Distributions et équations fondamentales de la physique

Cours pour les étudiants en maîtrise de mathémathiques

Marius Tucsnak

Table des matières

1 Introduction **5**

2 Rappels et compléments **9**

2.1 Rappels de calcul différentiel . . . 9
2.2 Existence des fonctions de classe C^∞ . . . 14
2.3 Partition de l'unité. . . . 17
2.4 Quelques rappels sur l'intégrale de Lebesgue . . . 18
2.5 Convolution et régularisation . . . 22
2.6 Exercices du Chapitre 1 . . . 27

3 Définitions et propriétés des distributions **33**

3.1 Définitions de base . . . 33
3.2 Dérivation de distributions . . . 35
3.3 Multiplication par des fonctions de classe C^∞ . . . 40
3.4 Limites de distributions . . . 42
3.5 Distributions à support compact . . . 44
3.6 Convolution d'une distribution et d'une fonction C^∞ . . . 49
3.7 Formule de Stokes et formule des sauts dans l'espace . . . 51
3.7.1 Intégrale de surface et formule de Stokes (cas d'un surgraphe) . . . 51
3.7.2 Intégrale de surface et formule de Stokes (cas d'un ouvert régulier) . . 53
3.7.3 Formule des sauts dans l'espace . . . 55
3.7.4 Applications . . . 55
3.8 Exercices du Chapitre 3 . . . 58

4 Transformation de Fourier **67**

4.1 Introduction . . . 67
4.2 Transformation de Fourier dans L^1 . . . 68
4.3 L'espace $\mathcal{S}$ de Schwartz . . . 69
4.4 L'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées . . . 74

4.5 Transformation de Fourier des distributions tempérées 77
4.6 Transformation de Fourier dans L^2 80
4.7 Espaces de Sobolev 81
4.7.1 Définition et propriétés des espaces de Sobolev d'ordre entier 81
4.7.2 Les espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$, avec $s \in \mathbb{R}$ 84
4.8 Exercices du Chapitre 4 86

5 Transformation de Fourier et EDP 93
5.1 Problème de Dirichlet pour le Laplacien dans un demi-espace 93
5.2 Equation de la chaleur 95
5.2.1 Solutions classiques 95
5.2.2 Solutions généralisées 96
5.3 L'équation des ondes 97
5.3.1 Solutions classiques 97

Chapitre 1

Introduction

Ce cours est une introduction à un chapitre important et relativement récent de l'analyse mathématique: la théorié de distributions. Cette théorie fut crée par Laurent Schwartz entre 1944 et 1950 et elle a permis à son auteur de recevoir la médaille Fields (équivalent du prix Nobel pour les mathématiques) en 1950. Nous allons également donner quelques applications de la théorie de distributions aux équations de la physique mathématique. Ces équations ont constitué l'une de motivations principales de développement de la théorie de Laurent Schwartz. Malheureusement les quatorze cours qui sont à notre disposition ne nous permettent pas d'avancer d'une façon significative dans l'étude des équations de la physique mathématique (ou équations aux dérivées partielles). Nous nous contenterons donc de calculer les solutions fondamentales de quelques opérateurs différentiels et d'étudier une classe d'espace de distributions qui intervient d'une manière essentielle dans la théorie moderne des équations aux dérivées partielles : les espaces de Sobolev. L'utilisation systématique de ces notions dans l'étude fine d'équations aux dérivées partielles fera l'objet d'un cours spécialisé au deuxième semestre.

Comme la plupart de grandes théories scientifiques, la théorie de distributions est construite sur des bases provenant de travaux effectués par de nombreux chercheurs. Décrivons brièvement, en suivant l'introduction de la monographie [5] et le livre de mémoires [6] de Laurent Schwartz, l'influence du calcul symbolique de Heaviside et de la théorie de solutions faibles des équations aux dérivées partielles (théorie due à Leray et à Sobolev).

Dans son calcul symbolique Heaviside à introduit en 1894 la fonction qu'il appela "l'échelon unité" et qu'on appelle couramment aujourd'hui fonction de Heaviside. Il s'agit tout simplement de la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,\infty[$, notée par H. Si l'on cherche la dérivée de cette fonction, on voit qu'elle n'en possède pas à l'origine. Cela n'empêche pas Heaviside de définir la dérivée H' de H, qu'il appela "impulsion unité", en tout point de $\mathbb{R}$

par

$$H'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \infty & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

L'objet H' défini ci-dessus ne peut pas être une fonction usuelle. D'un coté, comme H' est nulle presque partout, on devrait avoir

$$\int_{-A}^{A} H'(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\ A \in]0,\infty[.$$

D'autre part

$$\int_{-A}^{A} H'(x)\,\mathrm{d}x = H(A) - H(-A) = 1 \qquad \forall\ A \in]0,\infty[.$$

La "fonction" H' a été réintroduite par Dirac en 1926 pour les besoins de la physique quantique et on l'a appelée couramment fonction de Dirac, en la notant par δ. Le fait que cette fonction n'ait pas une définition mathématique rigoureuse n'a pas empêché Heaviside, Dirac et d'autres d'obtenir de résultats corrects en manipulant la "fonction" δ ainsi que ses dérivées. La théorie de Laurent Schwartz donne un cadre permettant de rendre ce type d'opérations rigoureux en introduisant de nouveaux objets, qui généralise la notion de fonction. Il s'agit de distributions. Dans cette théorie la "fonction" de Dirac devient une distribution appelée masse de Dirac. Les distributions (dont la masse de Dirac) ont une propriété remarquable: elles sont toutes indéfiniment dérivables (dans un sens que nous allons préciser). Elles ont également d'autres caractéristiques "de rêve". Par exemple, la dérivation est une opération continue dans l'espace de distributions.

Une autre motivation pour l'introduction de distributions a été la nécessité de définir des solutions non régulières ou "faibles" pour certaines équations aux dérivées partielles. Un exemple célèbre d'existence de telles solutions a été donné par Leray dans sa construction de solutions "turbulentes" des équations de Navier-Stokes (équations qui modélisent le mouvement d'un fluide visqueux). Nous nous contenterons dans cette introduction d'argumenter la nécessité de solutions faibles sur un exemple plus simple : l'équation d'une corde vibrante de longueur infinie. Il s'agit de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \tag{0.1}$$

dont l'inconnue, la fonction w, modélise le déplacement vertical à l'instant t de la particule d'abscisse x et où $c > 0$ est une constante modélisant la vitesse de propagation des ondes dans la corde. L'équation (0.1) est une de rares équations aux dérivées partielles dont on peut calculer toutes les solutions. En effet, posons

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct,$$

ce qui équivaut à

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad t = \frac{1}{2c}(\xi - \eta).$$

On définit la fonction

$$v(\xi,\eta) = w\left(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2c}(\xi - \eta)\right) \qquad \forall\, \xi,\eta \in \mathbb{R}.$$

Un calcul simple utilisant (0.1) montre que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}(\xi,\eta) = 0 \qquad \forall\, \xi,\eta \in \mathbb{R}.$$

On obtient donc que

$$v(\xi,\eta) = f(\eta) + g(\xi) \qquad \forall\, \xi,\eta \in \mathbb{R},$$

où $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe C^2 arbitraires. On déduit que la solutions générale de (0.1) est

$$w(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \qquad \forall\, x,t \in \mathbb{R}. \tag{0.2}$$

La formule (0.2) a été déduite pour la première fois par d'Alembert en 1747. Une question importante est la résolution du problème de Cauchy associé à (0.1). Il s'agit de déterminer la solution de (0.1) satisfaisant les conditions initiales

$$w(x,0) = w_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = w_1(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{0.3}$$

où la fonction w_0 (resp. la fonction w_1) est donnée et représente la position (resp. la vitesse) initiale de la particule d'abscisse x. Il faut donc déterminer les fonctions f et g à partir des conditions

$$f(x) + g(x) = w_0(x), \quad -cf'(x) + cg'(x) = w_1(x).$$

Dérivant la première égalité, on est conduit à un système algébrique pour f' et g' dont la résolution donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}w_0'(x) - \frac{1}{2c}w_1(x), \\ g'(x) &= \frac{1}{2}w_0'(x) + \frac{1}{2c}w_1(x)\ . \end{aligned}$$

En intégrant le deux égalités ci-dessus on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}w_0(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} w_1(s)\,\mathrm{d}s + a, \\ g(x) &= \frac{1}{2}w_0(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} w_1(s)\,\mathrm{d}s + b\ , \end{aligned}$$

avec a, b et x_0 trois constantes réelles. Mais ces constantes ne sont pas indépendantes. En effet, en utilisant l'égalité $f(x) + g(x) = w_0(x)$ on obtient que $b = -a$. Ainsi on obtient

$$w(x,t) = \left[\frac{w_0(x+ct)}{2} - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} w_1(s)\,\mathrm{d}s + a\right] + \left[\frac{w_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} w_1(s)\,\mathrm{d}s - a\right],$$

d'où on déduit la relation, dite formule de d'Alembert,

$$w(x,t) = \frac{w_0(x+ct) + w_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} w_1(s)\,\mathrm{d}s. \tag{0.4}$$

La formule ci-dessus semble en réalité avoir été obtenue la première fois par Euler en 1748 et elle donne la solution explicite du problème de Cauchy pour l'équation d'une corde vibrante. En analysant la méthode que nous avons utilisé, il est clair qu'elle fonctionne seulement si les données initiales w_0 et w_1 sont des fonctions suffisamment régulières (C^2 par exemple). Néanmoins la formule a toujours un sens si les fonctions w_0 et w_1 sont seulement intégrables. De plus, du point de vu de la physique il n'existe pas de raisons pour se restreindre à une déformation ou à un profil de vitesses à l'instant $t = 0$ qui soit le graphe d'une fonction dérivable. Il est donc naturel de se poser la question : peut-on interpréter la fonction w de (0.4) comme une solution de l'équation des ondes si, par exemple, w_0 et w_1 sont seulement des fonctions continues? La réponse à cette question nécessite la généralisation de la notion de dérivation et elle devient assez simple dans le cadre de la théorie de distributions.

Décrivons brièvement la structure de ces notes de cours.

Le deuxième chapitre est consacré aux rappels et compléments de calcul différentiel et de calcul intégral. Nous avons rangé dans la rubrique "rappels" des résultats qui ont théoriquement étés vus en licence. Néanmoins nous donnons la preuve complète de certains résultats de ce type comme la formule de Taylor avec le reste sous forme d'intégrale et le théorème de Lebesgue sur la dérivation des intégrales dépendant de paramètres. La partie "compléments" de ce deuxième chapitre contient de résultats d'existence de fonctions de classe C^∞ ainsi que des propriétés très importantes de la convolution de fonctions.

Le troisième chapitre contient les bases de la théorie de distributions : la définition de distributions, leur dérivation, la formule de sauts, l'introduction de la notion de solution fondamentale d'un opérateur différentiel.

Le quatrième chapitre est consacré à la transformation de Fourier, aux espaces de Sobolev et à leurs applications dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Ce cours a été largement inspiré par le cours de l'Ecole Polytechnique publié par J.M. Bony [1] et par les notes manuscrites de D. Barlet qui a enseigné avant moi ce cours à Nancy.

Chapitre 2

Rappels et compléments sur le calcul différentiel et sur l'intégrale de Lebesgue

2.1 Rappels de calcul différentiel

Nous rappelons dans cette section plusieurs notions et résultats du cours de *Calcul Différentiel* de licence. Pour la plupart de résultats de cette section, nous donnons les preuves. Soit n un entier naturel. On notera par $(\cdot,\cdot)$ (respectivement par $\|\cdot\|$) le produit scalaire euclidien (respectivement la norme euclidienne) dans $\mathbb{R}^n$. Si f est une fonction réelle, définie dans un voisinage de 0, nous allons utiliser la notation classique $f(t) = o(t), t \to 0$ si $\lim\limits_{t\to 0, t\neq 0} \dfrac{f(t)}{t} = 0$. Nous notons par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ l'espace vectoriel des applications linéaires $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} = \sup_{\|x\|<1} \|Tx\|, \qquad \forall\, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m),$$

cet espace devient un espace de Banach. L'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ est noté par $(\mathbb{R}^n)^*$. Ses éléments sont appelés *formes linéaires sur* $\mathbb{R}^n$. Il est bien connu (on peut voir ce résultat comme un cas particulier du théorème de représentation de Riesz) que, pour tout $l \in (\mathbb{R}^n)^*$ il existe un unique $a \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$l(x) = (a,x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.1. La fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ est dite différentiable en $x \in \Omega$ s'il existe un élément $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ tel que

$$\|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\| = o(\|h\|), \;\; h \to 0.$$

La notion de fonction différentiable est étroitement liée à la notion de dérivée partielle, définie ci-dessous.

Définition 2.1.2. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \Omega$. Soit $e_1, \ldots ,e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et notons $x_1, \ldots ,x_n$ les coordonnées dans cette base. Si la limite

$$\lim_{t\to 0,\ t\neq 0} \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t},$$

existe alors on dit que f admet une *dérivée partielle par rapport à x_j en x_0* et on note

$$\lim_{t\to 0,\ t\neq 0} \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0).$$

Le vecteur $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)e_j$ est appelé *gradient de f en x_0* et il est noté par $\nabla f(x_0)$

Lemme 2.1.3. *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et différentiable en x_0 alors f admet une dérivée partielle par rapport à x_j en x_0 et*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = f'(x_0)(e_j) \qquad \forall\, j \in \{1,2, \ldots ,n\}. \tag{1.1}$$

De plus on a

$$f'(x_0)v = (\nabla f(x_0),v) \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Preuve. D'après la définition d'une fonction différentiable en x_0 on a

$$f(x_0 + te_j) - f(x_0) = f'(x_0)(te_j) + o(t),$$

qui implique clairement (1.1). La relation (1.2) découle ensuite de la définition de $\nabla f(x_0)$. ■

Exemple 2.1.4. Le résultat du Lemme 2.1.3 montre qu'une fonction dérivable dans un point admet de dérivées partielles par rapport à $x_1, \ldots ,x_n$ en ce point. La fait que la réciproque de cette affirmation soit fausse découle de l'exemple suivant. Posons

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}.$$

Il est facile de vérifier que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Par ailleurs $\displaystyle\lim_{t\,\to\,0,t\neq 0} f(t,t) = \frac{1}{2}$, donc les dérivées partielles de f n'est pas continue en 0.

Théorème 2.1.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes*

1. *La fonction f est différentiable en chaque point de Ω et l'application $f'(\cdot) : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ donnée par $x \to f'(x)$ est continue sur Ω.*
2. *La fonction f admet en chaque point de Ω une dérivée partielle par rapport à x_j, $j \in \{1, \ldots ,n\}$, et les fonctions*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \to \mathbb{R}, \quad j \in \{1, \ldots ,n\},$$

sont continues sur Ω.

Preuve. Compte tenu du Lemme 2.1.3, il suffit de prouver que la deuxième affirmation implique la première. Posons $x = x_0 + \sum_{j=1}^{n} t_j e_j$, où $e_1,e_2,\dots e_n$ sont les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $t_1,t_2,\dots t_n \in \mathbb{R}$; on a

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \left[f\left(x_0 + \sum_{j=1}^{k} t_j e_j\right) - f\left(x_0 + \sum_{j=1}^{k-1} t_j e_j\right)\right]. \tag{1.3}$$

Mais, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, la fonction d'une variable réelle

$$u \to f\left(x_0 + \sum_{j=1}^{k-1} t_j e_j + u e_k\right),$$

est de classe C^1 près de zéro; on a donc

$$f\left(x_0 + \sum_{j=1}^{k} t_j e_j\right) - f\left(x_0 + \sum_{j=1}^{k-1} t_j e_j\right) = t_k \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_0 + \sum_{j=1}^{k-1} t_j e_j + h t_k e_k\right) \mathrm{d}h. \tag{1.4}$$

D'après (1.3) et (1.4) on a

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} t_k \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_0 + \sum_{j=1}^{k-1} t_j e_j + h t_k e_k\right) \mathrm{d}h. \tag{1.5}$$

Posons

$$\epsilon_k(x) = \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_0 + \sum_{j=1}^{k-1} t_j e_j + h t_k e_k\right) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)\right] \mathrm{d}h.$$

La relation (1.5) implique que

$$f(x) - f(x_0) - (\nabla f(x_0), x - x_0) = \sum_{k=1}^{n} t_k \epsilon_k(x). \tag{1.6}$$

Par ailleurs, la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ montre que

$$\lim_{x \to x_0} \epsilon_k(x) = 0 \qquad \forall\, k \in \{1,\dots,n\}.$$

En utilisant la relation ci-dessus, ainsi que (1.6) et le fait que $|t_k| \leq \|x - x_0\|$ on obtient la conclusion du théorème. ∎

Définition 2.1.6. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^1 sur Ω si f satisfait aux conditions équivalentes du Théorème 2.1.5. On notera $f \in C^1(\Omega)$.

Rappelons également ici (sans donner la preuve) un autre résultat classique.

Proposition 2.1.7. *Supposons que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et que f est continue dans I et différentiable en dehors d'un point $x_0 \in I$. Si $x \in F$ et $\lim_{x \to x_0} f'(x) = a \in \mathbb{R}$ alors $f'(x_0)$ existe et on a $f'(x_0) = a$.*

Nous introduisons maintenant quelques notations qui seront souvent utilisées dans la suite de ce cours.
Si $x \in \mathbb{R}^n$ on note $x = (x_1, \dots ,x_n)$. Un élément $\alpha = (\alpha_1, \dots ,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est dit un multi-indice. Nous allons également noter:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

$$\alpha! = (\alpha_1!) \dots (\alpha_n!), \;\; |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\beta \leq \alpha$ on note

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}.$$

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on note

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}(f). \tag{1.7}$$

De plus on dira que $\alpha = 1_j$ si $\alpha_i = 0$ pour $i \neq j$ et $\alpha_j = 1$.

Définition 2.1.8. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$. On dira que $f \in C^k(\Omega)$ si une des conditions ci-dessous est satisfaite :

- $k = 0$ et f est continue sur Ω.
- $k \geq 1$ et f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j \in \{1, \dots ,n\}$ qui sont dans $C^{k-1}(\Omega)$.

On dit que $f \in C^\infty(\Omega)$ si $f \in C^k(\Omega)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Rappelons également un résultat classique, qu'on donne ici sans preuve.

