

### Intégration par parties

Soit  $u$  et  $v$  deux applications de classe  $C^1$  sur un segment  $[a, b]$ . On a alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

### Intégration par changement de variable

Soient  $\phi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$  une application  $C^1$  sur un segment  $[\alpha, \beta]$  et  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une application continue sur un intervalle  $I$  vérifiant  $[\phi(\alpha), \phi(\beta)] \subset I$ . On a alors :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t) dt.$$

### Intégration des fonctions du type $x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+px+q}$

Soit  $(a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4$ . On note :  $\Delta = p^2 - 4q$  le discriminant du polynôme  $X^2 + pX + q$ . Alors :

1) si  $\Delta > 0$ , alors  $X^2 + pX + q = (X - c)(X - d)$  et  $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{\alpha}{x-c} + \frac{\beta}{x-d}.$$

2) si  $\Delta = 0$ , alors  $X^2 + pX + q = (X - c)^2$  et  $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{\alpha}{x-c} + \frac{\beta}{(x-c)^2}.$$

3) si  $\Delta < 0$ , alors on écrit :

$$\frac{ax + b}{x^2 + px + q} = \frac{a}{2} \frac{2x + p}{x^2 + px + q} + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \frac{1}{x^2 + px + q},$$

le premier s'intègre en ln et le second en arctan.

**Coefficients de**  $f(x) = c + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)]$

On définit une fonction  $f$  par  $f(x) = c + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)]$ . On a alors :

$$c = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) dt, \quad a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \cos(k\omega t) dt, \quad b_k$$

$$c = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

### Intégrales généralisées – Définition

Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$  une application continue par morceaux sur un intervalle  $[a, b[$ . On dit que  $\int_a^b f(t) dt$  converge lorsque  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$  existe et est finie, et on pose alors :  $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ . Dans le cas contraire, on dit que  $\int_a^b f(t) dt$  diverge.

### Intégrales généralisées – Propriété

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle  $[a, b[$ . On a alors :

1) **Relation de Chasles** : si  $\int_a^b f(t) dt$  converge, alors  $\int_a^c f(t) dt$  et

$$\int_c^b f(t) dt \text{ convergent et } \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

2) **Positivité** : si  $a \leq b$ ,  $f \geq 0$  sur  $[a, b[$  et  $\int_a^b f(t) dt$  converge alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0$$

- 3) **Linéarité** : si  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et si  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  convergent alors  $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt$  converge et  $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$ .
- 4) **Croissance** : si  $a \leq b$ ,  $f \leq g$  sur  $[a, b]$ ,  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  convergent alors  $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

### Intégrale absolument convergente – Définition

Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$  une application continue par morceaux sur un intervalle  $[a, b[$ . On dit que  $\int_a^b f(t) dt$  converge absolument lorsque  $\int_a^b |f(t)| dt$  converge.

### Intégrale absolument convergente – Propriété

Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$  une application continue par morceaux sur un intervalle  $[a, b[$ . Si  $\int_a^b f(t) dt$  converge absolument alors  $\int_a^b f(t) dt$  converge.

### Critère de comparaison

Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues par morceaux sur un intervalle  $[a, b[$ .

- 1) si  $\forall x \in [a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$ , alors  $\int_a^b g(t) dt$  converge  $\implies \int_a^b f(t) dt$  converge et  $\int_a^b f(t) dt$  diverge  $\implies \int_a^b g(t) dt$  diverge.
- 2) si  $\forall x \in [a, b[, 0 \leq |f(t)| \leq g(t)$ , alors  $\int_a^b g(t) dt$  converge  $\implies \int_a^b f(t) dt$  converge absolument.

## 2.7 Équations différentielles

### Équations différentielles linéaires du premier ordre

$$\alpha y' + \beta y = \gamma \quad (E)$$

$\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{K}$  des applications continues avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  
 $y$  est une solution de cette équation sur  $J \subset I$  si et seulement si  $y$  est dérivable sur  $J$  et si  $\forall x \in J$ ,  $y$  vérifie (E).

## Équation résolue

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est dite **normalisée** ou **résolue** en  $y'$  si et seulement si  $\alpha = 1$ .

## Solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

$$S = \{\lambda e^{-A} + B e^{-A}, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

La solution ci-contre est la solution de l'équation résolue avec  $\alpha = 1$

$A$  : primitive de  $\beta$

$B$  : primitive de  $\gamma e^A$

La solution de  $(E)$  est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée à  $(E)$  et d'une solution particulière de  $(E)$ .

Méthode de résolution de  $E$ 

1. Résolution de l'équation homogène associée, solution de la forme  $\lambda y_0(x)$  ou  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2. Réinjecter la solution trouvée dans l'équation complète avec la méthode de variation de la constante qui permet de trouver la fonction qui vérifie l'équation complète.

## Équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$y'' + \beta y' + \gamma y = 0$$

$$(E_c) : r^2 + \beta r + \gamma = 0$$

$(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$  : coefficients de l'équation différentielle

Soit  $(E_c)$  l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle.

Si cette équation caractéristique admet :

– deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , les solutions de l'équation sont de

la forme  $\lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$

– une racine double  $r$ , les solutions sont de la forme  $(\lambda x + \mu) e^{r x}$

– deux racines complexes conjuguées  $r = a \pm ib$ , les solutions sont de la forme :

$(\lambda \cos bx + \mu \sin bx) e^{ax}$

Équation du second ordre avec second membre  $e^{\gamma x} R(x)$ 

$$y'' + \beta y' + \gamma y = e^{mx} P(x)$$

$(\beta, \gamma, m) \in \mathbb{K}^3$  : coefficients constants de l'équation différentielle

$P \in \mathbb{K}[X]$

L'équation différentielle admet une solution de la forme  $e^{mx} S(x)$

avec  $S \in \mathbb{K}[X]$  :

–  $\deg S = \deg P$  si  $m$  n'est pas racine de  $(E_c)$

–  $\deg S = 1 + \deg P$  si  $m$  est racine simple de  $(E_c)$

–  $\deg S = 2 + \deg P$  si  $m$  est racine double de  $(E_c)$

## 2.8 Séries

## Séries numériques - Définition

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la somme partielle d'ordre  $n$  par  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . On appelle série numérique la suite  $(u_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ ; on la note  $\sum u_n$ . On dit qu'elle converge lorsque la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, et sinon on dit qu'elle diverge. En cas de convergence, on appelle somme de la série  $\sum u_n$  le réel noté  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  et défini par :  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

## Condition nécessaire de convergence

Soit  $\sum u_n$  une série numérique. On a alors :

$$\sum u_n \text{ converge} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0;$$

la réciproque est fautive en général.

## Condition nécessaire et suffisante de convergence

Soit  $\sum u_n$  une série numérique. On note  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de ses sommes partielles. On a alors :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est majorée.}$$

### Reste d'une série numérique

Soit  $\sum u_n$  une série numérique. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit le reste d'ordre  $n$  par  $R_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . On a alors :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0.$$

### Séries numériques – Linéarité

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries numériques convergentes et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$ . Dans ce cas  $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$  est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

### Série absolument convergente – Définition

Soit  $\sum u_n$  une série numérique. On dit que  $\sum u_n$  converge absolument lorsque  $\sum |u_n|$  converge.

### Série absolument convergente – Propriété

Soit  $\sum u_n$  une série numérique. Si  $\sum u_n$  converge absolument alors  $\sum u_n$  converge.

### Critère de comparaison

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries numériques.

- 1) si  $\exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n$ , alors  $\sum v_n$  converge  $\implies \sum u_n$  converge et  $\sum u_n$  diverge  $\implies \sum v_n$  diverge.
- 2) si  $\exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, 0 \leq |u_n| \leq v_n$ , alors  $\sum v_n$  converge  $\implies \sum u_n$  converge absolument.

### Séries géométriques

- 1) **Série géométrique** :  $\sum q^n$  converge  $\iff |q| < 1$ . Dans ce cas :  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .
- 2) **Dérivée première de la série géométrique** : si  $|q| < 1$  alors  $\sum nq^n$  converge absolument et :  $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$ .
- 3) **Dérivée seconde de la série géométrique** : si  $|q| < 1$  alors  $\sum n^2 q^n$  converge absolument et :  $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q^2+q}{(1-q)^2}$ .

### Série exponentielle

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sum \frac{x^n}{n!}$  converge et :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ .



## 2.9 Fonctions de plusieurs variables

### Pavé ouvert – Définition

On appelle pavé ouvert de  $\mathbb{R}^n$  tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  de la forme  $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$  où les  $I_i, i \in \{1, \dots, n\}$ , sont des intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ .

### Limite, continuité d'une fonction de $n$ variables

Soient  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une application définie sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in P$ .

On dit que  $f$  a pour limite  $l \in \mathbb{R}$  au point  $a$  lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in P, \|x - a\| < \delta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon,$$

où  $\|y\|$  désigne la norme euclidienne de  $y : \|y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$ . On note alors :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ . On dit que  $f$  est continue au point  $a$  lorsque :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

### Applications partielles

Soient  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une application définie sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in P$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on appelle  $i^{\text{ème}}$  application partielle de  $f$  au point  $a$  l'application  $f_i : x \mapsto f_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ .

### Dérivées partielles premières

Soit  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une application définie sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $a \in P$  et  $i \in \{1, \dots, n\}$ . On note  $f_i$  l'application partielle de  $f$  au point  $a$ . On dit que  $f$  admet une dérivée partielle en  $a$  par rapport à  $x_i$  lorsque  $f_i$  est dérivable en  $a_i$ .  $f_i'(a_i)$  est alors appelée dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x_i$  au point  $a$ , notée  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ . Si  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à  $x_i$  en tout point  $a$  de  $P$ , on définit alors l'application dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : a \in P \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Fonctions de classe  $C^1$ 

Soit  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $P$  lorsque  $f$  admet des dérivées partielles par rapport à chacune des variables, continues sur  $P$ .

## Dérivées partielles secondes

Soit  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^1$  sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Soient  $a \in P$  et  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ . On dit que  $f$  admet une dérivée partielle seconde en  $a$  par rapport à  $x_j$  et  $x_i$  lorsque  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  admet une dérivée partielle par rapport à  $x_i$  au point  $a$ , notée  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ .

Fonctions de classe  $C^2$ 

Soit  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^1$  sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $P$  lorsque  $f$  admet des dérivées partielles secondes par rapport à chacune des variables, continues sur  $P$ .

## Théorème de Schwartz : interversion de l'ordre de dérivation

Soient  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^2$  sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ . Alors  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  sont continues sur  $P$

$$\text{et : } \forall a \in P, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

## Extremum local – Définition

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une application définie sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $y \in \mathbb{R}^n$ , on pose :  $\|y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$ .

1) On dit que  $f$  admet un maximum local au point  $a \in D$  si et seulement si :

$$\exists \delta > 0 ; \forall x \in D, \|x - a\| < \delta \implies f(x) \leq f(a).$$

2) On dit que  $f$  admet un minimum local au point  $a \in D$  si et seulement si :

$$\exists \delta > 0 ; \forall x \in D, \|x - a\| < \delta \implies f(x) \geq f(a).$$

3) Dans les deux cas suivants, on dit que  $f$  admet un extremum local au point  $a \in D$ .

## Condition nécessaire d'existence d'extremum local

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $a \in \mathbb{R}^n$ , alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0;$$

la réciproque est fautive en général.

### Différentielle d'une fonction de classe $C^1$

Soient  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^1$  sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in P$ . On appelle différentielle de  $f$  au point  $a$  l'application :

$$df_a : h \in \mathbb{R}^n \mapsto df_a(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i.$$

### Différentielle et approximation locale

Soient  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^1$  sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in P$ . On a alors, lorsque  $\|h\| \rightarrow 0$  :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i + o(\|h\|)$$

### Notations différentielles

Soient  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^1$  sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in P$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $dx_i$  l'application  $dx_i : h \in \mathbb{R}^n \mapsto h_i$ . On a alors :

$$df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i.$$

### Gradient - Définition

Soient  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^1$  sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in P$ . On appelle gradient de  $f$  en  $a$  le vecteur noté  $\nabla f(a)$  :

$$\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

## Dérivées partielles d'une composée en dimension 2 – Version 1

Soient  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^1$  sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $x : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y : Q \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications de classe  $C^1$  sur un pavé ouvert  $Q$  de  $\mathbb{R}^2$  telles que :  $\forall (u, v) \in Q$ ,  $(x(u, v), y(u, v)) \in P$ . Dans ce cas, l'application  $F : (u, v) \in Q \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$  est de classe  $C^1$  sur  $Q$  et, pour tout  $(u, v) \in Q$  :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

## Dérivées partielles d'une composée en dimension 2 – Version 2

Soient  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^1$  sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications de classe  $C^1$  sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  telles que :  $\forall t \in I$ ,  $(x(t), y(t)) \in P$ . Dans ce cas, l'application  $F : t \in I \mapsto f(x(t), y(t))$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et, pour tout  $t \in I$  :

$$F'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

## Forme différentielle en dimension 3 – Définition

On appelle forme différentielle toute application  $\omega : P \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  définie sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \omega(x, y, z) = p(x, y, z)dx + q(x, y, z)dy + r(x, y, z)dz,$$

où  $p : P \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $q : P \rightarrow \mathbb{R}$  et  $r : P \rightarrow \mathbb{R}$  sont trois applications continues sur  $P$ .

### Forme différentielle exacte en dimension 3 – Définition

Soit  $\omega = p dx + q dy + r dz$  une forme différentielle définie sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $p, q$  et  $r$  sont de classe  $C^1$  sur  $P$ . On dit que  $\omega$  est une forme différentielle exacte sur  $P$  lorsqu'il existe une application  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\forall (x, y, z) \in P, \quad \omega(x, y, z) = df_{(x,y,z)}.$$

### Forme différentielle exacte en dimension 3 – Caractérisation

Soit  $\omega = p dx + q dy + r dz$  une forme différentielle définie sur un pavé ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $p, q$  et  $r$  sont de classe  $C^1$  sur  $P$ . On a alors équivalence des propositions :

- (i)  $\omega$  est une forme différentielle exacte sur  $P$
- (ii) En tout point de  $P$  :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x}.$$

### Intégrales doubles

$I$  et  $J$  deux intervalles,  $f$  est  $C^0$  sur  $I \times J$ . Sous réserve d'absolue convergence :

$$\int_I \int_J f(x, y) dy dx = \int_J \int_I f(x, y) dx dy$$

### Intégrales doubles en coordonnées polaires

Si  $D$  est un domaine de  $\mathbb{R}^2$ , alors :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

où  $\Delta$  est à déterminer à partir de  $D$ .

## 3. Géométrie

### 3.1 Courbes dans le plan

**Asymptote à une courbe  $y = f(x)$** 

Soit  $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = \pm\infty$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a$  telles que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = 0$  (éventuellement limite droite ou à gauche). On dit alors que la courbe représentative de  $g$  est asymptote à celle de  $f$ .

**Asymptote verticale à une courbe  $y = f(x)$** 

Si  $f$  est une fonction vérifiant  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$  alors la courbe représentative de  $f$  admet la droite d'équation  $x = a$  pour asymptote verticale.

**Asymptote horizontale à une courbe  $y = f(x)$** 

Soit  $b \in \mathbb{R}$ . Si  $f$  est une fonction vérifiant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  alors la courbe représentative de  $f$  admet la droite d'équation  $y = b$  pour asymptote horizontale.

**Asymptote oblique à une courbe  $y = f(x)$** 

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a \neq 0$ . Si  $f$  est une fonction vérifiant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$  alors la courbe représentative de  $f$  admet la droite d'équation  $y = ax + b$  pour asymptote oblique. On a le même résultat avec des limites en  $-\infty$ . Un développement limité en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  permet de déterminer les asymptotes obliques et de positionner localement la courbe par rapport à son asymptote.

**3.2 Propriétés élémentaires dans le plan****Propriétés fondamentales du plan affine  $\mathcal{P}$** 

Le plan affine  $\mathcal{P}$  vérifie les deux propriétés fondamentales suivantes :

- (1) pour tout point  $O$  du plan affine ( $O \in \mathcal{P}$ ) et tout vecteur  $\vec{u}$  du plan ( $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ), il existe un unique point  $M$  du plan affine ( $M \in \mathcal{P}$ ) tel que  $\vec{OM} = \vec{u}$ .
- (2) pour tout triplet  $(A, B, C)$  du plan affine ( $(A, B, C) \in \mathcal{P}^3$ ), on a la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

### Repères cartésiens et coordonnées

Un repère cartésien  $\mathcal{R}$  est un triplet  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$  où  $O$  est un point quelconque du plan affine ( $O \in \mathcal{P}$ ), appelé origine du repère, et  $(\vec{i}, \vec{j})$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $M$  est un point du plan affine ( $M \in \mathcal{P}$ ), on appelle coordonnées de  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}$  l'unique couple  $(x, y)$  de réels  $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$  tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

### Calcul des coordonnées d'un vecteur

Soient  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$  deux points du plan affine  $\mathcal{P}$  muni d'un repère cartésien  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ . Alors le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  de  $\mathbb{R}^2$ .

### Colinéarité de deux vecteurs – Définition

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ . On dit que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires lorsque la famille  $(\vec{u}, \vec{v})$  est liée, c'est-à-dire lorsque  $\vec{u} = \vec{0}$  ou lorsqu'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ .

### Colinéarité de deux vecteurs – Critère

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs du plan muni d'une base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ .  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $xy' - x'y = 0$ .

### Milieu d'un segment – Définition

Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan affine  $\mathcal{P}$   $((A, B) \in \mathcal{P}^2)$ . On appelle milieu du segment  $[AB]$  l'unique point  $I$  du plan affine  $\mathcal{P}$  vérifiant  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ .

### Milieu d'un segment – Calcul des coordonnées

Soient  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$  deux points du plan affine  $\mathcal{P}$  muni d'un repère cartésien  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ . Dans le repère  $\mathcal{R}$ , le milieu  $I$  du segment  $[AB]$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \end{pmatrix}$  avec :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

### 3.3 Produit scalaire et norme dans le plan

#### Produit scalaire et norme euclidienne dans la base canonique

Soient  $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$  et  $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$  deux vecteurs du plan muni de sa base canonique. On appelle produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le réel, noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

On appelle norme euclidienne de  $\vec{u}$ , notée  $\|\vec{u}\|$  le réel positif

$$\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

#### Bases et repères orthonormaux

Une base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  de  $\mathbb{R}^2$  est dite orthonormale lorsque  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$  et  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ . Un repère orthonormal  $\mathcal{R}$  est un triplet  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$  où  $O$  est un point quelconque du plan affine ( $O \in \mathcal{P}$ ), appelé origine du repère, et  $(\vec{i}, \vec{j})$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}^2$ .

#### Produit scalaire et norme euclidienne dans une base orthonormale

Soient  $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$  et  $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$  deux vecteurs du plan muni d'une base orthonormale  $(\vec{i}, \vec{j})$ . On a alors :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$  et  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Si on pose  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$  et  $V = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$  on a donc  $\vec{u} \cdot \vec{v} = {}^tUV$  et  $\|\vec{u}\| = \sqrt{{}^tUU}$ .

#### Règles de calcul pour le produit scalaire et la norme euclidienne

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  des vecteurs du plan  $((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$  et  $\lambda$  un réel ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ). On a les règles de calcul suivantes :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$



$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\|\lambda \cdot \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\|\vec{u}\| \geq 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

et les identités remarquables :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

### Inégalité de Cauchy-Schwartz

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ , on a :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires.

### Inégalité triangulaire

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ , on a :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires de même sens.

### Orthogonalité de deux vecteurs

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ . On dit que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux lorsque  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . Dans ce cas on le note :  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

## Théorème de Pythagore

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$  tels que  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , on a :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

## 3.4 Droites dans le plan

## Droite dans le plan – Définition

Soient  $A$  un point du plan affine  $\mathcal{P}$  ( $A \in \mathcal{P}$ ) et  $\vec{u}$  un vecteur non nul du plan ( $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$  et  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ). On appelle droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$  la partie de  $\mathcal{P}$  suivante :

$$D = \{M \in \mathcal{P}; \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \}$$

$$D = \{M \in \mathcal{P}; \overrightarrow{AM} \in \text{Vect}(\vec{u}) \}$$

## Droite dans le plan – Équation cartésienne

On munit le plan affine  $\mathcal{P}$  d'un repère cartésien  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels  $((a, b, c) \in \mathbb{R}^3)$  tels que  $(a, b) \neq (0, 0)$ . L'ensemble  $D$  des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  du plan affine  $\mathcal{P}$  tels que :  $ax + by + c = 0$ , est une droite dont un vecteur directeur est  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ . On dit qu'on définit  $D$  par une équation cartésienne.

## Coefficient directeur d'une droite

On munit le plan affine  $\mathcal{P}$  d'un repère cartésien  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $D$  une droite d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$ . On suppose que  $b \neq 0$ , c'est-à-dire que  $D$  n'est pas dirigée par  $\vec{j}$ . Dans ce cas  $D$  admet une équation cartésienne de la forme  $y = mx + p$  où  $(m, p) \in \mathbb{R}^2$ .  $m$  est appelé coefficient directeur de la droite  $D$  dans le repère  $\mathcal{R}$ . Si  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$  sont deux points distincts de  $D$  alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

### Droite dans le plan – Equations paramétriques

On munit le plan affine  $\mathcal{P}$  d'un repère cartésien  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  un point de  $\mathcal{P}$  et  $\alpha, \beta$  deux réels  $((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$  tels que  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ . L'ensemble  $D$  des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  du plan affine  $\mathcal{P}$  vérifiant :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$$

où  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ , est une droite passant par  $A$  dont un vecteur directeur est  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . On dit qu'on définit  $D$  par un système d'équations paramétriques.

### Parallélisme de deux droites – Définition

Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux droites. On dit que  $D_1$  et  $D_2$  sont parallèles lorsqu'un vecteur directeur de  $D_1$  est colinéaires à un vecteur directeur de  $D_2$ . Dans ce cas tout vecteur directeur de  $D_1$  est orthogonal à tout vecteur directeur de  $D_2$ .

### Parallélisme de deux droites – Propriété

Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux droites d'équation cartésienne respective :  $ax + by + c = 0$  et  $ax + \beta y + \gamma = 0$ . Les droites  $D_1$  et  $D_2$  sont parallèles si et seulement si  $a\beta - \alpha b = 0$ .

### Vecteur normal à une droite – Définition

Soient  $D$  une droite et  $\vec{N}$  un vecteur du plan ( $\vec{N} \in \mathbb{R}^2$ ). On dit que  $\vec{N}$  est normal à  $D$  lorsque  $\vec{N}$  est orthogonal à un vecteur directeur de  $D$ . Dans ce cas  $\vec{N}$  est orthogonal à tous les vecteurs directeurs de  $D$ . On le note  $\vec{N} \perp D$ .

### Vecteur normal à une droite – Propriété

On munit le plan affine  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  un vecteur non nul du plan ( $\vec{N} \in \mathbb{R}^2$  et  $(a, b) \neq (0, 0)$ ). Il existe une infinité de droites admettant  $\vec{N}$  comme vecteur normal ; elles sont toutes parallèles entre elles et admettent une équation cartésienne sous la forme  $ax + by + c = 0$  où  $c$  est quelconque dans  $\mathbb{R}$ . Réciproquement, si  $D$  est une droite d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$ , alors  $D$  admet  $\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  comme vecteur normal.

### Orthogonalité de deux droites – Définition

Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux droites. On dit que  $D_1$  et  $D_2$  sont orthogonales, et on le note  $D_1 \perp D_2$ , lorsqu'un vecteur directeur (respectivement normal) de  $D_1$  est orthogonal à un vecteur directeur (respectivement normal) de  $D_2$ . Dans ce cas tout vecteur directeur (respectivement normal) de  $D_1$  est orthogonal à tout vecteur directeur (respectivement normal) de  $D_2$ .

### Orthogonalité de deux droites – Propriété

On munit le plan affine  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux droites d'équation cartésienne respective  $ax + by + c = 0$  et  $ax + \beta y + \gamma = 0$ . Les droites  $D_1$  et  $D_2$  sont orthogonales si et seulement si  $a\alpha + b\beta = 0$ .

### Intersection de deux droites

L'intersection de deux droites est soit l'ensemble vide, soit un point, soit une droite.

## 3.5 Projection orthogonale dans le plan

### Projection orthogonale – Définition

Soient  $M$  un point du plan affine  $\mathcal{P}$  ( $M \in \mathcal{P}$ ) et  $D$  une droite de vecteur directeur  $\vec{u}$  ( $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ). Le projeté orthogonal de  $M$  sur  $D$  est l'unique point  $H$  du plan affine  $\mathcal{P}$  vérifiant :

- (1)  $H \in D$
- (2)  $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$

L'application qui à  $M$  associe son projeté orthogonal  $H$  est appelée projection orthogonale sur la droite  $D$ .

### Projection orthogonale – Propriété

Soient  $M$  un point du plan affine  $\mathcal{P}$  ( $M \in \mathcal{P}$ ) et  $D$  une droite de vecteur normal  $\vec{N}$  ( $\vec{N} \in \mathbb{R}^2$ ). Le projeté orthogonal de  $M$  sur  $D$  est l'unique point  $H$  du plan affine  $\mathcal{P}$  vérifiant :

- (1)  $H \in D$
- (2)  $\overrightarrow{MH}$  et  $\vec{N}$  sont colinéaires

### Projeté orthogonal et produit scalaire

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points du plan affine  $\mathcal{P}$  ( $(A, B, C) \in \mathcal{P}^3$ ) tel que  $A \neq C$ . Si  $H$  est le projeté orthogonal de  $B$  sur la droite  $(AC)$  alors on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$$

### Distance d'un point à une droite – Définition

Soient  $A$  un point du plan affine  $\mathcal{P}$  ( $A \in \mathcal{P}$ ) et  $D$  une droite. On appelle distance de  $A$  à  $D$  le réel noté  $d(A, D)$  :

$$d(A, D) = \inf_{M \in D} \|\overrightarrow{AM}\|$$

### Distance d'un point à une droite – Propriété

Soient  $A$  un point du plan affine  $\mathcal{P}$  ( $A \in \mathcal{P}$ ) et  $D$  une droite. Si  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $D$  on a :

$$d(A, D) = \|\overrightarrow{AH}\| = \min_{M \in D} \|\overrightarrow{AM}\|$$

(la borne inférieure est atteinte en  $H$ , c'est donc un minimum).

### Distance d'un point à une droite – Calcul

On munit le plan affine  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Soient  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  un point du plan affine  $\mathcal{P}$  ( $A \in \mathcal{P}$ ) et  $D$  une droite d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$ . On a :

$$d(A, D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## 3.6 Cercles dans le plan

### Cercle dans le plan – Définition

Soient  $\Omega$  un point du plan affine  $\mathcal{P}$  ( $\Omega \in \mathcal{P}$ ) et  $R$  un réel positif ( $R \in \mathbb{R}^+$ ). On appelle cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  la partie de  $\mathcal{P}$  suivante :

$$\mathcal{C}(\Omega, R) = \{M \in \mathcal{P}; \|\overrightarrow{\Omega M}\| = R\}$$

## Cercle dans le plan – Equation cartésienne

On munit le plan affine  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $a, b$  et  $R$  trois réels  $((a, b, R) \in \mathbb{R}^3)$  tels que  $R \geq 0$ . L'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  du plan affine  $\mathcal{P}$  tels que  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ , est le cercle  $\mathcal{C}(\Omega, R)$  où  $\Omega$  est tel que  $\overrightarrow{O\Omega} = a\vec{i} + b\vec{j}$ . On dit qu'on définit  $\mathcal{C}(\Omega, R)$  par une équation cartésienne.

## Cercle dans le plan – Equations paramétriques

On munit le plan affine  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $\Omega \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$  un point de  $\mathcal{P}$  et  $R$  un réel positif  $(R \in \mathbb{R}^+)$ . L'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  du plan affine  $\mathcal{P}$  vérifiant

$$\begin{cases} x = x_\Omega + R \cos \theta \\ y = y_\Omega + R \sin \theta \end{cases}$$

où  $\theta$  décrit  $\mathbb{R}$ , est le cercle  $\mathcal{C}(\Omega, R)$ . On dit qu'on définit  $\mathcal{C}(\Omega, R)$  par un système d'équations paramétriques.