Lemme 2.1.9. *(Schwarz) Si $f \in C^2(\Omega)$ alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \qquad \forall\, i,j \in \{1, \dots ,n\}.$$

Une conséquence importante du Lemme 2.1.9 est que, si $f \in C^k(\Omega)$, l'*ordre* dans lequel on effectue les dérivations dans (1.7) est indifférent.

Exemple 2.1.10. Soit P un polynôme et la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Il est claire que f est continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs la dérivée pour $x \neq 0$ est de la même forme que f, où l'on remplace $P\left(\frac{1}{x}\right)$ par $\frac{P\left(\frac{1}{x}\right) - P'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$. Par conséquent, en appliquant la Proposition 2.1.7, on déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 0$. Par récurrence on déduit que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.1.11. *(Formule de Taylor) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $m \in \mathbb{N}$ et soit $f \in C^{m+1}(\Omega)$. Soient $x,y \in \Omega$ tels que $x + ty \in \Omega$, pour tout $t \in [0,1]$. Alors on a :*

$$f(x+y) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{y^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) + (m+1) \sum_{|\gamma|=m+1} \frac{y^\gamma}{\gamma!} \int_0^1 (1-t)^m \partial^\gamma f(x+ty)dt. \tag{1.8}$$

Preuve. On utilise la récurrence sur m.

Pour $m = 0$ la conclusion (1.8) devient

$$f(x+y) = f(x) + \sum_{j=1}^n y_j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+ty)dt. \tag{1.9}$$

Pour démontrer (1.9) on considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$g(t) = f(x+ty), \qquad \forall\, t \in [0,1]. \tag{1.10}$$

Il est claire que $g \in C^1([0,1])$ et que

$$g'(t) = \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+ty). \tag{1.11}$$

En utilisant (1.10), (1.11) et la relation

$$\int_0^1 g'(t)dt = g(1) - g(0),$$

on obtient (1.9). Nous avons donc vérifié (1.8) pour $m = 0$.

Supposons que (1.8) a lieu pour $m \leq k-1$, donc, en particulier, que

$$f(x+y) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{y^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) + k \sum_{|\gamma|=k} \frac{y^\gamma}{\gamma!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial^\gamma f(x+ty)dt. \tag{1.12}$$

Une intégration par parties donne

$$k \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial^\gamma f(x+ty)dt = \partial^\gamma f(x) + \int_0^1 (1-t)^k \sum_{j=1}^n y_j \partial_j \partial^\gamma f(x+ty)dt.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par $\frac{y^\gamma}{\gamma!}$ et en sommant avec $|\gamma| = k$ on obtient

$$k \sum_{|\gamma|=k} \frac{y^\gamma}{\gamma!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial^\gamma f(x+ty)dt =$$

$$= \sum_{|\gamma|=k} \frac{y^\gamma}{\gamma!} \partial^\gamma f(x) + \sum_{|\beta|=k+1} y^\beta c_\beta \int_0^1 (1-t)^k \partial^\beta f(x+ty)dt, \tag{1.13}$$

où

$$c_\beta = \sum_{i=1,\ \beta_i \geq 1}^n \frac{1}{(\beta - 1_i)!} = \frac{1}{\beta!} \sum_{i=1,\ \beta_i \geq 1}^n \beta_i = \frac{k+1}{\beta!}. \tag{1.14}$$

Les relations (1.12)-(1.14) impliquent que (1.8) a lieu pour $m = k$. ■

Ce théorème est souvent utile sous la forme suivante, qui donne, pour x fixé et $\|y\|$ petite, une approximation de $f(x+y)$ par un polynôme de degré inférieur ou égal à k.

Corollaire 2.1.12. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit $f \in C^{m+1}(\Omega)$ et soit K un compact de Ω. Soient $x,y \in K$ tels que $[x,x+y] \subset K$. Alors il existe une constante $C = C(K,m,f)$ telle que*

$$\left| f(x+y) - \sum_{|\alpha| \le m} \frac{y^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \right| \le C \|y\|^{m+1}.$$

Une autre conséquence très utile du Théorèmes 2.1.11 est le Corollaire suivant, dont la preuve est proposée comme exercice au lecteur.

Corollaire 2.1.13. *Si $f \in C^k(B)$ où $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ alors il existe $f_1, \dots, f_n \in C^{k-1}(B)$ telles que*

$$\partial^\alpha f_j(0) = \frac{\partial^\alpha \partial_j f(0)}{1+|\alpha|}, \quad \sup_{x \in B} |\partial^\alpha f_j| \le \sup_{x \in B} |\partial^\alpha \partial_j f|, \qquad \forall\, j = 1,n,$$

et

$$f(x) - f(0) = \sum_{j=1}^n x_j f_j(x).$$

2.2 Existence des fonctions de classe C^∞

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert nous rappelons que

$$C^\infty(\Omega) = \cap_{k \ge 0} C^k(\Omega).$$

Définition 2.2.1. Si $u \in C(\Omega)$ alors le support de u, noté par $\mathrm{supp}(u)$ est défini comme l'adhérence dans Ω de l'ensemble $\{x \in \Omega | u(x) \neq 0\}$. Autrement dit $\mathrm{supp}(u)$ et le plus petit sous-ensemble fermé de Ω tel que $u = 0$ dans $\Omega \setminus \mathrm{supp}(u)$.

Remarque 2.2.1. Si $x \in \mathrm{supp}(u)$ alors il existe une suite $(x_n) \subset \Omega$ telle que $u(x_n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

L'objectif de cette section est de construire des fonctions de classe C^∞ à support compact ou ayant d'autre propriétés leur permettant, en particulier, de séparer deux fermés disjoints. Ces fonctions seront utilisées dans les techniques de convolution et de régularisation de fonctions et de distributions.

Définition 2.2.2. Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ l'espace $C_0^k(\Omega)$ est formée par toutes les fonctions $u \in C^k(\Omega)$ ayant comme support un sous-ensemble compact de Ω. Les éléments de $C_0^\infty(\Omega)$, noté dans la suite par $\mathcal{D}(\Omega)$, sont dits **fonctions test** (ou **fonctions d'essai**).

Toute fonction $u \in C_0^k(\Omega)$ peut être étendue à une fonction de $C_0^k(\mathbb{R}^n)$. On peut donc voir $C_0^k(\Omega)$ comme un sous-espace de $C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Si $M \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert alors on peut définir $C_0^k(M)$ comme l'ensembles des éléments de $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ ayant le support contenu dans M.

Lemme 2.2.3. *Il existe une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\phi(0) > 0$ et $\phi(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

Preuve. On a vu dans l'Exemple 2.1.10 que la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases},$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction

$$\phi(x) = f\left(1 - \|x\|^2\right),$$

a les propriétés demandées. ■

Par translation et changement d'échelle on obtient que, pour tout $\delta > 0$, la fonction

$$x \to \phi\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right),$$

est positive sur $\mathbb{R}$, strictement positive en x_0 et à support dans la boule de rayon δ centrée en x_0. L'existence d'une telle fonction permet, en particulier, de prouver un résultat classique, qui est utilisé dans le calcul des variations.

Théorème 2.2.4. *Si $f,g \in C(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega f\phi \mathrm{d}x = \int_\Omega g\phi \mathrm{d}x, \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{2.15}$$

alors $f = g$.

Preuve. Si $h = f - g$ alors

$$\int_\Omega h\phi \mathrm{d}x = 0, \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.16}$$

En prenant les parties réelles et imaginaires on peut supposer que h est à valeurs réels et que (2.16) a lieu pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avec ϕ à valeurs réels. Si $h(x_0) \neq 0$ alors on peut choisir $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\phi(x_0) > 0$, à support dans un voisinage de x_0 et telle que ϕh ait un signe constant. Cela contredit (2.16), donc $h \equiv 0$ dans Ω. ■

Lemme 2.2.5. *Il existe une fonction croissante $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que*

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Preuve. On a vu dans l'Exemple 2.1.10 que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases},$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus nous avons évidemment que $\operatorname{supp}(f) = [0,\infty[$ et $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Définissons alors $g(x) = f(x)f(1-x)$ et $G(x) = \int_0^x g(t)dt$. On a $0 \leq g(x) \leq 1$ pour $x \in \mathbb{R}$ et et $\operatorname{supp}(g) \subset [0,1]$. De plus $g \not\equiv 0$ car $g(\frac{1}{2}) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \neq 0$. La fonction $\theta(x) = \frac{G(x)}{G(1)}$ est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle est croissante et elle vérifie les conditions

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

■

Proposition 2.2.6. *Soient $a < c < d < b$ des réels. Alors il existe $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que*

1. *$\rho(x) = 1$ pour tout $x \in]c,d[$;*
2. *$supp(\rho) \subset]a,b[$;*
3. *$0 \leq \rho(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Preuve. Posons $\rho(x) = \theta\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)\theta\left(\dfrac{b-x}{b-d}\right)$, où θ est la fonction construite dans le Lemme 2.2.5. On vérifie aisément que ρ convient. ■

Corollaire 2.2.7. *Soient $0 < r < R$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe $\widetilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widetilde{\rho}(x) = 1$ si $||x|| < r$ et $\widetilde{\rho}(x) = 0$ si $||x|| > R$.*

Preuve. On peut prendre $\widetilde{\rho}(x) = \rho\left(||x||^2\right)$ où ρ a été construite à la Proposition 2.2.6 avec

$$-a = b = R^2 \quad \text{et} \quad -c = d = r^2.$$

■

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\rho > 0$ on note par $B(x,\rho)$ la boule de centre x et rayon ρ. Si K est un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, on note

$$K_\varepsilon = K + B(0,\varepsilon) = \bigcup_{x \in K} B(x,\varepsilon).$$

Proposition 2.2.8. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\phi \in \mathcal{D}(K_{2\varepsilon})$ telle que l'on ait $\phi \equiv 1$ dans K_ε et $0 \leq \phi(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

Preuve. Par compacité il existe $x_1, \ldots, x_p \in K$ tels que

$$\overline{K_\varepsilon} \subset \bigcup_{j=1}^{p} B(x_j, \frac{4\varepsilon}{3}).$$

D'après le Corollaire 2.2.7, pour chaque $j \in \{1,\ldots,p\}$ il existe une fonction $\phi_j \in \mathcal{D}\left(B\left(x_j,\frac{5\varepsilon}{3}\right)\right)$ telle que $\phi_j(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\phi_j \equiv 1$ sur $B\left(x_j,\frac{4\varepsilon}{3}\right)$. Soit $\widetilde{\phi}(x) = \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x)$. Il est claire que $\widetilde{\phi}(x) \geq 1$ pour tout $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{p} B(x_j,\varepsilon)$. Par ailleurs, compte tenu du fait que

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{p} B(x_j,\frac{5\varepsilon}{3})} \subset K_{2\varepsilon},$$

on a que $\widetilde{\phi} \in \mathcal{D}(K_{2\varepsilon})$. Soit $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ la fonction construite dans le Lemme 2.2.5. La fonction $\phi(x) = \theta\left(\widetilde{\phi}(x)\right)$ convient. ■

Corollaire 2.2.9. *Soient K_1 et K_2 deux compacts disjoints de l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in K_1 \\ -1 & si \quad x \in K_2 \end{cases}$$

et $|\varphi(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \Omega$.

Preuve. Soient U_1 et U_2 deux ouverts de Ω tels que

$$K_1 \subset U_1, \ \ K_2 \subset U_2, \ \ U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

D'après la proposition 2.2.8 il existe $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$, telles que

$$\varphi_i \equiv 1 \ \text{ dans } K_i, \ \ \varphi_i \in \mathcal{D}(U_i), \ \ i \in \{1,2\},$$

et

$$0 \leq \varphi_i(x) \leq 1, \ \ i \in \{1,2\}.$$

La fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \qquad \forall\, x \in \Omega,$$

a clairement les propriétés requises. ■

2.3 Partition de l'unité.

L'objectif de cette section est la construction de fonctions C^∞ à support compact permettant d'obtenir de propriétés globales de fonctions ou de distributions, en étudiant leur propriétés locales.

Proposition 2.3.1. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et soit $(U_j)_{j\in\{1,\ldots,N\}}$ des ouverts recouvrant K. Alors il existe des compacts $(K_j)_{j\in\{1,\ldots,N\}}$ tels que $K_j \subset U_j$, pour tout $j \in \{1,\ldots,N\}$ et*

$$K = \cup_{j=1}^{N} K_j. \tag{3.17}$$

Preuve. Pour chaque $x \in K$ soit $r_x > 0$ tel que $\overline{B(x,r_x)} \subset \bigcap_{x \in U_j} U_j$. Alors on a $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x,r_x)$ et donc il existe $x_1, \ldots, x_M \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{M} B(x_i,r_{x_i})$. Posons $K_j = K \bigcap \left(\bigcup_{\overline{B(x_i,r_{x_i})} \subset U_j} \overline{B(x_i,r_{x_i})} \right)$. Alors K_j est, par définition, un compact contenu dans K. Il vérifie aussi la condition $K_j \subset U_j$. Il reste donc à vérifier que l'on a bien (3.17). Soit donc $x \in K$. Il existe alors $i \in \{1, \ldots, M\}$ tel que $x \in B(x_i,r_{x_i})$. Par ailleurs il existe $j_0 \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $x_i \in U_{j_0}$ donc $\overline{B(x_i,r_{x_i})} \subset U_{j_0}$. On déduit que $x \in K_{j_0}$. ■

Le résultat ci-dessous donne l'existence de la "partition de l'unité", dans le cas simple de recouvrements *finis* d'un compact. Pour de résultats similaires dans de cas plus compliqués, le lecteur peut consulter, par exemple, [7, p.12].

Théorème 2.3.2 (Partition de l'unité). *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et supposons $K \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_j$, où les ensembles U_j sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe $(\phi_j)_{j \in \{1,\ldots,N\}}$ telles que $\phi_j \in \mathcal{D}(U_j)$, $0 \le \phi_j \le 1$, pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$ et avec $\sum_{i=1}^{N} \phi_j = 1$ au voisinage de K.*

Définition 2.3.3. Dans les conditions du Théorème 2.3.2 la collection $(\phi_j)_{j \in \{1,\ldots,n\}}$ s'appelle une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_j)_{j \in \{1,\ldots,n\}}$ de K.

Preuve du Théorème 2.3.2. Compte tenu de la Proposition 2.3.1 il existe des compacts $(K_j)_{j \in \{1,\ldots,N\}}$ tels que $K_j \subset U_j$, pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$ et $K = \cup_{i=1}^{N} K_j$. De plus en appliquant la Proposition 2.2.8 on déduit que, pour chaque $j \in \{1, \ldots, N\}$, il existe $\psi_j \in \mathcal{D}(U_j)$ telles que $\psi_j(x) \in [0,1]$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\psi_j(x) = 1$ si $x \in K_j$. Soit

$$V = \left\{ x \in \bigcup_{j=1}^{N} U_j \,\middle|\, \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x) > 0 \right\}.$$

Alors on a $K \subset V$ et V est un ouvert. D'après la Proposition 2.2.8 on peut trouver $\eta \in \mathcal{D}(V)$ telle que $\eta(x) \in [0,1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\eta \equiv 1$ sur un ouvert W tel que $K \subset W \subset V$. Posons

$$\phi_j = \frac{\psi_j}{(1-\eta) + \sum_{k=1}^{N} \psi_k}. \tag{3.18}$$

On a alors $\phi_j \in \mathcal{D}(U_j)$ car le dénominateur de l'expression au deuxième membre de (3.18) est strictement positif sur V et il vaut 1 hors de V. Comme $\eta \equiv 1$ sur W, la relation (3.18) implique que $\sum_{j=1}^{N} \phi_j \equiv 1$ sur W. ■

2.4 Quelques rappels sur l'intégrale de Lebesgue

Le but de cette section est de rappeler quelques résultats de la théorie de l'intégrale de Lebesgue. Nous donnons les preuves complètes de deux résultats : le théorème de Lebesgue sur la dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre et d'un résultat permettant de définir le support d'une fonction L^1_{loc}. Nous énonçons sans preuve le théorème de convergence dominée de Lebesgue, le théorème de Tonelli et le Théorème de Fubini.

Si Ω est un ouvert ou un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $p \geq 1$ on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions de puissance p intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}$. On admet que $L^p(\Omega)$, muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach (voir [2, p.57]). Si $p \geq 1$ on désigne par $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ l'espace des fonctions f telles que $f \in L^p(K)$, pour tout compact K de Ω. Les fonctions de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ sont dites localement intégrables dans Ω. La notion de support d'une fonction a été déjà définie pour des fonctions continues. Le résultat ci-dessous permet la généralisation de cette notion pour des fonctions localement intégrables.

Lemme 2.4.1. *Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ alors il existe un plus grand ouvert V de Ω tel que l'on ait $f_{|V} = 0$ presque partout dans V.*

Preuve. Considérons, dans un premier temps, une famille dénombrable $(W_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'ouverts de Ω vérifiant $f|_{W_j} = 0$ presque partout sur W_j, pour chaque $j \in \mathbb{N}$. Montrons que si l'on pose

$$W = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} W_j,$$

on a encore $f|_W = 0$ presque partout sur W. En effet, soit $E_j \subset W_j$ de mesure nulle telle que l'on ait

$$f|_{W_j \setminus E_j} \equiv 0.$$

Alors $E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$ est de mesure nulle et $E \subset W$. On a alors $f|_{W\setminus E} = 0$, donc $f|_W = 0$ presque partout sur W.

Considérons maintenant les boules ouvertes $B(q,r) \subset \Omega$ avec $q \in \mathbb{Q}^n \cap \Omega$ et $r \in \mathbb{Q}^{+*}$. C'est une famille dénombrable d'ouverts de Ω (car $\mathbb{Q}^n$ et $\mathbb{Q}^{+*}$ sont dénombrables). Nous allons prouver que

$$V = \bigcup_{f|_{B(q,r)}=0 \ p.p.} B(q,r),$$

est le plus grand ouvert de Ω tel que $f|_V = 0$ presque partout. En effet, V est une réunion dénombrable d'ouverts sur lesquels f est nulle presque partout. On a donc $f|_V = 0$ presque partout dans V. Soit W un ouvert de Ω tel que $f|_W = 0$ presque partout sur W. On a alors $W = \bigcup_{B(q,r)\subset W} B(q,r)$ car $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$. Pour chaque couple (q,r) tel que $B(q,r) \subset W$ on a $f|_{B(q,r)} = 0$ puisque $f|_W = 0$ presque partout sur W. Donc pour chaque tel couple (q,r) on a $B(q,r) \subset V$ et donc $W \subset V$. ∎

Définition 2.4.2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. On appellera support essentiel de f le fermé $\Omega \setminus V$ de Ω où V est le plus grand ouvert V de Ω tel que l'on ait $f_{|V} = 0$ presque partout dans V.