## 3.7 Mesure d'un angle dans le plan

## Orientation du plan affine

On munit le plan affine  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$  où  $\vec{i} = (x_1, y_1)$  et  $\vec{j} = (x_2, y_2)$ . On a alors :  $x_1 y_2 - x_2 y_1 = \pm 1$ . Dans le cas où  $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1$  on dit que le repère  $\mathcal{R}$  est direct (c'est le sens trigonométrique), et dans le cas où  $x_1 y_2 - x_2 y_1 = -1$  on dit que le repère  $\mathcal{R}$  est indirect (c'est le sens des aiguilles d'une montre).

## Angle orienté de deux vecteurs du plan – Définition

On munit le plan affine  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormal direct  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  et  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ ). Par définition l'angle orienté entre les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $(\vec{u}, \vec{v})$ , est égal à la mesure algébrique de l'arc orienté  $\widehat{AB}$ , où  $A$  et  $B$  sont définis par les relations  $\overrightarrow{OA} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$  et  $\overrightarrow{OB} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ .

### Angle orienté de deux vecteurs du plan – Propriétés

On munit le plan affine  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormal direct  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs non nuls du plan  $((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  et  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  et  $\vec{w} \neq \vec{0}$ ). On a :

$$(1) (\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \quad [2\pi]$$

$$(2) (\vec{u}, \vec{u}) = 0 \quad [2\pi]$$

$$(3) (\vec{u}, -\vec{u}) = \pi \quad [2\pi]$$

$$(4) (\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}) \quad [2\pi]$$

### Angle géométrique de deux vecteurs du plan – Définition

On munit le plan affine  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  et  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ ).

Par définition l'angle géométrique entre les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ , est égal à l'unique réel  $\theta \in [0, \pi]$  vérifiant :

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

### Angle de deux droites du plan – Définition

On munit le plan affine  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux droites du plan dirigées respectivement par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Par définition l'angle entre les droites  $D_1$  et  $D_2$  est égal à l'unique réel  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  vérifiant :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

## 3.8 Propriétés élémentaires dans l'espace

### Propriétés fondamentales de l'espace affine $\mathcal{E}$

L'espace affine  $\mathcal{E}$  vérifie les deux propriétés fondamentales suivantes :

(1) pour tout point  $O$  de l'espace affine ( $O \in \mathcal{E}$ ) et tout vecteur  $\vec{u}$  de l'espace ( $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ ), il existe un unique point  $M$  de l'espace affine ( $M \in \mathcal{E}$ ) tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ .

(2) pour tout triplet  $(A, B, C)$  de l'espace affine  $((A, B, C) \in \mathcal{E}^3)$ , on a la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

### Repères cartésiens et coordonnées

Un repère cartésien  $\mathcal{R}$  est un triplet  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  où  $O$  est un point quelconque de l'espace affine ( $O \in \mathcal{E}$ ), appelé origine du repère, et  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $M$  est un point de l'espace affine ( $M \in \mathcal{E}$ ), on appelle coordonnées de  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}$  l'unique triplet  $(x, y, z)$  de réels  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$  tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

### Calcul des coordonnées d'un vecteur

Soient  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$  deux points de l'espace affine  $\mathcal{E}$  muni d'un repère cartésien  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Alors le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de  $\mathbb{R}^3$ .

### Colinéarité de deux vecteurs – Définition

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ . On dit que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires lorsque la famille  $(\vec{u}, \vec{v})$  est liée, c'est-à-dire lorsque  $\vec{u} = \vec{0}$  ou lorsqu'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ .

### Coplanarité de deux vecteurs – Définition

Soient  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace  $((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ . On dit que  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires lorsque la famille  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est liée.

### Milieu d'un segment – Définition

Soient  $A$  et  $B$  deux points de l'espace affine  $\mathcal{E}$   $((A, B) \in \mathcal{E}^2)$ . On appelle milieu du segment  $[AB]$  l'unique point  $I$  de l'espace affine  $\mathcal{E}$  vérifiant  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ .



## Milieu d'un segment – Calcul des coordonnées

Soient  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$  deux points de l'espace affine  $\mathcal{E}$  muni d'un repère cartésien  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Dans le repère  $\mathcal{R}$ , le milieu  $I$  du segment  $[AB]$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{pmatrix}$  avec :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \quad \text{et} \quad z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

## 3.9 Produit scalaire et norme dans l'espace

## Produit scalaire et norme euclidienne dans la base canonique

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  deux vecteurs de l'espace muni de sa base canonique. On appelle produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le réel, noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

On appelle norme euclidienne de  $\vec{u}$ , notée  $\|\vec{u}\|$  le réel positif  $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

## Bases et repères orthonormaux

Une base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de  $\mathbb{R}^3$  est dite orthonormale lorsque  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$  et  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ . Un repère orthonormal  $\mathcal{R}$  est un quadruplet  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  où  $O$  est un point quelconque de l'espace affine ( $O \in \mathcal{E}$ ), appelé origine du repère, et  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}^3$ .

## Produit scalaire et norme euclidienne dans une base orthonormale

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  deux vecteurs de l'espace muni d'une base orthonormale  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On a alors :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$  et  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Si on pose  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$  et  $V = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$  on a donc :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = {}^tUV$  et  $\|\vec{u}\| = \sqrt{{}^tUU}$ .

## Règles de calcul pour le produit scalaire et la norme euclidienne

Soient  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  des vecteurs de l'espace  $((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  et  $\lambda$  un réel ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ). On a les règles de calcul suivantes :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\|\vec{u}\| \geq 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

et les identités remarquables :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

### Inégalité de cauchy-Schwartz

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ , on a :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires.

### Inégalité triangulaire

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ , on a :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires de même sens.

### Orthogonalité de deux vecteurs

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ . On dit que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux lorsque  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . Dans ce cas on le note :  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

### Théorème de Pythagore

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  tels que  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , on a :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

## 3.10 Plans dans l'espace

### Plan dans l'espace – Définition

Soient  $A$  un point de l'espace affine  $\mathcal{E}$  ( $A \in \mathcal{E}$ ) et  $(\vec{u}, \vec{v})$  une famille libre de vecteurs de l'espace  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  et  $\vec{u}, \vec{v}$  non colinéaires). On appelle plan passant par  $A$  et engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  la partie de  $\mathcal{E}$  suivante :

$$P = \{ M \in \mathcal{E}; \overrightarrow{AM} \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) \}$$

## Plan dans l'espace – Equation cartésienne

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère cartésien  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  quatre réels  $((a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4)$  tels que  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

L'ensemble  $P$  des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de l'espace affine  $\mathcal{E}$  tels que :  
 $ax + by + cz + d = 0$ , est un plan. On dit qu'on définit  $P$  par une équation cartésienne.

## Plan dans l'espace – Equations paramétriques

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère cartésien  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient

$A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $(\alpha', \beta', \gamma')$  deux triplets de réels

non proportionnels. L'ensemble  $P$  des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de l'espace affine  $\mathcal{E}$  vérifiant :

$$\begin{cases} x = x_A + s\alpha + t\alpha' \\ y = y_A + s\beta + t\beta' \\ z = z_A + s\gamma + t\gamma' \end{cases}$$

où  $s$  et  $t$  décrivent  $\mathbb{R}$ , est un plan passant par  $A$  engendré par  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

et  $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ . On dit qu'on définit  $P$  par un système d'équations paramétriques.

## Vecteur normal à un plan – Définition

Soient  $P$  un plan et  $\vec{N}$  un vecteur de l'espace ( $\vec{N} \in \mathbb{R}^3$ ). On dit que  $\vec{N}$  est normal à  $P$  lorsque  $\vec{N}$  est orthogonal à deux vecteurs engendrant  $P$ . Dans ce cas  $\vec{N}$  est orthogonal à tous les vecteurs de  $P$ . On le note  $\vec{N} \perp P$ .

### Parallélisme de deux plans – Définition

Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux droites. On dit que  $P_1$  et  $P_2$  sont parallèles lorsqu'ils sont engendrés par les mêmes vecteurs.

### Vecteur normal à un plan – Propriété

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  un vecteur non nul du plan ( $\vec{N} \in \mathbb{R}^3$  et  $(a, b, c) \neq$

$(0, 0, c)$ ). Il existe une infinité de plans admettant  $\vec{N}$  comme vecteur normal; ils sont tous parallèles entre eux et admettent une équation cartésienne sous la forme  $ax + by + cz + d = 0$  où  $d$  est quelconque dans  $\mathbb{R}$ . Réciproquement, si  $P$  est un plan d'équation cartésienne  $ax +$

$by + cz + d = 0$ , alors  $P$  admet  $\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  comme vecteur normal.

### Parallélisme de deux plans – Propriété

Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux plans d'équation cartésienne respective :  $ax + by + cz + d = 0$  et  $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ . Les droites  $P_1$  et  $P_2$  sont parallèles si et seulement si les triplets  $(a, b, c)$  et  $(\alpha, \beta, \gamma)$  sont proportionnels.

### Orthogonalité de deux plans – Définition

Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux droites. On dit que  $P_1$  et  $P_2$  sont orthogonaux, et on le note  $P_1 \perp P_2$ , lorsqu'un vecteur normal de  $P_1$  est orthogonal à un vecteur normal de  $P_2$ . Dans ce cas tout vecteur normal de  $P_1$  est orthogonal à tout vecteur normal de  $P_2$ .

### Orthogonalité de deux plans – Propriété

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux plans d'équation cartésienne respective  $ax + by + cz + d = 0$  et  $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ . Les plans  $P_1$  et  $P_2$  sont orthogonaux si et seulement si  $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ .

### Intersection de deux plans

L'intersection de deux plans est soit l'ensemble vide, soit une droite, soit un plan.

## 3.11 Projection orthogonale dans l'espace

## Projection orthogonale – Définition

Soient  $M$  un point de l'espace affine  $\mathcal{E}$  ( $M \in \mathcal{E}$ ) et  $P$  un plan de vecteur normal  $\vec{N}$  ( $\vec{N} \in \mathbb{R}^2$ ). Le projeté orthogonal de  $M$  sur  $P$  est l'unique point  $H$  de l'espace affine vérifiant :

(1)  $H \in P$

(2)  $\overrightarrow{MH}$  et  $\vec{N}$  sont colinéaires

L'application qui à  $M$  associe son projeté orthogonal  $H$  est appelée projection orthogonale sur le plan  $P$ .

## Distance d'un point à un plan – Définition

Soient  $A$  un point de l'espace affine  $\mathcal{E}$  ( $A \in \mathcal{E}$ ) et  $P$  un plan. On appelle distance de  $A$  à  $P$  le réel noté  $d(A, P)$  :

$$d(A, P) = \inf_{M \in P} \|\overrightarrow{AM}\|$$

## Distance d'un point à un plan – Propriété

Soient  $A$  un point de l'espace affine  $\mathcal{E}$  ( $A \in \mathcal{E}$ ) et  $P$  un plan. Si  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $P$  on a :

$$d(A, P) = \|\overrightarrow{AH}\| = \min_{M \in P} \|\overrightarrow{AM}\|$$

(la borne inférieure est atteinte en  $H$ , c'est donc un minimum).

## Distance d'un point à un plan – Calcul

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soient  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$  un point de l'espace affine  $\mathcal{E}$  ( $A \in \mathcal{E}$ ) et  $P$  un plan

d'équation cartésienne  $ax + by + cz + d = 0$ . On a :

$$d(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

### Droite dans l'espace – Définition

Soient  $A$  un point de l'espace affine  $\mathcal{E}$  ( $A \in \mathcal{E}$ ) et  $\vec{u}$  un vecteur non nul du plan ( $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  et  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ). On appelle droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$  la partie de  $\mathcal{P}$  suivante :

$$D = \{ M \in \mathcal{P}; \overrightarrow{AM} \in \text{Vect}(\vec{u}) \}$$

### Droite dans le plan – Equation cartésienne

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère cartésien  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient  $(a, b, c, d)$  et  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  deux quadruplets de réels tels que  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  et  $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ . L'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de l'espace affine  $\mathcal{E}$  tels que :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \end{cases}$$

est une droite. On dit qu'on définit  $D$  par un système d'équations cartésiennes.

### Droite dans l'espace – Equations paramétriques

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère cartésien  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  un point de  $\mathcal{P}$  et  $\alpha, \beta, \gamma$  trois réels ( $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ ) tels que

$(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ . L'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de l'espace af-

fine  $\mathcal{E}$  vérifiant  $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$  où  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ , est une droite passant

par  $A$  dont un vecteur directeur est  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ . On dit qu'on définit  $D$  par un système d'équations paramétriques.

## 3.13 Sphères dans l'espace

## Sphère dans l'espace – Définition

Soient  $\Omega$  un point de l'espace affine  $\mathcal{E}$  ( $\Omega \in \mathcal{E}$ ) et  $R$  un réel positif ( $R \in \mathbb{R}^+$ ). On appelle sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  la partie de  $\mathcal{E}$  suivante :

$$\mathcal{S}(\Omega, R) = \{M \in \mathcal{E}; \|\overrightarrow{\Omega M}\| = R\}$$

## Sphère dans l'espace – Equation cartésienne

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient  $a, b, c$  et  $R$  quatre réels  $((a, b, c, R) \in \mathbb{R}^4)$  tels que  $R \geq 0$ . L'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de l'espace affine  $\mathcal{E}$  tels que :  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ , est la sphère  $\mathcal{S}(\Omega, R)$  où  $\Omega$  est tel que  $\overrightarrow{O\Omega} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ . On dit qu'on définit  $\mathcal{S}(\Omega, R)$  par une équation cartésienne.

## 3.14 Mesure d'un angle dans l'espace

## Angle géométrique de deux vecteurs de l'espace – Définition

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  et  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ ). Par définition l'angle géométrique entre les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ , est égal à l'unique réel  $\theta \in [0, \pi]$  vérifiant :

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

## Angle de deux droites de l'espace – Définition

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux droites du plan dirigées respectivement par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Par définition l'angle entre les droites  $D_1$  et  $D_2$  est égal à l'unique réel  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  vérifiant :



$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

### Angle de deux droites du plan – Définition

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux plans de l'espace de vecteur normal respectif  $\vec{N}_1$  et  $\vec{N}_2$ . Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux droites dirigées respectivement par  $\vec{N}_1$  et  $\vec{N}_2$ . Par définition l'angle entre les plans  $P_1$  et  $P_2$  est égal à l'angle entre les droites  $D_1$  et  $D_2$ .

## 3.15 Produit vectoriel

### Orientation de l'espace affine

On munit l'espace  $\mathbb{R}^3$  d'une base orthonormale  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . La base est dite directe si elle vérifie la "règle de la main droite" (avec  $\vec{i}$  = pouce,  $\vec{j}$  = index et  $\vec{k}$  = majeur), et indirecte dans le cas contraire. Un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est dit direct si la base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est directe, et indirect dans le cas contraire.

### Produit vectoriel – Définition

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormal direct  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  deux vecteurs de l'espace  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ . On appelle produit vectoriel de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , le vecteur :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

### Produit vectoriel – Règles de calcul

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormal direct. Soient  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  quatre vecteurs de l'espace et  $\lambda$  un réel ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ). On a :

- (1)  $\vec{u}_1 \wedge (\vec{u}_2 + \vec{v}_2) = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 + \vec{u}_1 \wedge \vec{v}_2$
- (2)  $(\vec{u}_1 + \vec{v}_1) \wedge \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 + \vec{v}_1 \wedge \vec{u}_2$
- (3)  $\vec{u}_1 \wedge (\lambda \vec{u}_2) = (\lambda \vec{u}_1) \wedge \vec{u}_2 = \lambda (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)$

$$(4) \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = -\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1$$

### Produit vectoriel – Propriété

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormal direct. Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  alors le vecteur  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ . Si de plus  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non colinéaires et unitaires alors la famille  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est orthonormal directe.

### Colinéarité de deux vecteurs – Propriété

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormal direct. Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ . On a :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

### Norme d'un produit vectoriel

On munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormal direct. Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace  $((\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ . On a :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$$

En particuliers l'aire d'un parallélogramme  $ABCD$  est égale à  $\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$ .

## 4. Probabilités

### 4.1 Théorie des ensembles

#### Inclusion d'ensembles – Définition

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. On dit que  $A$  est inclus dans  $B$ , noté  $A \subset B$ , lorsque :

$$x \in A \implies x \in B.$$

#### Parties d'un ensemble – Définition

Soit  $\Omega$  un ensemble. On appelle partie (ou sous-ensemble) de  $\Omega$  tout ensemble inclus dans  $\Omega$ . L'ensemble des parties de  $\omega$  est noté  $\mathcal{P}(\Omega)$ . On a donc :

$$A \in \mathcal{P}(\Omega) \iff A \subset \Omega.$$

### Opérations sur les ensembles – Définition

Soit  $\Omega$  un ensemble. Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $\Omega$  ( $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega)$ ).

- L'union de  $A$  et  $B$ , notée  $A \cup B$ , est la partie de  $\Omega$  formée des éléments de  $A$  ou de  $B$  :

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B.$$

- L'intersection de  $A$  et  $B$ , notée  $A \cap B$ , est la partie de  $\Omega$  formée des éléments de  $A$  et de  $B$  :

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B.$$

- Le complémentaire de  $A$  dans  $B$ , noté  $B \setminus A$ , est la partie de  $\Omega$  formée des éléments de  $B$  qui ne sont pas dans  $A$  :

$$x \in B \setminus A \iff x \in B \text{ et } x \notin A$$

Lorsque  $B = \Omega$ ,  $B \setminus A$  est noté plus simplement  $\bar{A}$

### Opérations sur les ensembles – Règles de calcul

Soit  $\Omega$  un ensemble. Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois parties de  $\Omega$  ( $(A, B, C) \in \mathcal{P}(\Omega)^3$ ).

$$\begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \quad \text{et} \quad A \cap B = B \cap A \\ A \cup \emptyset = A \quad \text{et} \quad A \cap \emptyset = \emptyset \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{array}$$

On peut généraliser : soient  $B$  une partie de  $\Omega$  et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $\Omega$ .

$$\begin{array}{l} B \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = (\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B) \\ B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) \\ \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i \\ \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i \end{array}$$

### Système complet de parties – Définition

Soit  $\Omega$  un ensemble et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $\Omega$ . On dit que les  $A_i$ ,  $i \in I$ , forment un système complet de parties de  $\Omega$  lorsque  $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$  et lorsque les  $A_i$  sont deux à deux disjoints :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

### Produits cartésiens d'ensemble – Définition

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. On appelle produit cartésien  $A \times B$  l'ensemble des couples  $(x, y)$  où  $x \in A$  et  $y \in B$ .

Soient  $A_1, \dots, A_n$   $n$  ensembles ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). On appelle produit cartésien  $A_1 \times \dots \times A_n$  l'ensemble des  $n$ -uplets (ou  $n$ -listes)  $(x_1, \dots, x_n)$  où pour tout  $i$ ,  $x_i \in A_i$ .

Si  $E$  est un ensemble et  $n$  un entier naturel non nul ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) alors  $E^n$  est le produit cartésien de  $n$  ensembles égaux à  $E$ .

## 4.2 Dénombrement

### Formule des quatre cardinaux

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis. Dans ce cas les ensembles  $A \cup B$  et  $A \cap B$  sont des ensembles finis dont les cardinaux respectifs sont reliés par la formule :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card} A + \text{Card} B - \text{Card}(A \cap B)$$

### Formule du crible de Poincaré

Soient  $A_1, \dots, A_n$   $n$  ensembles finis ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Dans ce cas on a la formule :

$$\text{Card} \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Il y a  $\binom{n}{k}$  termes dans la seconde somme.

### Lemme des bergers

Soient  $\Omega$  un ensemble fini et  $A_1, \dots, A_n$  des parties de  $\Omega$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) formant un système complet de parties. Dans ce cas :

$$\text{Card } \Omega = \sum_{i=1}^n \text{Card } A_i$$

### Produit cartésien

Soient  $A_1, \dots, A_n$   $n$  ensembles ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Si les ensembles  $A_i$  sont finis,  $1 \leq i \leq n$ , alors le produit cartésien  $A_1 \times \dots \times A_n$  est un ensemble fini dont le cardinal est donné par la formule :

$$\text{Card} (A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \text{Card } A_i$$

### Applications et $p$ -uplets

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels ( $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ ). On a :

- $n^p$  = nombre d'applications d'un ensemble  $E$  à  $p$  éléments dans un ensemble  $F$  à  $n$  éléments = nombre de  $p$ -uplets d'éléments pris dans un ensemble  $E$  à  $n$  éléments = nombre de tirages sans remise possibles de  $p$  boules dans une urne contenant  $n$  boules numérotées.

### Injectons et $p$ -uplets

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels ( $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ ) tels que  $p \leq n$ . On a :

- $A_n^p$  = nombre d'injections d'un ensemble  $E$  à  $p$  éléments dans un ensemble  $F$  à  $n$  éléments = nombre de  $p$ -uplets d'éléments deux à deux distincts pris dans un ensemble  $E$  à  $n$  éléments = nombre de tirages avec remise possibles de  $p$  boules dans une urne contenant  $n$  boules numérotées.

### Permutations

Soit  $n$  un entier naturel ( $n \in \mathbb{N}$ ). On a :

- $n!$  = nombre de bijections d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments dans un ensemble  $F$  à  $n$  éléments = nombre de permutations d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments = nombre de mélanges possibles de  $n$  objets numérotés de 1 à  $n$ .

### Parties d'un ensemble

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels ( $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ ) tels que  $p \leq n$ . On a :

- $\binom{n}{p}$  = nombre de parties à  $p$  éléments d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments = nombre de tirages simultanés possibles de  $p$  boules dans une urne contenant  $n$  boules numérotées.
- On en déduit que le nombre de parties d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments est  $2^n$ .

## 4.3 Calcul des probabilités

## Vocabulaire des probabilités

L'univers est un ensemble  $\Omega$  qui représente tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. Un élément  $\omega \in \Omega$  est appelé observation ou réalisation de l'expérience. Un événement  $A$  est un sous-ensemble de  $\Omega$ . L'ensemble  $\mathcal{F}$  de tous les événements est donc une partie de  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Lorsque  $\Omega$  est fini on prend  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ ; lorsque  $\Omega$  est infini  $\mathcal{F}$  ne sera pas précisé conformément au programme BCPST. Le couple  $(\Omega, \mathcal{F})$  est appelé espace probabilisable.

## Probabilité – Définition

Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace probabilisable. Une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  est une application  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  vérifiant :

- **univers fini** :  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  et, si  $A$  et  $B$  sont deux événements incompatibles alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .

- **univers infini** :  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  et, si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$  converge et

$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ . Le triplet  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est alors appelé espace probabilisé.

## Probabilité – Règles de calcul

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. On a :

1)  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2) si  $A \in \mathcal{F}$  alors  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

3) si  $(A, B) \in \mathcal{F}^2$  alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

4) si  $(A, B) \in \mathcal{F}^2$  alors  $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

5) si  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{F}^n$  alors on a la formule du crible de Poincaré :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

6) si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille dévénements alors on a :  $\mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} A_i) \leq \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$ , et on a égalité dans le cas où les  $A_i$  sont deux à deux incompatibles.

### Probabilité uniforme – Définition

Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  un espace probabilisable où  $\Omega$  est un ensemble fini non vide. Il existe une unique probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  vérifiant :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

Cette probabilité  $\mathbb{P}$  est appelé probabilité uniforme sur  $\Omega$ .

### Probabilité conditionnelle – Définition

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $A$  et  $B$  deux événements tels que  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ . On définit la probabilité de  $A$  sachant  $B$ , notée  $\mathbb{P}(A|B)$  ou  $\mathbb{P}_B(A)$ , par la formule :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

On a donc :  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$ , lorsque  $\mathbb{P}(B) \neq 0$

### Formule des probabilités composées

Soient  $A_1, \dots, A_n$   $n$  événements ( $n$  entier naturel tel que  $n \geq 2$ ). On suppose que  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$ . On a alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\left(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right)$$

### Formule des probabilités totales

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  un système complet d'événements (c'est-à-dire un système complet de parties de  $\Omega$ ). Soit  $B$  un événement. Alors  $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$  converge et :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

### Formule de Bayes

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  un système complet d'événements (c'est-à-dire un système complet de parties de  $\Omega$ ). Soit  $B$  un événement tel que  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ . Alors  $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$  converge et pour tout  $j \in I$  :

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

### Indépendance de deux événements – Définition

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $A$  et  $B$  deux événements. On dit que  $A$  et  $B$  sont indépendants (pour la probabilité  $\mathbb{P}$ ) lorsque :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

### Événements indépendants deux à deux – Définition

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'événements. On dit que les  $A_i, i \in I$ , sont indépendants deux à deux lorsque pour tout  $(i, j)$  tel que  $i \neq j$ ,  $A_i$  et  $A_j$  sont indépendants :

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

### Événements mutuellement indépendants – Définition

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'événements. On dit que les  $A_i, i \in I$ , sont mutuellement indépendants lorsque pour tout  $J$  partie finie de  $I$ , on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Dans ce cas ils sont indépendants deux à deux ; la réciproque est fautive en général.

## 4.4 Variables aléatoires discrètes

### Variable aléatoire réelle discrète – Définition

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  une application. On dit que  $X$  est une variable aléatoire lorsque pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , l'ensemble  $X^{-1}(I)$ , noté  $[X \in I]$ , est un événement (c'est-à-dire  $[X \in I] \in \mathcal{F}$ ). L'ensemble  $X(\Omega)$  est appelé univers-image de  $X$ . On dit que  $X$  est une variable aléatoire discrète (V.A.R.D.) lorsque l'ensemble  $X(\Omega)$  est fini ou est une partie de l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs.



### Système complet d'événements associé à une V.A.R.D.

Soit  $X$  une V.A.R.D.. La famille d'événements  $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ . On a donc :

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)$$

### Loi (de probabilité) d'une V.A.R.D. – Définition

Soit  $X$  une V.A.R.D.. On appelle loi (de probabilité) de  $X$  l'application  $\mathcal{L}_X : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathcal{L}_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

### Fonction de répartition d'une V.A.R.D. – Définition

Soit  $X$  une V.A.R.D.. On appelle fonction de répartition de  $X$  l'application  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

### Liens entre la loi d'une V.A.R.D. et sa fonction de répartition

Soit  $X$  une V.A.R.D., soit  $\mathcal{L}_X$  sa loi et soit  $F_X$  sa fonction de répartition. La loi donne la fonction de répartition :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \sum_{x \in X(\Omega), x \leq t} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega), x \leq t} \mathcal{L}_X(x).$$

La fonction de répartition donne la loi : dans la cas où  $X(\omega)$  est une partie de  $\mathbb{Z}$ , on a  $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X = n) = F_X(n) - F_X(n - 1)$ ; et dans le cas où  $X(\Omega)$  est fini  $X(\Omega) = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$ , on a  $\mathbb{P}(X = x_1) = F_X(x_1)$  et  $\forall k \in \{2, \dots, n\}, \quad \mathbb{P}(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$ .

### Espérance d'une V.A.R.D. – Définition

Soit  $X$  une V.A.R.D.. Si  $X(\Omega)$  est fini alors on appelle espérance de  $X$ , noté  $\mathbb{E}(X)$ , le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\omega)} x \mathbb{P}(X = x)$$

Si  $X(\Omega)$  est une partie infinie de  $\mathbb{Z}$  alors on dit que  $X$  admet une espérance lorsque  $\sum_{x \in X(\omega)} x\mathbb{P}(X = x)$  converge (absolument) et dans ce cas on définit l'espérance de  $X$ , notée  $\mathbb{E}(X)$ , par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

### Théorème de transfert

Soit  $X$  une V.A.R.D. et  $u : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  une application. Dans ce cas  $u(X)$  est une V.A.R.D.. Dans le cas où  $X(\Omega)$  est infini,  $u(X)$  admet une espérance si et seulement si  $\sum_{x \in X(\Omega)} u(x)\mathbb{P}(X = x)$  converge (absolument). Dans tous les cas :

$$\mathbb{E}(u(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} u(x)\mathbb{P}(X = x)$$

### Moments d'une V.A.R.D.

Soit  $X$  une V.A.R.D. et  $\alpha$  un entier naturel non nul ( $\alpha \in \mathbb{N}^*$ ). On dit que  $X$  admet un moment d'ordre  $\alpha$  si et seulement si la V.A.R.D.  $X^\alpha$  admet une espérance. Dans ce cas on appelle moment d'ordre  $\alpha$  de  $X$  le réel  $\mathbb{E}(X^\alpha)$  et, d'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(X^\alpha) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^\alpha \mathbb{P}(X = x)$$

### Théorème fondamental d'existence des moments

Soit  $X$  une V.A.R.D.. Dans le cas où  $X(\Omega)$  est fini,  $X$  admet des moments de tout ordre. Dans le cas où  $X(\Omega)$  est infini : si  $X$  admet un moment d'ordre  $\alpha$  alors  $X$  admet des moments de tout ordre  $\beta$  tel que  $1 \leq \beta \leq \alpha$ .