Nous rappelons un résultat très important.

Théorème 2.4.3 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue). *Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$, avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$. On suppose que :*

- *$f_n(x) \to f(x)$ presque partout sur Ω,*
- *il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que, pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout sur Ω.*

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0$.

Le résultat ci-dessous permet la dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. Comme il sera utiliser plusieurs fois dans ce cours, nous donnons la preuve complète.

Théorème 2.4.4 (Lebesgue). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit $f : \mathbb{R}^p \times \Omega \to \mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que*

- *La fonction $f_x : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $f_x(\lambda) = f(x,\lambda)$ est dans $C^k(\Omega)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ fixé.*
- *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$ on a*

$$\sup_{\lambda \in \Omega} |\partial^\alpha f_x(\lambda)| \leq w_\alpha(x),$$

  où $w_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^p)$.

Alors la fonction $g(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ est une fonction de $C^k(\Omega)$ et, pour tout $\lambda \in \Omega$, on a

$$\partial^\alpha g(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^p} \partial^\alpha_\lambda f(x,\lambda)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \ |\alpha| \leq k.$$

Preuve. Commençons par traiter le cas $k = 0$. Il s'agit alors seulement de prouver la continuité de la fonction g sur Ω. Si λ_0, $\lambda \in \Omega$ on a

$$g(\lambda) - g(\lambda_0) = \int_{\mathbb{R}^p} [f(x,\lambda) - f(x,\lambda_0)]\,\mathrm{d}x.$$

D'après les hypothèses on a

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} [f(x,\lambda) - f(x,\lambda_0)] = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^p,$$

et il existe $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^p)$ telle que

$$|f(x,\lambda) - f(x,\lambda_0)| \leq 2w_0(x) \qquad \forall\, (x,\lambda) \in \mathbb{R}^p \times \Omega.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 2.4.3) donne alors que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} (g(\lambda) - g(\lambda_0)) = 0.$$

Traitons maintenant le cas $k = 1$. On veut montrer que $\frac{\partial g}{\partial \lambda_j}$ existe et est une fonction continue sur Ω pour chaque $j \in \{1,\dots,n\}$. Si e_j est le *j-ème* élément de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \Omega$ on a

$$\begin{aligned} g(\lambda + he_j) - g(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^p} (f(x,\lambda) - f(x,\lambda_0))\,\mathrm{d}x \\ &= h \int_{\mathbb{R}^p} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} f(x,\lambda + \theta h e_j)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

avec $\theta = \theta(x,\lambda,h) \in]0,1[$. Alors

$$g(\lambda + he_j) - g(\lambda) - h \int_{\mathbb{R}^p} \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x,\lambda)\,\mathrm{d}x = h \int_{\mathbb{R}^p} \left[\frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x,\lambda + \theta h e_j) - \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x,\lambda) \right] \mathrm{d}x$$

D'après l'hypothèse, pour chaque $j \in \{1,\dots,n\}$, on a

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_j} f(x,\lambda + \theta h e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,\lambda) \right] = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^p,$$

et il existe $w_j \in L^1(\mathbb{R}^p)$ telle que

$$\left| \frac{\partial}{\partial \lambda_j} f(x,\lambda + \theta h e_j) - \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x,\lambda) \right| \leq 2 w_j(x) \qquad \forall\, (x,\lambda) \in \mathbb{R}^p \times \Omega.$$

Donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 2.4.3) on aura

$$\lim_{h \to 0, h \neq 0} \left[\frac{g(\lambda + he_j) - g(\lambda)}{h} - \int_{\mathbb{R}^p} \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x,\lambda)\,\mathrm{d}x \right] = 0,$$

ce qui prouve que $\frac{\partial g}{\partial \lambda_j}$ existe en chaque point de Ω et est donnée par

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda_j}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^p} \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(x,\lambda)\,\mathrm{d}x.$$

Le résultat du cas $k = 0$ donne la continuité de $\frac{\partial g}{\partial \lambda_j}$, donc $g \in C^1(\Omega)$. Cela achève la preuve du cas $k = 1$.

Un moment de réflexion convaincra le lecteur que le cas $k \geq 2$ s'en déduise immédiatement (y compris $k = \infty$). ■

Soit $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_2}$ des ouverts et soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Nous allons également utiliser deux autres résultats classiques vus dans le cours d'intégration.

Théorème 2.4.5 (Tonelli). *On suppose que*

$$\int_{\Omega_2} |F(x,y)|\,\mathrm{d}y < \infty \ \text{ pour presque tout } x \in \Omega_1$$

et que

$$\int_{\Omega_1} \mathrm{d}x \int_{\Omega_2} |F(x,y)|\,\mathrm{d}y < \infty.$$

Alors $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Théorème 2.4.6 (Fubini). *On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.*

Alors on a que $F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2)$, pour presque tout $x \in \Omega_1$, et que $\int_{\Omega_2} F(x,y)\,\mathrm{d}y \in L^1_x(\Omega_1)$. De même on a que $F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1)$, pour presque tout $y \in \Omega_2$, et que $\int_{\Omega_1} F(x,y)\,\mathrm{d}x \in L^1_y(\Omega_2)$. De plus on a

$$\int_{\Omega_1} \mathrm{d}x \int_{\Omega_2} F(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega_2} \mathrm{d}y \int_{\Omega_1} F(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Nous admettons également le résultat de densité suivant :

Théorème 2.4.7. *Si $p \geq 1$ alors l'espace $C_0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

2.5 Convolution et régularisation

Commençons par rappeler un théorème du cours d'intégration.

Théorème 2.5.1. *Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors on a*

- *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $y \to f(x-y)g(y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.*
- *Si l'on pose $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ alors $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et*

$$||f * g||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}||g||_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

- $\mathrm{supp}(f * g) \subset \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}$
- *Si le support de f ou de g est un ensemble compact alors* $\mathrm{supp}(f*g) \subset \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$

Preuve. Sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ on définit la fonction $F(x,y) = f(x-y)g(y)$. Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|\,\mathrm{d}x = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}|g(y)| < \infty$$

et que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|\,\mathrm{d}x = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

D'après le théorème de Tonelli (Théorème 2.4.5) on déduit que $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. En appliquant le Théorème de Fubini on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|\,\mathrm{d}y < \infty \text{ presque partout sur } \mathbb{R}^n$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|\,\mathrm{d}x = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n$ fixé tel que la fonction $y \to f(x-y)g(y)$ soit intégrable. On a

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{(x-\mathrm{supp}(f))\cap\mathrm{supp(g)}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Si $x \notin \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$, alors $(x - \mathrm{supp}(f)) \cap \mathrm{supp}(g) = \emptyset$ et $(f * g)(x) = 0$. Donc

$$(f * g)(x) = 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R}^n \setminus (\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)).$$

Par conséquent

$$\mathrm{supp}(f * g) \subset \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}.$$

La dernière conclusion du théorème découle de la précédente, en remarquant que l'ensemble $\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$ est fermé dès q'un des ensemble $\mathrm{supp}(f)$ où $\mathrm{supp}(g)$ est compact. ■

Généralisation (exercice): Si $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, avec $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$.

Remarque. Si f et g sont à support compact alors $f * g$ est à support compact. En général, si l'**un** des supports seulement est compact alors $f * g$ n'est **pas** à support compact.

Le résultat ci-dessous montre que la notion de convolution de deux fonctions peut être étendue dans un cadre plus général.

Proposition 2.5.2. *Soient $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On suppose que le support essentiel de g est un compact K de $\mathbb{R}^n$. Alors $f * g$ existe et est dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Soit L un compact de $\mathbb{R}^n$ et considérons

$$F(x,y) = \chi_L(x) f(x - y) g(y) = \chi_L(x) f(x - y) g(y) \chi_K(y),$$

où χ_L (resp. χ_L) désigne la fonction caractéristique de L (resp. de K). En posant $u = x - y$ et $L - K = \{x - y \mid x \in L,\ y \in K\}$, en appliquant le théorème de Tonelli (Théorème 2.4.5), nous avons que

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |F(x,y)| \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_K |g(y)| \mathrm{d}y \int_L |f(x - y)| \mathrm{d}x \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{L-K} |f(u)| \mathrm{d}u.$$

Comme $L - K$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ (image du compact $L \times K$ par la soustraction $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$), on a

$$\int_{L-K} |f(u)| \mathrm{d}u < \infty.$$

Alors, d'après le Théorème de Fubini (Théorème 2.4.6), $f * g$ est définie presque partout sur L et $\chi_L(f * g) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Donc $f * g$ est bien définie dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. ■

Théorème 2.5.3. *Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ et soit $g \in C^m_0(\mathbb{R}^n)$. Alors $f * g \in C^m(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\partial^\alpha (f * g)(x) = f * (\partial^\alpha g)(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Soit L un voisinage compact de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $K = \mathrm{supp}(g)$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$F(x,y) = f(y) g(x - y) \chi_{L-K}(y).$$

Pour $|\alpha| \leq m$ on a

$$|\partial_x^\alpha F(x,y)| \leq |f(y)| \, \|\partial^\alpha g\|_\infty \, \chi_{L-K}(y) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Comme la fonction $y \to \|\partial^\alpha g\|_\infty \, \chi_{L-K}(y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, il suffit d'appliquer le Théorème 2.4.4 avec $\Omega = \operatorname{int}(L)$ pour obtenir le résultat annoncé. ■

Définition 2.5.4. On appelle suite régularisante (**mollifiers** en anglais) toute suite (ρ_n) de fonctions telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \quad \operatorname{supp}(\rho_n) \subset B\left(0,\frac{1}{n}\right), \quad \int_{\mathbb{R}^m} \rho_n = 1, \quad \rho_n \geq 0 \;\text{ sur }\; \mathbb{R}^m.$$

Dorénavant on utilisera systématiquement la notation (ρ_n) pour désigner une suite régularisante.

Proposition 2.5.5. *Soit $f \in C(\mathbb{R}^m)$. Alors $\rho_n * f \to f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^m$.*

Preuve. Soit $K \subset \mathbb{R}^m$ un compact fixé. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ (dépendant de K et ϵ) tel que

$$|f(x-y) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall\, x \in K \qquad \forall\, y \in B(0,\delta).$$

On a

$$(\rho_n * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)dy = \int_{B(0,\frac{1}{n})} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)dy$$

et donc pour $n > \frac{1}{\delta}$ et $x \in K$

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^m} \rho_n = \epsilon.$$

■

Théorème 2.5.6. *Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors $\rho_n * f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^m)$.*

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. D'après le théorème de densité (voir la Section 2.4) il existe $f_1 \in C_0^0(\mathbb{R}^m)$ telle que $||f - f_1||_{L^p(\mathbb{R}^m)} < \epsilon$. D'après la Proposition 2.5.5 on sait que $\rho_n * f_1 \to f_1$ uniformément sur tout compact. D'autre part on a (voir la Proposition 2.5.1)

$$\operatorname{supp}(\rho_n * f_1) \subset \overline{B\left(0,\frac{1}{n}\right)} + \operatorname{supp}(f_1) \subset K, \quad K \text{ compact fixé }.$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\lim_{n \to \infty} ||\rho_n * f_1 - f_1||_{L^p(\mathbb{R}^m)} = 0.$$

Enfin on écrit

$$\rho_n * f - f = [\rho_n * (f - f_1)] + (\rho_n * f_1 - f_1) + (f_1 - f),$$

d'où il résulte que

$$\|\rho_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leq 2||f - f_1||_{L^p(\mathbb{R}^m)} + ||\rho_n * f_1 - f_1||_{L^p(\mathbb{R}^m)}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

(grâce à la Généralisation du Théorème 2.5.1). On a donc

$$\limsup_{n\to\infty} \|\rho_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leq 2\epsilon, \qquad \forall\, \epsilon > 0$$

i.e.

$$\limsup_{n\to\infty} \|\rho_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} = 0.$$

■

Corollaire 2.5.7. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert quelconque. Alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

Preuve. Soit $f \in L^p(\Omega)$, $\epsilon > 0$ et $f_1 \in C_0^0(\Omega)$ tels que $||f - f_1||_{L^p(\Omega)} < \epsilon$. On considère la fonction $\overline{f_1}$ définie par

$$\overline{f_1}(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \Omega \end{cases}$$

de sorte que $\overline{f_1} \in L^p(\mathbb{R}^m)$. D'après le Théorème 2.5.6

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\rho_n * \overline{f_1} - \overline{f_1}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} = 0.$$

D'autre part

$$\operatorname{supp}\left(\rho_n * \overline{f_1}\right) \subset \overline{B\left(0,\frac{1}{n}\right)} + \operatorname{supp}(f_1) \subset \Omega \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Soit $u_n = \left(\rho_n * \overline{f_1}\right)_{|\Omega}$. Alors, pour n assez grand, $u_n \in C_0^0(\Omega)$ et de plus $\|u_n - f_1\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Donc, pour n assez grand, $\|u_n - f\|_{L^p(\Omega)} < 2\epsilon$. ■

Dans certains cas il peut être convenable d'approcher des fonctions L^1 par des fonctions C^∞ qui n'ont pas le support compact, mais qui ont une décroissance rapide à l'infini. Un résultat allant dans ce sens est donné ci-dessous.

Proposition 2.5.8. *Soit $(G_\epsilon)_{\epsilon>0}$ une famille de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ et vérifiant :*

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} G_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$ *pour tout* $\epsilon > 0$*;*
2. $G_\epsilon(x) \geq 0$*, for all* $\epsilon > 0$ *and for all* $x \in \mathbb{R}^n$*;*
3. *Si l'on note*

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \geq \alpha\}$$

alors les restrictions G_ϵ à $\mathbb{R}^n \setminus B(0,\alpha)$ convergent dans $L^1(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\alpha))$ vers 0 quand ϵ tend vers 0^+, pour tout $\alpha > 0$.

Alors pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ bornée, on a :

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} f * G_\epsilon = f,$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Il est clair que

$$(G_\epsilon * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\epsilon(y)\,[f(x-y) - f(y)]\,\mathrm{d}y. \tag{5.19}$$

Soient $\delta,\alpha > 0$. Alors, dŠaprès nos hypothèses, il existe $\beta > 0$ tel que, pout tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\| \leq \beta$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \leq \alpha$ on ait

$$\|f(x-y) - f(x)\| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Cela entraine que

$$\left| \int_{B(0,\beta)} G_\epsilon(y)\,(f(x-y) - f(x))\,\mathrm{d}y \right| \leq \frac{\delta}{2} \qquad \forall\, x \in B(0,\alpha). \tag{5.20}$$

Par ailleurs

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\beta)} G_\epsilon(y)\,(f(x-y) - f(x))\,\mathrm{d}y \right| \leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R} \setminus B(0,\beta)} G_\epsilon(y)\mathrm{d}y.$$

La relation ci-dessus et le fait que les restrictions G_ϵ à $\mathbb{R} \setminus B(0,\alpha)$ convergent dans $L^1(\mathbb{R} \setminus B(0,\alpha))$ vers 0 implique l'existence de $\epsilon_0 > 0$ tel que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\beta)} G_\epsilon(y)\,(f(x-y) - f(x))\,\mathrm{d}y \right| \leq \frac{\delta}{2} \qquad \forall\, \epsilon \in]0,\epsilon_0]. \tag{5.21}$$

Les relations (5.19), (5.20) et (5.21) impliquent que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} f * G_\epsilon = f,$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$. ■

Le résultat ci-dessous peut être interprété comme une généralisation du Théorème 2.2.4.

Proposition 2.5.9. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Si $f,g \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfont* (2.15) *alors $f = g$ presque partout dans Ω.*

Preuve. Il suffit de prouver que si $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est telle que

$$\int_\Omega h\phi = 0, \tag{5.22}$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $h = 0$ presque partout sur Ω. Supposons, dans un premier temps, que $h \in L^1(\Omega)$ et que Ω est de mesure finie.

D'après le Corollaire 2.5.7 il existe $h_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\|h-h_1\|_{L^1(\Omega)} < \epsilon$. D'après (5.22)on a

$$\left|\int_\Omega h_1\phi\right| \leq \epsilon\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{5.23}$$

Soient

$$K_1 = \{x \in \Omega \mid h_1(x) \geq \epsilon\}, \quad K_2 = \{x \in \Omega \mid h_1(x) \leq -\epsilon\}.$$

Comme K_1 et K_2 sont des compacts disjoints on peut construire grâce au Corollaire 2.2.9 une fonction $\phi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in K_1 \\ -1 & \text{si} \quad x \in K_2 \end{cases}$$

et $|\phi_0(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \Omega$. Posant $K = K_1 \cup K_2$ il vient

$$\int_\Omega h_1\phi_0 = \int_{\Omega\setminus K} h_1\phi_0 + \int_K h_1\phi_0$$

et donc, grâce à (5.23),

$$\int_K |h_1| = \int_K h_1\phi_0 \leq \epsilon + \int_{\Omega\setminus K} |h_1|.$$

Par conséquent

$$\int_\Omega |h_1| = \int_K |h_1| + \int_{\Omega\setminus K} |h_1| \leq \epsilon + 2\int_{\Omega\setminus K} |h_1| \leq \epsilon + 2\epsilon\mu(\Omega)$$

puisque $|h_1| \leq \epsilon$ sur $\Omega \setminus K$. Donc

$$\|h\|_{L^1(\Omega)} \leq \|h-h_1\|_{L^1(\Omega)} + \|h_1\|_{L^1(\Omega)} \leq 2\epsilon + 2\epsilon\mu(\Omega).$$

Cette égalité étant vraie pour tout $\epsilon > 0$ on conclut que $h = 0$ presque partout sur Ω.