### Variance et écart-type d'une V.A.R.D.

Soit  $X$  une V.A.R.D. admettant un moment d'ordre deux. On appelle alors variance de  $X$ , notée  $V(X)$ , et écart-type de  $X$ , noté  $\sigma(X)$ , les réels positifs définis par :

$$V(X) = \mathbb{E} \left[ (X - \mathbb{E}(X))^2 \right] \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

### Théorème de Koenig-Huyghens

Soit  $X$  une V.A.R.D. admettant un moment d'ordre deux. On a alors :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

### Espérance et variance d'une V.A.R.D. – Règles de calcul

Soit  $X$  une V.A.R.D. admettant une espérance. On a alors, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

Soit  $X$  une V.A.R.D. admettant un moment d'ordre deux. On a alors, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  :

$$V(aX + b) = a^2V(X)$$

### Loi discrète usuelle 1 : loi quasi-certaine

Soient  $X$  une V.A.R.D. et  $a$  un réel ( $a \in \mathbb{R}$ ). On dit que  $X$  suit la loi quasi-certaine lorsque  $\mathbb{P}(X = a) = 1$ . Dans ce cas :  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(a) = a$  et  $V(X) = V(a) = 0$ .

### Loi discrète usuelle 2 : loi uniforme

Soient  $X$  une V.A.R.D. et  $A$  un ensemble fini non vide. On dit que  $X$  suit la loi uniforme sur  $A$ , notée  $\mathcal{U}(A)$ , lorsque  $X(\Omega) = A$  et  $\forall a \in A$ ,  $\mathbb{P}(X = a) = \frac{1}{\text{Card } A}$ . Dans le cas où  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), on a  $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$  et  $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ .

**Modélisation** : on tire au hasard un élément de  $A$ , et on note  $X$  l'élément obtenu. Dans ce cas  $X$  suit la loi  $\mathcal{U}(A)$ .

### Loi discrète usuelle 3 : loi de Bernoulli

Soient  $X$  une V.A.R.D. et  $p$  un réel tel que  $p \in ]0, 1[$ . On dit que  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , notée  $\mathcal{B}(p)$ , lorsque  $X(\Omega) = \{0, 1\}$  et  $\mathbb{P}(X = 1) = p$ . Dans ce cas :  $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ ,  $\mathbb{E}(X) = p$  et  $V(X) = p(1 - p)$ .

**Modélisation = épreuve de Bernoulli** : on considère une expérience aléatoire ayant deux issues possibles, succès avec probabilité  $p$  ou échec avec probabilité  $1 - p$ , et on pose  $X = 1$  si on a un succès et  $X = 0$  si on a un échec. Dans ce cas  $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(p)$ .

## Loi discrète usuelle 4 : loi binomiale

Soient  $X$  une V.A.R.D.,  $n$  un entier naturel tel que  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p$  un réel tel que  $p \in ]0, 1[$ . On dit que  $X$  suit la loi binomiale Bernoulli de paramètres  $(n, p)$ , notée  $\mathcal{B}(n, p)$ , lorsque  $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$  et  $\forall k \in X(\Omega)$ ,  $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ . Dans ce cas :  $\mathbb{E}(X) = np$  et  $V(X) = np(1-p)$ .

**Modélisation** : on considère une expérience aléatoire ayant deux issues possibles, succès avec probabilité  $p$  ou échec avec probabilité  $1-p$ , expérience que l'on répète  $n$  fois de façons indépendantes, et on pose  $X =$  "nombre de succès obtenus". Dans ce cas  $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ .

## Loi discrète usuelle 5 : loi hypergéométrique

Soient  $X$  une V.A.R.D.,  $N$  un entier naturel ( $N \in \mathbb{N}$ ),  $n$  un entier naturel tel que  $0 \leq n \leq N$  et  $p$  un réel tel que  $p \in ]0, 1[$  et  $Np$  soit entier. On dit que  $X$  suit la loi hypergéométrique de paramètres  $(N, n, p)$ , notée  $\mathcal{H}(N, n, p)$ , lorsque  $X(\Omega) \subset \{0, 1, \dots, n\}$  et

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Dans ce cas :  $\mathbb{E}(X) = np$  et  $V(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}$ .

**Modélisation** : on effectue  $n$  tirages sans remise dans une urne contenant  $N$  boules dont une proportion  $p$  de boules blanches, et on pose  $X =$  "nombre de boules blanches obtenues". Dans ce cas  $X$  suit la loi  $\mathcal{H}(N, n, p)$ . On a le même résultat en tirant les  $n$  boules simultanément.

## Loi discrète usuelle 6 : loi de Poisson

Soient  $X$  une V.A.R.D. et  $\lambda$  un réel tel que  $\lambda > 0$ . On dit que  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , notée  $\mathcal{P}(\lambda)$ , lorsque  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $\forall k \in X(\Omega)$ ,  $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ . Dans ce cas :  $\mathbb{E}(X) = V(X) = \lambda$ .

## Loi discrète usuelle 7 : loi géométrique

Soient  $X$  une V.A.R.D. et  $p$  un réel tel que  $p \in ]0, 1[$ . On dit que  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ , notée  $\mathcal{G}(p)$ , lorsque  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et  $\forall k \in X(\Omega)$ ,  $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ . Dans ce cas :  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$  et  $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$ .

**Modélisation** : on considère une expérience aléatoire ayant deux issues possibles, succès avec probabilité  $p$  ou échec avec probabilité  $1 - p$ , expérience que l'on répète une infinité de fois de façons indépendantes, et on pose  $X =$  "nombre d'échecs précédant le premier succès". Dans ce cas  $X$  suit la loi  $\mathcal{G}(p)$ .

### Loi discrète usuelle 8 : loi géométrique décalée sur $\mathbb{N}$

Soient  $X$  une V.A.R.D. et  $p$  un réel tel que  $p \in ]0, 1[$ . On dit que  $X$  suit la loi géométrique décalée sur  $\mathbb{N}$  de paramètre  $p$ , notée  $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ , lorsque  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $\forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^k$ . Dans ce cas :  $\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{p}$  et  $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$ .

**Modélisation** : on considère une expérience aléatoire ayant deux issues possibles, succès avec probabilité  $p$  ou échec avec probabilité  $1 - p$ , expérience que l'on répète une infinité de fois de façons indépendantes, et on pose  $X =$  "nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès". Dans ce cas  $X$  suit la loi  $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ .

## 4.5 Vecteurs aléatoires discrets

### Couple de V.A.R.D.

On appelle couple de V.A.R.D. toute application  $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$  de la forme  $Z = (X, Y)$  où  $X$  et  $Y$  sont deux V.A.R.D. définies sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . L'univers image de  $Z$  est l'ensemble  $Z(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$ .

### Loi conjointe et lois marginales d'un couple de V.A.R.D. – Définition

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D.. On appelle loi conjointe de  $(X, Y)$  l'application  $\mathcal{L}_{(X,Y)} : Z(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, y) \in Z(\Omega), \quad \mathcal{L}_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

Les lois marginales du couple  $(X, Y)$  sont la loi de  $X$  et la loi de  $Y$ .

### Loi conjointe et lois marginales d'un couple de V.A.R.D. – Théorème

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D.. Les lois marginales se déterminent à partir de la loi conjointe à l'aide des formules :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

et :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

### Lois conditionnelles d'un couple de V.A.R.D. – Définition

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D.. On appelle loi conditionnelle de  $X$  sachant  $Y$  l'application  $\mathcal{L}_{X|Y} : Z(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, y) \in Z(\Omega), \quad \mathcal{L}_{X|Y}(x, y) = \mathbb{P}([X = x] | [Y = y])$$

On appelle loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $X$  l'application  $\mathcal{L}_{Y|X} : Z(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, y) \in Z(\Omega), \quad \mathcal{L}_{Y|X}(x, y) = \mathbb{P}([Y = y] | [X = x])$$

### Loi d'une somme de deux V.A.R.D.

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D. tel que  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$  et  $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$ . On pose  $S = X + Y$ . Alors  $S$  est une V.A.R.D. telle que  $S(\Omega) \subset \mathbb{N}$  et :

$$\forall n \in S(\Omega), \quad \mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = n - k])$$

### Théorème de transfert

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D. et  $u : Z(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  une application. Dans ce cas  $u(X, Y)$  est une V.A.R.D.. Dans le cas où  $X(\Omega)$  est infini,  $u(X, Y)$  admet une espérance si et seulement si  $\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} u(x, y) \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$  converge (absolument). Dans tous les cas :

$$\mathbb{E}(u(X, Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} u(x, y) \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

### Linéarité de l'espérance

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D. et  $a, b$  deux nombres réels  $((a, b) \in \mathbb{R}^2)$ . On suppose que  $X$  et  $Y$  admettent une espérance. Dans ce cas  $aX + bY$  admet une espérance et on a :

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

### Covariance de deux V.A.R.D. – Définition

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D. admettant toutes deux un moment d'ordre deux. Dans ce cas  $XY$  admet une espérance et on définit la covariance de  $X$  et  $Y$  par la formule :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

### Covariance de deux V.A.R.D. – Définition

Soient  $X, Y$  et  $Z$  trois V.A.R.D. admettant chacune un moment d'ordre deux et soient  $a$  et  $b$  deux réels  $((a, b) \in \mathbb{R}^2)$ . On a :

- 1)  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right]$  ;
- 2)  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$  ;
- 3)  $\text{Cov}(aX + Y, Z) = a\text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$  ;
- 4)  $\text{Cov}(X, X) = V(X)$  ;
- 5)  $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\text{Cov}(X, Y)$ .

### Coefficient de corrélation linéaire – Définition

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D. admettant toutes deux une variance non nulle. On définit le coefficient de corrélation linéaire de  $X$  et  $Y$  par la formule :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

### Coefficient de corrélation linéaire – Théorème

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D. admettant toutes deux une variance non nulle. Dans ce cas :

$$|\rho(X, Y)| \leq 1,$$

et on égalité si et seulement si il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$ .

### Indépendance de deux V.A.R.D. – Définition

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D.. On dit que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes lorsque :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Dans ce cas, on a, pour tout intervalles  $I$  et  $J$  de  $\mathbb{R}$  :

$$\mathbb{P}([X \in I] \cap [Y \in J]) = \mathbb{P}(X \in I)\mathbb{P}(Y \in J)$$

### Indépendance de deux V.A.R.D. – Propriété

Soient  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D. et  $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors les V.A.R.D.  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont aussi indépendantes.

### Indépendance et covariance de deux V.A.R.D.

Soient  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D. indépendantes. Dans ce cas :  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ ; la réciproque est fautive en général. On a alors :

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \quad \text{et} \quad V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

### Stabilité de la loi binomiale

Soient  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D. indépendantes. Si  $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(n_1, p)$  et si  $Y$  suit la loi  $\mathcal{B}(n_2, p)$  alors  $X + Y$  suit la loi  $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$ .

### Stabilité de la loi de Poisson

Soient  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D. indépendantes. Si  $X$  suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda)$  et si  $Y$  suit la loi  $\mathcal{P}(\mu)$  alors  $X + Y$  suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .

### Espérance de la somme de $n$ V.A.R.D.

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des V.A.R.D. ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) admettant chacune une espérance. Dans ce cas la V.A.R.D.  $\sum_{k=1}^n X_k$  admet aussi une espérance et :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)$$



### V.A.R.D. indépendantes deux à deux – Définition

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des V.A.R.D. ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) On dit que les  $X_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sont indépendantes deux à deux lorsque pour tout  $(i, j)$  tel que  $i \neq j$ ,  $X_i$  et  $X_j$  sont indépendantes.

### V.A.R.D. mutuellement indépendantes – Définition

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des V.A.R.D. ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). On dit que les  $X_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sont mutuellement indépendants lorsque :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\omega) :$$

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i] \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Dans ce cas elles sont indépendants deux à deux ; la réciproque est fautive en général.

### V.A.R.D. mutuellement indépendantes – Propriété

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des V.A.R.D. ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) mutuellement indépendantes. Pour tout  $I_1, \dots, I_n$  intervalles de  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{i=1}^n [X_i \in I_i] \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in I_i)$$

### Lemme des sous-familles

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des V.A.R.D. ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) mutuellement indépendantes. Pour tout  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , les V.A.R.D.  $X_i$ ,  $i \in I$ , sont mutuellement indépendantes.

### Lemme des coalitions

Soient  $X_1, \dots, X_n, \dots, X_p$  des V.A.R.D. ( $(n, p) \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n < p$ ) mutuellement indépendantes.

1) Soient  $f : X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : X_{n+1}(\Omega) \times \dots \times X_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications. Dans ce cas, les V.A.R.D.  $f(X_1, \dots, X_n)$  et  $g(X_{n+1}, \dots, X_p)$  sont des V.A.R.D. indépendantes.

2) Soient  $f_1 : X_1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \dots, g : X_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  des applications. Dans ce cas, les V.A.R.D.  $f_1(X_1), \dots, f_p(X_p)$  sont des V.A.R.D. mutuellement indépendantes.

### Variance d'une somme de $n$ V.A.R.D.

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des V.A.R.D. ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) admettant chacune un moment d'ordre deux. Dans ce cas la V.A.R.D.  $\sum_{k=1}^n X_k$  admet aussi un moment d'ordre deux et :

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

De plus si les  $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$ , sont deux à deux indépendantes alors :

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$$

## 4.6 Variables aléatoires à densité

### Densité de probabilité – Définition

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On dit que  $f$  est une densité de probabilité lorsque :

- 1)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ ;
- 2)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement un nombre fini de points ;
- 3)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge (absolument) et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$ .

### Variable aléatoire réelle à densité – Définition

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On dit que  $X$  est une variable aléatoire réelle à densité lorsqu'il existe une densité de probabilité  $f$  telle que, pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{P}(X \in I) = \int_I f(x) dx$ . L'univers image de  $X$  est l'ensemble  $X(\Omega)$ .

### Fonction de répartition d'une V.A.R. à densité – Définition

Soit  $X$  une V.A.R. à densité. On appelle fonction de répartition de  $X$  l'application  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

### Liens entre densité d'une V.A.R. et sa fonction de répartition

Soit  $X$  une V.A.R. à densité, soit  $f$  une densité de probabilité et soit  $F_X$  sa fonction de répartition. On a équivalence entre les propositions :

(i)  $X$  admet  $f$  pour densité

(ii)  $\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx.$

(iii)  $F_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  privé éventuellement d'un ensemble fini  $E$  et  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus E, F'_X(t) = f(t).$

### Espérance d'une V.A.R. à densité – Définition

Soit  $X$  une V.A.R. de densité  $f$ . On dit que  $X$  admet une espérance lorsque  $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$  converge absolument et dans ce cas on définit l'espérance de  $X$ , notée  $\mathbb{E}(X)$ , par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

### Théorème de transfert

Soit  $X$  une V.A.R. de densité  $f$  et  $u : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  une application. La V.A.R.  $u(X)$  admet une espérance si et seulement si  $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)f(x) dx$  converge absolument. On a alors :

$$\mathbb{E}(u(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)f(x) dx$$

### Moments d'une V.A.R. à densité

Soit  $X$  une V.A.R. à densité et  $\alpha$  un entier naturel non nul ( $\alpha \in \mathbb{N}^*$ ). On dit que  $X$  admet un moment d'ordre  $\alpha$  si et seulement si  $X^\alpha$  admet une espérance. Dans ce cas on appelle moment d'ordre  $\alpha$  de  $X$  le réel  $\mathbb{E}(X^\alpha)$  et, d'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(X^\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha f(x) dx$$

### Théorème fondamental d'existence des moments

Soit  $X$  une V.A.R. de densité  $f$ . Si  $X$  admet un moment d'ordre  $\alpha$  alors  $X$  admet des moments de tout ordre  $\beta$  tel que  $1 \leq \beta \leq \alpha$ .

### Variance et écart-type d'une V.A.R. à densité

Soit  $X$  une V.A.R. de densité  $f$  admettant un moment d'ordre deux. On appelle alors variance de  $X$ , notée  $V(X)$ , et écart-type de  $X$ , noté  $\sigma(X)$ , les réels positifs définis par :

$$V(X) = \mathbb{E} \left[ (X - \mathbb{E}(X))^2 \right] \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

### Théorème de Koenig-Huyghens

Soit  $X$  une V.A.R. à densité admettant un moment d'ordre deux. On a alors :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

### Espérance et variance d'une V.A.R. à densité – Règles de calcul

Soit  $X$  une V.A.R. à densité admettant une espérance. On a alors, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

Soit  $X$  une V.A.R. à densité admettant un moment d'ordre deux. On a alors, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  :

$$V(aX + b) = a^2V(X)$$

### Loi à densité usuelle 1 : loi uniforme

Soient  $X$  une V.A.R. à densité et  $a, b$  deux réels tels que  $a < b$ . On dit que  $X$  suit la loi uniforme sur  $[a, b]$ , notée  $\mathcal{U}([a, b])$ , lorsque  $X$  admet pour densité la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

ou de façon équivalente, lorsque  $X$  admet pour fonction de répartition :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 1 & \text{si } b < t \end{cases},$$

Dans ce cas :  $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$  et  $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ .

### Loi à densité usuelle 2 : loi exponentielle

Soient  $X$  une V.A.R. à densité et  $\lambda$  un réel tel que  $\lambda > 0$ . On dit que  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , notée  $\mathcal{E}(\lambda)$ , lorsque  $X$  admet pour densité la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

ou de façon équivalente, lorsque  $X$  admet pour fonction de répartition :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \begin{cases} -e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

Dans ce cas :  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$  et  $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ .

### Intégrale de Gauss

L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  est absolument convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

### Loi discrète usuelle 3 : loi normale (gaussienne)

Soient  $X$  une V.A.R. à densité et  $(m, \sigma)$  un couple de réels tel que  $\sigma > 0$ . On dit que  $X$  suit la loi normale de paramètres  $(m, \sigma)$ , notée  $\mathcal{N}(m, \sigma)$ , lorsque  $X$  admet pour densité la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Dans ce cas :  $\mathbb{E}(X) = m$  et  $V(X) = \sigma^2$ .

## 4.7 Vecteurs aléatoires à densité

### Densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ – Définition

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On dit que  $f$  est une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}^2$  lorsque :

- 1)  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geq 0$ ;
- 2)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  sauf éventuellement un nombre fini de points ;

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy \quad \text{converge (absolument) et}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

### Couple de V.A.R. à densité

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $Z = (X, Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$  une application. On dit que  $Z$  est un couple de variables aléatoires réelles à densité lorsqu'il existe une densité de probabilité  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que, pour tout intervalles  $I$  et  $J$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_I \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy$$

### Densités conjointe et marginales d'un couple à densité

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R. de densité  $f$ . La fonction  $f$  est appelé densité conjointe du couple  $(X, Y)$ . De plus on a :

1)  $X$  est une V.A.R. à densité dont une est l'application  $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$$

2)  $Y$  est une V.A.R. à densité dont une est l'application  $f_Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$$

### Fonction de répartition d'un couple de V.A.R.D. – Définition

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D. de densité  $f$ . On appelle fonction de répartition du couple  $(X, Y)$  l'application  $F_{(X, Y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X, Y)}(x, y) = \mathbb{P}([X \leq x] \cap [Y \leq y])$$

### Densité et fonction de répartition d'un couple de V.A.R.D.

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D. de densité  $f$  et de fonction de répartition  $F_{(X, Y)}$ . En tout point  $(x_0, y_0)$  de  $\mathbb{R}^2$  où  $f$  est continue, la fonction  $F_{(X, Y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  admet des dérivées partielles secondes et :

$$\frac{\partial^2 F_{(X,Y)}}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

### Densités conditionnelles d'un couple de V.A.R.D. – Définition

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R. de densité  $f$ . On note  $f_X$  et  $f_Y$  les densités respectives de  $X$  et de  $Y$ .

1) Soit  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $f_Y(y) \neq 0$ . On appelle densité conditionnelle de  $X$  sachant  $[Y = y]$  l'application  $f_{X|[Y=y]} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X|[Y=y]}(x) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

2) Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f_X(x) \neq 0$ . On appelle densité conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = x]$  l'application  $f_{Y|[X=x]} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_{Y|[X=x]}(y) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

### V.A.R. à densité indépendantes deux à deux – Définition

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des V.A.R. à densité ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). On dit que les  $X_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sont indépendantes deux à deux lorsque pour tout  $(i, j)$  tel que  $i \neq j$ ,  $X_i$  et  $X_j$  sont indépendantes, c'est-à-dire que pour tout intervalles  $I$  et  $J$  de  $\mathbb{R}$  :

$$\mathbb{P}([X_i \in I] \cap [X_j \in J]) = \mathbb{P}(X_i \in I)\mathbb{P}(X_j \in J)$$

### V.A.R. à densité mutuellement indépendantes – Définition

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des V.A.R. à densité ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). On dit que les  $X_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sont mutuellement indépendants lorsque pour tout  $I_1, \dots, I_n$  intervalles de  $\mathbb{R}$  :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \in I_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in I_i)$$

Dans ce cas elles sont indépendantes deux à deux ; la réciproque est fautive en général.

### Densité conjointe et marginales d'un couple à densité

Soient  $X$  et  $Y$  deux V.A.R. à densité indépendantes de densité respective  $f_X$  et  $f_Y$ . Dans ce cas  $Z = (X, Y)$  est un couple de V.A.R. à densité dont une densité (conjointe) est l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

### Lemme des sous-familles

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des V.A.R. à densité ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) mutuellement indépendantes. Pour tout  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , les V.A.R. à densité  $X_i, i \in I$ , sont mutuellement indépendantes.

### Lemme des coalitions

Soient  $X_1, \dots, X_n, \dots, X_p$  des V.A.R. à densité ( $(n, p) \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n < p$ ) mutuellement indépendantes.

1) Soient  $f : X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : X_{n+1}(\Omega) \times \dots \times X_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications. Dans ce cas, les V.A.R.  $f(X_1, \dots, X_n)$  et  $g(X_{n+1}, \dots, X_p)$  sont des V.A.R. indépendantes.

2) Soient  $f_1 : X_1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \dots, g : X_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  des applications. Dans ce cas, les V.A.R.  $f_1(X_1), \dots, f_p(X_p)$  sont des V.A.R. mutuellement indépendantes.

### Somme de deux V.A.R. à densité gaussiennes indépendantes

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R. à densité indépendantes. On note  $f_X$  et  $f_Y$  les densités respectives de  $X$  et  $Y$ . Dans ce cas  $S = X + Y$  est une V.A.R. à densité dont une densité est le produit de convolution  $f_X * f_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X * f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt$$

### Somme de deux V.A.R. à densité gaussiennes indépendantes

Soient  $X$  et  $Y$  deux V.A.R. à densité indépendantes, de lois respectives  $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$  et  $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ . Alors  $S = X + Y$  suit la loi  $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ .



### Théorème de transfert

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R. à densité et  $u : Z(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  une application. Dans ce cas  $u(X, Y)$  admet une espérance si et seulement si  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) f(x, y) dx dy$  converge (absolument). On a alors :

$$\mathbb{E}(u(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) f(x, y) dx dy$$

### Linéarité de l'espérance

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R. à densité et  $a, b$  deux nombres réels  $((a, b) \in \mathbb{R}^2)$ . On suppose que  $X$  et  $Y$  admettent une espérance. Dans ce cas  $aX + bY$  admet une espérance et on a :

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

### Covariance de deux V.A.R. à densité – Définition

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D. admettant toutes deux un moment d'ordre deux. Dans ce cas  $XY$  admet une espérance et on définit la covariance de  $X$  et  $Y$  par la formule :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

### Covariance de deux V.A.R. à densité – Définition

Soient  $X, Y$  et  $Z$  trois V.A.R. à densité admettant chacune un moment d'ordre deux et soient  $a$  et  $b$  deux réels  $((a, b) \in \mathbb{R}^2)$ . On a :

- 1)  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$  ;
- 2)  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$  ;
- 3)  $\text{Cov}(aX + Y, Z) = a\text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$  ;
- 4)  $\text{Cov}(X, X) = V(X)$  ;
- 5)  $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\text{Cov}(X, Y)$ .

### Coefficient de corrélation linéaire de deux V.A.R. à densité

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R. à densité admettant toutes deux une variance non nulle. On définit le coefficient de corrélation linéaire de  $X$  et  $Y$  par la formule :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

#### Coefficient de corrélation linéaire de deux V.A.R. à densité

Soit  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R.D. admettant toutes deux une variance non nulle. Dans ce cas :

$$|\rho(X, Y)| \leq 1,$$

et on égalité si et seulement si il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$ .

#### Indépendance et covariance de deux V.A.R. à densité

Soient  $Z = (X, Y)$  un couple de V.A.R. à densité indépendantes. Dans ce cas :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y);$$

la réciproque est fautive en général. On a alors :

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \quad \text{et} \quad V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

#### Espérance de la somme de $n$ V.A.R. à densité

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des V.A.R. à densité ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) admettant chacune une espérance. Dans ce cas la V.A.R.  $\sum_{k=1}^n X_k$  admet aussi une espérance et :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)$$

#### Variance d'une somme de $n$ V.A.R.D.

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des V.A.R. à densité ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) admettant chacune un moment d'ordre deux. Dans ce cas la V.A.R.  $\sum_{k=1}^n X_k$  admet aussi un moment d'ordre deux et :

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

De plus si les  $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$ , sont deux à deux indépendantes alors :

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$$

#### 4.8 Théorèmes limites et approximation

##### Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale

Soit  $X$  une V.A.R.D. de loi hypergéométrique  $\mathcal{H}(N, n, p)$ . Dans le cas où  $N \geq 10n$  on peut approximer la loi de  $X$  par la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ , c'est-à-dire :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad \mathbb{P}(X = k) \approx \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

##### Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Soit  $X$  une V.A.R.D. de loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ . Dans le cas où  $n \geq 30$ ,  $p \leq 0.1$  et  $np \leq 10$ , on peut approximer la loi de  $X$  par la loi de Poisson  $\mathcal{P}(np)$ , c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) \approx e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$$

##### Loi faible des grands nombres

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite V.A.R. mutuellement indépendantes et de même loi, admettant une espérance  $\mu$  et une variance  $\sigma^2$  ( $\sigma > 0$ ). Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

On a alors :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| \geq \epsilon) = 0.$$

## Variable aléatoire réelle centrée et/ou réduite

Soit  $X$  une suite V.A.R.. On dit qu'elle est centrée lorsque son espérance existe et est égale à 0. On dit qu'elle est réduite lorsqu'elle admet un moment d'ordre deux et lorsque  $V(X) = 1$ . Si  $X$  est une V.A.R. admettant un moment d'ordre 2 alors on appelle V.A.R. centrée réduite associée à  $X$  la V.A.R.  $\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ .

## Théorème de la limite centrée (T.L.C.)

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite V.A.R. mutuellement indépendantes et de même loi, admettant une espérance  $\mu$  et une variance  $\sigma^2$  ( $\sigma > 0$ ). Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{n}}$$

On a alors, pour tout réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( a < \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} < b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

et aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( a < \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\hat{\sigma}_n} < b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

# Chapitre 2

## Chimie

### 1. Atomistique

#### 1.1 Spectroscopie

#### Spectroscopie

Lors d'une transition électronique, une particule émet un rayonnement décrit par :

$$\Delta E = h\nu$$

Relation de De Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

$h$  : constante de Planck  
 $\nu$  : fréquence du rayonnement émis par la particule  
 $\lambda$  : longueur d'onde du rayonnement émis par la particule  
 $m$  : masse de la particule  
 $v$  : vitesse de la particule

La relation de **Ritz** établit que :

$$\nu = R_H c \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$$

$\nu$  : fréquence de rayonnement

$R_H$  : constante de Rydberg

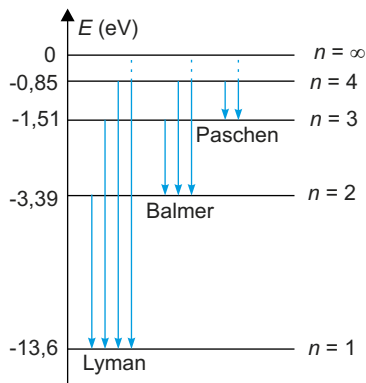
$n$  : nombre quantique principal du niveau énergétique final de la particule

$m$  : nombre quantique principal du niveau énergétique initial de la particule

$c$  : vitesse de propagation de la lumière dans le vide

-  $n = 1$  correspond à la série de Lyman (ultraviolet) -  $n = 2$  correspond à la série de Balmer (visible)

-  $n = 3$  correspond à la série de Paschen (infrarouge)



## 1.2 Modèle ondulatoire

### Principe d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi}$$

$\Delta x$  : incertitude sur la position

$\Delta p_x$  : incertitude sur la quantité de mouvement selon l'axe des  $x$

$m$  : masse de l'atome

En mécanique quantique, on ne peut pas connaître précisément à la fois la position et la vitesse.

### Énergie de l'atome d'hydrogène

$$E_n = \frac{-13,6}{n^2} \text{ en ev}$$

L'énergie de l'atome d'hydrogène est quantifiée ( $n$  nombre quantique principal).

$$E_n = -13,6 \frac{Z^2}{n^2}$$

Décrit l'énergie de l'ion hydrogénoïde (qui ne comporte qu'un seul électron).

## Nombres quantiques

Principal :  $n \in \mathbb{N}^*, n \neq 0$ 

Décrit le niveau énergétique de l'atome :

$$E_n = -13,6 \frac{Z^2}{n^2}$$

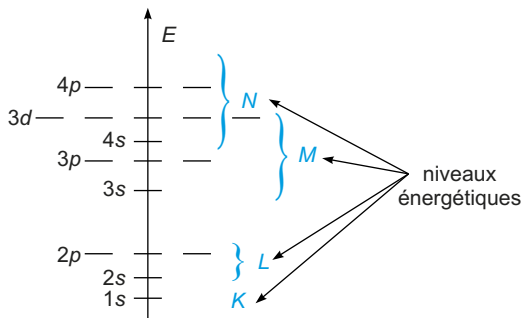
Secondaire :  $0 \leq \ell \leq n - 1$   
 $\ell \in \mathbb{N}$ Répartition des électrons en  $n$  sous-couches dans une couche  $n$ , caractérisées par le nombre quantique secondaire  $\ell$ .Magnétique :  $-\ell \leq m \leq \ell$   
 $m \in \mathbb{Z}$ Répartition des électrons en orbitales atomiques à l'intérieur d'une sous-couche, caractérisées par le nombre quantique magnétique  $m$ .

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

Spin

## 1.3 Atome polyélectronique

## Diagramme énergétique



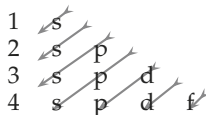
## Règles de remplissage des niveaux électroniques

**Principe de stabilité :** on remplit les orbitales atomiques par ordre d'énergie croissante (règle de Klechkowsky).

**Principe de Pauli :** sur une même orbitale atomique, les deux électrons sont de spins opposés.

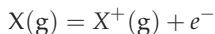
**Principe de Hund :** lorsque plusieurs orbitales atomiques sont de même niveau énergétique, les électrons occupent le maximum d'orbitales atomiques.

Règle de **Klechkowsky** :



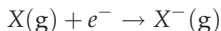
## Énergie d'ionisation

Énergie interne de la réaction d'arrachement d'un électron, en phase gazeuse à 0 K.



## Affinité électronique

Énergie interne de la réaction de capture d'un électron, en phase gazeuse à 0 K.



## 1.4 Architecture moléculaire

## Règle de l'octet

Les éléments de la deuxième période du tableau périodique peuvent s'entourer au maximum de huit électrons.

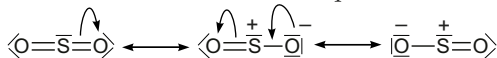
## Charge formelle

$$n = n_i - n_e$$

$n$  : charge formelle de l'atome  
 $n_i$  : nombre d'électrons de valence dans l'atome isolé  
 $n_e$  : nombre d'électrons de valence dans l'atome lié

## Mésomérie

C'est l'ensemble des formules mésomères qui modélise la réalité.





### Niveau de représentativité des formules mésomères

Les formules mésomères qui vérifient la règle de l'octet, qui sont neutres ou dont la charge négative est portée par l'atome le plus électronégatif sont plus représentatives que les autres.

### VSEPR

On compte les doublets d'un atome  $A$  :  $AX_pE_q$  où :

$p$  : nombre d'atomes directement liés à  $A$  ( $X$ )

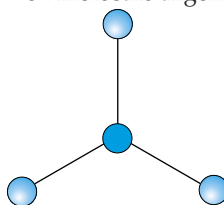
$q$  : nombre de doublets libres portés par  $A$  ( $E$ )

Ces  $n = p + q$  doublets tendent à s'éloigner au maximum les uns des autres. (Modèle de Gillespie)

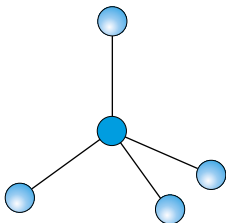
$n = 2$  : molécule linéaire



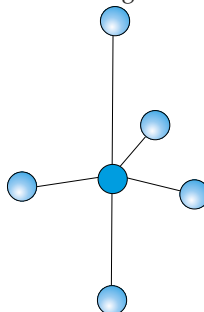
$n = 3$  : molécule trigonale



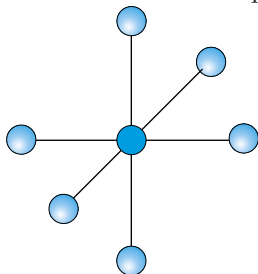
$n = 4$  : molécule tétraédrique



$n = 5$  : molécule bipyramidale à base triangulaire



$n = 6$  : molécule octaédrique



## 2. Cinétique

### 2.1 Vitesse de réaction

#### Avancement de la réaction

$$d\xi = \frac{dn_i}{\nu_i}$$

$\xi$  : avancement de la réaction  
 $\nu_i$  : nombre stœchiométrique algébrique ( $\nu_i > 0$  pour un produit et  $\nu_i < 0$  pour un réactif)  
 $n_i$  : quantité de matière de l'espèce  $i$

#### Quantité de matière en cours de réaction

$$n_i = n_{i0} + \nu_i \xi$$

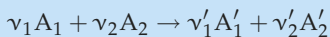
$n_i$  : quantité de matière à la date  $t$   
 $n_{i0}$  : quantité de matière initiale  
 $\nu_i$  : nombre stœchiométrique algébrique  
 $\xi$  : avancement

#### Vitesse de réaction

$$r = \frac{1}{\nu_i} \frac{dc_i}{dt} = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}$$

$r$  : vitesse de la réaction  
 $\nu_i$  : coefficient stœchiométrique algébrique de l'espèce  $i$   
 $c_i$  : concentration de l'espèce  $i$   
 $\xi$  : avancement  
 $V$  : volume du réacteur

## Ordre d'une réaction



$$r = k[A_1]^{p_1}[A_2]^{p_2}$$

$k$  : constante de vitesse de la réaction  
 $[A_i]$  : concentration de l'espèce  $A_i$   
 $p_i$  : ordre partiel en  $A_i$   
 $\sum_i p_i = p$  : ordre global de la réaction

## Dégénérescence de l'ordre

Si  $[A_2]_0 \gg [A_1]_0$  alors

$$r = k'[A_1]^{p_1}$$

$k' = k[A_2]_0^{p_2}$  : constante de vitesse apparente de la réaction  
 $p_1$  : ordre apparent de la réaction

## Loi de Van't Hoff

Lorsque la réaction est un processus élémentaire, les ordres partiels se confondent avec les nombres stœchiométriques et l'ordre total à la molécularité

## Loi d'Arrhénius

$$\frac{d \ln k}{dT} = \frac{E_a}{RT^2}$$

$k$  : constante de vitesse  
 $E_a$  : énergie d'activation  
 $R$  : constante des gaz parfaits  
 $T$  : température

## Loi de vitesse d'une réaction d'ordre 1

$$c = c_0 e^{-\alpha k t}$$

avec  $\alpha > 0$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\alpha k}$$

$c$  : concentration de l'espèce  
 $c_0$  : concentration initiale  
 $k$  : constante de vitesse

Le temps de demi-réaction est indépendant de  $c_0$  ( $\alpha$  étant le nombre stœchiométrique du réactif limitant et  $\alpha > 0$ ).

## 2.2 Étude expérimentale

## Spectrophotométrie

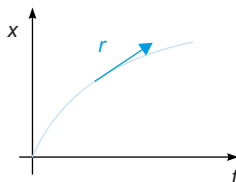
$$A = \log \frac{\Phi_0}{\Phi} = \varepsilon \cdot \ell \cdot c$$

Si la substance est colorée, on peut suivre l'évolution de sa concentration grâce à la loi de Beer Lambert.  
 $\varepsilon(\lambda, T, \text{solvant})$  : coefficient d'absorption molaire  
 $\ell$  : longueur de cuve  
 $c$  : concentration

## Méthode différentielle

$$r = \frac{dx}{dt}$$

(pente de la courbe)



## Vitesse initiale

$$v_0 = k[A_1]_0^{\nu_1} [A_2]_0^{\nu_2}$$

La mesure de la vitesse initiale permet de déterminer la constante de vitesse.

## 2.3 Mécanismes réactionnels

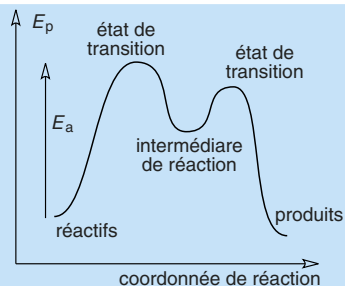
## AEQS : théorème de Bodenstein

$$\frac{d[A]}{dt} = 0$$

Conditions d'application de l'Approximation des États Quasi Stationnaires :

- $[A]$  très faible
- $A$  espèce très réactive (intermédiaire réactionnel)

### Diagramme d'énergie potentielle



Les réactions sont décomposées en actes élémentaires. Lors d'un acte élémentaire, le système chimique passe par un maximum local d'énergie potentielle dont la structure s'appelle *état de transition*. Entre deux actes élémentaires, le système passe par un minimum local, dont la structure s'appelle *intermédiaire de réaction*.

### Molécularité

La molécularité d'un acte élémentaire est le nombre de molécules ou d'ions intervenant dans l'acte (étape monomoléculaire, bimoléculaire, plus rarement trimoléculaire).

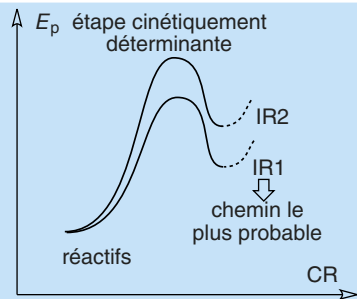
### Étape cinétiquement déterminante

Lorsque la vitesse d'une réaction est gouvernée par la vitesse d'une des étapes, celle-ci s'appelle *étape cinétiquement déterminante*.

### Contrôle cinétique ou thermodynamique

Lorsqu'un réactif peut former deux produits différents, si les rapports de quantités de produits respectent la loi de GULDBERG et WAAGE, la réaction est dite sous contrôle thermodynamique. Sinon, elle est dite sous contrôle cinétique.

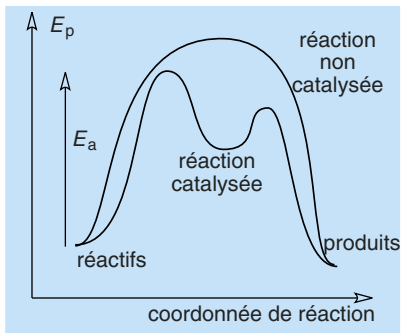
### Postulat de HAMMOND



Le postulat de HAMMOND permet de dire que le chemin réactionnel le plus probable est celui qui conduit à l'intermédiaire de réaction le plus stable formé lors de l'étape cinétiquement déterminante.

## 2.4 Catalyse

## Catalyseur

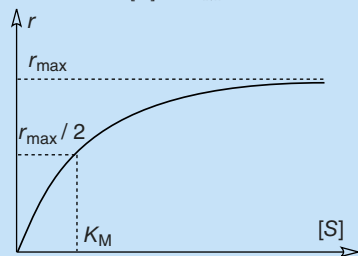


Un catalyseur est une espèce qui, ajoutée le plus souvent en faible proportion, accélère une réaction en modifiant le chemin réactionnel. Il ne modifie pas l'état d'équilibre thermodynamique.

## Catalyse enzymatique



$$r = r_{\text{max}} \times \frac{[S]}{[S] + K_M}$$



$$K_M = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$$

MICKAËLIS et MENTEN ont proposé un mécanisme de l'action enzymatique. On note  $r = \frac{dP}{dt}$

$K_M$  constante de MICKAËLIS et MENTEN,  $r_{\text{max}} = k_{\text{cat}}[E]_0$  vitesse maximale,  $[E]_0$  : concentration initiale en enzyme.

Si on applique l'hypothèse de BRIGGS et HALDANE de l'approximation de l'état quasi-stationnaire.

### 3. Solutions aqueuses

#### 3.1 Réactions acido-basiques

##### Définition du pH

$$\text{pH} = -\log \left( \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{c^\circ} \right)$$

La relation ci-contre n'est valable qu'en milieux dilués.

$[\text{H}_3\text{O}^+]$  : concentration en ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  dans le milieu  
 $c^\circ$  : concentration standard ( $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ )

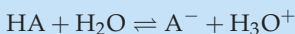
##### Produit ionique de l'eau

$$K_e = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{OH}^-]}{(c^\circ)^2} = 10^{-14}$$

$$\text{p}K_e = -\log K_e = 14$$

$K_e$  : produit ionique de l'eau  
 $[\text{H}_3\text{O}^+]$  : concentration en ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  dans le milieu  
 $[\text{OH}^-]$  : concentration en ions  $\text{OH}^-$  dans le milieu  
 $c^\circ$  : concentration standard

##### Constante d'acidité d'un couple acidobasique



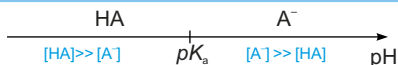
$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{A}^-]}{[\text{HA}] \cdot c^\circ}$$

$$\text{p}K_a = -\log K_a$$

$K_a$  : constante d'acidité du couple acidobasique (ne dépend que de la température).

$[\text{H}_3\text{O}^+]$  : concentration en ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  dans le milieu  
 $[\text{HA}]$  : concentration de l'espèce acide dans le milieu  
 $[\text{A}^-]$  : concentration de l'espèce basique dans le milieu  
 $c^\circ$  : concentration standard

##### Domaines de prédominance



##### Loi de Guldberg et Waage sous forme logarithmique

$$\text{pH} = \text{p}K_a + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{HA}]}$$

$[\text{HA}]$  : concentration de l'espèce acide dans le milieu  
 $[\text{A}^-]$  : concentration de l'espèce basique dans le milieu

## pH d'une solution d'acide fort

$$\text{pH} = \text{p}C_A$$

Valable si  $\text{pH} \leq 6,5$ .  $C_A$  : concentration introduite en acide fort.

## pH d'une solution de base forte

$$\text{pH} = \text{p}K_e - \text{p}C_B$$

Valable si  $\text{pH} \geq 6,5$ .  $C_B$  : concentration introduite en base forte.

## pH d'une solution d'acide faible peu dissocié

$$\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_a + \text{p}C_A)$$

Valable si  $\text{pH} \leq \text{p}K_a - 1$  et  $\text{pH} \leq 6,5$ .  
 $C_A$  : concentration introduite en acide faible  
 $\text{p}K_a$  : constante d'acidité du couple acide-base

## pH d'une solution d'acide faible très dissocié

$$\text{pH} = \text{p}C_A$$

Valable si  $\text{pH} \geq \text{p}K_a + 1$  et  $\text{pH} \leq 6,5$ .  
 $C_A$  : concentration introduite en acide faible  
 $\text{p}K_a$  : constante d'acidité du couple acide-base

## pH d'une solution de base faible peu protonée

$$\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_e + \text{p}K_a - \text{p}C_B)$$

Valable si  $\text{pH} \geq \text{p}K_a + 1$  et  $\text{pH} \geq 7,5$ .  
 $C_B$  : concentration introduite en base faible  
 $\text{p}K_a$  : constante d'acidité du couple acide-base

## pH d'une solution de base faible très protonée

$$\text{pH} = \text{p}K_e - \text{p}C_B$$

Valable si  $\text{pH} \geq \text{p}K_a - 1$  et  $\text{pH} \geq 7,5$ .  
 $C_B$  : concentration introduite en base faible  
 $\text{p}K_a$  : constante d'acidité du couple acide-base



### pH d'une solution d'ampholyte

$$\text{pH} = \frac{1}{2} (\text{p}K_1 + \text{p}K_2)$$

$\text{p}K_1$  et  $\text{p}K_2$  : constantes d'acidités relatives aux couples. La formule est vraie la plupart du temps.

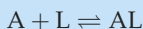
### Dosages acidobasiques

$$\text{pH} = \text{p}K_a$$

À la demi-équivalence d'un dosage d'un acide faible par une base forte ou d'une base faible par un acide fort. Valable si l'acide faible (ou la base faible) est initialement dissociée (protonée) à moins de 50%.

## 3.2 Réactions de complexation

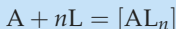
### Constante de dissociation



$$K_d = \frac{[A][L]}{c^\circ [AL]}$$

$K_d$  : constante de dissociation  
 $[A]$  : concentration de l'accepteur de ligand  
 $[L]$  : concentration du ligand  
 $[AL]$  : concentration du complexe  
 $c^\circ$  : concentration standard

### Complexes successifs



$$\beta_n = \frac{(c^\circ)^n \cdot [AL_n]}{[A][L]^n}$$

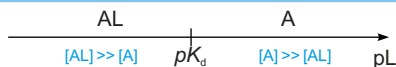
$\beta_n$  : constante globale de stabilité (ou de formation)  
 $[A]$  : concentration de l'accepteur de ligand  
 $[L]$  : concentration du ligand  
 $c^\circ$  : concentration standard

### pL

$$\text{pL} = -\log \frac{L}{c^\circ} = \text{p}K_d + \log \frac{[A]}{[L]}$$

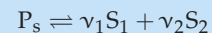
$[A]$  : concentration de l'accepteur de ligand  
 $[L]$  : concentration du ligand  
 $\text{p}K_d = -\log K_d$  avec  $K_d$ , constante de dissociation du complexe

## Domaines de prédominance



## 3.3 Réactions de précipitation

## Produit de solubilité



$$K_s = \frac{[S_1]^{\nu_1} \cdot [S_2]^{\nu_2}}{(c^0)^{\nu_1 + \nu_2}}$$

$\nu_i$  : nombre stœchiométrique de  $S_i$   
 $[S_i]$  : concentration en  $S_i$   
 $K_s$  : produit de solubilité  
 $P_s$  : précipité

## Solubilité

La solubilité est la quantité maximale de solide que l'on peut dissoudre dans un litre de solution.

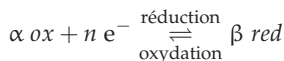
## Condition de précipitation

$$Q \geq K_s$$

À cette condition, il y a précipitation et à l'équilibre :  $Q_{\text{éq}} = K_s$

## 3.4 Réactions d'oxydoréduction

## Couple redox



## Nombre d'oxydation – Définition

C'est le nombre d'électrons « perdus » par rapport à l'atome neutre.

### Nombre d'oxydation – Règles de détermination

- atome isolé neutre : n.o. : 0 ;
- ion simple : le nombre d'oxydations est la charge de l'ion ;
- molécule ou ion complexe :
  - entre deux atomes du même élément, on attribue à chacun l'un des électrons du doublet de liaison ;
  - entre deux atomes différents, on attribue les électrons de liaison au plus électronégatif.

Dans tous les cas :  $\sum_{\text{molécules}} n.o. = q$   
avec  $q$  la charge de l'édifice atomique.

### Oxydant – Réducteur

Un oxydant est une espèce dont le nombre d'oxydation peut diminuer.

Un réducteur est une espèce dont le nombre d'oxydation peut augmenter.

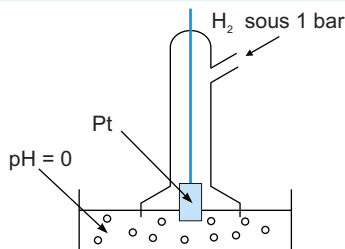
### Équilibrage d'une équation redox

Pour équilibrer une équation on procède en :

1. déterminant le nombre d'électrons échangés avec le nombre d'oxydation ;
2. effectuant un bilan des charges et en assurant l'électroneutralité avec  $H^+$  et l'équilibre en atomes d'oxygènes avec  $H_2O$  ;
3. effectuant un bilan de matière.

## Électrode à hydrogène

C'est l'électrode de référence pour les mesures de potentiels redox (à toute température  $E^\circ(\text{H}^+/\text{H}_2) = 0,000 \text{ V}$ ). Cette électrode est fictive.



## Formule de Nernst

$$E = E^\circ + \frac{RT}{n\mathcal{F}} \ln \frac{a_{\text{ox}}^\alpha}{a_{\text{red}}^\beta}$$

$a_{\text{ox}}$  : activité de l'oxydant  
 $a_{\text{red}}$  : activité du réducteur  
 Avec :  
 -  $a = 1$  pour tout solide ou un liquide pur dans la phase  
 -  $a = \frac{c}{c^0}$  pour un soluté (dans le cas des solutions diluées)  
 -  $a = \frac{p_i}{p^0}$  la pression partielle pour un gaz  
 $E$  : potentiel de l'électrode  
 $E^\circ$  : potentiel standard du couple redox  
 $n$  : nombre d'électrons échangés  
 $\mathcal{F} = \mathcal{N} \cdot e$  : constante de Faraday  
 $R$  : constante des gaz parfaits  
 $T$  : température

## Formule de Nernst : forme usuelle

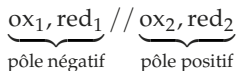
$$E = E^\circ + \frac{a}{n} \log \frac{a_{\text{ox}}^\alpha}{a_{\text{red}}^\beta}$$

$$\text{À } 25^\circ\text{C}, a = \frac{RT}{\mathcal{F} \ln 10} = 0,06\text{v}$$

## Réactions aux électrodes d'une pile

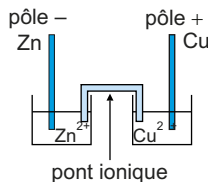
La réduction se produit à la cathode  
 L'oxydation se produit à l'anode

On symbolise une pile par :



### Pile Daniell

Zn : zinc, métal le plus réducteur  
 Cu : cuivre, métal le plus oxydant  
 Le pont ionique assure le transfert d'ions entre les deux solutions.



### Force électromotrice d'une pile

$$E = E_2 - E_1$$

$E$  : force électromotrice (fém) de la pile

$E_1$  : potentiel du couple constituant l'anode

$E_2$  : potentiel du couple constituant la cathode

## 3.5 Diagrammes potentiel-pH

### Conventions

Un diagramme potentiel-pH est construit pour une concentration fixée de l'élément étudié, appelée concentration totale.

### Lecture d'un diagramme potentiel – pH

Pour une frontière séparant deux espèces dissoutes, les concentrations des deux espèces sont égales sur la frontière (convention la plus fréquente appelée condition de prédominance). Pour une frontière séparant une espèce dissoute d'une espèce solide, la concentration de l'espèce dissoute est égale à la concentration totale, et le cristal existe. Dans le domaine de l'espèce dissoute, le solide n'existe pas (condition d'existence).

### Diagramme potentiel – pH de l'eau

Le couple  $\text{H}_2 / \text{H}_2\text{O}$  est représenté par une droite de pente  $-0,06$  et d'ordonnée à l'origine  $0,00 \text{ V}$ .

Le couple  $\text{H}_2\text{O} / \text{OH}^-$  est représenté par une droite de pente  $-0,06$  et d'ordonnée à l'origine  $1,23 \text{ V}$ .

## 4. Thermodynamique

La thermodynamique sera abordée au cours du chapitre de physique. Il est conseillé de se reporter à cette section, les notions traitées en physique n'étant pas abordées ici.

### 4.1 Fonctions d'état

#### Définition

$$X_i = \left( \frac{\partial X}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_j \neq n_i}$$

$X$  : fonction d'état extensive  
 $X_i$  : grandeur molaire partielle relative au composé  $A_i$   
 $n_i$  : quantité de matière du constituant  $A_i$

#### Relation de Gibbs–Duhem

$$\sum_i n_i dX_i = 0$$

$n_i$  : quantité de matière du constituant  $A_i$   
 $dX_i$  : différentielle de  $X_i$

#### Grandeurs de réaction associées aux fonctions d'état

$$\Delta_r X = \sum_i \nu_i X_i = \left( \frac{\partial X}{\partial \xi} \right)_{T,p}$$

$\Delta_r X$  : grandeur de réaction  
 $\nu_i$  : nombre stœchiométrique relatif au composé  $A_i$   
 $X_i$  : grandeur molaire partielle relative au composé  $A_i$

#### Relation de Gibbs–Helmoltz

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\Delta_r G}{T} \right) = - \frac{\Delta_r H}{T^2}$$

$\Delta_r G$  : enthalpie libre de réaction  
 $\Delta_r H$  : enthalpie de réaction  
 $T$  : température

## 4.2 Potentiel chimique

### Définition

$$\mu_i = \left( \frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_j \neq n_i}$$

$\mu_i$  : potentiel chimique du composé  $A_i$   
 $G$  : enthalpie libre  
 $T, p$  : température, pression  
 $n_i$  : quantité de matière du composé  $A_i$

### Condition d'équilibre physique

$$\mu_{\varphi_1} = \mu_{\varphi_2}$$

Le potentiel chimique du corps pur dans les deux phases est le même.  
 $\mu_{\varphi_i}$  : potentiel chimique du corps pur dans la phase  $i$

### Évolution vers un état d'équilibre

S'il n'est pas à l'équilibre, le corps pur passe irréversiblement de la phase de plus haut potentiel chimique vers la phase de plus bas potentiel chimique et ce, jusqu'à l'obtention de l'égalité précédente.