Considérons maintenant le cas général. On écrit $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ avec Ω_n ouvert, $\overline{\Omega_n}$ compact, $\overline{\Omega_n} \subset \Omega$ (prendre par exemple $\Omega_n = \left\{x \in \Omega \;\middle|\; d(x,\mathbb{R}^m \setminus \Omega) > \frac{1}{n} \text{ et } |x| < n\right\}$). Appliquant ce qui précède avec Ω_n et $f|_{\Omega_n}$ on voit que $h = 0$ presque partout sur Ω_n et on conclut que $h = 0$ presque partout sur Ω. ∎

2.6 Exercices du Chapitre 2

Exercice 2.1. Parmi les foctions suivantes déterminer celles qui sont dans $L^1(\mathbb{R})$,$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$,$L^2(\mathbb{R})$,$L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$:

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{x},\; f_2(x) = \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}, f_3(x) = \frac{\sin x}{x^2};$$

$$f_4(x) = \frac{1-\cos x}{x^2},\; f_5(x) = \frac{1}{(1+|x|)\sqrt{|x|}},\; f_6(x) = \frac{|x|-1}{(1+x^2)\log|x|};$$

$$f_7(x) = \frac{(\log|x|)^2}{x^2-1},\; f_8(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\mathbf{1}_{[n,n+\frac{1}{n^2}]}(x),\; f_9(x) = \sin(x^2),$$

$$f_{10}(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Exercice 2.2. 1. Soit $f \in C_0^0(\mathbb{R})$. A quelle condition existe-t-il $g \in C_0^1(\mathbb{R})$ vérifiant $g' = f$?

2. Donner une suite (f_n) dans $C_0^0(\mathbb{R})$ qui converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ et telle que l'on ait

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx.$$

Peut-on donner un exemple où la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$?

3. En déduire que la forme linéaire

$$f \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

n'est pas continue sur $C_0^0(\mathbb{R})$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$.

Exercice 2.3. Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$; on pose

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n). \tag{6.24}$$

1. Montrer que F est C^∞ sur $\mathbb{R}$, périodique et de période 1.

2. On considère la fonction

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{x^2}{x^2-1}} & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que

$$g \in C_c^\infty(\mathbf{R}),\; g(x) \geq 0,\; \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } g(x) > 0,\; \forall x \in]-1,1[. \tag{6.25}$$

3. Soit g une fonction satisfaisant (6.25). On pose

$$G(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} g(x+n),\; f_0(x) = \frac{g(x)}{G(x)}.$$

Prouver que $f_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f_0(x+n) = 1.$$

4. En utilisant la question précédente prouver la réciproque de 1). Plus précisément montrer que, pour toute $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ périodique de période 1 on peut trouver $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ de manière a satisfaire (6.24).

Exercice 2.4. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. On pose pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$d(x,F) = \inf_{y \in F} d(x,y).$$

1. Montrer que $x \to d(x,F)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. Est-elle uniformément continue?
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ il existe $y \in F$ tel que $d(x,F) = d(x,y)$.
3. Montrer que $d(x,F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.
4. Soit K un compacte de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $K \cap F = \emptyset$. Montrer que pour $\epsilon > 0$ assez petit l'ensemble
$$K_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x,K) \leq \epsilon\},$$
est un compact qui vérifie aussi $K_\epsilon \cap F = \emptyset$

Exercice 2.5. Soit $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale. Montrer que si P est nulle sur un ouvert non vide, alors $P \equiv 0$.

Exercice 2.6. Ecrire le développement de Taylor à l'ordre 2 en $(0,\frac{\pi}{2})$ pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x,y) = \operatorname{ch}(x+y)\sin(x).$$

Déterminer une majoration du reste de la forme $C\left[x^2 + (y - \frac{\pi}{2})^2\right]^{\frac{3}{2}}$, valable pour (x,y) dans le disque de centre $(0,\frac{\pi}{2})$ et de rayon 1.

Exercice 2.7 (Théorème de Borel). Soit (a_n) une suite de réels. Soit (t_n) une suite de réeels vérifiant

1. $t_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$,
2. $\sum_0^\infty \frac{|a_n|}{t_n} < \infty$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans $[-1,1]$ valant 1 au voisinage de 0 et à valers dans $[0,1]$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n \frac{x^n}{n!} \varphi(t_n x).$$

Montrer que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et que $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \geq 0$.

Vérifier que pour toute suite (a_n) donnée on peut trouver une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 2.8. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, contenant l'origine. Une fonction $f \in C^\infty(I)$ est dite plate en 0 si

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

1. Soit $f \in C^\infty(I)$ plate en 0. Prouver que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   est plate en 0.

2. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ plate en 0 et paire. Alors $h(x) = f(\sqrt{x})$ est plate en 0.
3. Soit $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ paire. Montrer qu'il existe $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$h(x^2) = g(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

   (utiliser l'Exercice 2.7 et traiter d'abord le cas où g est plate en 0).

Exercice 2.9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Pour $\epsilon > O$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F_\epsilon(t) = \frac{\epsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)dx}{(x-t)^2 + \epsilon^2}.$$

1. Montrer que l'on a :

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} F_\epsilon(t) = f(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

   avec convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on a $F_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty$.
3. Montrer qu'il existe des fonctions ϕ_ϵ (avec $\epsilon > 0$) continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :
   i) $F_\epsilon = f * \phi_\epsilon$,
   ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\epsilon(x)dx = 1$.
   iii) $\phi_\epsilon(x) \geq 0, \forall \epsilon > 0$,
   iv) les restrictions de ϕ_ϵ à $\mathbb{R} \setminus [-\alpha,\alpha]$ convergent dans $L^1(\mathbb{R} \setminus [-\alpha,\alpha])$ vers 0 quand ϵ tend vers 0^+, pour tout $\alpha > 0$.
4. Montrer que si ψ_ϵ est une famille de fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions i), ii), iii) et iv) alors pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ bornée, on a :

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} f * \psi_\epsilon = f,$$

   uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.10. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+itx}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $F \in \mathcal{C}^1$ et vérifie une équation différentielle simple.
2. En déduire la valeur de $F(t)$.

Exercice 2.11. On se propose de démontrer la densité de $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ en supposant établie la densité de $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors on a :

$$\lim_{S\to\infty} \left\| f - f \cdot \chi_{B(0,S)} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

2. Prenons $f \in L_0^2(\mathbb{R}^n)$ et soit, pour tout $S > 0$, $A_S = \{x \mid |f(x)| \leq S\}$. Montrer que:

$$\lim_{S\to\infty} \| f - f \cdot \chi_{A_S} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

3. Montrer que si $f \in L_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et vérifie : $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ presque partout, alors on pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|\varphi\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ et $\|\varphi - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon$ (utiliser le fait que pour $|x| \leq 1$, on a $|x|^2 \leq |x|$).
4. Conclure.

Chapitre 3

Définitions et propriétés fondamantales des distributions

3.1 Définitions de base

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit K un compact de Ω. On va noter par $\mathcal{D}_K(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ ayant le support contenu dans K.

Définition 3.1.1. On dit que u est une distribution dans l'ouvert Ω si u est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui vérifie la propriété de continuité suivante : pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe un entier m et une constante $C_K > 0$ tels que

$$|u(\phi)| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega). \tag{1.1}$$

L'ensemble de toutes les distributions dans Ω sera noté par $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si pour tout compact $K \subset \Omega$ on peut utiliser le même entier m dans (1.1) alors on dit que la distribution u est d'ordre $\leq m$.

Exemple 3.1.2. Toute fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ définit une distribution $u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ en posant

$$u_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)\mathrm{d}x, \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Il est facile à vérifier que u_f est une distribution d'ordre 0. De plus, d'après la Proposition 2.5.9, l'application

$$j : L^1_{\text{loc}}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega), \quad j(f) = u_f,$$

est injective. Dans l'exemple suivant nous montrerons qu'elle n'est pas surjective.

Exemple 3.1.3 (La masse de Dirac dans un point). Soit $a \in \Omega$. On considère la forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ définie par

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Alors on a

$$|\langle \delta_a,\varphi\rangle| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donc δ_a est une distribution d'ordre zéro dans Ω. Cependant δ_a n'est pas donnée par une fonction $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. En effet, supposons qu'il existe $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telle que

$$\langle \delta_a,\varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.2}$$

Notons $\widetilde{\Omega} = \Omega \setminus \{a\}$. Alors

$$\langle \delta_a,\varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\widetilde{\Omega}).$$

D'après la Proposition 2.5.9 on a que $f = 0$ presque partout dans $\widetilde{\Omega}$ et donc presque partout dans Ω. Par conséquent $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Cela contredit (1.2) dès que $\varphi(a) \neq 0$. *La masse de Dirac dans un un point a est donc un exemple de distribution d'orde zéro qui ne provient pas d'une fonction $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Exemple 3.1.4. Si $x_0 \in \Omega$ alors $u(\phi) = \partial^\alpha\phi(x_0)$, avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$, est une distribution d'ordre $|\alpha|$. En effet, on peut voir que l'ordre n'est pas inférieur à $|\alpha|$ en choisisant $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\psi(0) = 1$ et en posant

$$\phi_\epsilon(x) = (x - x_0)^\alpha \psi\left(\frac{x - x_0}{\epsilon}\right),$$

avec $\epsilon > 0$. Un calcul simple montre que $u(\phi_\epsilon) = \alpha!$ et que

$$\sup_{x\in\Omega}\left|\partial^\beta\phi_\epsilon\right| \leq C\epsilon^{|\alpha|-|\beta|} \to 0 \quad \text{si} \quad \epsilon \to 0 \quad \text{et} \quad |\beta| < |\alpha|.$$

Dorénavant, si u est une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on utilisera systématiquement la notation $\langle u,\phi\rangle = u(\phi)$.

Exemple 3.1.5. On définit

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right),\phi\right\rangle = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

La relation ci-dessus définit une distribution d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$, appelée valeur principale de $\frac{1}{x}$. La preuve de cette affirmation fait l'objet de l'Exercice 3.3.

Comme pour les opérateurs linéaires dans des espaces normés, la propriété de "continuité" d'une distribution peut être caractérisé à l'aide de suites. Avant de donner cette caractérisation, nous définissons la notion de convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Définition 3.1.6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On dit que la suite $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge vers $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si

1. Il existe un compact K de Ω tel que $\mathrm{supp}(\phi_n) \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a $\lim_{n\to\infty} \|\partial^\alpha (\phi_n - \phi)\|_\infty = 0$.

Théorème 3.1.7. *Une forme linéaire $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une distribution sur Ω si et seulement si, pour toute suite $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tendant vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \langle u,\phi_n \rangle = 0. \tag{1.3}$$

Preuve. Supposons que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tendant vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$. D'après la définition de la convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ il existe un compact K de Ω tel que $\operatorname{supp}(\phi_n) \subset K$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. On déduit qu'il existe les constantes $C_K > 0$ et $m_K \in \mathbb{N}$ telles que

$$|\langle u,\phi_n \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \|\partial^\alpha \phi_n\|_\infty, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Compte tenu du fait que, pour chaque α fixé, $\lim_{n\to\infty} \|\partial^\alpha \phi_n\|_\infty = 0$ on déduit que l'on a (1.3) pour toute suite $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tendant vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Il nous reste à montrer que si, pour toute suite $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tendant vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a (1.3) alors $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un compact K_0 de Ω tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $C > 0$ on puisse trouver $\phi_{m,C} \in \mathcal{D}_{K_0}(\Omega)$ vérifiant

$$|\langle u,\phi_{m,C} \rangle| > C \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \phi_{m,C}\|_\infty . \tag{1.4}$$

Prenons $\phi_N = \phi_{N,N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que $\phi_N \neq 0$ donc, quitte à multipler ϕ_N par un nombre positif, on peut supposer que l'on a

$$\sup_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha \phi_N\|_\infty = \frac{1}{N}. \tag{1.5}$$

En utilisant la relation ci-dessus et (1.4) on déduit que

$$|\langle u,\phi_N \rangle| > 1, \qquad \forall\, N \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Comme, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a que $\operatorname{supp}(\phi_N) \subset K_0$ la relation (1.5) implique que

$$\lim_{N\to\infty} \phi_N = 0, \ \text{ dans } \ \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.7}$$

Les relations (1.6) et (1.7) contredisent (1.3). Nous avons donc prouvé que si, pour toute suite $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tendant vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a (1.3) alors $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. ■

3.2 Dérivation de distributions

Considérons une fonction f de classe C^1 dans $\mathbb{R}^n$ et regardons l'action de ses dérivées partielles sur les fonctions d'essai. Si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i},\phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) f(x)\,\mathrm{d}x = -\left\langle f, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Cette dernière formule conserve un sens si on remplace f par une distribution. Plus précisément on a :

Proposition 3.2.1. *Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, la forme linéaire définie par*

$$\phi \to -\left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

est une distribution. Pour tout compact K de Ω l'ordre sur K de cette distribution est majoré par $m_K + 1$ où m_K est l'ordre de u sur K.

Preuve. Pour tout $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ on a

$$\left| \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \right| \le C_K \sum_{|\alpha| \le m_K} \left\| \partial^\alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \right\|_\infty \le C_K \sum_{|\beta| \le m_K + 1} \left\| \partial^\beta \phi \right\|_\infty .$$

■

Le résultat ci-dessus justifie la définition suivante.

Définition 3.2.2. Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Les dérivées partielles de u, notées $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1,n$ sont les distributions définies par

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On remarque que si f est une fonction dérivable alors la dérivée de la distribution asssociée à f coïncide avec la dérivée habituelle de f. Une autre remarque est que, si on prend la dérivée par rapport à x_j de $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, on obtient le même résultat qu'en permutant i et j. En effet

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \phi \right\rangle = \left\langle u, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \right\rangle \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

et, d'après le lemme de Schwarz, le membre de droite est invariant par permutation de i et de j.

Exemple 3.2.3 (Fonction d'Heaviside). La fonction H d'Heaviside est la fonction caractéristique de $[0,\infty[$. On a $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En effet

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}, \varphi \right\rangle = -\left\langle H, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \right\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0).$$

Exemple 3.2.4. La fonction $f(x) = \log|x|$ est dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, donc elle définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{2.8}$$

En effet, d'après la définition de la dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \varphi \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \log(|x|)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

Par ailleurs on vérifie facilement que

$$\int_{|x|>\epsilon} \log(|x|)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = [\varphi(-\epsilon) - \varphi(\epsilon)]\log\epsilon - \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

On déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} \log(|x|)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{|x|>\epsilon} \log(|x|)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right\rangle. \tag{2.10}$$

Les relations (2.9) et (2.10) impliquent (2.8)

Nous allons maintenant calculer les dérivées d'une classe de fonctions qui ne sont pas dérivables au sens classique.

Définition 3.2.5. On dit qu'une fonction f définie dans un intervalle $]a,b[$ est C^m par morceaux s'il existe un nombre fini de points $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$ tels que, dans chacun des intervalles $]a_i,a_{i+1}[$, les dérivées de f jusqu'à l'ordre m existent, soient continues, et se prolongent continûment dans les intervalles $]a_0,a_1],\ldots,[a_i,a_{i+1}],\ldots,[a_{N-1},a_N[$. Pour $0 \le k \le m$, on note $f^{(k)}(a_i \pm 0)$ les limites à droite et à gauche de $f^{(k)}$ au point a_i.

Le résultat ci-dessous donne la dérivée de la distribution associée à une fonction C^1 par morceaux.

Théorème 3.2.6. *(***Formule des sauts***) Soit f de classe C^1 par morceaux dans $]a,b[$. On a alors, avec les notations ci-dessus,*

$$f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{N-1} [f(a_i+0) - f(a_i-0)]\,\delta_{a_i},$$

où on a noté f' la dérivée au sens de distributions, et $\{f'\}$ la fonction continue par morceaux dérivée usuelle en dehors des points a_i.

Preuve. Par définition on a

$$\langle f',\varphi\rangle = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[).$$

En intégrant par parties dans chacun des intervalle $[a_i,a_{i+1}]$, on onbtient d'ine part des termes donc la somme vaudra $\int_a^b \{f'\}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ et les termes

$$f(a_{i+1}-)\varphi(a_{i+1}) - f(a_i+) - \varphi(a_i)$$

qui regroupés donnerons les $\langle \delta_{a_i},\varphi\rangle$ avec un coefficient égal au saut de f en a_i. ∎

Une propriété très importante de la dérivation au sens de distributions est qu'elle preserve une caractéristique très importante de la dérivation classique: si la dérivé d'un fonction régulière sur $\mathbb{R}^n$ est identiquement nulle, alors la fonction est constante. Dans un premier temps nous énonçons et nous prouvons ce résultat dans le cas uni-dimensionnel.

Théorème 3.2.7. *Soit I un intervalle ouvert. Alors*

1. *Les distributions u sur I vérifiant $u' = 0$ sont les fonctions constantes.*
2. *Pour toute $v \in \mathcal{D}'(I)$, il existe $u \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $u' = v$.*

Preuve. Soit $\theta \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\int_I \theta(x)\mathrm{d}x = 1$ et soit $\phi \in \mathcal{D}(I)$. Alors la fonction $\eta(x) = \phi(x) - \left[\int_I \phi(x)\mathrm{d}x\right]\theta(x)$ est dans $\mathcal{D}(I)$ et $\int_I \eta(x)\mathrm{d}x = 0$. On a vu dans l'Exercice 2.2 que cela implique l'existence d'une unique fonction $\psi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\psi' = \eta$, donc il existe une unique fonction $\psi \in \mathcal{D}(I)$ telle que

$$\psi' = \phi - \left[\int_I \phi(x)\mathrm{d}x\right]\theta. \tag{2.11}$$

Soit maintenant $u \in \mathcal{D}'(I)$ vérifiant $u' = 0$. On a

$$\langle u,\phi\rangle = \left[\int_I \phi(x)\mathrm{d}x\right]\langle u,\theta\rangle + \langle u,\psi'\rangle.$$

Le dernier terme, qui vaut $-\langle u',\psi\rangle$ est nul et on obtient, en appelant C la constante $\langle u,\theta\rangle$,

$$\langle u,\phi\rangle = C\int_I \phi(x)\mathrm{d}x.$$

La relation ci-dessus exprime que u est égale à une constante C.

Pour trouver une primitive u de v, on pose

$$\langle u,\phi\rangle = -\langle v,\psi\rangle,$$

où ψ est l'unique fonction de $\mathcal{D}(I)$ associé à ϕ par la relation (2.11). Il est facile à vérifier la linéarité et la continuité de u. De plus il est claire que la fonction associée à ϕ' par la relation (2.11) est $\psi = \phi$. Par conséquent

$$\langle u,\phi'\rangle = -\langle v,\phi\rangle \qquad \forall\ \phi \in \mathcal{D}(I),$$

donc on a bien $u' = v$. ∎

La généralisation en dimension quelconque du Théorème 3.2.7 est le résultat suivant.