### Potentiel chimique d'un gaz

$$\mu_{i(g)} = \mu_{i(g)}^\circ + RT \ln \frac{p_i}{p^\circ}$$

$\mu_{i(g)}$  : potentiel chimique du gaz  $A_i$   
 $\mu_{i(g)}^\circ$  : potentiel chimique standard du gaz  $A_i$  (à la pression  $p^\circ$ )  
 $R$  : constante des gaz parfaits  
 $T$  : température  
 $p_i$  : pression partielle du gaz  $A_i$   
 $p^\circ$  : pression standard (1 bar =  $10^5$  Pa)

### Potentiel chimique d'un soluté

$$\mu_{i(s)} = \mu_{i(s)}^\circ + RT \ln \frac{c_i}{c^\circ}$$

$R$  : constante des gaz parfaits  
 $T$  : température  
 $c_i$  : concentration du composé  $A_i$   
 $c^\circ$  : concentration standard (1 mol · L<sup>-1</sup>)

## 4.3 Grandeurs standard de réaction

## Enthalpie standard de réaction

$$\Delta_r H^\circ = \sum_i \nu_i H_i^\circ$$

$\Delta_r H^\circ$  : enthalpie standard de réaction

$\nu_i$  : nombre stœchiométrique du composé  $A_i$

$H_i^\circ$  : enthalpie standard molaire de  $A_i$  pris dans son état standard

## Entropie standard de réaction

$$\Delta_r S^\circ = \sum_i \nu_i S_i^\circ$$

$\Delta_r S^\circ$  : entropie standard de réaction

$\nu_i$  : nombre stœchiométrique du composé  $A_i$

$S_i^\circ$  : entropie standard molaire de  $A_i$  pris dans son état standard

## Enthalpie libre standard de réaction

$$\Delta_r G^\circ = \sum_i \nu_i G_i^\circ$$

$\Delta_r G^\circ$  : enthalpie libre standard de réaction

$\nu_i$  : nombre stœchiométrique du composé  $A_i$

$G_i^\circ$  : enthalpie libre standard molaire de  $A_i$  pris dans son état standard

## Relation entre grandeurs de réaction

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$$

$\Delta_r S^\circ$  : entropie standard de réaction

$\Delta_r H^\circ$  : enthalpie standard de réaction

$\Delta_r G^\circ$  : enthalpie libre standard de réaction

$T$  : température



## Relations de Gibbs–Helmoltz

$$\Delta_r S^\circ = -\frac{d\Delta_r G^\circ}{dT}$$

$$\Delta_r H^\circ = -T^2 \frac{d}{dT} \left( \frac{\Delta_r G^\circ}{T} \right)$$

$\Delta_r S^\circ$  : entropie standard de réaction  
 $\Delta_r H^\circ$  : enthalpie standard de réaction  
 $\Delta_r G^\circ$  : enthalpie libre standard de réaction  
 $T$  : température

## Relation de Hess

$$\Delta_r H^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^\circ$$

$$\Delta_r G^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_f G_i^\circ$$

$\Delta_r H^\circ$  : enthalpie standard de réaction  
 $\Delta_r G^\circ$  : enthalpie libre standard de réaction  
 $\Delta_f H_i^\circ$  : enthalpie standard de formation du composé  $A_i$  (nulle pour les corps purs)  
 $\Delta_f G_i^\circ$  : enthalpie libre standard de formation du composé  $A_i$

## 4.4 Équilibres chimiques

## Définition de l'affinité chimique

$$\mathcal{A} = -\sum_i \nu_i \mu_i = -\Delta_r G$$

$\mathcal{A}$  : affinité chimique  
 $\Delta_r G$  : enthalpie libre de réaction  
 $\nu_i$  : nombre stœchiométrique du composé  $A_i$   
 $\mu_i$  : potentiel chimique du composé  $A_i$

## Expression de l'affinité

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^\circ - RT \ln \left( \prod_i a_i^{\nu_i} \right)$$

$\mathcal{A}$  : affinité chimique  
 $\mathcal{A}^\circ$  : affinité chimique standard  
 $a_i$  : activité du composé  $A_i$   
 $\nu_i$  : nombre stœchimétrique du composé  $A_i$   
 $R$  : constante des gaz parfaits  
 $T$  : température

## Condition d'équilibre

$$\mathcal{A} = 0$$

Dans ce cas :

$$\mathcal{A}^\circ = RT \ln K^\circ = RT \ln \left( \prod_i a_i^{\nu_i} \right)$$

$K^\circ$  est la constante standard d'équilibre de la réaction

## Sens d'évolution

$$\mathcal{A} \cdot d\xi \geq 0$$

Si  $\mathcal{A} > 0$ ,  $d\xi > 0$  : il y a évolution

dans le sens  $\xrightarrow{1}$

Si  $\mathcal{A} < 0$ ,  $d\xi < 0$  : il y a évolution

dans le sens  $\xleftarrow{2}$

## Constante d'équilibre

$$K^\circ(T) = \prod_i a_i^{\nu_i} \text{ \textit{équilibre}}$$

$K^\circ(T)$  : constante d'équilibre de la réaction qui ne dépend que de la température

$a_i$  \textit{équilibre} : coefficient d'activité du

composé  $A_i$  à l'équilibre

$\nu_i$  : nombre stœchiométrique du composé  $A_i$

## Température d'inversion

$$\Delta_r G^\circ(T_i) = 0$$

$$K^\circ(T_i) = 1$$

## Effet de la température : loi de Van't Hoff

$$\frac{d \ln K^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$$

$K^\circ$  : constante standard d'équilibre de la réaction

$\Delta_r H^\circ$  : enthalpie standard de la réaction

$R$  : constante des gaz parfaits

$T$  : température

Une augmentation de la température déplace la réaction dans le sens endothermique.

## Effet de la pression : loi de Le Châtelier

Une augmentation de la pression déplace l'équilibre dans le sens de diminution de la quantité de matière de gaz ( $\Delta v_{\text{gaz}} < 0$ ).

Introduction d'un constituant actif à  $P$  et  $T$  constantes

$$dA = RT \left( \Delta v_{\text{gaz}} - \frac{v_i}{x_i} \right) \frac{dn_i}{n}$$

$dA$  : variation de l'affinité  
 $v_i$  : nombre stœchiométrique du composé  $A_i$   
 $x_i$  : fraction molaire du composé  $A_i$   
 $n$  : quantité de matière totale  
 $dn_i$  : variation de quantité de matière du composé  $A_i$

Ajout d'un constituant inactif à  $P$  et  $T$  constants

$$dA = RT \Delta v_{\text{gaz}} \frac{dn}{n}$$

$dA$  : variation de l'affinité  
 $n$  : quantité de matière  
 $dn$  : variation de quantité de matière du constituant introduit

## Variance – Règle des phases de Gibbs

$$v = c + 2 - \varphi$$

$$c = n - k - r$$

$v$  : variance  
 $c$  : nombre de constituants indépendants  
 $\varphi$  : nombre de phases  
 $n$  : nombre de constituants  
 $k$  : nombre de relations entre les constituants  
 $r$  : relation particulières (imposées par le manipulateur)

## 4.5 Équilibres liquide–vapeur

## Loi de Raoult

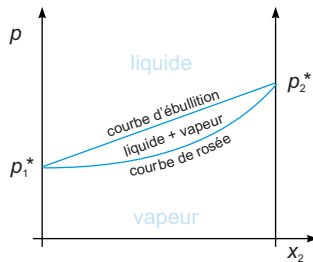
$$p_i = p_i^* x_i^{\ell}$$

$p_i$  : pression partielle du composé  $A_i$   
 $p_i^*$  : pression de vapeur saturante du composé  $A_i$   
 $x_i^{\ell}$  : titre molaire de  $A_i$  liquide

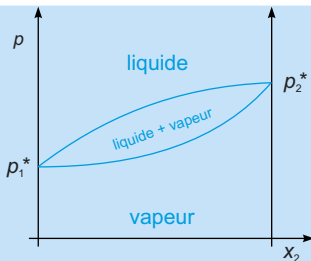
## Solution idéale : définition

Une solution est dite idéale si toutes les interactions entre les espèces qui la composent sont identiques : interactions  $A_1-A_1, A_2-A_2$  et  $A_1-A_2$

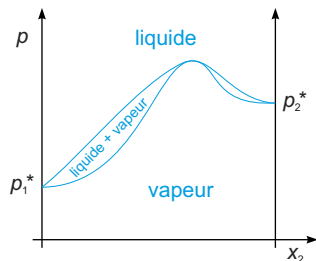
## Diagramme binaire d'une solution idéale



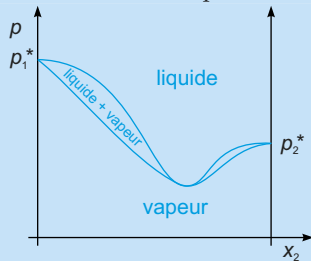
## Diagrammes isothermes



Fuseau simple



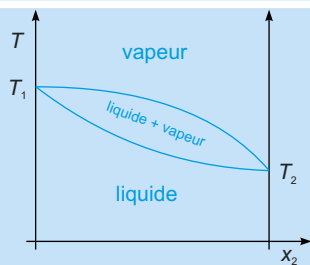
Azéotrope positif



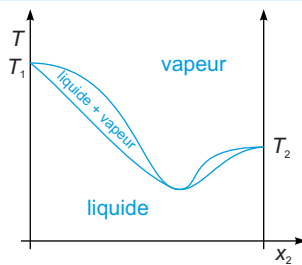
Azéotrope négatif

L'azéotrope est la manifestation de l'écart de la solution par rapport à la solution idéale.

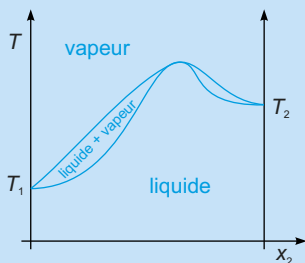
## Diagrammes isobares



Fuseau simple



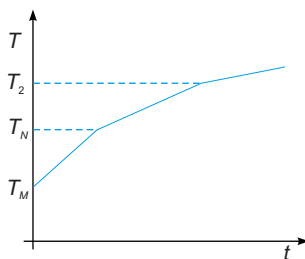
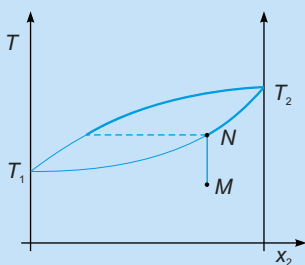
Azéotrope positif

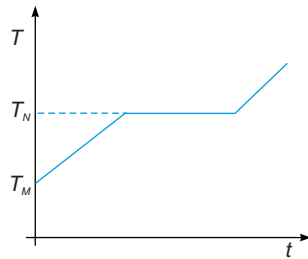
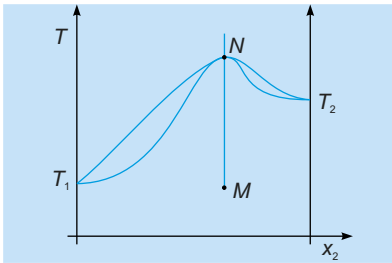


Azéotrope négatif

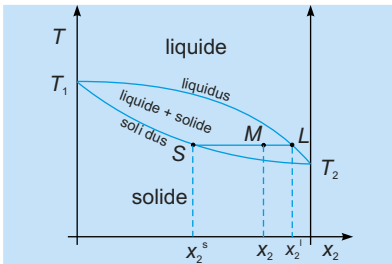
À pression constante, un azéotrope bout à température constante et donne une vapeur de même composition que le liquide.

## Analyse thermique





Théorème des moments

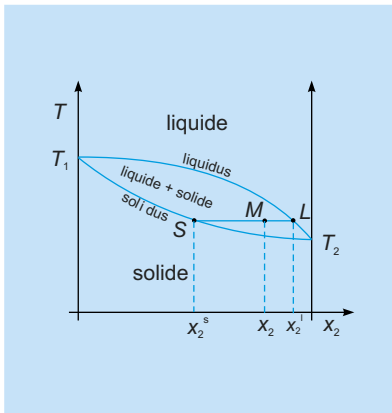


$$n^{\ell} \overline{ML} + n^v \overline{MV} = 0$$

$n^{\ell}$  : quantité de matière de liquide  
 $n^v$  : quantité de matière de vapeur  
 $\overline{ML}$  : distance algébrique de  $M$  à la courbe d'ébullition  
 $\overline{MV}$  : distance algébrique de  $M$  à la courbe de rosée

4.6 Équilibres solide – liquide

Cas des solides miscibles



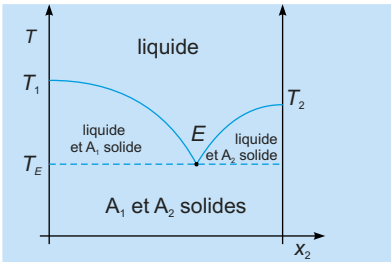
Seule importe l'étude des diagrammes isobares. Dans le cas des solides miscibles, on retrouve le même type de diagramme (et d'analyse thermique) que dans le cas des diagrammes liquide-vapeur à pression constante.

Théorème des moments :

$$n^s \overline{MS} + n^{\ell} \overline{ML} = 0$$

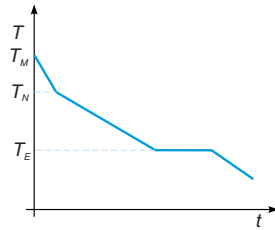
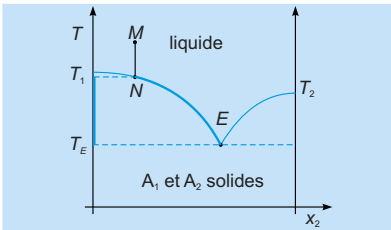
$n^{\ell}$  : quantité de matière de liquide  
 $n^s$  : quantité de matière de solide  
 $\overline{ML}$  : distance algébrique de  $M$  au liquidus  
 $\overline{MS}$  : distance algébrique de  $M$  au solidus

## Cas des solides non miscibles



$E$  est le point eutectique, en ce point le liquide cristallise sans changer de composition.

## Analyse thermique



## 5. Chimie organique

### 5.1 Nomenclature

#### Nomenclature des séries linéaires

Nombre d'atomes de carbone	Préfixe	Alcane associé
1	méth	CH <sub>4</sub> : méthane
2	éth	CH <sub>3</sub> -CH <sub>3</sub> : éthane
3	prop	CH <sub>3</sub> -CH <sub>2</sub> -CH <sub>3</sub> : propane
4	but	CH <sub>3</sub> (-CH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub> -CH <sub>3</sub> : butane
5	pent	CH <sub>3</sub> (-CH <sub>2</sub> ) <sub>3</sub> -CH <sub>3</sub> : pentane
6	hex	CH <sub>3</sub> (-CH <sub>2</sub> ) <sub>4</sub> -CH <sub>3</sub> : hexane
7	hept	CH <sub>3</sub> (-CH <sub>2</sub> ) <sub>5</sub> -CH <sub>3</sub> : heptane
8	oct	CH <sub>3</sub> (-CH <sub>2</sub> ) <sub>6</sub> -CH <sub>3</sub> : octane
9	non	CH <sub>3</sub> (-CH <sub>2</sub> ) <sub>7</sub> -CH <sub>3</sub> : nonane
10	déc	CH <sub>3</sub> (-CH <sub>2</sub> ) <sub>8</sub> -CH <sub>3</sub> : décane
11	undéc	CH <sub>3</sub> (-CH <sub>2</sub> ) <sub>9</sub> -CH <sub>3</sub> : undécane
12	dodéc	CH <sub>3</sub> (-CH <sub>2</sub> ) <sub>10</sub> -CH <sub>3</sub> : dodécane
20	eicos	CH <sub>3</sub> (-CH <sub>2</sub> ) <sub>18</sub> -CH <sub>3</sub> : eicosane

#### Nomenclature des fonctions usuelles (par ordre de priorité)

Fonction	Préfixe	Suffixe	Nom générique
Acide carboxylique	carboxy-	-oïque	acide alcanoïque
Anhydride d'acide	-	-oïque	anhydride alcanoïque
Ester	-	-oate	alcanoate d'alkyle
Halogénure d'acyle	-	-oyle	halogénure d'alcanoyle
Amide	amido-	-amide	alcanamide
Nitrile	cyano	nitrile	alcanenitrile
Aldéhyde	oxo-	-al	alcanal
Cétone	oxo-	-one	alcanone
Alcool	hydroxy-	-ol	alcanol
Amine	amino-	-amine	alkylamine
Étheroxyde	-	oxy	alkoxy alcane
Halogénure	halogéno-	-	halogénoalcane
Organométallique	-	métal	halogénure d'alkylmétal

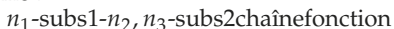


### Nomenclature des chaînes

Insaturation	Suffixe
Sans insaturation	-ane
1 double liaison	-ène
1 triple liaison	-yne
2 doubles liaisons	-adiène
3 doubles liaisons	-atriène
2 triples liaisons	-adiyne
1 double liaison et 1 triple liaison	-ènyne

### Règles générales de nomenclature

1. La **chaîne la plus longue** est numérotée afin de donner le plus bas indice aux liaisons multiples.
2. On **nomme les substituants** sous la forme *n*-alkyl, *n* étant l'indice de position sur la chaîne précédente.
3. Les substituants éventuellement identiques sont précédés des préfixes appropriés : di, tri, tetra,...
4. On nomme la molécule en plaçant les substituants par ordre alphabétique sous la forme :



## 5.2 Stéréochimie de conformation

### Conformation – Définition

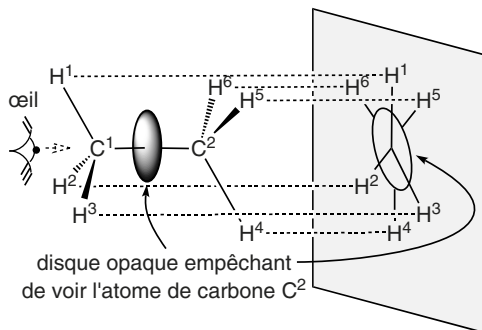
Deux structures sont de conformations différentes si elles ne diffèrent que par des notations autour des liaisons simples.

### Configuration – Définition

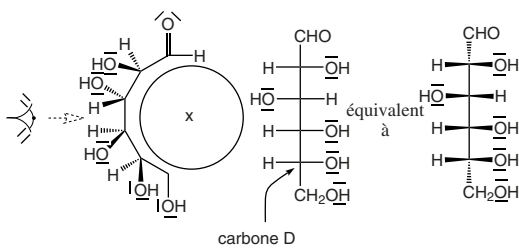
Deux structures sont de configurations différentes si :

- elles ont la même connectivité des atomes entre eux,
- elles ne sont pas superposables (aux conformations près).

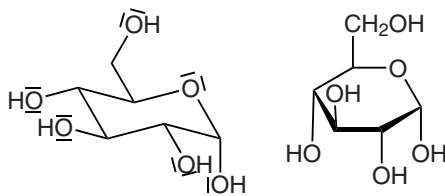
## Projection de NEWMAN



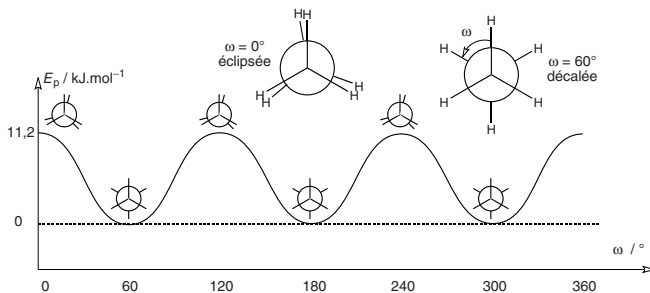
## Projection de FISCHER



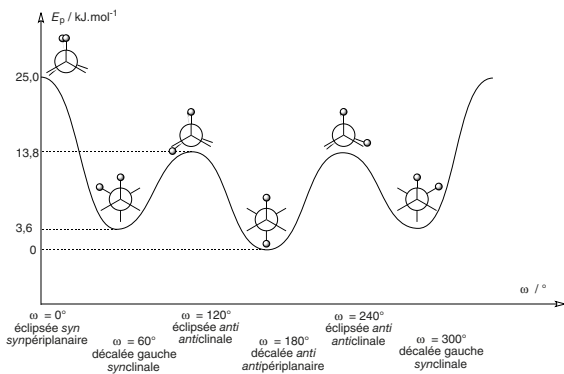
## Projection de HAWORTH



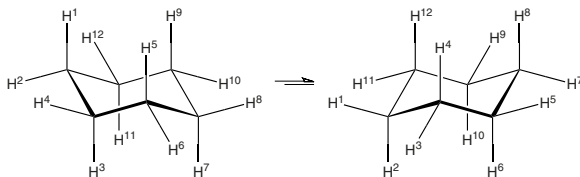
## Conformations de l'éthane



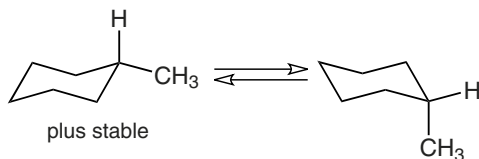
## Conformations du butane



## Inversion chaise-chaise du cyclohexane



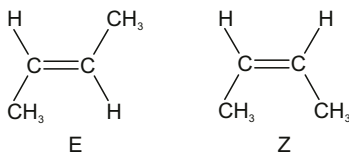
## Préférence équatoriale des substituants



La conformation la plus stable est obtenue pour les substituants en position équatoriale en raison de l'interaction butane gauche et de l'interaction 1,3-diaxiale.

## Configurations Z et E

Une double liaison carbone-carbone est une source d'existence de configurations différentes. Si les deux groupes de plus forte priorité (établis par ordre de numéro atomique croissant) sont du même côté de la double liaison, la configuration est Z ; s'ils sont de part et d'autre de la double liaison, la configuration est E.

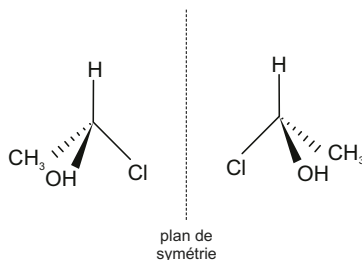


## Carbone(s) asymétrique(s)

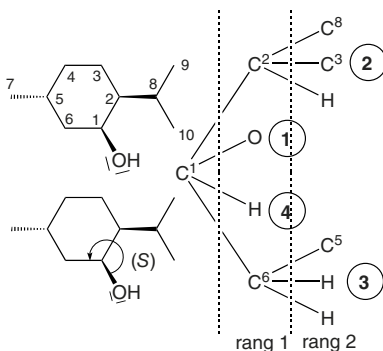
Un carbone est dit asymétrique s'il est tétraédrique et qu'il porte quatre groupes différents. Si la molécule comporte  $n$  sources de chiralités (carbones asymétriques ou doubles liaisons), il y a  $2^n$  configurations de cette molécule, sauf s'il existe des symétries, dans ce cas, il y a des molécules méso.

## Chiralité

Deux molécules sont dites chirales si elles sont leurs images réciproques dans un miroir et non superposables.

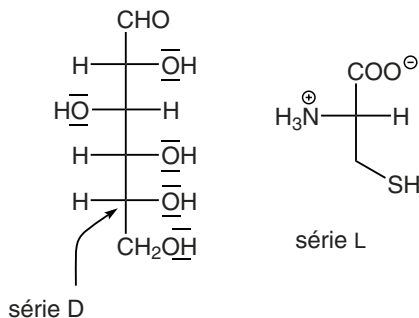


### Descripteurs stéréochimiques *R* et *S*



Déterminer les ordres de priorité de 1 à 4 des quatre groupes substituants, en suivant les règles de CAHN, INGOLD et PRELOG : un atome est prioritaire devant un autre si son numéro atomique est le plus grand. En cas d'égalité, comparer les triplets d'atomes du rang  $n + 1$  liés aux atomes de rang  $n$ . Le groupe le moins prioritaire est placé vers l'arrière. Si la séquence  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  tourne dans le sens des aiguilles d'une montre l'atome asymétrique est dit *R*, sinon il est dit *S*.

## Descripteurs stéréochimiques des sucres et acides α-aminés



Sucres : en projection de FISCHER, si le groupe  $-OH$  du carbone asymétrique le plus bas est à droite, le sucre est de la série D (naturel), sinon il est de la série L. Acides  $\alpha$ -aminés : en projection de FISCHER, le groupe carboxylate est placé en haut, la chaîne latérale en bas ; si le groupe  $-NH_2$  est à droite, l'acide aminé est de la série D, sinon il est de la série L (naturel).

## 5.3 Les alcènes

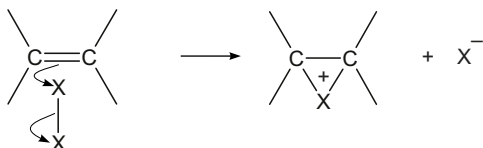
 $A_E$  ioniques

1<sup>er</sup> acte :  $R - CH = CH_2 + H^+ \rightarrow R - \overset{+}{C}H - CH_3$  (carbocation le plus stable)

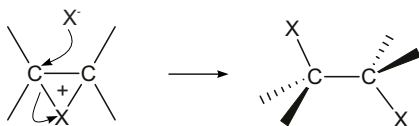
2<sup>e</sup> acte :  $R - \overset{+}{C}H - CH_3 + A^- \rightarrow R - CHA - CH_3$

## Dihalogénéation

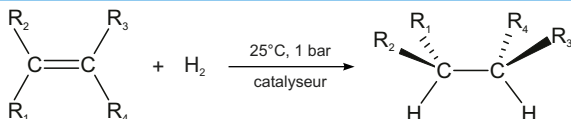
Formation d'un ion ponté halonium :



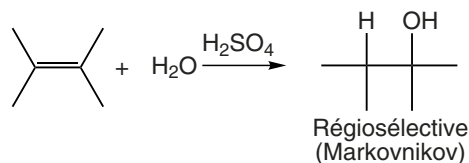
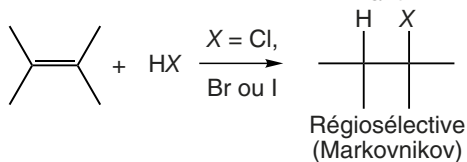
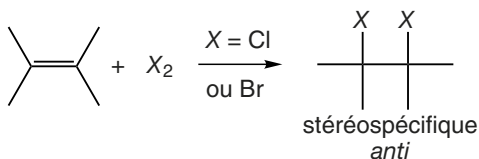
Puis, substitution du nucléophile en anti du pont :



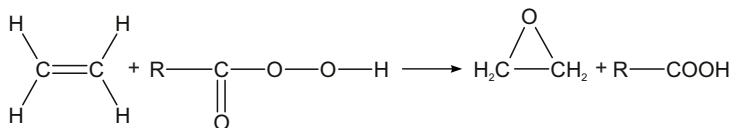
### Hydrogénation



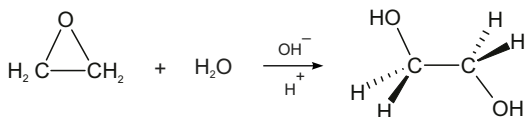
### Additions ioniques



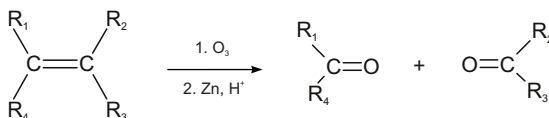
### Époxydation



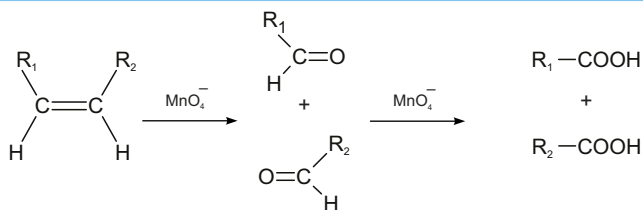
L'ouverture du cycle est ensuite réalisable par traitement par l'eau en catalyse acide ou basique :



## Ozonolyse

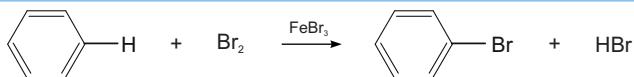


## Réactions avec le permanganate

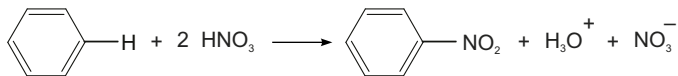
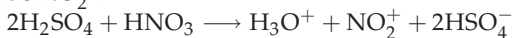


## 5.4 Hydrocarbures aromatiques

## Halogénéation



## Nitration

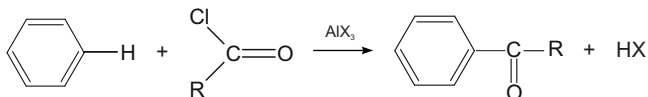
Formation de  $\text{NO}_2^+$  :



## Alkylation de Friedel &amp; Crafts



## Acylation de Friedel &amp; Crafts



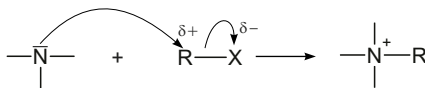
## Polysubstitutions électrophiles (Règles de Høleman)

Effets	Orientation	Activant / désactivant
+I	ortho, para	activant fort
+I,+M	ortho, para	activant fort
-I <sub>faible</sub> ,+M	ortho, para	activant fort
-I	méta	désactivant
-I,-M	méta	désactivant fort
-I <sub>fort</sub> ,+M	ortho, para	désactivant

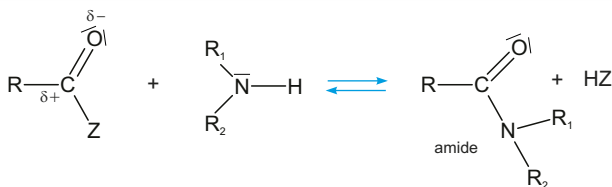
## 5.5 Amines

## Alkylation de Hofmann

Substitution nucléophile de Hofmann :

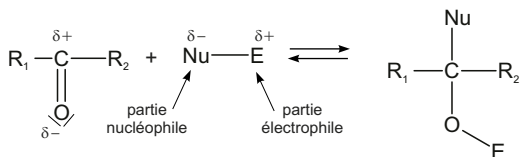


## Acylation

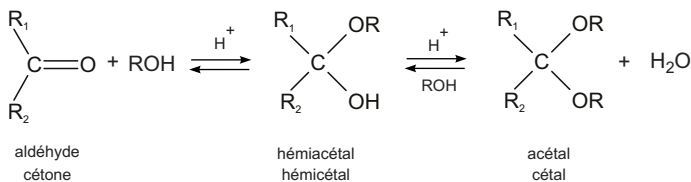
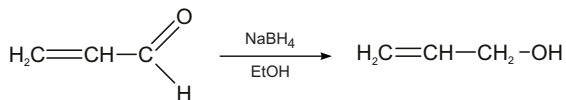


## 5.6 Groupe carbonyle

## Addition nucléophile

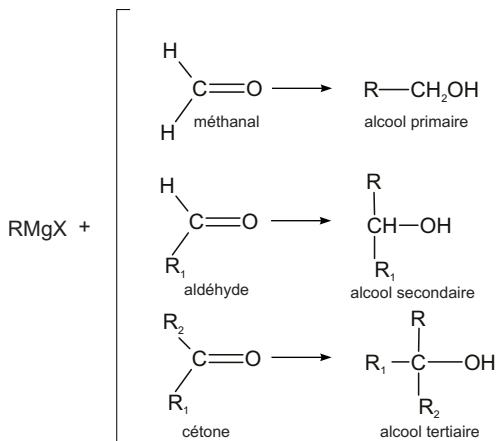


## Cétalisation – Acétalisation

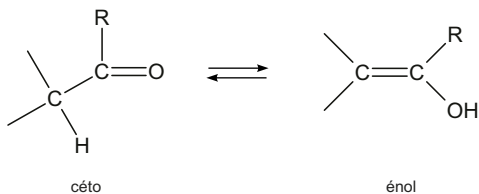
Réaction avec les hydrures (A<sub>N</sub>)Avec NaBH<sub>4</sub> :

## Réaction avec les organomagnésiens

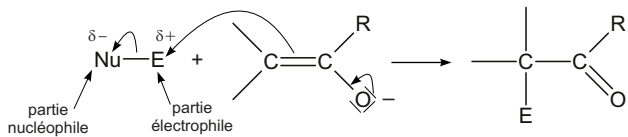
Elles visent à allonger les chaînes carbonées.



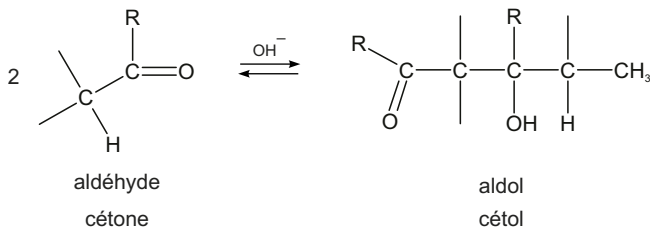
### Équilibre cétéo-énolique



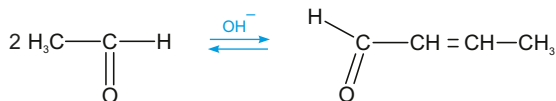
### Réactivité de l'ion énolate



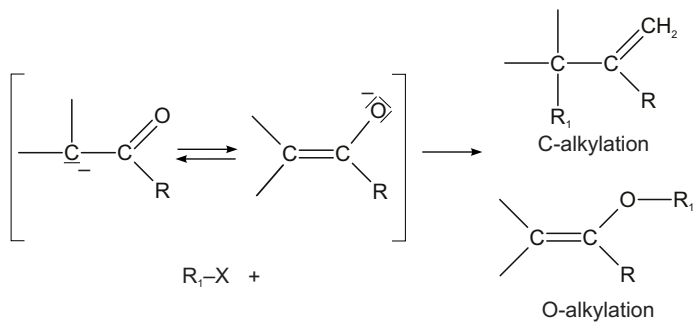
## Aldolisation – Cétolisation – Crotonisation



Crotonisation :

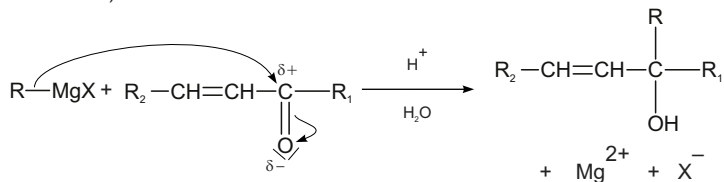


## C-alkylation – O-alkylation



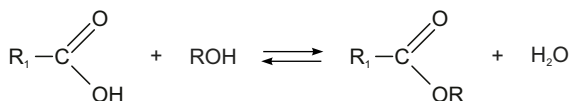
## Organomagnésiens

Addition 1,2 :

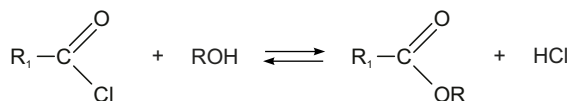


## 5.7 Acides carboxyliques

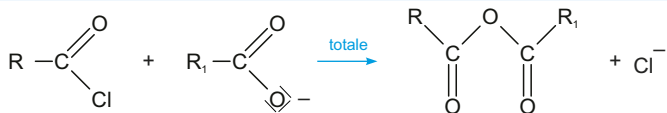
## Synthèse directe des esters



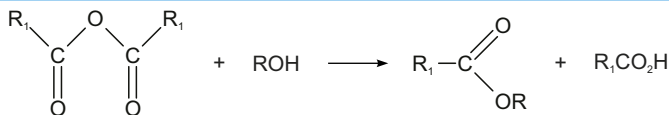
## Chlorure d'acyles



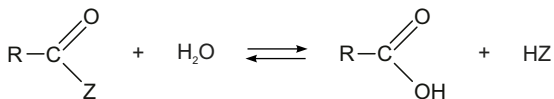
## Anhydride d'acide



## Passage des anhydrides aux esters



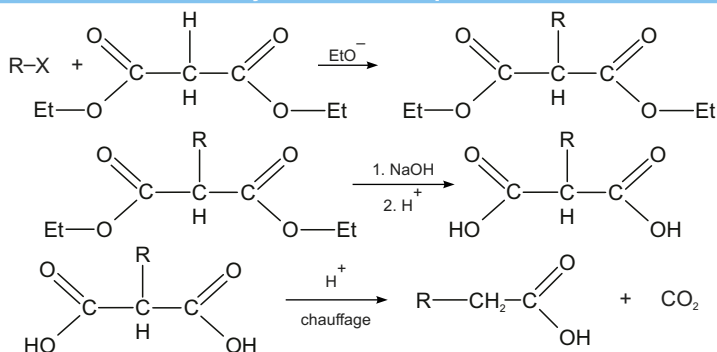
## Hydrolyse des fonctions dérivées



On a en particulier pour les esters la réaction de saponification :

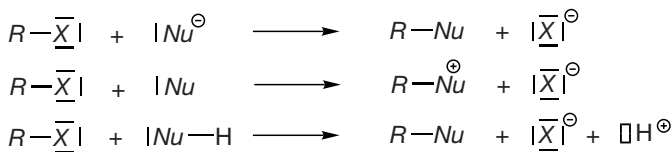


## Synthèse malonique



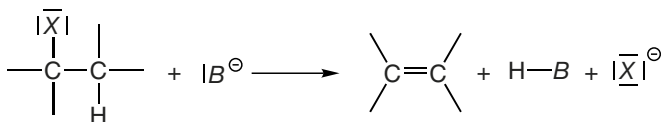
## 5.8 Halogénoalcane

## Substitutions nucléophiles



## Caractéristiques

Halogénoalcane primaires et secondaires : mécanisme  $\text{S}_{\text{N}}2$ , inversion de WALDEN. Halogénoalcane tertiaires ou conduisant à un carbocation stabilisé : mécanisme  $\text{S}_{\text{N}}1$ , racémisation.

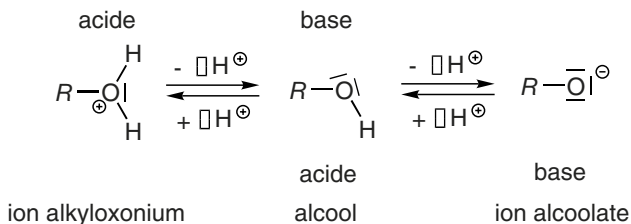
 $\beta$ -élimination par déshydrohalogénéation

### Caractéristiques

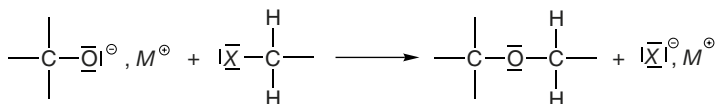
Toujours un mécanisme E<sub>2</sub> sauf pour un carbocation très stabilisé et en présence d'une base très faible. H et X sont éliminés en position anti-périplanaire.

## 5.9 Alcools

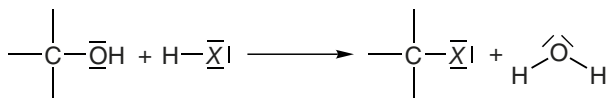
### Alcools ampholytes



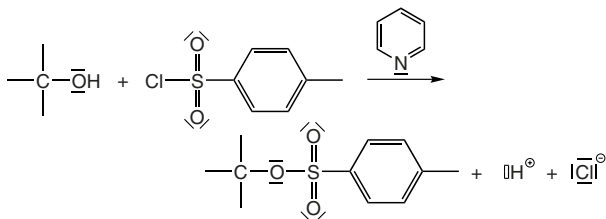
### Synthèse de WILLIAMSON



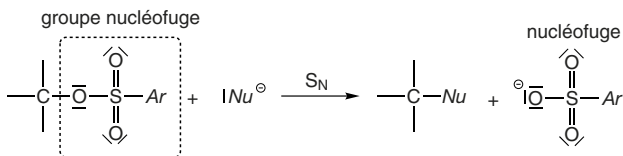
### Réaction avec les halogénures d'hydrogène



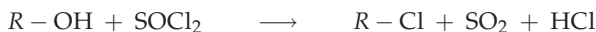
## Insertion du groupe tosyloxy, nucléofuge



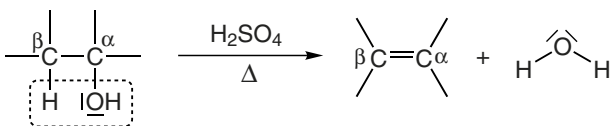
## Réaction du groupe tosyloxy



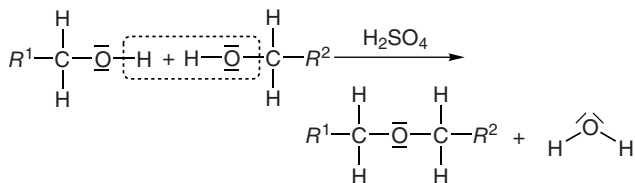
## Conversion en chloroalcane avec le chlorure de thionyle



## Déshydratation intramoléculaire

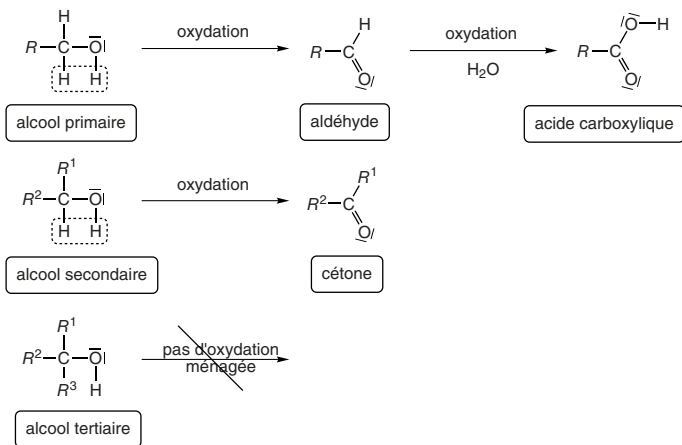


## Déshydratation intermoléculaire (alcools primaires uniquement)





## Oxydation

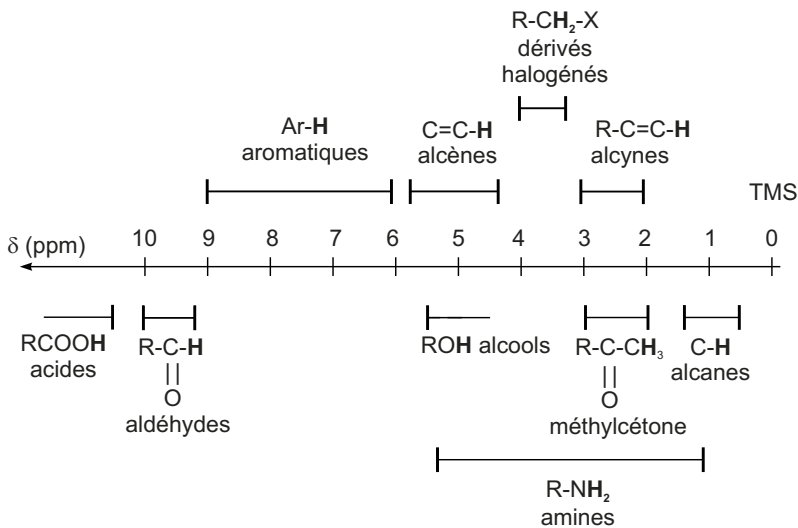


## 5.10 Spectroscopie infrarouge

Liaison	Type de composé	Fréquence	Intensité
C-H	alcane	2850-2960	forte
=C-H	alcènes	3010-3100	moyenne
≡C-H	alcyne	3300	forte
C-C	alcane	600-1500	faible
C=C	alcènes	1620-1680	très variable
C≡C	alcyne	2100-2260	variable
C≡N	nitrile	2200-2300	variable
C-O	alcools, acides esters, éthers-oxydes, carboxyliques,	1000-1300	forte
C=O	aldéhydes	1720-1740	forte
C=O	cétones	1705-1725	forte
C=O	acides carboxyliques	1700-1725	forte
C=O	esters	1735-1750	variable
O-H	alcools libres	3590-3650	variable, aigüe

### 5.11 Spectroscopie RMN (Résonance Magnétique Nucléaire)

Sur la table suivante figure les déplacements accompagnés des principales espèces chimiques qui conduisent à ces déplacements.



# Chapitre 3

## Physique

### 0. Éléments de mathématiques

#### 0.1 Différentielles

##### Développements limités

Soit  $f : x \mapsto f(x)$ , alors  $f(x + \delta x) = f(x) + \delta x f'(x) + \frac{(\delta x)^2}{2} f''(x) +$

...

##### Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Soit  $f$  une fonction des variables  $x$  et  $y$ , alors :

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_x dy$$

On peut étendre cette définition de  $df$  pour une fonction de  $n$  variables.

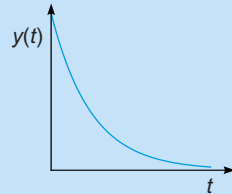
On a par définition du gradient :

$$df = (\mathbf{grad} f) \cdot d\mathbf{M}$$

## 0.2 Équations différentielles

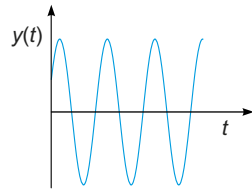
### Équation de relaxation

$y'(t) + \frac{y(t)}{\tau} = \gamma$  (où  $\gamma$  est une constante). Sa solution est  $y(t) = \gamma\tau + (y(0) - \gamma\tau)e^{-t/\tau}$ .



### Équation de l'oscillateur harmonique

$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$ . Sa solution est  $y(t) = \lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t)$  ou  $y(t) = \delta \cos(\omega_0 t + \varphi)$



### Équation du second ordre

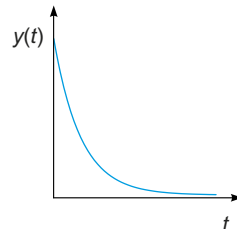
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t)$$

Le discriminant de son équation caractéristique ( $(E_c) ar^2 + br + c = 0$ ) est  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Soient  $r_1$  et  $r_2$  les deux racines de cette équation caractéristique.

Dans un premier temps, intéressons nous au cas où  $g(t) = \gamma$ , une constante.

Si  $\Delta > 0$ , les deux racines  $r_1$  et  $r_2$  sont réelles, la solution est du type apériodique :

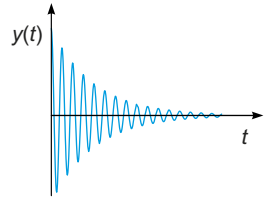
$$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} + \frac{\gamma}{c}$$



Si  $\Delta < 0$ , les deux racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées, la solution est alors pseudo-périodique :

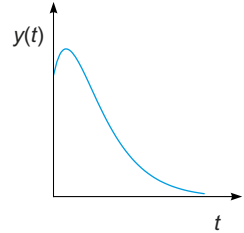
$$y(t) = (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))e^{\alpha t} + \frac{\gamma}{c}$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement partie réelle et partie imaginaire de  $r_1$



Si  $\Delta = 0$ , le régime est critique, l'équation caractéristique admet une racine double.

La solution est :  $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_1 t} + \frac{\gamma}{c}$



Si  $g(t)$  est une excitation sinusoïdale, on résout en complexes en posant  $\underline{y}(t) = \underline{Y}e^{j\omega t}$  pour obtenir une solution particulière.

## 1. Électronique

### 1.1 Lois générales

#### Loi de Pouillet

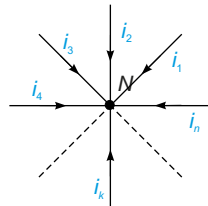
$$i = \frac{E}{\sum_k R_k}$$

$i$  : intensité du courant dans le circuit  
 $E$  : tension délivrée par le générateur  
 $R_k$  : résistances  $k$  du circuit

#### Loi des nœuds

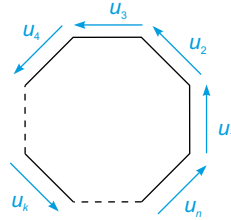
La loi des nœuds en  $N$  s'écrit :

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$



## Loi des mailles

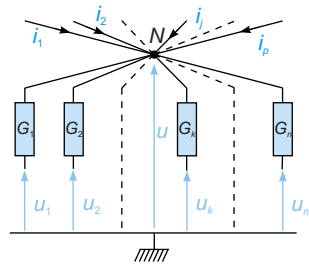
La loi des mailles sur la maille ci-contre s'écrit :  $\sum_{k=1}^n u_k = 0$



## Théorème de Millman

Le théorème de Millman appliqué en  $N$  donne :

$$u = \frac{\sum_{k=1}^n G_k \cdot u_k + \sum_{j=1}^p i_j}{\sum_{k=1}^n G_k}$$

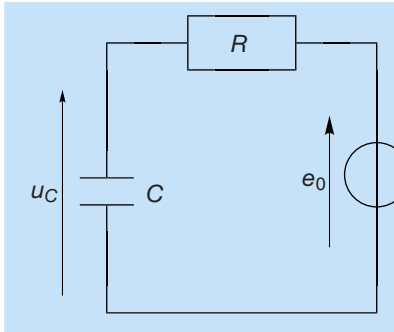


## Théorème de superposition (Helmholtz)

Dans un réseau de dipôles linéaires comportant  $n$  sources, la tension aux bornes de chaque dipôle est la somme algébrique des tensions qu'il y aurait aux bornes de ce dipôle si une seule source autonome fonctionnait. De même, l'intensité dans une branche d'un circuit est la somme des intensités qui règneraient dans la branche si une seule source autonome fonctionnait.

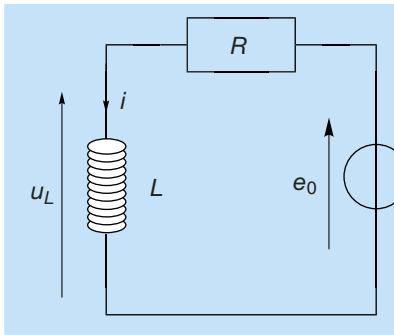
## 1.2 Régime transitoire

## Régime transitoire du circuit RC



$$u_C(t) = e_0 (1 - \exp(-t/\tau)) \text{ avec } \tau = RC$$

## Régime transitoire du circuit RL



$$u_L(t) = e_0 (1 - \exp(-t/\tau)) \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}$$

## 1.3 Régime variable

## Impédance complexe et phase des composants usuels

## Résistance :

$$Z = R$$

$$\varphi = 0$$

## Bobine :

$$Z = jL\omega$$

$$\varphi = +\frac{\pi}{2}$$



**Condensateur :**

$$Z = \frac{1}{jC\omega}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$Z$  : impédance  
 $R$  : valeur de la résistance  
 $C$  : capacité du condensateur  
 $L$  : inductance de la bobine  
 $\omega$  : pulsation  
 $\varphi$  : déphasage de  $u$  par rapport à  $i$

**Puissance reçue par un dipôle**

$$p(t) = u(t)i(t)$$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

$$\langle p \rangle_{\text{sinusoïdal}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$$

On se place en **convention récepteur**.

$p(t)$  : puissance instantanée reçue par le dipôle

$\langle p \rangle$  : puissance moyenne reçue par le dipôle

$u(t)$  : tension aux bornes de ce dipôle

$i(t)$  : intensité traversant le dipôle

$U_{\text{eff}}$  : tension efficace aux bornes du dipôle

$I_{\text{eff}}$  : intensité efficace traversant le dipôle

$\varphi$  : déphasage entre la tension et l'intensité  $\varphi = \arg \underline{Z}$  où  $\underline{Z}$  est l'impédance complexe

**Fonction de transfert**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

$\underline{H}(j\omega)$  : fonction de transfert

$\underline{s}$  : signal de sortie

$\underline{e}$  : signal d'entrée

**1.4 Montages avec amplificateur opérationnel****Généralités**

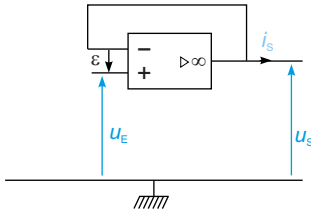
Pour un amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire :

-  $\varepsilon = V_+ - V_- = 0 \iff |u_S| \leq V_{\text{sat}}$ .

- Si  $\varepsilon < 0$ ,  $u_S = -V_{\text{sat}}$ , si  $\varepsilon > 0$ ,  $u_S = V_{\text{sat}}$  : on est en régime saturé.

- L'intensité entrant par les bornes + et - est nulle.

## Suiveur de tension



$$u_S = u_E$$

## 2. Thermodynamique

## 2.1 Gaz parfait

## Équation d'état

$$pV = nRT$$

$p$  : pression du gaz  
 $V$  : volume du gaz  
 $R = \mathcal{N} \cdot k$  : constante des gaz parfaits  
 $T$  : température  
 $n$  : quantité de matière

## Modèle de Van der Waals

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

$a, b$  : constantes positives  
 $n$  : quantité de matière  
 $p$  : pression  
 $T$  : température  
 $V$  : volume  
 $nb$  : covolume  
 $R$  : constante des gaz parfaits

## 2.2 Premier et second principes de la thermodynamique

## Premier principe

$$\Delta U = W + Q$$

$\Delta U$  : variation d'énergie interne  
 $W$  : transferts mécaniques reçus par le système  
 $Q$  : transferts thermiques reçus par le système

## Travail réversible des forces de pression

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} p \, dV$$

$W$  : travail des forces de pression  
 $V_i$  : volume initial  
 $V_f$  : volume final  
 $p$  : pression  
 Si la transformation est monobare, alors :  $W = -p\Delta V$

## Enthalpie

$$H = U + pV$$

$H$  : enthalpie  
 $U$  : énergie interne  
 $p$  : pression  
 $V$  : volume du système  
 L'enthalpie est une fonction d'état.

## Première loi de Joule pour un gaz parfait

$$dU = C_V dT$$

$dU$  : variation élémentaire d'énergie interne  
 $C_V$  : capacité thermique à volume constant  
 $dT$  : variation de température

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

Autre formulation :  $U$  ne dépend que de  $T$

## Seconde loi de Joule pour un gaz parfait

$$dH = C_p dT$$

$dH$  : variation élémentaire d'enthalpie

$C_p$  : capacité thermique à pression constante

$dT$  : variation de température

$$C_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p$$

Autre formulation :  $H$  ne dépend que de  $T$

## Gaz parfait monoatomique

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

$$H = \frac{5}{2}nRT$$

$U$  : énergie interne

$H$  : enthalpie

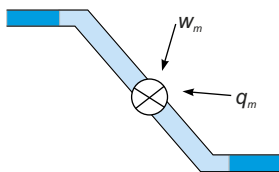
$n$  : quantité de matière

$R$  : constante des gaz parfaits

$T$  : température

## Bilan sur les écoulements permanents

$$(h_2 + e_{k2} + \rho g z_2) - (h_1 + e_{k1} + \rho g z_1) = w_m + q_m$$



$h_i$  : enthalpie massique

$e_{k_i}$  : énergie cinétique massique

$\rho g z_i$  : énergie potentielle de pesanteur massique

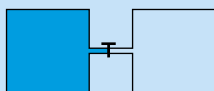
$w_m$  : transfert mécanique reçu par l'unité de masse de fluide qui traverse la machine

$q_m$  : transfert thermique reçu par l'unité de masse de fluide qui traverse la machine

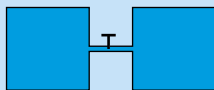
Cette relation est aussi appelée **relation de Zeuner**.

On indexe par 1 et 2 les grandeurs relatives au fluide respectivement en amont et en aval de la machine.

## Détente de Joule Gay-Lussac



état initial



état final

$$\Delta U = 0$$

$U$  : énergie interne

## Détente de Joule-Kelvin



$$h_1 + e_{k1} = h_2 + e_{k2}$$

En écoulement lent ( $e_{k_i} \ll h_i$ ), la détente est isenthalpique ( $h_2 = h_1$ ).

## Rapport des capacités thermiques

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} \geq 1$$

$$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} n$$

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1} n$$

$R$  : constante des gaz parfaits  
 $\gamma$  : rapport isentropique des capacités thermiques

## Second principe – Entropie

$$dS = \frac{\delta Q}{T_{\Sigma}} + \delta S_{\text{irrev}}$$

$S$  : entropie  
 $Q$  : transferts thermiques vers le système  
 $T_{\Sigma}$  : température de surface du système  
 $\delta S_{\text{irrev}} \geq 0$  : création d'entropie  
 L'entropie est une mesure statistique du désordre

## Identités thermodynamiques

$$dU = T dS - p dV$$

$$dH = T dS + V dp$$

$dU$  : variation élémentaire d'énergie interne  
 $dH$  : variation élémentaire d'enthalpie  
 $dS$  : variation élémentaire d'entropie  
 $p$  : pression du gaz  
 $V$  : volume du système  
 $T$  : température

## Lois de Laplace

$$p V^{\gamma} = \text{cste}_1$$

$$T V^{\gamma-1} = \text{cste}_2$$

$$T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{cste}_3$$

Ces lois décrivent l'évolution des paramètres thermodynamiques pour une transformation isentropique (adiabatique réversible) de gaz parfait.  
 $p$  : pression du gaz  
 $V$  : volume du système  
 $T$  : température  
 $\gamma$  : rapport isentropique

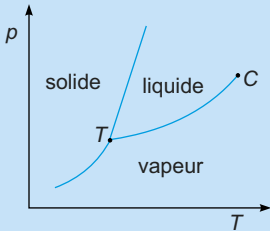
## Troisième principe

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$$

Pour un corps pur admettant une structure cristalline, l'entropie  $S$  tend vers zéro lorsque la température tend vers zéro kelvin.

### 2.3 Changements de phase d'un corps pur

#### Diagramme d'état



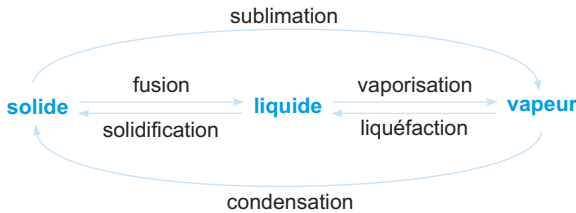
Le point  $C$  est le point critique au delà duquel on ne fait plus la différence entre la phase liquide et la phase vapeur (état fluide).

Le point  $T$  est le point triple où toutes les phases coexistent.