Théorème 3.2.8. *Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$. Alors u est une (fonction) constante.*

Pour la démonstration du Théorème 3.2.8 on a besoin du lemme ci-dessous.

Lemme 3.2.9. *Pour toute $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x = 0.$

2. Il existe $\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j}.$$

Preuve. Le fait que la deuxième affirmation implique la première est facile à établire. On propose au lecteur de vérifier cette implication.

Montrons que la première affirmation implique la seconde par récurrence sur n. Pour $n = 1$ le résultat est déjà établi (voir l'Exercice 2.2). Supposons donc $k \geq 2$ et le résultat vrai pour $n \leq k-1$. Posons

$$f\left(x_1,\dots,x_{k-1}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(x_1,\dots,x_{k-1},y\right) \mathrm{d}y.$$

Alors on a $f \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^{k-1}\right)$ car si $\operatorname{supp}(\phi) \subset [-R,R]^k$ on aura $\operatorname{supp}(f) \subset [-R,R]^{k-1}$. De plus, par Fubini, $\int_{\mathbb{R}^{k-1}} f(x)\mathrm{d}x = 0$. Compte tenu de l'hypothèse de récurrence on déduit qu'il existe $g_1,\dots,g_{k-1} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{k-1})$ avec

$$f = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}.$$

Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)dt = 1$ et posons

$$\widetilde{\phi}\left(x_1,\dots,x_k\right) = \phi(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}\left(x_1,\dots,x_{k-1}\right)\rho(x_k) = \phi(x) - f(x_1,\dots,x_{k-1})\rho(x_k).$$

Notons

$$\psi_j\left(x_1,\dots,x_k\right) = g_j\left(x_1,\dots,x_{k-1}\right)\rho\left(x_k\right), \qquad \forall\, j \in \{1,\dots,k-1\}.$$

Alors $\psi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$ et $\widetilde{\phi} = \phi - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j}$. Il est claire que pour $(x_1,\dots,x_{k-1})$ on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\phi}(x_1 \dots,x_{k-1},t)dt = 0,$$

car $f = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}$ et $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Posons alors

$$\psi_k(x_1,\dots,x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \widetilde{\phi}(x_1 \dots,x_{k-1},t)\,\mathrm{d}t.$$

Il est clair que $\psi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ et que $\frac{\partial \psi_k}{\partial x_k} = \widetilde{\phi}$. On a donc $\phi = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j}$. Il reste à prouver que ψ_k est à support compact. En effet $\widetilde{\phi}$ est à support compact, donc il existe $S > 0$ telle que $\operatorname{supp}(\widetilde{\phi}) \subset [-S,S]^k$. Alors on a $\operatorname{supp}(\psi_k) \subset [-S,S]^k$. En effet, il est claire ques si $(x_1,\dots,x_{k-1}) \notin [-S,S]^{k-1}$ alors $\psi_k(x_1,\dots,x_k) = 0$. Si $(x_1,\dots,x_{k-1}) \in [-S,S]^{k-1}$ et $x_k < -S$ alors $\psi_k(x) = 0$ car la fonction intégrée est nulle sur $]-\infty,x_k]$. Si $x_n > S$ alors

$$\psi_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\phi}(x_1 \dots,x_{k-1},t)dt = 0.$$

■

Démonstration du Théorème 3.2.8. On utilise la méthode introduite dans la preuve du Théorème 3.2.7. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x)\mathrm{d}x = 1$ et soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Alors la fonction $\eta(x) = \phi(x) - \left[\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x\right]\theta(x)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\mathrm{d}x = 0$. D'après le Lemme 3.2.9 il existe les fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} = \phi - \left[\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x\right]\theta.$$

Soit maintenant $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, $i = 1,n$. On a

$$\langle u,\phi\rangle = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x\right]\langle u,\theta\rangle + \left\langle u, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j}\right\rangle.$$

Le dernier terme, qui vaut $-\sum_{j=1}^{n}\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j},\psi_j\right\rangle$ est nul et on obtient, en appelant C la constante $\langle u,\theta\rangle$,

$$\langle u,\phi\rangle = C\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x.$$

La relation ci-dessus exprime que u est égale à une constante C.

3.3 Multiplication par des fonctions de classe C^∞

Proposition 3.3.1. *Soit $f \in C^\infty(\Omega)$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors la forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ définie par*

$$\phi \to \langle u,f\phi\rangle, \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

est une distribution sur Ω. L'ordre de cette distribution sur tout compact K de Ω est inférieur ou égal à l'ordre sur K de u.

Preuve. Comme $f\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $f \in C^\infty(\Omega)$, $\langle fu,\phi\rangle$ est bien définie. Si K est un compact de Ω et $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ alors $f\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ et donc

$$|\langle fu,\phi\rangle| = |\langle u,f\phi\rangle| \leq C_K \sup_{|\alpha|\leq m_K} \|\partial^\alpha(f\phi)\|_\infty.$$

Mais $\partial^\alpha(f\phi) = \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix} \partial^\beta f\, \partial^{\alpha-\beta}\phi$ et donc

$$\sup_{|\alpha|\leq m_K} \|\partial^\alpha(f\phi)\|_\infty \leq C(n,m_K) \sup_{|\alpha|\leq m_K} \|\partial^\alpha f\|_\infty \sup_{|\alpha|\leq m_K} \|\partial^\alpha\phi\|_\infty.$$

On a donc prouvé que

$$|\langle fu,\phi\rangle| \leq \widetilde{C_K} \sup_{|\alpha|\leq m_K} \|\partial^\alpha\phi\|_\infty \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega),$$

où $\widetilde{C_K} = C_K C(n,m_K) \sup_{|\alpha|\le m_K} \|\partial^\alpha f\|_\infty$. Cela signifie que $fu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et

$$\mathrm{ordre}_K(fu) \le m_K = \mathrm{ordre}_K u,$$

pour tout compact K de Ω. ■

Le résultat ci-dessus justifie la définition suivante.

Définition 3.3.2. Le produit de la distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par la fonction $f \in C^\infty(\Omega)$ est la distribution définie par

$$\langle fu,\phi\rangle = \langle u,f\phi\rangle, \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemple 3.3.3. Pour $f \in C^\infty(\Omega)$ et $a \in \Omega$ on a $f\delta_a = f(a)\delta_a$. En effet

$$\langle f\delta_a,\varphi\rangle = \langle \delta_a,f\varphi\rangle = \langle f(a)\delta_a,\varphi\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En particulier $x\delta_0 = 0$.

On peut par ailleurs trouver toutes les solution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ de l'équation

$$xu = 0. \tag{3.12}$$

En effet soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi(0) = 1$. Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la fonction $\phi - \phi(0)\chi$ s'annule à l'origine donc, d'après le Corollaire 2.1.13 il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\phi = \phi(0)\chi + x\psi.$$

Comme ϕ et χ sont à support compact, la relation ci-dessus implique que $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a donc

$$\langle u,\phi\rangle = \phi(0)\langle u,\chi\rangle + \langle u,x\psi\rangle.$$

Par hypothèse, on a $\langle u,x\psi\rangle = \langle xu,\psi\rangle = 0$. En appelant C la constante $\langle u,\chi\rangle$, on obtient que $\langle u,\phi\rangle = C\phi(0)$, donc $u = C\delta_0$.

Exemple 3.3.4. On a $x \cdot \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\left\langle x \cdot \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right\rangle = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right),x\varphi\right\rangle = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{|x|\ge\epsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle 1,\varphi\rangle.$$

Remarque 3.3.1. En appliquent les résultats des exemples 3.3.3 et 3.3.4 on peut déduire que toute solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $xu = 1$ est de la forme

$$u = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + C\delta_0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Proposition 3.3.5. (Formule de Leibniz) *Si* $f \in C^\infty(\Omega)$ *et* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *alors*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f\cdot u) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot u + f\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad \forall\, i \in \{1,\dots,n\}.$$

Preuve. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot u),\varphi \right\rangle = -\left\langle f \cdot u,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\left\langle u,f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\left\langle u,\frac{\partial}{\partial x_i}(f\varphi) - \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi \right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i},f\varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}u,\varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u + f \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i},\varphi \right\rangle.$$

■

3.4 Limites de distributions

Définition 3.4.1. On dit qu'une suite $(u_n) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$\lim_{n \to \infty} \langle u_n,\varphi \rangle = \langle u,\varphi \rangle \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemple 3.4.2. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ et $\lim_{n\to-\infty} a_n = -\infty$. Alors, pour toute suite $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_N = \sum_{-N}^{N} b_k \delta_{a_k}$$

converge vers $S = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k \delta_{a_k}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

L'exemple ci-dessus permet d'obtenir une généralisation de la formule de sauts, dont la démonstration est proposée comme exercice au lecteur.

Proposition 3.4.3 (Formule des sauts généralisée). *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ une suite strictement croissante avec $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ et $\lim_{n\to-\infty} a_n = -\infty$. On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 dans chacun des intervalles $]a_i,a_{i+1}[$ f et que f, f'se prolongent continûment dans les intervalles $[a_i,a_{i+1}]$.*

On a alors

$$f' = \{f'\} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} [f(a_n + 0) - f(a_n - 0)]\, \delta_{a_i},$$

où on a noté f' la dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et $\{f'\}$ la fonction continue par morceaux dérivée usuelle en dehors des points a_i.

Le résultat suivant donne quelques conditions suffisantes pour la convergence dans $\mathcal{D}'$.

Proposition 3.4.4. *Les conditions suivantes sont suffisantes pour qu'on ait $f_j \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$*

1. *$f_j \to f$ dans $L^1(\Omega)$.*
2. *$f_j \to f$ dans $L^2(\Omega)$.*
3. *$(f_j) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $f_j \to f$ p.p. dans Ω et il existe $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que $|f_j| \leq |g|$ pour tout j.*

Preuve.

1. Supposons que $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left|\int_\Omega f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \|\varphi\|_\infty \, \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

on obtient que $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2. Supposons que $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$. D'après l'inégalité de Schwarz, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left|\int_\Omega f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \, \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

on obtient que $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On note $K = \mathrm{supp}(\varphi)$ et χ_K la fonction carctéristique de l'ensemble K. Alors $|f_n(x)\varphi(x)| \leq |g(x)|\,|\chi_K(x)|\,\|\varphi\|_\infty$ pour presque tout $x \in \Omega$. Comme la fonction $x \to |g(x)|\,|\chi_K(x)|\,\|\varphi\|_\infty$ est clairement de $L^1(\Omega)$ la conclusion decoule en appliquant le Théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 2.4.3). ■

Exemple 3.4.5. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et ρ_n une suite régularisante (voir la définition donnée en Section 2.5). On a que $\rho_n \to \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. En effet

$$\langle \rho_n - \delta_0, \varphi\rangle = \int_\Omega \rho_n(x)\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^m} \rho_1(y)\left(\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0)\right)\mathrm{d}y.$$

Donc

$$|\langle \rho_n - \delta_0, \varphi\rangle| \leq \sup_{\|y\|\leq 1}\left|\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0)\right|,$$

et la continuité de φ en 0 assure que ce majorant tend vers 0 quand $n \to \infty$.

La dérivation au sens de distributions et une opération continue sur $\mathcal{D}'(\Omega)$. Plus précisemment on a :

Théorème 3.4.6. *Soit (u_n) une suite telle que $u_n \to u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ fixé, on a $\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

*Preuve.*Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\langle \partial^\alpha u_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f_n, \partial^\alpha\varphi\rangle \to_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha\varphi\rangle \to_{n\to\infty} = \langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle\,.$$

■

Exemple 3.4.7. Le Théorème 3.4.6 permet, entre autres, de donner une nouvelle preuve du fait que la dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la fonction $x \to \log|x|$ (qui est dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$) est donnée par

$$(\log|x|)' = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right).$$

En effet, soit f_ϵ la fonction définie par

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} \log|x| & \text{si} \quad |x| \geq \epsilon \\ \log\epsilon & \text{si} \quad |x| < \epsilon \end{cases}$$

C'est une fonction C^1 par morceaux et continue donc, d'après le théorème de sauts sa dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est donnée par

$$f'_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad |x| \geq \epsilon \\ 0 & \text{si} \quad |x| < \epsilon \end{cases}$$

Par ailleurs on a $f_\epsilon(x) \to f(x)$ et $|f_\epsilon(x)| \leq |f(x)|$ presque partout donc, d'après la Proposition 3.4.4, $f_\epsilon \to f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. D'après le le Théorème 3.4.6 $f'_\epsilon \to f'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ donc

$$< (\log|x|)', \phi >= \lim_{\epsilon \to 0+} < f'_\epsilon, \phi >= \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} \, \mathrm{d}x,$$

d'où la conclusion.

La multiplication par de fonctions de classe C^∞ est aussi une opération continue dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Plus précisemment on a:

Proposition 3.4.8. *Soit (u_n) une suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Alors, pour tout $f \in C^\infty(\Omega)$, on a $\lim_{n\to\infty}(fu_n) = fu$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Preuve. Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle fu_n, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, f\varphi \rangle = \langle u, f\varphi \rangle = \langle fu, \varphi \rangle .$$

■

Exemple 3.4.9 (Exercice).

$$x^p \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^p \delta_k.$$

3.5 Distributions à support compact

Commençons par définir la restriction à un ouvert $V \subset \Omega$ d'une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 3.5.1. Pour $\phi \in \mathcal{D}(V)$ on note $\widetilde{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega)$ le prolongement de ϕ par 0 sur $\Omega \setminus V$. On définit alors

$$\langle u|_V, \phi \rangle = \langle u, \widetilde{\phi} \rangle \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(V).$$

On remarquera que pour K compact de V, comme K est un compact de Ω, la continuité de u sur $\mathcal{D}(\Omega)$ donne celle de $u|_V$ sur $\mathcal{D}(V)$.

Proposition 3.5.2. *Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors il existe un plus grand ouvert V_0 de Ω tel que la restriction $u|_{V_0}$ soit nulle.*

Preuve. Considérons l'ensemble des ouverts V de Ω tels que $u|_V = 0$ et notons V_0 leurs réunion. Il suffit de démontrer que $u|_{V_0} = 0$. Soit donc $\varphi \in \mathcal{D}(V_0)$. On peut alors trouver un nombre fini d'ouverts $V_1, \ldots, V_k$ tels que

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_i, \text{ et } u|_{V_i} = 0 \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Soit $(\rho_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de $\operatorname{supp}(\varphi)$ par $V_1, \ldots, V_k$. On aura alors

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \rho_i \varphi,$$

avec $\rho_i\varphi \in \mathcal{D}(V_i)$. Donc

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle u, \rho_i \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle u|_{V_i}, \rho_i \varphi \rangle = 0.$$

■

Définition 3.5.3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On appellera support de u le fermé $\operatorname{supp}(u) = \Omega \setminus V$ de Ω où V est le plus grand ouvert V de Ω tel que l'on ait $u_{|V} = 0$.

Exemple 3.5.4. Si u est donnée par une fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, i.e., $u = u_f$ alors $\operatorname{supp}(u) = \operatorname{supp}(f)$. En effet si $x_0 \notin \operatorname{supp}(f)$ alors il existe un voisinage ouvert V_{x_0} de x_0 dans Ω tel que $f(x) = 0$ pour $x \in V_{x_0}$. Alors, si $\varphi \in \mathcal{D}(V_{x_0})$ on a que $\varphi(x)f(x) = 0$ dans Ω et donc $\langle u, \varphi \rangle = 0$. Cela implique que $x_0 \notin \operatorname{supp}(u)$. Inversement si $x_0 \notin \operatorname{supp}(u)$ il existe un voisinage ouvert V_{x_0} de x_0 dans Ω tel que $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(V_{x_0})$. D'après la Proposition 2.5.9, ceci implique que $f(x) = 0$ dans V_{x_0}, donc $x_0 \notin \operatorname{supp}(f)$.

Exemple 3.5.5. Si $\langle u, \varphi \rangle = \partial^\alpha \varphi(x_0)$, avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (voir l'exemple 3.1.4) alors $\operatorname{supp}(u) = \{x_0\}$. En effet si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \{x_0\})$ on a $\langle u, \varphi \rangle = 0$, donc $\operatorname{supp}(u) \subset \{x_0\}$. Pour montrer que $x_0 \in \operatorname{supp}(u)$ on considère un voisinage ouvert V_{x_0} de x_0 et $\chi \in \mathcal{D}(V_{x_0})$ telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage de x_0. Posons $\varphi(x) = \dfrac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!}\chi(x)$; alors $\varphi \in \mathcal{D}(V_{x_0})$ et il est facile de voir, en utilisant la formule de Leibniz, que $\partial^\alpha \varphi(x_0) = 1$, donc $x_0 \in \operatorname{supp}(u)$. Nous allons voir dans le Corollaire 3.5.9, qu'à des combinaisons linéaire près, l'exemple ci-dessus et le seul exemple de distribution à support concentré dans un point.

Exemple 3.5.6. Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ posons

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} \varphi(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Alors
$$\operatorname{supp}(u) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x^2 + y^2 = 1\big\} = S^1.$$
En effet si $\operatorname{supp}(\varphi) \cap S^1 = \emptyset$ alors $\varphi(\cos\theta, \sin\theta) = 0$ pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, donc $\langle u,\phi\rangle = 0$, d'où $\operatorname{supp}(u) \subset S^1$. Montrons l'égalité. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \cap S^1 \neq \emptyset$. Si $(x_0,y_0) \in \operatorname{supp}(\varphi) \cap S^1$ alors, par le Lemme 2.2.3, il existe $\phi_0 \in \mathcal{D}(V)$ telle que $\phi_0(x,y) \geq 0$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\phi_0(x_0,y_0) > 0$. Alors $\langle u,\phi_0\rangle > 0$, donc $S^1 \subset \operatorname{supp}(u)$.

Dans la suite on notera par $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'espace des distributions dans Ω à support compact.