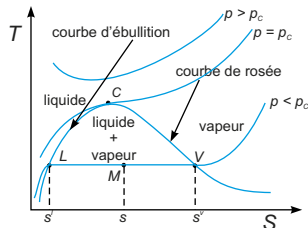
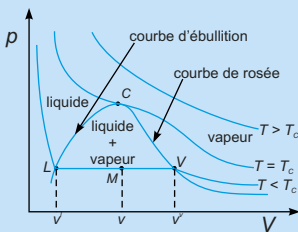
$p$  : pression

$T$  : température

#### Nomenclature des changements de phase



#### Diagramme d'équilibre liquide-vapeur



## Titre de vapeur – Titre de liquide

$$x_v = \frac{m_v}{m} = \frac{LM}{LV}$$

$$x_\ell = \frac{m_\ell}{m} = \frac{MV}{LV}$$

$x_\ell$  : titre massique de liquide

$x_v$  : titre massique de vapeur

$m_\ell, m_v$  : masse de liquide et de vapeur

$LM, LV, MV$  : distance  $LM, LV, MV$

mesurées sur un des deux diagrammes d'état précédent.

On a également la relation :

$$x_\ell + x_v = 1$$

## Expression des fonctions d'état

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2$$

$$h = x_1 h_1 + x_2 h_2$$

$$s = x_1 s_1 + x_2 s_2$$

$x_i$  : le titre massique du corps pur dans la phase  $i$

$u_i, h_i, s_i$  : l'énergie interne massique, l'enthalpie massique et l'entropie massique du corps dans la phase  $i$

$u, h, s$  : l'énergie interne massique, l'enthalpie massique et l'entropie massique du corps

## Chaleur latente

$$\ell_{1 \rightarrow 2} = h_2 - h_1 = T(s_2 - s_1)$$

$\ell_{1 \rightarrow 2}$  : chaleur latente massique de passage de la phase 1 à la phase 2

$h_i$  : enthalpie massique du corps dans la phase  $i$

$s_i$  : entropie massique du corps dans la phase  $i$

$T$  : température de coexistence des phases

## Relation de Clapeyron

$$\ell_{1 \rightarrow 2} = T(v_2 - v_1) \frac{\partial p}{\partial t}$$

$\ell_{1 \rightarrow 2}$  : chaleur latente massique de passage de la phase 1 à la phase 2

$v_i$  : volume massique du corps dans la phase  $i$

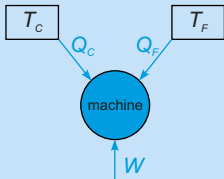
$p$  : pression

$T$  : température de changement d'état



## 2.4 Machines thermiques

### Machines dithermes



$T_C$  : température de la source chaude  
 $Q_C$  : transfert thermique algébrique de la source chaude vers la machine  
 $T_F$  : température de la source froide  
 $Q_F$  : transfert thermique algébrique de la source froide vers la machine  
 $W$  : transfert mécanique reçu par la machine

### Premier et second principes appliqués sur un cycle

$$\Delta U = 0$$

$$\Delta S = 0$$

Sur un cycle, la variation d'énergie interne ( $U$ ) et d'entropie ( $S$ ) est nulle (fonctions d'état).

### Inégalité de Clausius

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$$

(Second principe appliqué à la machine)  
 $T_C$  : température de la source chaude  
 $Q_C$  : transfert thermique algébrique de la source chaude vers la machine  
 $T_F$  : température de la source froide  
 $Q_F$  : transfert thermique algébrique de la source froide vers la machine

### Efficacité de Carnot du moteur ditherme

$$e_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

$$e \leq e_C$$

$e_C$  : efficacité de Carnot (machine réversible)  
 $T_C$  : température de la source chaude  
 $T_F$  : température de la source froide  
 $e$  : efficacité réelle

## Efficacité de Carnot du réfrigérateur ditherme

$$e_C = \frac{T_F}{T_C - T_F}$$

$$e \leq e_C$$

$e_C$  : efficacité de Carnot (machine réversible)  
 $T_C$  : température de la source chaude  
 $T_F$  : température de la source froide  
 $e$  : efficacité réelle

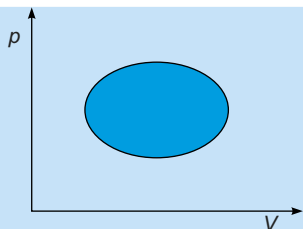
## Efficacité de Carnot de la pompe à chaleur

$$e_C = \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

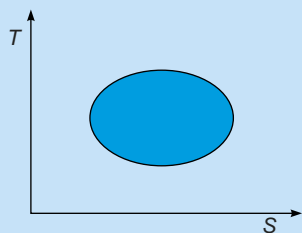
$$e \leq e_C$$

$e_C$  : efficacité de Carnot (machine réversible)  
 $T_C$  : température de la source chaude  
 $T_F$  : température de la source froide  
 $e$  : efficacité réelle

## Représentation du cycle



Le transfert mécanique reçu par la machine correspond à l'aire intérieure à la courbe dans le diagramme de Clapeyron ( $p, V$ ). Cette aire doit donc être négative (parcourue dans le sens horaire) pour obtenir un moteur. ( $w < 0$ )



Le transfert thermique reçu correspond à l'aire intérieure à la courbe dans le diagramme ( $S, T$ ).

## Énergie libre

$$F = U - TS$$

$F$  : énergie libre  
 $T$  : température  
 $U$  : énergie interne  
 $S$  : entropie

## Enthalpie libre

$$G = H - TS$$

$G$  : enthalpie libre  
 $T$  : température  
 $H$  : enthalpie  
 $S$  : entropie

Identités thermodynamiques relatives à  $F$  et  $G$ 

$$\begin{aligned} dF &= -S dT - p dV \\ dG &= -S dT + V dp \end{aligned}$$

$F$  : énergie libre  
 $G$  : enthalpie libre  
 $p$  : pression  
 $T$  : température  
 $V$  : volume du système  
 $S$  : entropie

## Corps diphasé

$$g_1 = g_2$$

Pour un corps pur sous deux phases, les deux enthalpies libres massiques ( $g_i$ ) sont égales.

## Relation de Gibbs–Helmoltz

$$U = -T^2 \left( \frac{\partial(F/T)}{\partial T} \right)_V$$

$$H = -T^2 \left( \frac{\partial(G/T)}{\partial T} \right)_p$$

$p$  : pression  
 $T$  : température  
 $V$  : volume du système  
 $U$  : énergie interne  
 $H$  : enthalpie  
 $F$  : énergie libre  
 $G$  : enthalpie libre

## 2.6 Diffusion de particules

## Flux de particules

$$\delta N = \mathbf{j}_D \mathbf{n} \, dS \, dt$$

$\delta N$  : nombre de particules qui traversent  $dS$  pendant  $dt$   
 $\mathbf{j}_D$  : vecteur courant de diffusion  
 $\mathbf{n}$  : normale à la surface  $dS$

## Loi de Fick

$$\mathbf{j}_D = -D \mathbf{grad} n^*$$

$\mathbf{j}_D$  : vecteur courant de diffusion  
 $D$  : coefficient de diffusion  
 $n^*$  : densité particulaire

## Équation de diffusion

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}$$

$D$  : coefficient de diffusion  
 $n^*$  : densité particulaire

## 2.7 Diffusion thermique

## Flux thermique

$$\Phi_{th} = \iint_S \mathbf{j}_{th} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$\Phi_{th}$  : flux thermique  
 $\mathbf{j}_{th}$  : vecteur courant de diffusion thermique  
 $\mathbf{n}$  : normale à la surface  $dS$

## Loi de Fourier

$$\mathbf{j}_{th} = -\lambda \mathbf{grad} T$$

$\mathbf{j}_{th}$  : vecteur courant de diffusion thermique  
 $T$  : température  
 $\lambda$  : conductivité thermique

## Équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\kappa = \frac{\lambda}{\rho C}$$

$\kappa$  : diffusivité thermique  
 $T$  : température  
 $\lambda$  : conductivité thermique  
 $\rho$  : masse volumique  
 $C$  : capacité thermique

## Convection

$$j_c = -h(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})$$

$j_c$  : courant de convection algébrique  
 $h$  : coefficient de convection  
 $T_{\text{int}}$  : température intérieure  
 $T_{\text{ext}}$  : température extérieure

### 3. Mécanique du point

#### 3.1 Cinématique

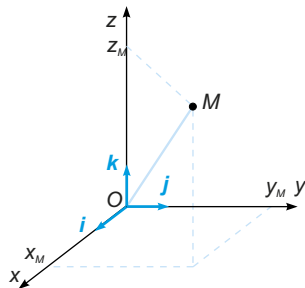
## Coordonnées cartésiennes

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$x$  : abscisse  
 $y$  : ordonnée  
 $z$  : cote

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$



## Coordonnées cylindriques

$$\mathbf{OM} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$$

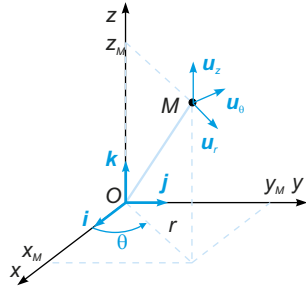
$r$  : rayon polaire

$\theta$  : angle polaire

$z$  : cote

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{u}_z \end{matrix}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{u}_z \end{matrix}$$



## Mouvement circulaire uniforme

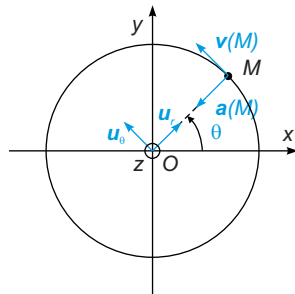
$$\mathbf{OM} = r\mathbf{u}_r$$

$r$  : rayon polaire

$\theta$  : angle polaire

$\omega$  : vitesse angulaire uniforme

( $\omega = \omega\mathbf{u}_z$ )



$$\mathbf{v} = \omega\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{OM} = \omega r\mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{a} = -\omega^2 r\mathbf{u}_r = -\frac{v^2}{r}\mathbf{u}_r$$

## Référentiels en translation rectiligne

$$\mathbf{v}_{R'} = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_e$$

$\mathbf{v}_e$  est la vitesse d'entraînement.

## 3.2 Lois générales de la mécanique

## Principe des actions réciproques

$$\mathbf{f}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{f}_{2 \rightarrow 1}$$

$\mathbf{f}_{i \rightarrow j}$  : force de  $i$  sur  $j$

## Principe fondamental de la dynamique

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_i \mathbf{f}_i$$

$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  : quantité de mouvement du système

$\mathbf{f}_i$  : force appliquée au système

$\sum_i \mathbf{f}_i$  : résultante des forces

## Quantité de mouvement d'un système fermé

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}(P_i) = M\mathbf{v}(G)$$

$\mathbf{p}$  : quantité de mouvement du système

$m_i$  : masse associée au point matériel  $P_i$

$M$  : masse du système

$G$  : centre de masse du système

## Puissance d'une force

$$\mathcal{P} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

$\mathcal{P}$  : puissance de la force  $\mathbf{f}$

$\mathbf{f}$  : force

$\mathbf{v}(G)$  : vitesse du point matériel

## Énergie cinétique d'un point et d'un système de points

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_k = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2$$

$E_k$  énergie cinétique

$m$  : masse du système

$m_i$  : masse du point matériel  $P_i$

$v$  : vitesse du système

$v_i$  : vitesse du point matériel  $P_i$

## Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{dE_k}{dt} = \mathcal{P}$$

$E_k$  : énergie cinétique  
 $\mathcal{P}$  : puissance des forces appliquées au système

## Énergie mécanique

$$E_m = E_k + E_p$$

$E_m$  : énergie mécanique  
 $E_k$  : énergie cinétique  
 $E_p$  : énergie potentielle

## Énergies potentielles

– énergie potentielle de pesanteur

$$E_{p_{\text{pes}}} = Mgz_G$$

$E_{p_{\text{pes}}}$  : énergie potentielle de pesanteur  
 $m$  : masse du système  
 $g$  : accélération de pesanteur  
 $z_G$  : cote du centre de gravité du système

– énergie potentielle élastique

$$E_{p_{\text{elas}}} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

$E_{p_{\text{elas}}}$  : énergie potentielle élastique  
 $k$  : constante de raideur du ressort  
 $\Delta l$  : allongement du ressort

– énergie potentielle de gravitation

$$E_{p_{\text{grav}}} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r}$$

$E_{p_{\text{grav}}}$  : énergie potentielle de gravitation  
 $\mathcal{G}$  : constante universelle de gravitation  
 $m_1, m_2$  : masses en interaction  
 $r$  : distance séparant les deux masses

– énergie potentielle électrique

$$E_{p_{\text{el}}} = qV$$

$E_{p_{\text{el}}}$  : énergie potentielle électrique  
 $q$  : charge ponctuelle  
 $V$  : potentiel au point où se trouve la charge



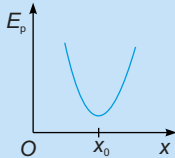
## Équilibre

$$\frac{dE_P}{dx}(x_0) = 0$$

$x_0$  : position d'équilibre  
 $E_P$  : énergie potentielle

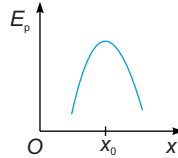
## Équilibre stable – Équilibre instable

$$\frac{d^2 E_P}{dx^2}(x_0) \geq 0$$



Minimum d'énergie potentielle :  
 équilibre stable

$$\frac{d^2 E_P}{dx^2}(x_0) \leq 0$$



Maximum d'énergie potentielle :  
 équilibre instable

## Forces conservatives

$$\mathbf{F}_{\text{cons}} = -\text{grad}E_P$$

Les forces conservatives dérivent  
 d'une énergie potentielle.

## Théorème de l'énergie mécanique

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext non cons}} + \mathcal{P}_{\text{int non cons}}$$

$E_m$  : énergie mécanique  
 $\mathcal{P}_{\text{ext non cons}}$  : puissance des forces  
 extérieures au système non  
 conservatives  
 $\mathcal{P}_{\text{int non cons}}$  : puissance des forces  
 intérieures au système (dans le  
 cas d'un système de points) non  
 conservatives

## 3.3 Oscillateurs

On se reportera également aux oscillateurs électriques dans la partie électronique de cet ouvrage.

## Oscillateur harmonique

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \omega_0^2 A = 0$$

$$A = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t$$

$$A = \gamma \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Un oscillateur harmonique est régi par l'équation ci-contre où :  
 $A$  : grandeur physique  
 $\omega_0$  : pulsation de l'oscillateur  
 $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$  : constantes déterminées par les conditions initiales

## Oscillateur harmonique amorti

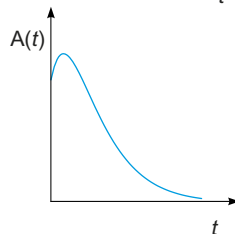
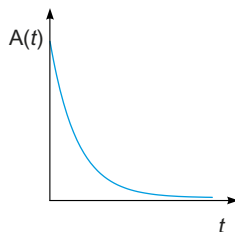
$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dA}{dt} + \omega_0^2 A = 0$$

$A$  : grandeur physique  
 $\omega_0$  : pulsation de l'oscillateur harmonique  
 $Q$  : facteur de qualité de l'oscillateur

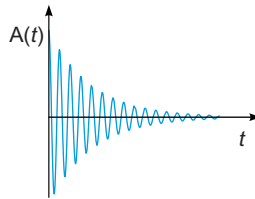
## Réponses d'un oscillateur harmonique amorti

$Q > 1/2$ , les deux racines de l'équation caractéristique  $r_1$  et  $r_2$  sont réelles, la solution est du type apériodique :  $A(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$

$Q = 1/2$ , on est en régime critique, l'équation caractéristique admet une racine double  $r$ . La solution est :  $A(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt}$



$Q < 1/2$ , les deux racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées, la solution est alors pseudo-périodique :  $A(t) = (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))e^{\alpha t}$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement parties réelle et imaginaire de la solution.



## 4. Mécanique des fluides

### 4.1 Statique des fluides

#### Équivalent volumique des forces de pression

$$d\mathbf{F} = -(\text{grad} p) d\tau$$

$d\mathbf{F}$  : résultante des forces de pression s'exerçant sur un volume  $d\tau$   
 $p$  : pression du fluide

#### Relation fondamentale de la statique des fluides

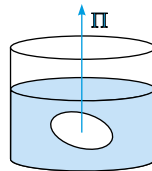
$$\text{grad} p = \rho \mathbf{f}$$

$p$  : pression  
 $\rho$  : masse volumique du fluide  
 $\mathbf{f}$  : densité volumique de forces ( $\mathbf{g}$ , si le corps est soumis à son seul poids).

#### Poussée d'Archimède

$$\Pi = -\rho \mathbf{g} \tau$$

$\Pi$  : poussée d'Archimède  
 $\rho$  : masse volumique du fluide  
 $\mathbf{g}$  : accélération de la pesanteur  
 $\tau$  : volume du corps immergé  
 Un corps immergé dans un fluide subit de la part de ce dernier une poussée verticale ascendante égale en module au poids du fluide déplacé.



## 4.2 Dynamique des fluides

## Vecteur courant de masse

$$\mathbf{j}_m = \rho \mathbf{v}$$

$\mathbf{j}_m$  : vecteur courant de masse  
 $\rho$  : masse volumique du fluide  
 $\mathbf{v}$  : vitesse du fluide

## Débit massique

$$D_m = \iint_S \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$D_m = \rho S v_{\text{moy}}$$

$\mathbf{j}_m$  : vecteur courant de masse  
 $\mathbf{n}$  : normale à la surface  
 $v_{\text{moy}}$  : vitesse moyenne sur la section  
 Si la vitesse est constante sur la section alors :  $D_m = \rho S v$ .

On utilise également le débit volumique défini par :

$$D_v = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

## Quelques valeurs importantes de masses volumiques

$$\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_{\text{air}} \sim 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Cette valeur dépend fortement de la température.

## 4.3 Actions de contact dans un fluide

## Force de viscosité

$$\mathbf{f} = -\eta \frac{\partial v}{\partial z} S \mathbf{u}_x$$

$\mathbf{f}$  : force de viscosité  
 $\eta$  : viscosité dynamique du fluide  
 $v(z, t) \mathbf{u}_x$  : vitesse du fluide  
 $\mathbf{u}_x$  : vecteur unitaire directionnel de l'écoulement  
 $S$  : surface de contact

### Nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta}$$

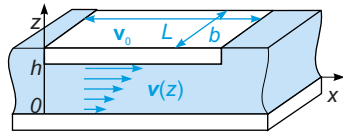
$Re$  : nombre de Reynolds  
 $\rho$  : masse volumique du fluide  
 $v$  : vitesse caractéristique de l'écoulement  
 $L$  : longueur caractéristique de l'écoulement  
 $\eta$  : viscosité dynamique du fluide

– Si  $Re \geq 10^3$  l'écoulement est turbulent.  
 – Si  $Re \leq 1$  l'écoulement est laminaire.

### Premier écoulement de Couette

$$\mathbf{v}(z) = v_0 \frac{z}{h} \mathbf{u}_x$$

$$z \in [0, h]$$



## 4.4 Écoulements parfaits

### Position du problème

On appelle écoulement parfait un écoulement à grand nombre de Reynolds où le terme de viscosité est négligeable (sauf dans une très faible épaisseur appelée couche limite) devant les termes d'inertie.

### Théorème de Bernoulli

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z = cste$$

Conditions d'applications :

1. écoulement parfait (pas de force de viscosité) ;
2. écoulement stationnaire :  $\left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(M, t) = 0 \right)$  ;
3. fluide incompressible ;
4. pas de forces extérieures autres que la pesanteur uniforme.

La quantité de Bernoulli est constante sur une ligne de courant.

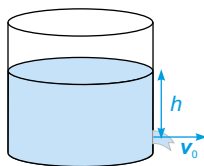
$\rho$  : masse volumique du fluide  
 $v$  : vitesse du fluide  
 $p$  : pression  
 $g$  : accélération de pesanteur  
 $z$  : cote

Si l'écoulement est irrotationnel, la quantité de Bernoulli est constante sur tout l'écoulement.

## Relation de Torricelli

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

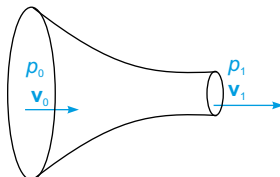
$v_0$  : vitesse de sortie  
 $g$  : accélération de pesanteur  
 $h$  : différence de niveau entre la surface libre du fluide et l'orifice



## Effet Venturi

Dans un écoulement parfait horizontal d'un fluide incompressible, la pression est d'autant plus faible que la vitesse est élevée.

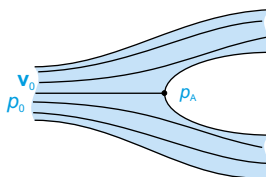
$$\begin{aligned} v_1 &> v_0 \\ p_1 &< p_0 \end{aligned}$$



## Pression d'un point d'arrêt

$$p_A = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2$$

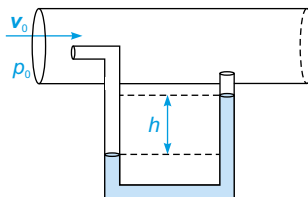
$p_A$  : pression du point d'arrêt  
 $p_0$  : pression du fluide non perturbé  
 $v_0$  : vitesse du fluide non perturbé  
 $\rho$  : masse volumique du fluide



## Tube de Pitot

$$h = \frac{\rho_{\text{gaz}} v_0^2}{2\rho_{\text{liq}} g}$$

$h$  : différence de niveau  
 $v_0$  : vitesse d'écoulement du gaz dans la canalisation  
 $\rho_{\text{gaz}}$  : masse volumique du gaz en écoulement  
 $\rho_{\text{liq}}$  : masse volumique du liquide dans le tube de Pitot  
 $g$  : accélération de pesanteur  
 Ce tube permet de mesurer la vitesse d'écoulement d'un gaz.



## 4.5 Bilans sur les écoulements

### Théorème d'Euler

En régime stationnaire :

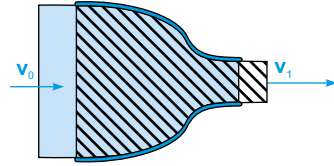
$$\mathbf{F}_{\text{fluide}} = D_m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0)$$

$\mathbf{F}_{\text{fluide}}$  : force exercée par le fluide extérieur sur le système

$D_m$  : débit massique

$\mathbf{v}_1$  : vitesse de sortie

$\mathbf{v}_0$  : vitesse d'entrée



## 5. Optique

### 5.1 Généralités

#### Propagation dans le vide d'une onde lumineuse

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$$

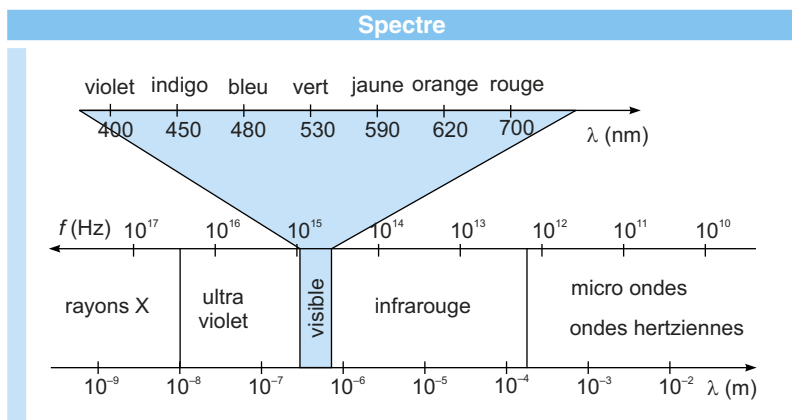
$\lambda$  : longueur d'onde du signal  
 $c$  : vitesse de la lumière dans le vide  
 $\nu$  : fréquence du signal  
 $T$  : période du signal

#### Propagation dans un milieu transparent, isotrope, homogène

$$v = \frac{c}{n}$$

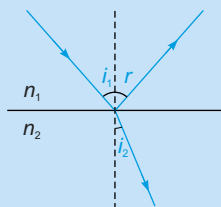
$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}$$

$v$  : vitesse de la lumière dans le milieu  
 $n$  : indice du milieu  
 $T$  : période du signal  
 $\nu$  : fréquence du signal



## 5.2 Optique géométrique

### Loi de Snell–Descartes



$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

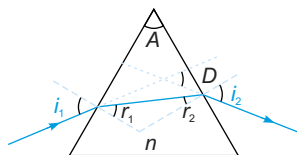
$$r = i_1$$

### Prisme

$$\sin i_1 = n \sin r_1$$

$$\sin i_2 = n \sin r_2$$

$$r_1 + r_2 = A$$





### Déviation du prisme

$$D = i_1 + i_2 - A$$

$$D_m = 2 \arcsin \left( n \sin \frac{A}{2} \right) - A$$

$D$  : déviation

$A$  : angle au sommet du prisme

$D_m$  : minimum de déviation

$i$  : angle d'incidence au minimum de déviation

### Approximation de Gauss

Pour se placer dans l'approximation de Gauss, il faut des faisceaux peu ouverts et des angles d'incidence petits.

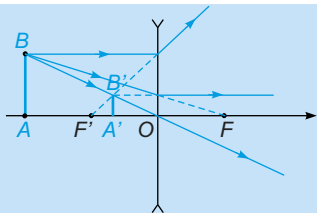
### Miroir plan

$$p' = -p$$

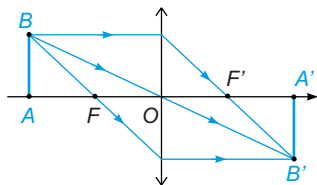
$p'$  : distance algébrique de  $S$  au point image

$p$  : distance algébrique de  $S$  au point objet

### Lentilles minces



Lentille divergente



Lentille convergente

### Relation de conjugaison des lentilles minces

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

$f'$  : distance focale de la lentille ( $f' < 0$  pour une lentille divergente et  $f' > 0$  pour une lentille convergente).

$p'$  : distance algébrique du foyer au point image

$p$  : distance algébrique du foyer au point objet

## Relation de Descartes – Relation de Newton

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$$

(relation de Descartes)

$$ff' = (p' - f')(p - f)$$

(relation de Newton)

## Grandissement

$$\gamma = \frac{p'}{p}$$

 $\gamma$  : grandissement $p'$  : distance algébrique de  $O$  au point image $p$  : distance algébrique de  $O$  au point objet

## 5.3 Interférences lumineuses

## Obtention d'interférences

On ne peut obtenir d'interférences qu'avec des rayons lumineux issus de deux sources cohérentes secondaires, obtenues avec une seule source par division ou du front d'onde ou de l'amplitude.

## Chemin optique dans un milieu homogène isotrope

$$[SM] = c \cdot \tau_{SM}$$

 $[SM]$  : chemin optique de  $S$  à  $M$   
 $c$  : vitesse de la lumière dans le vide $\tau_{SM}$  : temps mis par le signal pour parcourir la distance  $SM$ 

## Différence de marche

$$\delta = [SP_1M] - [SP_2M]$$

 $\delta$  : différence de marche $[SP_jM]$  : chemin optique du rayon passant par  $P_j$ 

## Vibration lumineuse

$$s(M) = s_0 \cos \left( \omega t - \varphi_S - \frac{2\pi}{\lambda} [SM] \right)$$

 $s(M)$  : vibration lumineuse en  $M$  $s_0$  : amplitude de la vibration $\omega$  : pulsation de la vibration lumineuse $\varphi_S$  : phase de la vibration à la source $\lambda$  : longueur d'onde $[SM]$  : chemin optique de  $S$  à  $M$

## Plan d'onde

On appelle plan d'onde un plan où tous les points sont dans le même état vibratoire.

## Éclairement

$$E(M) = \alpha s^2(M)$$

$E(M)$  : éclairement au point  $M$   
 $\alpha = c\varepsilon_0$  : une constante positive  
 ( $E$  est en fait le vecteur de Poyting, voir cours d'électromagnétisme)  
 $s(M)$  : vibration lumineuse en  $M$

## Interférences

$$E(M) = 2E_0(1 + \cos \Delta\varphi(M))$$

$E(M)$  : éclairement  
 $E_0$  : éclairement de la source  
 $\Delta\varphi(M)$  : déphasage en  $M$   
 L'écran est brillant si  $\Delta\varphi = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$   
 L'écran est noir si :  
 $\Delta\varphi = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

## Ordre d'interférence

$$p = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda}$$

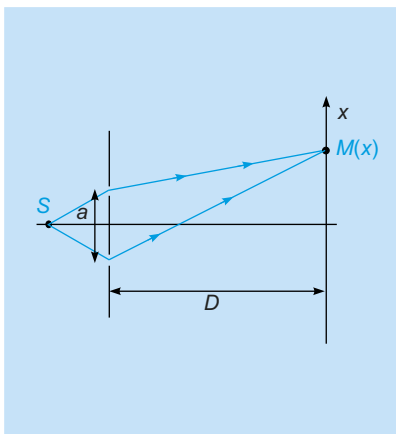
$p$  : ordre d'interférence  
 $\Delta\varphi$  : déphasage en  $M$   
 $\delta$  : différence de marche  
 $\lambda$  : longueur d'onde  
 L'écran est brillant si  $p \in \mathbb{Z}$   
 L'écran est sombre si  $(p + \frac{1}{2}) \in \mathbb{Z}$

## Contraste

$$C = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}$$

$C$  : contraste  
 $E_{\max}$  : éclairement maximum  
 $E_{\min}$  : éclairement minimum

## Trous d'Young



$$\delta(x) = \frac{ax}{D} \text{ (différence de marche)}$$

$$E(x) = 2E_0 \left( 1 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda D} \right)$$

$$i = \frac{\lambda D}{a} \text{ (interfrange)}$$

## Expression de l'éclairement des miroirs de Fresnel

$$E(x) = \frac{E_0}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right)$$

$$\delta = \frac{2d\alpha}{d+D}$$

$\alpha$  : angle entre les miroirs  
 $x$  : abscisse d'un point de l'écran  
 $d$  : distance entre la source et l'arrête des miroirs  
 $D$  : distance entre l'arrête des miroirs et l'écran  
 $\lambda$  : longueur d'onde



# Annexe A

## Primitives usuelles

Primitive	Intervalle
$\int \frac{dt}{t} = \ln  t  + k$	$\mathbb{R}^*$
$\int \cos t \, dt = \sin t + k$	$\mathbb{R}$
$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + k$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln \left  \tan \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right  + k$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$
$\int \tan t \, dt = -\ln  \cos t  + k$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$
$\int \operatorname{ch} t \, dt = \operatorname{sh} t + k$	$\mathbb{R}$
$\int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t + k$	$\mathbb{R}$
$\int \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = 2 \operatorname{Arctan} e^t + k$	$\mathbb{R}$
$\int \operatorname{th} t \, dt = \ln \operatorname{ch} t + k$	$\mathbb{R}$
$\int e^{mt} \, dt = \frac{1}{m} e^{mt} + k, (m \in \mathbb{C}^*)$	$\mathbb{R}$
$\int t^\alpha \, dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, (\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\})$	$\mathbb{R}$
$\int \sin t \, dt = -\cos t + k$	$\mathbb{R}$

$$\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\cot t + k \quad \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + k \quad \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \cot t \, dt = \ln |\sin t| + k \quad \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \operatorname{sh} t \, dt = \operatorname{ch} t + k \quad \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{coth} t + k \quad \mathbb{R}^*$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{t}{2} \right| + k \quad \mathbb{R}^*$$

$$\int \operatorname{coth} t \, dt = \ln |\operatorname{sh} t| + k \quad \mathbb{R}$$

$$\int a^t \, dt = \frac{a^t}{\ln a} + k, (a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}) \quad \mathbb{R}$$

Dans la suite on suppose :  $a \in \mathbb{R}^*$

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{t}{a} + k \quad \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \begin{cases} \operatorname{Arcsin} \frac{t}{|a|} + k \\ -\operatorname{Arccos} \frac{t}{|a|} + k \end{cases} \quad ] -a, a[$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + a^2}} = \begin{cases} \operatorname{Argsh} \frac{t}{|a|} + k \\ \ln (t + \sqrt{t^2 + a^2}) + k \end{cases} \quad \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \begin{cases} \begin{cases} \operatorname{Argch} \frac{t}{|a|} + k \\ \ln (t + \sqrt{t^2 - a^2}) + k \end{cases} & ]|a|, +\infty[ \\ \begin{cases} -\operatorname{Argch} \left| \frac{t}{a} \right| + k \\ \ln |t + \sqrt{t^2 - a^2}| + k \end{cases} & ] -\infty, |a|[ \end{cases}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + b}} = \ln |t + \sqrt{t^2 + b}| + k, (b \in \mathbb{R}^*) \quad \mathbb{R}[-b, b]$$

$$\int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \begin{cases} \operatorname{Argth} t + k \\ \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{t-a}{t+a} \right) + k \end{cases}$$

# Développements limités

## Principaux développements limités

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(a+x) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{a^n} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$



$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$$

$$\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$$

$\operatorname{Argch} x$  n'est pas défini au voisinage de 0 et n'admet pas de développement limité au voisinage de 1 (tangente verticale).

$$\operatorname{Argsh} = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$$

# Formules trigonométriques

## 1. Angles remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

## 2. Relations trigonométriques

### Relations entre les rapports trigonométriques d'un même arc

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \tan^2 a}$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

$$\sin^2 a = \frac{1}{1 + \cot^2 a}$$

### Formules d'addition

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

### Formules de duplication

$$\cos(2a) = \begin{cases} \cos^2 a - \sin^2 a \\ 2 \cos^2 a - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 a \end{cases}$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

### Expression de $\cos a$ , $\sin a$ , $\tan a$ , en fonction de $\tan a/2$

$$\cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$\sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$\tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}$$

### Transformations de produits en sommes

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) + \cos(a + b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

$$\sin b \cos a = \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

### Transformation des sommes en produits

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

### Arcs associés

$$\cos(-a) = \cos a$$

$$\cos(\pi + a) = -\cos a$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$$

$$\tan(\pi + a) = \tan a$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$$

$$\sin(-a) = -\sin a$$

$$\sin(\pi + a) = -\sin a$$

$$\sin(\pi - a) = \sin a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$$

$$\cot(\pi + a) = \cot a$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$$

### Fonctions circulaires réciproques

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 :$$

$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \begin{cases} \operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab} & \text{si } ab < 1 \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a & \text{si } ab = 1 \\ \operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab} + \pi \operatorname{sgn} a & \text{si } ab > 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$$

### Trigonométrie hyperbolique

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

$$\operatorname{ch} 2a = \begin{cases} \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a \\ 2 \operatorname{ch}^2 a - 1 \\ 1 + 2 \operatorname{sh}^2 a \end{cases}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

$$\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{th} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}$$

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$$

# Unités et constantes fondamentales

## 1. Unités du Système International

On distingue trois types d'unités dans le Système International : les unités de base, les unités supplémentaires (ces deux premières catégories étant dimensionnellement indépendante) et les unités supplémentaires et dérivées qui peuvent s'exprimer en fonction des premières.

### 1.1 Unités principales du système international

Grandeur physique	Unité	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Courant électrique	ampère	A
Température	kelvin	K
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

## 1.2 Unités secondaires du système international

Grandeur physique	Unité	Symbole
Angle	radian	rad
Angle solide	steradian	sr

## 1.3 Unités courantes du système international

Grandeur physique	Unité	Symbole
Fréquence	hertz	Hz $\leftrightarrow$ s <sup>-1</sup>
Force	newton	N $\leftrightarrow$ kg · m · s <sup>-2</sup>
Énergie	joule	J $\leftrightarrow$ m · N
Puissance	watt	W $\leftrightarrow$ J · s <sup>-1</sup>
Pression	pascal	Pa $\leftrightarrow$ N · m <sup>-2</sup>
Charge électrique	coulomb	C $\leftrightarrow$ A · s
Différence de potentiel électrique	volt	V $\leftrightarrow$ A <sup>-1</sup> · m · N · s <sup>-1</sup>
Résistance électrique	ohm	$\Omega$ $\leftrightarrow$ A <sup>-1</sup> · m · N · s <sup>-2</sup>
Conductance électrique	siemens	S $\leftrightarrow$ A <sup>2</sup> · N · s
Capacité électrique	farad	F $\leftrightarrow$ A <sup>2</sup> · m <sup>-1</sup> · N <sup>-1</sup> · s <sup>2</sup>
Champ magnétique	tesla	T $\leftrightarrow$ A <sup>-1</sup> · m <sup>-1</sup> · N
Inductance	henry	H $\leftrightarrow$ A <sup>-2</sup> · m · N
Flux magnétique	weber	Wb $\leftrightarrow$ A <sup>-1</sup> · m · N
Flux lumineux	lumen	lm $\leftrightarrow$ cd · sr
Illumination	lux	lx $\leftrightarrow$ cd · m <sup>-2</sup> · sr

## 1.4 Multiples décimaux pour les unités

Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole
10	déca-	da	10 <sup>-1</sup>	déci-	d
10 <sup>2</sup>	hecto-	h	10 <sup>-2</sup>	centi-	c
10 <sup>3</sup>	kilo-	k	10 <sup>-3</sup>	milli-	m
10 <sup>6</sup>	méga-	M	10 <sup>-6</sup>	micro-	$\mu$
10 <sup>9</sup>	giga-	G	10 <sup>-9</sup>	nano-	n
10 <sup>12</sup>	tera-	T	10 <sup>-12</sup>	pico-	p
10 <sup>15</sup>	péta-	P	10 <sup>-15</sup>	femto	f
10 <sup>18</sup>	exa-	E	10 <sup>-18</sup>	atto-	a

## 2. Constantes fondamentales

Constante	Valeur
Constante de gravitation	$G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ $\mu_0 \approx 1,25664 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 \approx 8,85419 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$ $h = 4,135669 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Nombre d'Avogadro	$\mathcal{N} = 6,0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k = 1,380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Constante de Faraday	$\mathcal{F} = 96485,309 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,67051 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

## 3. Ordres de grandeurs

Grandeur	Valeur
Conductivité du métal	$\sigma \approx 10^8 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
Tension de seuil pour une diode	$V_d \approx 0,6 \text{ V}$
Champ de pesanteur à la surface de la Terre	$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Rayon terrestre	$R_T = 6400 \text{ km}$
Masse de la Terre	$M_T \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Altitude d'un satellite géostationnaire	$H \approx 36\,000 \text{ km}$
Distance Terre-Soleil	$d_{T-S} \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Distance Terre-Lune	$d_{T-L} \approx 3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$
Masse du soleil	$M_S \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Coefficient de frottement acier-acier	$\mu \approx 0,2$
Raideur d'un ressort	$k \approx 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
Masse du proton	$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du neutron	$m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$



# Constantes chimiques

## 1. Potentiels standards redox

(À 25°C, 1,013 bar, pH=0)

Couples redox	E <sup>0</sup> en volts
$\text{MnO}_4^- + 4\text{H}^+ + 3e^- = \text{MnO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,700
$\text{MnO}_4^- + 8\text{H}^+ + 5e^- = \text{Mn}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$	1,490
$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14\text{H}^+ + 6e^- = 2\text{Cr}^{3+} + 7\text{H}_2\text{O}$	1,330
$\text{MnO}_2 + 4\text{H}^+ + 2e^- = \text{Mn}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,230
$\text{Br}_2 + 2e^- = 2\text{Br}^-$	1,090
$\text{Hg}^{2+} + 2e^- = \text{Hg}$	0,850
$\text{Ag}^+ + e^- = \text{Ag}$	0,798
$\text{Hg}_2^{2+} + 2e^- = 2\text{Hg}^+$	0,790
$\text{Fe}^{3+} + e^- = \text{Fe}^{2+}$	0,780
$\text{MnO}_4^- + e^- = \text{MnO}_4^{2-}$	0,560
$\text{I}_2 + 2e^- = 2\text{I}^-$	0,540
$\text{Cu}^{2+} + 2e^- = \text{Cu}$	0,340
$\text{Cu}^{2+} + e^- = \text{Cu}^+$	0,150
$2\text{H}^+ + 2e^- = \text{H}_2$	0,000
$\text{Fe}^{3+} + 3e^- = \text{Fe}$	-0,040

Couples redox	$E^0$ en volts
$Pb^{2+} + 2e^- = Pb$	-0,120
$Sn^{2+} + 2e^- = Sn$	-0,140
$Fe^{2+} + 2e^- = Fe$	-0,441
$Zn^{2+} + 2e^- = Zn$	-0,762
$Mn^{2+} + 2e^- = Mn$	-1,180
$Al^{3+} + 3e^- = Al$	-1,660
$Na^+ + e^- = Na$	-2,715
$Ca^{2+} + 2e^- = Ca$	-2,763
$Ba^{2+} + 2e^- = Ba$	-2,900
$K^+ + e^- = K$	-2,924

## 2. Constantes d'acidité

(À 25°C, 1,013 bar dans l'eau)

Nom de l'acide	Acide	Base	$K_a$	pKa
Acide oxalique	$H_2C_2O_4$	$HC_2O_4^-$	$5,7 \cdot 10^{-2}$	1,24
Acide sulfureux	$H_2SO_3$	$HSO_3^-$	$1,7 \cdot 10^{-1}$	1,8
Acide phosphorique	$H_3PO_4$	$H_2PO_4^-$	$8 \cdot 10^{-3}$	2,1
Fluorure d'hydrogène	HF	$F^-$	$6,3 \cdot 10^{-1}$	3,2
Acide nitreux	$HNO_2$	$NO_2^-$	$4 \cdot 10^{-4}$	3,4
Acide formique	HCOOH	$HCOO^-$	$2 \cdot 10^{-4}$	3,7
Ion hydrogénéoxalate	$HC_2O_4^-$	$C_2O_4^{2-}$	$6,3 \cdot 10^{-5}$	4,2
Acide benzoïque	$C_6H_5COOH$	$C_6H_5COO^-$	$6,8 \cdot 10^{-1}$	4,2
Acide acétique	$CH_3COOH$	$CH_3COO^-$	$1,8 \cdot 10^{-5}$	4,8
Acide carbonique	$CO_2$ aq	$HCO_3^-$	$4,0 \cdot 10^{-1}$	6,4
Ion hydrogénochromate	$HCrO_4^-$	$CrO_4^{2-}$	$4,0 \cdot 10^{-7}$	6,4
Sulfure d'hydrogène	$H_2S$	$HS^-$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	7,0
Ion dihydrogénosphate	$H_2PO_4^-$	$HPO_4^{2-}$	$6,3 \cdot 10^{-8}$	7,2
Acide hypochloreux	HClO	$ClO^-$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	7,5
Ion ammonium	$NH_4^+$	$NH_3$	$6,3 \cdot 10^{-10}$	9,2
Cyanure d'hydrogène	HCN	$CN^-$	$5,0 \cdot 10^{-1}$	9,3
Ion hydrogénocarbonate	$HCO_3^-$	$CO_3^{2-}$	$5,0 \cdot 10^{-11}$	10,3
Ion hydrogénéphosphate	$HPO_4^{2-}$	$PO_4^{3-}$	$5,0 \cdot 10^{-1}$	12,3
Ion hydrogénéosulfure	$HS^-$	$S^{2-}$	$8,0 \cdot 10^{-14}$	13,1

### 3. Zone de virage des principaux indicateurs colorés

Acide		Basique
	Bleu de thymol (1 <sup>er</sup> virage)	
1,2 (rouge)		2,8 (jaune)
	Bleu de bromophénol	
3,0 (jaune)		4,6 (bleu)
	Rouge de méthyle	
4,2 (rouge)		6,2 (jaune)
	Bleu de bromothymol	
6,0 (jaune)		7,6 (bleu)
	Rouge de phénol	
6,4 (jaune)		8,0 (rouge)
	Bleu de thymol (2 <sup>e</sup> virage)	
8,0 (jaune)		9,6 (bleu)
	Phénolphtaléine	
8,0 (incolore)		9,9 (rouge)

Annexe

# F

## Tableau périodique

1<sup>re</sup> colonne : alcalins métalliques

2<sup>e</sup> colonne : alcalino terreux

Colonnes 3–11 : métaux de transition

Colonne 17 : halogènes

Colonnes 18 : gaz rares



Gaz noble



Métaux



Métaux de transition



Alcalin métalliques



Halogène



Espèce rare



Non métaux



Alcalino terreux

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
--	---	---	---	---	---	---	---	---	---

I	1 <b>H</b> hydrogène 1,008												
	3 <b>Li</b> lithium 6,94	4 <b>Be</b> béryllium 9,01											
III	11 <b>Na</b> sodium 22,99	12 <b>Mg</b> magnésium 24,31											
	19 <b>K</b> potassium 39,10	20 <b>Ca</b> calcium 40,08	21 <b>Sc</b> scandium 44,96	22 <b>Ti</b> titane 47,88	23 <b>V</b> vanadium 50,94	24 <b>Cr</b> chrome 52,00	25 <b>Mn</b> manganèse 54,94	26 <b>Fe</b> fer 55,85	27 <b>Co</b> cobalt 58,93				
V	37 <b>Rb</b> rubidium 85,47	38 <b>Sr</b> strontium 87,62	39 <b>Y</b> yttrium 88,91	40 <b>Zr</b> zirconium 91,22	41 <b>Nb</b> niobium 92,21	42 <b>Mo</b> molybdène 95,94	43 <b>Tc</b> technétium 98,91	44 <b>Ru</b> ruthénium 101,1	45 <b>Rh</b> rhodium 102,9				
	55 <b>Cs</b> césium 132,9	56 <b>Ba</b> baryum 137,3	57 <b>La</b> lanthane 138,9	72 <b>Hf</b> hafnium 178,5	73 <b>Ta</b> tantale 180,9	74 <b>W</b> tungstène 183,9	75 <b>Re</b> rhénium 186,2	76 <b>Os</b> osmium 190,2	77 <b>Ir</b> iridium 192,2				
VII	87 <b>Fr</b> francium 223,0	88 <b>Ra</b> radium 226,0	89 <b>Ac</b> actinium 227,0						58 <b>Ce</b> cérium 140,1	59 <b>Pr</b> praséodyme 140,9	60 <b>Nd</b> néodyme 144,2	61 <b>Pm</b> prométhium 144,9	62 <b>Sm</b> samarium 150,4
									90 <b>Th</b> thorium 232,0	91 <b>Pa</b> protactinium 231,0	92 <b>U</b> uranium 238,0	93 <b>Np</b> neptunium 237,0	94 <b>Pu</b> plutonium 244,1

numéro atomique →

nom de l'élément →

6 <b>C</b> carbone 12,01
-----------------------------------

← symbole

← masse atomique

10	11	12	13	14	15	16	17	18
----	----	----	----	----	----	----	----	----

								2 <b>He</b> hélium 4,003
			5 <b>B</b> bore 10,81	6 <b>C</b> carbone 12,01	7 <b>N</b> azote 14,01	8 <b>O</b> oxygène 16,00	9 <b>F</b> fluor 19,00	10 <b>Ne</b> néon 20,18
			13 <b>Al</b> aluminium 26,98	14 <b>Si</b> silicium 28,09	15 <b>P</b> phosphore 30,97	16 <b>S</b> soufre 32,07	17 <b>Cl</b> chlore 35,45	18 <b>Ar</b> argon 39,95
28 <b>Ni</b> nickel 58,69	29 <b>Cu</b> cuivre 63,55	30 <b>Zn</b> zinc 65,39	31 <b>Ga</b> gallium 69,72	32 <b>Ge</b> germanium 72,59	33 <b>As</b> arsenic 74,92	34 <b>Se</b> sélénium 78,96	35 <b>Br</b> brome 79,90	36 <b>Kr</b> krypton 83,80
46 <b>Pd</b> palladium 106,4	47 <b>Ag</b> argent 107,9	48 <b>Cd</b> cadmium 112,4	49 <b>In</b> indium 114,8	50 <b>Sn</b> étain 118,7	51 <b>Sb</b> antimoine 121,8	52 <b>Te</b> tellure 127,6	53 <b>I</b> iode 126,9	54 <b>Xe</b> xénon 131,3
78 <b>Pt</b> platine 195,1	79 <b>Au</b> or 197,0	80 <b>Hg</b> mercure 200,6	81 <b>Tl</b> thallium 204,4	82 <b>Pb</b> plomb 207,2	83 <b>Bi</b> bismuth 209,0	84 <b>Po</b> polonium 210,0	85 <b>At</b> astate 210,0	86 <b>Rn</b> radon 222,0

63 <b>Eu</b> europium 152,0	64 <b>Gd</b> gadolinium 157,3	65 <b>Tb</b> terbium 158,9	66 <b>Dy</b> dysprosium 162,5	67 <b>Ho</b> holmium 164,9	68 <b>Er</b> erbium 167,3	69 <b>Tm</b> thulium 168,9	70 <b>Yb</b> ytterbium 173,0	71 <b>Lu</b> lutétium 175,0
95 <b>Am</b> américium 243,1	96 <b>Cm</b> curium 247,1	97 <b>Bk</b> berkélium 247,1	98 <b>Cf</b> californium 252,1	99 <b>Es</b> einsteinium 252,1	100 <b>Fm</b> fermium 257,1	101 <b>Md</b> mendélévium 256,1	102 <b>No</b> nobélium 259,1	103 <b>Lr</b> lawrencium 260,1



# Index

- acétalisation, 135
- accroissements finis
  - (théorème des), 33
- acide-base (couple  $-$ ), 108
- acides carboxyliques, 138
- activité, 113
- acylation, 134
  - de Fridel & Crafts, 134
- addition
  - nucléophile, 135
- adiabatique (transformation  $-$ ), 155
- affinité, 101
- alcènes, 131
- aldolisation, 137
- alkylation
  - C-alkylation, 137
  - de Friedel & Crafts, 134
  - O-alkylation, 137
- alkylation de Hofmann, 134
- amines, 134
- amplificateur opérationnel, 150
- angles remarquables, 183
- application
  - injective, 5
  - surjective, 5
- application linéaire, 6–11
  - image, 10, 11
  - noyau, 10, 11
  - rang, 10
- application lineaire
  - spectre, 16
- approximation des états quasi stationnaires (AEQS), 105
- arrangement, 2
- Arrhénius (loi d' $-$ ), 104
- automorphisme, 9
- avancement d'une réaction, 103
- base, 8
  - changement de  $-$ , 12
- Bernoulli (relation de  $-$ ), 170
- binôme (de Newton), 2
- cétalisation, 135
- cétolisation, 137
- capacités thermiques, 152, 153
- carbonyle (groupe  $-$ ), 135
- centre d'inertie (théorème du  $-$ ), 164
- chaleur latente, 157
- cinétique chimique, 103
- Clapeyron (relation de  $-$ ), 157
- classe (d'une fonction), 33
- combinaison, 2
- complexe (nombre  $-$ ), 18–21
- complexes, 110
- conduction de la chaleur, 161
- conformation, 126



- conjugué (d'un nombre complexe),  
19
- constante  
d'acidité, 108  
de dissociation (d'un complexe),  
110  
de stabilité (d'un complexe),  
110  
de vitesse (d'une réaction), 104
- convection, 162
- coordonnées  
cartésiennes, 162  
cylindriques, 163
- couple  
acide-base, 108  
redox, 111
- Cramer (système de  $-$ ), 13
- crotonisation, 137
- dérivabilité, 33
- développements limités, 181
- degré (d'un polynôme), 3
- Descartes (loi de  $-$ ), 173
- diagramme  
binaires, 120–124  
E-pH, 114
- difféomorphisme, 34
- diffusion  
de chaleur, 161  
de particules, 161
- dihalogénéation, 131
- domaines de prédominances  
pour un complexe, 111  
pour un mélange acide-base,  
108
- endomorphisme, 9
- énergie  
cinétique, 165  
interne, 152  
libre, 160  
mécanique, 165  
potentielle, 165
- énolate, 136
- enthalpie, 152
- enthalpie libre, 160
- entropie, 155
- équation  
différentielle, 146  
redox, 112
- équation différentielle, 42  
linéaire du premier ordre, 42
- équilibre, 166  
stabilité d'un  $-$ , 166
- espace  
vectoriel, 6–11
- factorielle, 1
- famille  
génératrice, 8  
libre, 8
- Fick (loi de  $-$ ), 161
- flux  
de particules, 161  
thermique, 161
- fonction  
de plusieurs variables, 46  
de transfert, 150  
réelle de la variable  
réelle, 25–31  
trigonométrique réciproque,  
31
- Fourier  
loi de  $-$ , 161
- fraction rationnelle, 5
- Gauss  
approximation de  $-$ , 174
- gaz parfait, 151
- Gibbs  
règle des phases de  $-$ , 120  
relation de Gibbs–Duhem, 115  
relation de Gibbs–Helmoltz,  
115, 160
- halogénéation, 133
- Hess (loi de  $-$ ), 118
- Holeman (règles de  $-$ ), 134
- Hund (principe de  $-$ ), 101
- hydrocarbures aromatiques, 133
- hydrogénation, 132
- hydrures, 135

- identités thermodynamiques, 155,  
160
- injective, 5
- intégration, 37–42
- interférences, 175–177
- isomorphisme, 9
- Klechkowsky (règle de  $-$ ), 101
- Le Châtelier (loi de  $-$ ), 120
- Leibniz (formule de  $-$ ), 33
- lentille mince, 174
- limite, 26
- loi
- d'Arrhénius, 104
  - de Fick, 161
  - de Fourier, 161
  - de Hess, 118
  - de Le Châtelier, 120
  - de Pouillet, 147
  - de Raoult, 120
  - de Snell–Descartes, 173
  - de Van't Hoff, 104
  - des mailles, 148
  - des noeuds, 147
- machines
- thermiques, 158
- malonique (synthèse  $-$ ), 139
- matrice, 11–16
- opérations, 14
  - produit, 13
- module (d'un nombre complexe),  
19
- Moivre (formule de  $-$ ), 21
- Nernst (formule de  $-$ ), 113
- Newton
- binôme de  $-$ , 2
- nitration, 133
- nombre
- d'oxydations, 111
  - entier, 1
  - quantique, 100
  - rationnel, 1
- lumineuse, 175
  - organomagnésiens, 137
  - oscillateurs, 167
  - oxydo-réduction, 111
  - ozonolyse, 133
- Pauli (principe de  $-$ ), 101
- pH, 108–110
- pKa, 108
- polynôme, 2–5
- scindé, 4
- potentiel
- chimique, 116
  - redox, 113
- Pouillet (loi de  $-$ ), 147
- précipités, 111
- premier principe (thermodynamique),  
152
- primitives usuelles, 179
- principe fondamental de la  
dynamique, 164
- prisme, 173
- produit de solubilité, 111
- puissance
- d'une force, 164
- règle
- de Klechkowsky, 101
- racine
- d'un polynôme, 3
  - nièmes d'un complexe, 21
  - nièmes de l'unité, 21
- rang
- d'une application linéaire, 10
  - formule du  $-$ , 11
- Raoult (loi de  $-$ ), 120
- relation
- de conjugaison, 174
- Rolle (théorème de  $-$ ), 33
- série, 44–46
- somme directe, 7
- sous-espace
- supplémentaire, 7
- sous-espace propre, 17
- onde

- spectroscopie, 98
  - infrarouge (IR), 143
  - RMN, 144
- stéréoisomères, 126
- substitution
  - électrophiles, 133
  - polysubstitution électrophile, 134
- suite, 21–25
  - adjacente, 25
  - arithmétique, 24
  - géométrique, 25
- supplémentaire (sous-espaces), 7
- surjective, 5
- système linéaire, 13
  - de Cramer, 13
  
- Taylor-Lagrange
  - inégalité de –, 33
- Taylor-Young (formule de –), 34
- température d'inversion, 119
- théorème
  - de Rolle, 33
  - des accroissements finis, 33
- Torricelli (relation de –), 171
  
- valeur propre, 16
- Van der Waals (gaz de –), 151
- Van't Hoff (loi de –), 104
- variance, 120
- vecteur propre, 17
- Venturi (effet –), 171
- vitesse
  - de réaction, 103
  
- Young (trous d'–), 177

# J'INTÈGRE

*J'intègre*

Lionel Porcheron • Arnaud Bégyn

## LE FORMULAIRE BCPST 1<sup>re</sup> ET 2<sup>e</sup> ANNÉES

- **Toutes les formules et définitions** du programme de BCPST en chimie, physique et mathématiques.
- Pour chaque formule : la **signification des termes**, les **unités**, les limites d'usage.
- De très nombreux **schémas**, des **exemples** et des **conseils**.
- Un **index** fourni pour trouver rapidement l'information recherchée.

**L'outil indispensable pour réviser !**

LIONEL PORCHERON  
Ingénieur de  
l'ENSEEIH à Toulouse.

ARNAUD BÉGYN  
Professeur au lycée  
Pierre de Fermat  
(Toulouse).

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

ISBN 978-2-10-053791-4

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)



DUNOD