Théorème 3.5.7. *Toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ est d'ordre fini.*

Preuve. Soit K un voisinage compact de $\operatorname{supp}(u)$, et soit χ une fonction de classe C^∞ à support dans K et égale à 1 au voisinage de $\operatorname{supp}(u)$ (une telle fonction existe grâce à la Proposition 2.2.8). Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la fonction $\varphi - \chi\varphi$ est nulle au voisinage de $\operatorname{supp}(u)$ et on a donc $\langle u,\varphi\rangle = \langle u,\chi\varphi\rangle$. Appelons p l'ordre de u sur K (voir Définition 3.1.1). On obtient donc l'existence d'une constante $C_1 > 0$ telle que
$$|\langle u,\varphi\rangle| \leq C_1 \sum_{|\alpha|\leq p} \|\partial^\alpha(\chi\varphi)\|_\infty \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$
En développant $\partial^\alpha(\chi\varphi)$ par la formule de Leibniz on obtient qu'il existe une constante $C > 0$, qui dépend de C_1 et des bornes supérieures de dérivée de χ jusqu'à l'ordre p sur K, telle que
$$|\langle u,\varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq p} \|\partial^\alpha\varphi\|_\infty \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$
Cela prouve que u est d'ordre fini inférieur ou égal à p. ∎

Il ne suffit pas que φ soit nulle sur $\operatorname{supp}(u)$ pour avoir $\langle u,\varphi\rangle = 0$. Par exemple, on voit facilement que $\operatorname{supp}(\delta_0') = \{0\}$ et que φ peut être nulle à l'origine sans que sa dérivée le soit. En utilisant le Théorème 3.5.7 on obtient une condition suffisante pour que $\langle u,\varphi\rangle = 0$.

Théorème 3.5.8. *Soit $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et soit p son ordre. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, nulle sur $\operatorname{supp}(u)$ ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à p, on a $\langle u,\varphi\rangle = 0$.*

Preuve. Posons $K = \operatorname{supp}(u)$. On notera K_ϵ l'ensemble des points dont la distance à K est inférieure ou égale à ϵ. Soit $n \in \mathbb{N}$ assez grand pour que le compact $K_{\frac{4}{n}}$ soit contenu dans Ω. Soit g_n la fonction égale à 1 dans $K_{\frac{2}{n}}$ et à 0 ailleurs. On considère la suite de fonctions (ψ_n) définie par
$$\psi_n(x) = (g * \rho_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} g_n(x-y)\rho_n(y)\,\mathrm{d}y \qquad \forall\, n \geq 1,$$
où (ρ_n) est une suite régularisante. Il est facile de vérifier que la fonction ψ_n vaut 1 dans $K_{\frac{1}{n}}$, vaut 0 hors de $K_{\frac{3}{n}}$, et est comprise entre 0 et 1. De plus, d'après le Théorème 2.5.3,

on a que $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$,

$$\partial^\alpha \psi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} g_n(x-y)\partial^\alpha \rho_n(y)\,\mathrm{d}y \qquad \forall\, n \geq 1. \tag{5.13}$$

Par ailleurs $\partial^\alpha \rho_n(x) = n^{m+|\alpha|}\partial^\alpha \rho_1(nx)$, donc $\|\partial^\alpha \rho_n\|_{L^1} = C_\alpha n^{|\alpha|}$, en notant C_α la norme de de $\partial^\alpha \rho_1$ dans $L^1(\mathbb{R}^m)$. Il resulte donc de (5.13) que

$$\|\partial^\alpha \psi_n\|_{L^\infty} \leq C_\alpha n^{|\alpha|} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{5.14}$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nulle sur K ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à p. Soit $x \in K_{\frac{3}{n}}$ et $\beta \in \mathbb{N}^m$, $|\beta| \leq p$. En effectuant le développement de Taylor à l'ordre $p - |\beta|$ en un point $x_0 \in K$ tel que $||x - x_0|| \leq \frac{3}{n}$ on obtient que

$$|\partial^\beta \varphi(x)| \leq C\frac{1}{n^{p+1-|\beta|}} \qquad \forall\, x \in K_{\frac{3}{n}}, \tag{5.15}$$

où la constante C fait intervenir le maximum des dérivées d'ordre au plus $p+1$ de φ. Nous avons alors

$$\langle u,\varphi\rangle = \langle u,\varphi - \varphi\psi_n\rangle + \langle u,\varphi\psi_n\rangle.$$

Le premier terme est nul, la fonction étant nulle dans le voisinage de $K_{\frac{1}{n}}$ du support de u. Le second treme est majoré en module par une constante fois la somme des bornes supérieures des $\partial^\alpha(\varphi\psi_n)$ pour $|\alpha| \leq p$. Ces fonctions étant nulles hors de $K_{\frac{3}{n}}$, la formule de Leibniz, (5.14) et (5.15) donnent

$$|\partial^\alpha(\varphi\psi_n)(x)| \leq C\sum_{\beta\leq\alpha} n^{|\beta|-p-1}\frac{C_{\alpha-\beta}}{n^{|\alpha|-|\beta|}}.$$

On a donc $|\langle u,\phi\rangle| \leq \frac{C'}{n}$ pour tout n, ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Nous pouvons maintenant donner une caractérisation complète des distributions dont le support est réduit à un point.

Corollaire 3.5.9. *Les distributions dont le support est réduit à un point $a \in \mathbb{R}^m$ sont des combinaisons linéaires finies de dérivées de la masse de Dirac en a.*

Preuve. On peut supposer, sans restreindre la généralité, que $a = 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ dont le support est l'origine et soit p l'ordre de u. En utilisant la formule de Taylor (voir le Théorème 2.1.11)) on obtient que :

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha|\leq p}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(x) + \widetilde{r}(x)$$

où

$$\widetilde{r}(x) = (p+1)\sum_{|\gamma|=p+1}\frac{x^\gamma}{\gamma!}\int_0^1 (1-t)^p\partial^\gamma\varphi(tx)dt.$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ égale à 1 au voisinage de l'origine. On peut alors écrire

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha|\leq p} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \psi(x) + r(x),$$

où la fonction

$$r(x) = \sum_{|\alpha|\leq p} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha - \sum_{|\alpha|\leq p} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(x)\psi(x) + \widetilde{r}(x)$$

est nulle à l'origine ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à p. D'après le Théorème 3.5.8 on a $\langle u,r\rangle = 0$ et donc, en notant b_α les constantes $\frac{\langle u, x^\alpha \psi(x)\rangle}{\alpha!}$,

$$\langle u,\varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq p} b_\alpha \partial^\alpha \varphi(0),$$

ou encore, en posant $c_\alpha = (-1)^{|\alpha|} b_\alpha$,

$$u = \sum_{|\alpha|\leq p} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0. \tag{5.16}$$

■

La notation $\mathcal{E}'(\Omega)$ pour l'espace des distributions à support compact (introduite par L. Schwartz) est due au fait que cet espace peut être vu comme le dual de $C^\infty(\Omega)$, noté $\mathcal{E}(\Omega)$ par Laurent Schwartz. Plus précisément on a le résultat ci-dessous, dont la preuve est proposée comme exercice au lecteur.

Proposition 3.5.10. *Soit $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ telles que $\theta \equiv 1$ au voisinage de* $\mathrm{supp}(u)$*. Alors l'application linéaire*

$$\varphi \to \langle u,\theta\varphi\rangle \qquad \forall\, \varphi \in C^\infty(\Omega)$$

ne dépend pas de la fonction θ choisie.

Le résultat ci-dessus permet une extension de la dualité $\mathcal{D}',\mathcal{D}$.

Définition 3.5.11 (Extension de la dualité). Pour $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ on définit la forme linéaire $u : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ par

$$\langle u,\varphi\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty} = \varphi \to \langle u,\theta\varphi\rangle \qquad \forall\, \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

Remarque 3.5.1. L'estimation (1.1) est valable, avec les mêmes constantes C, pour $\phi \in C^\infty(\Omega)$. Il suffit en effet de choisir la fonction θ ci-dessus égale à 1 au voisinage de K, les dérivéees de ϕ et $\theta\phi$ coïncidant alors sur K.

3.6 Convolution d'une distribution et d'une fonction C^∞

Nous avons étudié dans la Section 2.5 la convolution de deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Dans cette section nous nous proposons de donner un sens à la convolution $u * \varphi$ avec $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dans un premier temps nous donnons un résultat technique.

Lemme 3.6.1 (Dérivation sous le "crochet"). *Soient $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$; pour $y \in \mathbb{R}^p$ notons ϕ_y la fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ définie par*

$$\phi_y(x) = \phi(x,y) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Posons alors

$$F(y) = \langle u,\phi_y\rangle \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^p.$$

Alors $F \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$ et

$$\partial^\alpha F(y) = \left\langle u, \left(\partial_y^\alpha \phi\right)_y \right\rangle \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^p.$$

Preuve. Montrons d'abord la continuité de F. Si K est un voisinage compact du support de u, si $a \in \mathbb{R}^p$, et si (a_j) est une suite tendant vers a alors, d'après la Remarque 3.5.1, on a

$$|F(a_j) - F(a)| \le C \sup_{x\in K, |\alpha|\le p} \left|\partial_x^\beta \left(\phi(x,a_j) - \phi(x,a)\right)\right| \tag{6.17}$$

où p est l'ordre de u. Les dérivées de ϕ étant uniformément continues sur le produit de K par un voisinage de a, le membre de droite tend vers 0 pour $j \to \infty$, ce qui prouve la continuité de F. Montrons maintenant que F est C^1 sur $\mathbb{R}^p$. Si l'on note par $\{e_1, \dots ,e_p\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on prend $h \in \mathbb{R}^p$ et $t \in \mathbb{R}$ alors

$$F(a + he_i) - F(a) - h \left\langle u, \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i}\right)_a \right\rangle = \langle u,\psi^i_{a,h}\rangle, \tag{6.18}$$

où

$$\psi^i_{y,h}(x) = \psi^i(x,y,h) = \phi_{y+he_i}(x) - \phi_y(x) - h \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i}\right)_y (x) \qquad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p.$$

La relation ci-dessus implique que

$$\psi^i_{y,h}(x) = h \int_0^1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i}(x,y + the_i) - \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(x,y)\right) \mathrm{d}t \tag{6.19}$$

Par ailleurs, pour $\beta \in \mathbb{N}^n$ et K compact de $\mathbb{R}^n$, en appliquant le théorème des accroissemnts finis on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^\beta \psi^i_{a,h}(x)\right| &= \left|\int_0^1 \left(\partial_x^\beta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i}\right)(x,a + the_i) - \partial_x^\beta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i}\right)(x,a)\right) \mathrm{d}t\right| \\
&\le \frac{1}{2}\|h\| \left\|\partial_x^\beta \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y_i^2}\right)\right\|_{K\times \overline{B(0,1)}} \qquad \forall\, h \in \mathbb{R}^p,\ \|h\| \le 1.
\end{aligned}$$

La relation ci-dessus et (6.19) impliquent que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left\| \partial_x^\beta \left(\psi_{y,h}^i \right) \right\|_{K\times \overline{B(0,1)}} = 0 \qquad \forall\, \beta \in \mathbb{N}^n. \tag{6.20}$$

Les relations (6.18) et (6.20) impliquent que

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(a) = \left\langle u, \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i} \right) \right\rangle \qquad \forall\, i \in \{1,\dots,p\}.$$

Ces dérivées partielles sont continues d'après la première partie de le preuve. On conclut par récurrence. ■

Notations. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$, on note $(\tau_a\varphi)(x) = \varphi(x-a)$ la translatée par a de φ. De plus on note $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. On peut vérifier (voir Exercice 3.27) que

$$\tau_a\left(\check{\varphi}\right) = \overset{\vee}{\overbrace{\tau_{-a}(\varphi)}} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Théorème 3.6.2. *Pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on pose*

$$(u * \phi)(x) = \langle u, \tau_x\left(\check{\varphi}\right)\rangle \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. De plus, on a

$$\mathrm{supp}\,(u*\varphi) \subset \mathrm{supp}\,(u) + \mathrm{supp}\,(\varphi),$$

$$\partial^\alpha(u*\varphi) = u * \partial^\alpha\varphi = (\partial^\alpha u)*\varphi \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Preuve. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ alors la fonction ϕ définie par

$$\phi(x,y) = \varphi(x-y) \qquad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

est $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. On voudrait appliquer le Lemme 3.6.1 mais u **n'est pas à support compact**. Pour contourner cette difficulté on considère un compact K de $\mathbb{R}^n$, on note par L le support de φ et on considère $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\theta \equiv 1$ au voisinage du compact $K-L$ de $\mathbb{R}^n$ (une telle fonction existe grace à la Proposition 2.2.8). Alors, si $x \in K$ on a

$$\varphi(x-y)\theta(y) = \varphi(x-y) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n. \tag{6.21}$$

En effet, si $y \in K-L$ c'est clair; sinon, comme $x \in K$ on a que $x-y \notin L$, donc les deux membres de (6.21) sont nuls. Par conséquent on a

$$\langle u_y, \varphi(x-y)\rangle = \langle u_y, \theta(y)\varphi(x-y)\rangle \qquad \forall\, x \in K,$$

et donc

$$(u*\varphi)_{|int(K)} = \langle (\theta u)_y, \varphi(x-y)\rangle \qquad \forall\, x \in K.$$

Comme $\theta u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ on peut appliquer le Lemme 3.6.1 pour déduire que $(u * \varphi)_{|int(K)} \in C^\infty(int(K))$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$. On aura donc que $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et

$$\partial^\alpha(u * \varphi) = u * \partial^\alpha \varphi \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a

$$\begin{aligned}(u * \partial^\alpha \varphi)(x) &= \langle u_y, \partial_x^\alpha \varphi(x-y)\rangle = \left\langle u_y, (-1)^{|\alpha|}\partial_y^\alpha \varphi(x-y)\right\rangle \\ &= \langle \partial^\alpha u_y, \varphi(x-y)\rangle = ((\partial^\alpha u) * \varphi)(x).\end{aligned}$$

Il nous reste à prouver l'estimation sur les supports. On note $F = \mathrm{supp}(u)$, $L = \mathrm{supp}(\varphi)$ et on considère un point $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus (F + L)$. En appliquant le Lemme 2.2.8 on obtient qu'il existe une fonction $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $\rho \equiv 1$ au voisinage de $\{x_0\} - L$ et $\mathrm{supp}(\rho) \cap F = \emptyset$. Alors pour x au voisinage de x_0 on aura

$$(u * \varphi)(x) = \langle u_y, \rho(y)\varphi(x-y)\rangle .$$

Or $\mathrm{supp}_y \rho(y)\varphi(x-y) \cap F = \emptyset$ pour x voisin de x_0. On trouve donc que $(u * \varphi)(x) = 0$ au voisinage de x_0. La conclusion découle maintenant du fait que $L + K$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ (car F est fermé et K est compact). ■

Exemple 3.6.3. Si $a \in \mathbb{R}^n$ alors

$$\delta_a * \varphi = \tau_a \varphi \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$(\delta_a * \varphi) = \left\langle (\delta_a)_y, \varphi(x-y)\right\rangle = \varphi(x-a) = \tau_a\varphi(x).$$

En particulier $\delta_0 * \varphi = \varphi$. De plus, si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ alors

$$\partial^\alpha(\tau_a\varphi) = \partial^\alpha(\delta_a * \varphi) = (\partial^\alpha \delta_a) * \varphi = \delta_a * (\partial^\alpha \varphi) = \tau_a(\partial^\alpha\varphi).$$

3.7 Formule de Stokes et formule des sauts dans l'espace

3.7.1 Intégrale de surface et formule de Stokes (cas d'un surgraphe)

Si $x \in \mathbb{R}^n$ on note (x', x_n) le point courant, avec $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$, soient $]a,b[$ un intervalle et ϕ une fonction de classe C^2 dans ω, à valeurs dans $]a,b[$. On pose

$$\begin{aligned}\Omega &= \{x \in \omega \times]a,b[\ \mid\ x_n > \phi(x')\} \\ \widetilde{\Omega} &= \{x \in \omega \times]a,b[\ \mid\ x_n \geq \phi(x')\} \\ \partial\Omega &= \{x \in \omega \times]a,b[\ \mid\ x_n = \phi(x')\},\end{aligned}$$

en notant $\widetilde{\Omega}$ l'adhérence de Ω dans le "cylindre" $\omega\times]a,b[$ pour éviter toute confusion avec l'adhérence dans $\mathbb{R}^n$. Avec les notations ci-dessus on dit que Ω est le surgraphe de la fonction ϕ.

Définition 3.7.1. Soit f une fonction définie sur $\partial\Omega$, continue et à support compact. L'intégrale de f sur $\partial\Omega$, notée par $\int_{\partial\Omega} f(x)\,\mathrm{d}A_x$, est définie par

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\,\mathrm{d}A_x = \int_\omega f(x',\phi(x'))\sqrt{1+|\nabla'\phi(x')|^2}\,\mathrm{d}x', \tag{7.22}$$

où on a noté $\nabla'\phi$ le gradient $(n-1)$ dimensionnel $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\phi}{\partial x_{n-1}}\right)$ de ϕ.

Définition 3.7.2. La normale extérieure unitaire en un point $(x',\phi(x'))\in\partial\Omega$ est le vecteur $\vec{\nu}(x)$ défini par

$$\vec{\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla'\phi(x')|^2}}\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x') \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_{n-1}}(x') \\ -1. \end{pmatrix} \tag{7.23}$$

Théorème 3.7.3. *Soit f une fonction continue sur $\widetilde{\Omega}$ et $m\in\{1,2\}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *On a $f\in C^m(\Omega)$ et les dérivées de f jusqu'à l'ordre m se prolongent continûment à $\widetilde{\Omega}$.*
2. *Il existe une fonction appartenant à $C^m(\omega\times]a,b[)$ qui coïncide avec f dans Ω.*

Preuve. En posant $g(x',t) = f(x',\phi(x')+t)$, on se ramène au problème du prolongement $\widetilde{g}$ d'une fonction g définie pour $t\geq 0$ et de classe C^m jusqu'au bord. Pour $m=1$ la fonction $\widetilde{g}(x',-t) = 2g'(x,0) - g(x',t)$ convient. Pour $m=2$ on peut vérifier que

$$\widetilde{g}(x',-t) = 3g(x',0) - 3g(x',t) + g(x',2t)$$

resout le problème. Les prolongements obtenus ne sont définis qu'au voisinage de $\widetilde{\Omega}$, mais en multipliant par des fonctions C^∞ à support dans ce voisinage et égales à 1 dans un voisinage plus petit de $\widetilde{\Omega}$, on obtient un prolongement dans $\omega\times]a,b[$. ■

Définition 3.7.4. Soit $m\in\{1,2\}$. On dit que f est de classe C^m jusqu'au bord, ce qu'on note $f\in C^m(\widetilde{\Omega})$, si f vérifie une des conditions équivalentes du Théorème 3.7.3.

Théorème 3.7.5 (Stokes pour un surgraphe). *Soit $\vec{v}$ un champ vectoriel défini sur $\widetilde{\Omega}$ dont le support est un compact de $\widetilde{\Omega}$ et dont les composantes appartiennent à $C^1(\widetilde{\Omega})$. Alors on a*

$$\int_{\partial\Omega}\vec{v}(x)\cdot\vec{\nu}(x)\,\mathrm{d}A_x = \int_\Omega \operatorname{div}\vec{v}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve. En appliquant Fubini on obtient que

$$\int_\Omega \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \mathrm{d}x = \int_\omega \int_{\phi(x')}^\infty \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \mathrm{d}x_n \mathrm{d}x' = -\int_\omega v_n(x',\phi(x'))\,\mathrm{d}x'.$$

Pour $i = 1,\ldots,n-1$, on pose $v_i(x',x_n) = h(x',x_n - \phi(x'))$, la fonction $h(x',t)$ étant définie pour $t \geq 0$. On obtient

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x',x_n) = \frac{\partial h}{\partial x_i}(x',x_n - \phi(x')) - \frac{\partial h}{\partial x_n}(x',x_n - \phi(x'))\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x') \qquad \forall\, i \in \{1,\ldots,n-1\}.$$

En faisant le changement de variables $x' = x'$, $t = x_n - \phi(x')$ dont le jacobien est égal à 1 et en appliquant Fubini, on a

$$\int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x',x_n)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,\infty[} \int_\omega \frac{\partial h}{\partial x_i}(x',t)\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t - \int_\omega \int_{[0,\infty[} \frac{\partial h}{\partial x_n}(x',t)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x')\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x'.$$

La première intégrale est nulle. En intégrant par rapport à t dans la deuxième on obtient

$$\int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x',x_n)\,\mathrm{d}x = \int_\omega v_i(x',\phi(x'))\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x')\,\mathrm{d}x'.$$

On obtient donc, pour $\int_\Omega \mathrm{div}\,\vec{v}(x)\,\mathrm{d}x$, l'intégrale sur $\partial\Omega$ (pour la mesure $\mathrm{d}x'$) du produit scalaire de $\vec{v}$ et du vecteur des composante $\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x'),\ldots,\frac{\partial\phi}{\partial x_{n-1}}(x'),-1$, ce qui est précisément le résultat voulu. ■

3.7.2 Intégrale de surface et formule de Stokes (cas d'un ouvert régulier)

Définition 3.7.6. Dans cette sous-section nous généralisons les résultats de la section précédente au cas des ouverts "réguliers" (qui seront définis ci-dessous). Nous donnons ici uniquement les ennoncés de résultats les plus importants et nous renvoyons les lecteurs à des textes de géométries pour des détails et des preuves. On appelera ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout point $m = (m',m_n) \in \partial\Omega$ on peut trouver

- un système de coordonnées orthonormales $(y_1,\ldots,y_n)$,
- un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ contenant m' et un intervalle $]a,b[$ contenant m_n (on désignera par B le "cylindre" de $\mathbb{R}^n$ s'écrivant $\omega\times]a,b[$ dans les coordonnées (y)),
- une application ϕ de classe C^∞ de ω dans $]a,b[$ tels que, dans le système de coordonnées (y), on ait

$$\Omega \cap B = \{y \in \omega\times]a,b[\mid y_n > \phi(y')\}.$$

Cette définition exprime que Ω se comporte comme le surgraphe d'une fonction régulière au voisinage de chaque point de sa frontière.

Proposition 3.7.7. *Soit Ω un ouvert régulier, et m un point de $\partial\Omega$. Avec les notation de la Définition* 3.7.6*, soit $\vec{\nu}(m)$ le vecteur dont les composantes dans le système de coordonnées (y) sont données par la Dédinition 3.7.2. Alors ce vecteur est indépendant du choix de (y).*

Définition 3.7.8. Le vecteur $\vec{\nu}(m)$ défini dans la Proposition 3.7.7 est appelé **normale extérieure unitaire** au point m.

Soit Ω un ouvert régulier borné. Sa frontière $\partial\Omega$ étant compacte, on peut la recouvrir par un nombre fini de "cylindres" B^λ, $\lambda = 1,\dots,N$, vérifiant les conditions de la Définition 3.7.6 pour les données $(y^\lambda,\ \phi^\lambda)$. D'après le Théorème 2.3.2, on peut trouver une partition de l'unité par des fonctions ψ_λ à support dans les B^λ. Si f est une fonction continue sur $\partial\Omega$ nous pouvons alors calculer $\int_{\partial\Omega} f(x)\psi^\lambda(x)\,\mathrm{d}A_x$ en utilisant (7.22).

Théorème 3.7.9. *La somme des $\int_{\partial\Omega} f(x)\psi^\lambda(x)\,\mathrm{d}A_x$ calculées comme précédemment ne depend que de f et non de choix des B^λ, y^λ, ψ^λ. On note cette quantité par $\int_{\partial\Omega} f(x)\,\mathrm{d}A_x$ et on l'appelle intégrale de surface de f sur $\partial\Omega$. L'application $\mathrm{d}A_{\partial\Omega}$ définie par*

$$\langle \mathrm{d}A_{\partial\Omega},\varphi\rangle = \int_{\partial\Omega} \varphi(x)\,\mathrm{d}A_x \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

est une distribution d'ordre zéro su $\mathbb{R}^n$ ayant le support $\partial\Omega$.

Théorème 3.7.10. *Soient Ω un ouvert borné régulier, f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et $m \in \{1,2\}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *On a $f \in C^m(\Omega)$ et les dérivées de f jusq'à l'ordre m se prolongent continûment à $\overline{\Omega}$.*
2. *Il existe une fonction appartenant à $C^m(\mathbb{R}^n)$ qui coïncide avec f dans Ω.*

Définition 3.7.11. Soit $m \in \{1,2\}$. On dit que f est de classe C^m jusqu'au bord, ce qu'on note $f \in C^m(\overline{\Omega})$, si f vérifie une des conditions équivalentes du Théorème 3.7.10.

Théorème 3.7.12 (Formule de Stokes). *Soit $\vec{v}$ un champ vectoriel défini sur $\overline{\Omega}$ dont le support est un compact de $\overline{\Omega}$ et dont les composantes appartiennent à $C^1(\overline{\Omega})$. Alors on a*

$$\int_{\partial\Omega} \vec{v}(x)\cdot\vec{\nu}(x)\,\mathrm{d}A_x = \int_\Omega \mathrm{div}\vec{v}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Corollaire 3.7.13 (Intégration par parties). *Soit Ω un ouvert borné régulier, et $f,g \in C^1(\overline{\Omega})$. Alors, pour tout $i \in \{1,2,\dots,n\}$, on a*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f\nu_i dA_x,$$

et

$$\int_\Omega g\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} gf\nu_i\,\mathrm{d}A_x - \int_\Omega f\frac{\partial g}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x$$

Corollaire 3.7.14 (Formule de Green). *Soit $u,v \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$. Alors*

$$\int_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}v - \frac{\partial v}{\partial\nu}u\right)\mathrm{d}A_x$$

3.7.3 Formule des sauts dans l'espace

Si $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction continue on notera par $g\,\mathrm{d}A_{\partial\Omega}$ la distribution définie par

$$\langle g\,\mathrm{d}A_{\partial\Omega},\phi\rangle = \int_{\partial\Omega} g(x)\phi(x)\,\mathrm{d}A_x, \qquad \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Soit Ω un ouvert borné régulier et soit Ω' le complémentaire de $\overline{\Omega}$. Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}^n$ telle ques ses restrictions à Ω et Ω' se prolongent par continuité en des élements de $C^1(\overline{\Omega})$ et $C^1(\overline{\Omega'})$. Pour $x \in \partial\Omega$, on notera $f_{\mathrm{int}}(x)$ et $f_{\mathrm{ext}}(x)$ les valeurs de ces prolongements.

Théorème 3.7.15 (Formule des sauts dans l'espace). *Si f satisfait les hypothèses ci-dessus alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} + [f]_{\partial\Omega}\nu_i\,\mathrm{d}A_{\partial\Omega},$$

où $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}$ désigne la dérivée usuelle de f, définie hors $\partial\Omega$ et $[f]_{\partial\Omega} = f_{\mathrm{ext}} - f_{\mathrm{int}}$.

Preuve. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Nous pouvons alors appliquer le Corollaire 3.7.13 dans $\overline{\Omega}$ au produit par ϕ du prolongement par continuité de f_Ω et dans Ω' au produit par ϕ du prolongement de $f_{\Omega'}$. On obtient

$$-\int_\Omega f\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \phi\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\phi f_{\mathrm{int}}\nu_i\,\mathrm{d}A_x,$$

$$-\int_{\Omega'} f\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega'} \phi\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\phi f_{\mathrm{int}}\nu_i\,\mathrm{d}A_x.$$

La somme des membres de gauche vaut par définition $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i},\phi\right\rangle$. Les premiers termes des membres de droite donnent $\left\langle\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\},\phi\right\rangle$, tandis que les termes restants donnent

$$\int_{\partial\Omega}[f]_{\partial\Omega}\nu_i\phi\,\mathrm{d}A_x,$$

ce qui implique la conclusion du théorème. ■

3.7.4 Applications

Nous donnons d'abord un résultat sur les solutions régulières par morceaux d'un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1.

Proposition 3.7.16 (Condition de Rankine-Hugoniot). *Soient Σ une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}$, $f_1,\ldots,f_n \in C^1(\mathbb{R}^m)$ et $u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^m$ une fonction régulière dans $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ telles que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_i[u(t,x)] = 0, \quad \textit{dans}\ \ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}). \tag{7.24}$$

Alors u satisfait (7.24) *au sens classique dans* $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ *et*

$$\nu_t[u]_\Sigma + \sum_{i=1}^{n} \nu_i[f_i]_\Sigma = 0. \tag{7.25}$$

Preuve. C'est une conséquence directe du Théorème 3.7.15. ■

Exemple 3.7.17 (Application à l'équation des ondes). Soient $c > 0$ et $w \in C^1(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Supposons de plus que w est continue sur $\mathbb{R}^2$ et C^2 en dehors d'une courbe régulière Σ d'équation $x = \gamma(t)$, $t \geq 0$. Alors $\gamma(t) = ct$ ou $\gamma(t) = -ct$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En effet posons $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ avec

$$u_1 = \frac{\partial w}{\partial x}, \;\; u_2 = \frac{\partial w}{\partial t},$$

et

$$f(u) = \begin{pmatrix} u_2 \\ c^2 u_1 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\{f(u)\} = 0, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$$

et que u_1 et u_2 sont régulières en dehors de Σ. En appliquant la Proposition 3.7.16 on obtient que

$$\begin{cases} \nu_t[u_1] + \nu_x[u_2] & = 0 \\ c^2\nu_x[u_1] + \nu_t[u_2] & = 0 \end{cases}$$

en tout point de la courbe Σ. Le système ci-dessus (d'inconnues $[u_1]$ et $[u_2]$) admet des solutions non nulles ssi $c^2\nu_t^2 = \nu_x^2$ en tout point de la courbe, d'où la conclusion.

Une application de la formule des sauts est liée à la notion de solution fondamentale d'un opérateur différentiel.

Définition 3.7.18. Soit $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\leq m}$ une famille de fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$. Une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est dite solution fondamentale de l'opérateur différentiel

$$P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$$

si

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x) = \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Un résultat très important, démontré dans les anéees 1950 et l'existence des solutions fondamentales des opérateurs différentiels à coefficients constants. Plus précisément on a le resultat fondamentale suivant, qu'on donne ici sans preuve.

Théorème 3.7.19 (Magrange-Ehrenpreis). *Tout opérateurs différentiels à coefficients constants admet au moins une solution fondamentale dans $\mathcal{D}'$.*

Le résultat ci-dessous donne une solution fondamentale du laplacien dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.7.20. *Si $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, on note $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. La fonction*

$$E(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$$

définie une solution fondamentale du Laplacien dans $\mathbb{R}^3$.

Preuve. Il semble raisonble qu'une fonction $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ qui satisfait $\Delta E = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ soit régulière en dehors de l'origine. De plus, si l'on suppose que E est à symétrie radiale, i.e., $E(x_1,x_2,x_3) = G(r)$ où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, on obtient que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}\right) = 0,$$

ou encore

$$G(r) = \lambda + \frac{\mu}{r}$$

avec $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$. Il reste à prouver qu'on peut choisir la constante μ telle que $\Delta E = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Pour cela il sufit de calculer, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, le laplacien de la fonction

$$u(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{r}.$$

Si $\epsilon > 0$ on note par u_ϵ la fonction égale à $\frac{1}{r}$ si $r \geq \epsilon$ et à $\frac{1}{\epsilon}$ sinon. Les fonctions de la famille (u_ϵ) sont majorés par la fonction localement sommable fixe $\frac{1}{r}$ et elle convergent vers $\frac{1}{r}$ presque partout et donc au sens des distributions. En appliquant le Théorème 3.4.6 on a donc

$$\Delta u = \lim_{\epsilon \to 0} (\Delta u_\epsilon) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \tag{7.26}$$

Pour calculer $\Delta(u_\epsilon)$ on va appliquer la formule de sauts (Théorème 3.7.15), l'ouvert régulier étant la boule de rayon ϵ centrée à l'origine. Comme le saut de f est nul on déduit que

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i} = \begin{cases} -\frac{x_i}{r^3} & \text{si} \quad r > \epsilon \\ 0 & \text{si} \quad r < \epsilon \end{cases}, \qquad \forall\, i \in \{1,2,3\}.$$

Par contre, dans le calcul de $\frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x_i^2}$ nous allons avoir un terme de saut. Plus précisément, comme $\nu_i = \frac{x_i}{\epsilon}$ on a

$$\frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x_i^2} = \left\{\frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x_i^2}\right\} - \frac{x_i^2}{\epsilon^4}\mathrm{d}A_\epsilon,$$

en notant par $\mathrm{d}A_\epsilon$ la distribution définie dans le Théorème 3.7.9 avec $\partial\Omega$ étant la sphère S_ϵ de rayon ϵ. Compte tenu du fait que $\{\Delta(u_\epsilon)\} = 0$ la relation ci-dessus implique que

$$\Delta(u_\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon^2}\mathrm{d}A_\epsilon.$$

Par conséquent on a

$$\langle \Delta(u_\epsilon),\phi\rangle = -\frac{1}{\epsilon^2}\int_{S_\epsilon}\phi(0)\,\mathrm{d}A_\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2}\int_{S_\epsilon}(\phi(x)-\phi(0))\,\mathrm{d}A_\epsilon \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

Le premier terme est constant et égal à $-4\pi\phi(0)$, en on montre facilement que le second tend vers 0 avec ϵ. On a donc

$$\lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon = -4\pi\delta_0 \ \text{ dans } \ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \tag{7.27}$$

Les relations (7.26) et (7.27) impliquent la conclusion. ■

Une application intéressante du Théorème de Malgrange-Ehrenpreis (Théorème 3.7.19) est le résultat suivant:

Proposition 3.7.21. *Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel à coefficients constants. Alors pour toute $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ il existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $P(\partial)u = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

*Preuve.*D'après le Théorème 3.7.19 il existe $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$P(\partial)E = \delta_0 \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Soit $u = E * f$. Alors on a

$$P(\partial)u = P(\partial)(E * f) = (P(\partial)E) * f = \delta_0 * f = f.$$

■

Remarque 3.7.1. On peut donner un sens à l'opération de convolution $u*v$ si u et v sont deux distributions avec des supports "convolutifs" (voir [1] pour une définition précise de cette notion). Il s'agit, en particulier, du cas ou l'une des distributions est à support compact. En utilsant cette extension de la notion de convolution on peut prouver que le résultat de la Proposition 3.7.21 reste vrai si $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

3.8 Exercices du Chapitre 3

Exercice 3.1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Etablir si parmi les suites

$$\psi_k(x) = \frac{1}{k}\phi(x),\ \eta_k(x) = \frac{1}{k}\phi(kx),\ \theta_k(x) = \frac{1}{k}\phi\left(\frac{x}{k}\right),\ k \geq 1,$$

il existe des suites convergentes dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 3.2. Pour chacune des formes linéaires sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ suivantes, montrer que ce sont des distributions et calculer leur ordre sur chaque compact :

1. $\langle T_1,\varphi\rangle = \sum_{1}^{+\infty} n!\varphi(n)$
2. $\langle T_2,\varphi\rangle = \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n\varphi}{dx^n}(n)$
3. $\langle T_3,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\cos(x)\,dx$
4. $\langle T_4,\varphi\rangle = \int_{a}^{b} \exp(x)\varphi'(x)\,dx$

Préciser celles que vous connaissez déjà sous un autre “nom”.

Exercice 3.3.

1. Prouver , pour toute $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'existence de la limite $\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx$.
2. On pose
$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right),\phi\right\rangle = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx, \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{8.28}$$
Démontrer que (8.28) définit une distribution d'ordre ≤ 1 sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que (8.28) définit une distribution d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.4. On considère la fonction de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Soit $u_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ la distribution associée à f. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de u_f.

Exercice 3.5. On considère l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}^n)$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Prouver que les seules solutions (au sens de distributions) du système différentiel linéaire
$$y'(t) = Ay(t) + f(t),$$
sont les solutions classiques.
2. Trouver toutes les distributions ϕ dans I satisfaisant (au sens de distributions)
$$\phi'' + 2\phi' + \phi = 0.$$
3. Trouver toutes les distributions ϕ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant (au sens de distributions)
$$\phi'' + 2\phi' + \phi = \delta_0.$$
Quelle est la régularité de la solution?

Exercice 3.6. Trouver toutes les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que

$$u'' - 4u = (\delta_0)' \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Exercice 3.7. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On pose :

$$\left\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0^+}\left(\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon}\right)$$

Montrer que ceci définit bien une distribution sur $\mathbb{R}$. Si l'on note $Pf\,\frac{1}{x^2}$ cette dernière, prouver la formule :

$$\frac{d}{dx}\left(Vp\,\frac{1}{x}\right) = -Pf\,\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Exercice 3.8.

1. Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$, $2\pi-$périodique, définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \pi x$ pour $x \in [0{,}2\pi[$. Calculer la série de *Fourier* de f. En déduire que :
$$f(x) = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{e^{inx}}{n^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
2. Vérifier que f définit une distribution sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée seconde de cette dernière. En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et que l'on a l'identité suivante :
$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2n\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}$$

Exercice 3.9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |\sin(x)|$. Calculer (au sens des distributions) $f'' + f$.

Exercice 3.10. Calculer les limites suivantes dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(nx) \qquad ; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(nx)}{x}$$

Exercice 3.11.

1. Pour $\epsilon > 0$ on pose
$$f_\epsilon(x) = \log\left(\epsilon^2 + \sinh^2(x)\right) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
Montrer que $f_\epsilon \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $S = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon$ existe dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. En déduire que
$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\sinh(x)}{\epsilon^2 + \sinh^2(x)}$$
existe dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Déterminer cette limite en fonction de S'.
3. Pour $\epsilon > 0$ on pose
$$g_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \sinh^2(x)} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
Montrer que $T = \lim_{\epsilon\to 0^+} g_\epsilon$ existe dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (on pourra utiliser le changement de variable $y = \frac{1}{\epsilon}\sinh(x)$).

4. Déduire de ce qui précéde que $[\sinh(x)]\,T = 0$.
5. Trouver toutes les $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifiant $[\sinh(x)]\,U = 0$.

Exercice 3.12. Pour tous $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^n}\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sera dite homogène de degré $k \in \mathbb{C}$ si, pour tous $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\langle T,\varphi_\lambda\rangle = \lambda^k \langle T,\varphi\rangle$$

1. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sont fixées, on pose

   $$g(\lambda) = \langle T,\varphi_\lambda\rangle \qquad \forall\, \lambda > 0.$$

   Démontrer que g est dérivable sur $]0,\infty[$ et que

   $$g'(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\left\langle x_i\frac{\partial T}{\partial x_i}\,,\, \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right\rangle \qquad \forall\, \lambda > 0.$$

2. Montrer que si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, la distribution $\{f\}$ associée à f est homogène de degré k si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

   $$f(\lambda x) = \lambda^k f(x) \qquad \text{p.p.}$$

3. Montrer que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est homogène de degré k et g est la fonction introduite au point 1 alors $g'(1) = \langle kT,\varphi\rangle$. En déduire que si T est homogène de degré k, alors :

   $$\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial T}{\partial x_i} = kT.$$

Exercice 3.13. Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $\varphi \in C^2(\overline{V})$ est telle que

$$||\nabla\varphi||^2 = 4\varphi,\;\; \text{div}\,(\varphi\nabla\varphi) = 10\phi \;\;\text{et}\;\; \varphi \neq 0$$

pour tout $x \in B$. Calculer $\int_{\partial B}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\,dA$.

Exercice 3.14. 1. De la même manière que pour la distribution $Vp\,\dfrac{1}{x}$, on définit, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la distribution $Vp\,\dfrac{1}{x-a}$ par la formule :

$$\langle Vp\,\frac{1}{x-a},\varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x-a|\,\geq\,\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x-a}\,dx$$

Prouver la formule :

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{2a}\left(Vp\,\frac{1}{x-a} - Vp\,\frac{1}{x+a}\right) = Pf\,\frac{1}{x^2}$$

(voir l'Exercice 3.7 pour la définition de $Pf\,\dfrac{1}{x^2}$).

Exercice 3.15. Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on pose

$$\langle x_+^{-1}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx + \phi(0) \log(\epsilon) \right).$$

Prouver que cette limite existe est définit une distribution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.16. Soit $\lambda \in]-2,-1[$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle x_+^\lambda, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_\epsilon^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)\, dx + \frac{\epsilon^{\lambda+1}}{\lambda+1} \varphi(0) \right).$$

1. Montrer que cette limite existe bien et que x_+^λ définit une distribution sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $x\, x_+^\lambda$.
3. Soit H la fonction de Heaviside. Notons $x_+^{\lambda+1}$ la distribution associée à la fonction $x \to H(x)x^{\lambda+1}$ (cette dernière fonction est $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$). Montrer que l'on a l'égalité suivante dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:
$$\left(x_+^{\lambda+1}\right)' = (\lambda+1) x_+^\lambda.$$
4. Trouver toutes les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que
$$xu' + u = (\lambda+1) x_+^\lambda.$$

Exercice 3.17. Trouver toutes les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que

$$xu' + u = \delta_0.$$

Exercice 3.18. On note $1\!\!I_{]0,\frac{\pi}{2}[}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $]0,\frac{\pi}{2}[$.

1. Montrer que la fonction définie p.p. sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 1\!\!I_{]0,\frac{\pi}{2}[}(x) \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$$
est dans $L^1(\mathbb{R})$. Est-elle dans $L^2(\mathbb{R})$?
2. Montrer l'existence de la limite
$$\lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} + \log(\epsilon) \right).$$
3. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}\left(]-\pi,\pi[\right)$ montrer que la limite
$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(x)}{\sin(x)} + \varphi(0) \log(\epsilon) \right)$$
existe et définit une distribution $T \in \mathcal{D}'\left(]-\pi,\pi[\right)$. Préciser exactement le support de T.

4. Calculer
$$S = \sin^2(x) \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} + \cos(x) \cdot 1\!\!I_{]0,\frac{\pi}{2}[}$$
dans $\mathcal{D}'(]-\pi,\pi[)$.
5. Résoudre dans $\mathcal{D}'(]-\pi,\pi[)$ l'équation $\sin(x) \cdot U = 1\!\!I_{]0,\frac{\pi}{2}[}$.

Exercice 3.19. 1. Trouver toute les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que
$$u'' + u' - 6u = \delta_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{8.29}$$
où δ_0 est la masse de Dirac concentrée en 0. En déduire que toute solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de (8.29) satisfait les conditions
$$u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad u' \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$
2. Trouver toutes les solutions $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de (8.29) satisfaisant
$$u \in L^2(\mathbb{R}), \quad \text{et } u' \in L^2(\mathbb{R}).$$

Exercice 3.20. Soit f, $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et $u(x,t) = f(x-kt) + g(x+kt)$. Vérifier que $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Prouver ensuite que
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Exercice 3.21. 1. Déterminer, pour tout $\epsilon > 0$ donné, les réels a_ϵ et b_ϵ pour que la fonction $g_\epsilon \;:\; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :
$$g_\epsilon(x,y,z) = \begin{cases} a_\epsilon r^2 + b_\epsilon & \text{si} \quad r < \epsilon \\ \frac{1}{r} & \text{si} \quad r \geq \epsilon \end{cases}$$
(où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$), soit $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.
2. Montrer qu'alors on a $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0^+} g_\epsilon = \frac{1}{r}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
3. En déduire la valeur de $\Delta\left(\dfrac{1}{r}\right)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (où Δ est le *Laplacien*).

Exercice 3.22. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on pose $\langle U,\varphi\rangle = \displaystyle\iint_{y \geq x^2+x} x\varphi(x,y)\, dxdy$.
1. Montrer que $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Préciser son ordre et son support.
2. Calculer $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ et montrer que $U = x\dfrac{\partial U}{\partial x} + (2x^2+x)\dfrac{\partial U}{\partial y}$.
3. Montrer que $(y - x^2 - x)\dfrac{\partial U}{\partial y} = 0$ et donc que $U = x\dfrac{\partial U}{\partial x} + (2y-x)\dfrac{\partial U}{\partial y}$.

Exercice 3.23. Soients Ω_1, Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ tels que
– $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$;

– $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = \Sigma$;
– $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Sigma = \mathbb{R}^2$;
– Σ est le graph d'une fonction $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega_1}\right) \cap C^\infty\left(\overline{\Omega_2}\right)$.

1. Prouver que u définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$.
2. On suppose que
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$$
et que $[u]_\Sigma \neq 0$ en tout point de Σ. Déterminer la fonction γ.

Exercice 3.24. 1. Montrer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, la série :
$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left[\varphi\left(\frac{1}{n^2},y\right) - \varphi(0,y)\right] dy$$
converge et définit une distribution T d'ordre ≤ 1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Préciser soigneusement le support de T.
3. Calculer $\dfrac{\partial T}{\partial y}$ sur l'ouvert :
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < y < 1\}$$
4. Soit χ_n la fonction caractéristique du rectangle $\left[0,\frac{1}{n^2}\right] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Préciser si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^2)$, $L^2(\mathbb{R}^2)$, $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.
   (b) Montrer qu'elle converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Si S est la somme de cette série, calculer $\dfrac{\partial S}{\partial x}$.
   (c) Que vaut $\dfrac{\partial S}{\partial y}$ sur l'ouvert Ω précédent ?

Exercice 3.25. Soient $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Trouver toutes les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que
$$\operatorname{supp}(u) \subset \{a,b\}.$$

Exercice 3.26. Prouver que
$$\operatorname{supp}(\partial^\alpha u) \subset \operatorname{supp}(u),$$
pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Donner une exemple montrant que l'inclusion ci-dessus est, en général, stricte.

Exercice 3.27. Pour $a \in \mathbb{R}^n$, vérifier que
$$\tau_a\left(\check{\varphi}\right) = \overset{\vee}{\overbrace{\tau_{-a}(\varphi)}} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Prouver que les applications $\tau_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\check{}\; : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sont linéaires et continues.

Exercice 3.28. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Décrire les supports de $\tau_a u$ et $\check{u}$ en fonction de l'ensemble $\mathrm{supp}\, u$.

Exercice 3.29. Soit V un ouvert régulier borné simplement connexe de $\mathbb{R}^3$. Soient $\vec{F}$, $\vec{G} \in C^1\left(\overline{V},\mathbb{R}^3\right)$ telles que

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \mathrm{rot}\,\vec{G} \;\text{ et } \mathrm{div}\,\vec{F} = \mathrm{div}\,\vec{G} \;\text{ dans }\; V,$$

et telles que

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \vec{G} \cdot \vec{n} \;\text{ sur }\; \partial V.$$

Exercice 3.30. On considère la fonction

$$u(x,y) = \log(x^2 + y^2), \;\; \forall x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

1. Démontrer que $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.
2. Prouver que $\Delta u = 4\pi\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 3.31. Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère les fonctions $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ définies par

$$r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \;\text{ et } \mathcal{E}(x,y,z) = -\frac{\exp\left(ikr(x,y,z)\right)}{4\pi r(x,y,z)} \qquad \forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Prouver que $\mathcal{E} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.
2. Calculer $\Delta\mathcal{E}(x,y,z) + k^2\mathcal{E}(x,y,z)$ au points $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ (les dérivées sont ici prises au sens classique).
3. On considère la famille de fonctions $\left(\mathcal{E}_\epsilon\right)_{\epsilon>0}$ définie par

   $$\mathcal{E}_\epsilon(x,y,z) = \begin{cases} \mathcal{E}(x,y,z) & \text{si} \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq \epsilon^2 \\ -\frac{\exp(ik\epsilon)}{4\pi\epsilon} & \text{si} \quad x^2 + y^2 + z^2 < \epsilon^2 \end{cases}.$$

   Montrer que $\mathcal{E}_\epsilon \to \mathcal{E}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ si $\epsilon \to 0^+$.
4. Calculer $\Delta\mathcal{E}_\epsilon + k^2\mathcal{E}_\epsilon$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.
5. Calculer $\Delta\mathcal{E} + k^2\mathcal{E}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 3.32. Soit $k > 0$. On considère les fonctions $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ définies par

$$r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\mathcal{E}(x,y,z) = -\frac{\exp\left(-kr(x,y,z)\right)}{4\pi r(x,y,z)} \qquad \forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

1. Prouver que $\mathcal{E} \in L^1(\mathbb{R}^3)$. A-t-on $\mathcal{E} \in L^2(\mathbb{R}^3)$?
2. Calculer $\Delta\mathcal{E}(x,y,z) - k^2\mathcal{E}(x,y,z)$ au points $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ (les dérivées sont ici prises au sens classique).

3. On considère la famille de fonctions $(\mathcal{E}_\epsilon)_{\epsilon>0}$ définie par

$$\mathcal{E}_\epsilon(x,y,z) = \begin{cases} \mathcal{E}(x,y,z) & \text{si} \quad x^2+y^2+z^2 \geq \epsilon^2 \\ a_\epsilon[r(x,y,z]^2 + b_\epsilon & \text{si} \quad x^2+y^2+z^2 < \epsilon^2 \end{cases},$$

   avec a_ϵ, $b_\epsilon \in \mathbb{R}$. Déterminer les constantes a_ϵ et b_ϵ telles que $\mathcal{E}_\epsilon \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

4. Calculer $\Delta\mathcal{E}_\epsilon - k^2\mathcal{E}_\epsilon$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, avec les constantes a_ϵ et b_ϵ déterminées à la question précédente.

5. Calculer $\Delta\mathcal{E} - k^2\mathcal{E}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.

Chapitre 4

Transformation de Fourier et distributions temperées

4.1 Introduction

La transformation de Fourier est un outil fondamental de l'analyse. Elle est utilisée dans des domaines très divers : l'étude des équations aux dérivées partielles, l'analyse des signaux, l'automatique etc. Elle permet d'écrire une fonction sommable ainsi que certaines distributions comme une superposition de fonctions exponentielles complexes.

Une propriété fondamentale de la transformation de Fourier est le fait qu'elle transforme les dérivations par rapport à une variable en multiplications par cette variable. Ainsi, les équations différentielles (à coefficients constants) se ramènnent à des équations algébriques et les équations aux dérivées partielles à des équations différentielles ou même algébriques. Cette propriété simplifie bien-sur grandement les calculs et permet d'accéder plus facilement à la résolution de nombreux problèmes.

Comme on l'imagine, il est important de pouvoir utiliser cette transformation dans des conditions les plus générales possibles. Nous la définirons d'abord dans le cadre, trop restreint, des fonctions sommables. Pour l'éteindre nous introduirons un espace $\mathcal{S}$ beuacoup plus petit que L^1, mais dont le dual $\mathcal{S}'$ est beaucoup plus gros et jouit de bonnes propriétés d'invariance pour la transformation de Fourier. Par dualité nous pourons enfin éteindre cette transformation à $\mathcal{S}'$ (l'espace des distributions tempérées).

Il n'est malheureusement pas possible de définir la transformée de Fourier d'une distribution quelconque u. Cela dit, la limitation $u \in \mathcal{S}'$ n'est pas très restrictive : en un sens qu'il faudra préciser, les éléménts de $\mathcal{S}'$ sont des distributions quelconques à distance finie, mais dont la croissance doit être au plus polynomiale à l'infini.

Il est important de remarquer que la transformation de Fourier ne s'applique que lorsque l'ouvert Ω est égal à l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. Cependant, on peut encore utiliser la transformation de Fourier lorsque $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ à condition de multiplier au préalable les fonctions (ou les distributions) que l'on cherche à transformer par une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$. Ceci permet d'obtenir des informations locales sur la solution d'un problème posé dans Ω.

4.2 Transformation de Fourier dans L^1

Définition 4.2.1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle transformation de Fourier de f la fonction, notée $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, définie par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix \cdot \xi) f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

en notant $x \cdot \xi$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

Il est bien clair que $\widehat{f}$ est bien définie quand $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. De plus on peut établir le résultat suivant:

Théorème 4.2.2 (Riemann-Lebesgue). *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\widehat{f}$ est continue, tend vers 0 à l'infini, et vérifie*

$$\| \widehat{f} \|_{L^\infty} \leq \| f \|_{L^1}. \tag{2.2}$$

Preuve. Si une suite (ξ_j) converge vers $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, les fonctions $x \to \exp(-ix \cdot \xi_j)$ convergent en chaque point vers la fonction $x \to \exp(-ix \cdot \xi_0)$, et sont majorées en module par la fonction sommable fixe $|f|$. La continuité de $\widehat{f}$ résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue. D'autre part, la valeur de $\widehat{f}$ en chaque point est majorée en module par $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$, d'où l'inégalité (2.2).

Par ailleurs, on peut vérifier facilement (il suffit d'intégrer par parties) que si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ alors $\widehat{\phi}$ tend vers 0 à l'infini. Pour chaque $f \in L^1$, on peut trouver une suite ϕ_j d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f - \phi_j\|_{L^1}$ tends vers 0 (voir Théorème 2.5.6). Il résulte de (2.2) que $\left\| \widehat{f} - \widehat{\phi_j} \right\|_{L^\infty} \to 0$ et que la fonction $\widehat{f}$, qui est limite uniforme des fonctions tendant vers 0 à l'infini, possède la même propriété. ∎

Exemple 4.2.3. Soient $t > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \exp(-t|x|) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2t}{t^2 + \xi^2} \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}.$$

En effet

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t|x|) \exp(ix\xi)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \exp(tx + ix\xi)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \exp(-tx + ix\xi)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left.\frac{\exp[x(t+i\xi)]}{t+i\xi}\right]_{-\infty}^{0} + \left.\frac{\exp[x(-t+i\xi)]}{-t+i\xi}\right]_{0}^{\infty}$$
$$= \frac{1}{t+i\xi} - \frac{1}{-t+i\xi} = \frac{2t}{t^2+\xi^2}.$$

Exemple 4.2.4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-a\|x\|^2)$, avec $a > 0$. Alors on a

$$\widehat{f}\,(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-\|\xi\|^2}{4a}\right). \tag{2.3}$$

En effet, si $n = 1$ et $a = 1$ alors $\widehat{f}\,(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-ix\xi - x^2)\,\mathrm{d}x$. D'après l'Exercice 2.10 on a $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\xi^2}{4}}$. Pour $a = 1$ et $n \in \mathbb{N}$ on utilise le fait que la transformation de Fourier de $g_1(x_1)\ldots g_n(x_n)$ est $\widehat{g_1}\,(\xi_1)\ldots\widehat{g_n}\,(\xi_n)$. Finallement pour $n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$ on utilise le fait que si $g \in L^1$ et $h(x) = g(ax)$ alors $\widehat{h}\,(\xi) = \frac{1}{a^n}\,\widehat{g}\,\left(\frac{\xi}{a}\right)$ et on obtient (2.3).

On finit cette section par un résultat important donnant la relation entre la transformation de Fourier et la convolution.

Théorème 4.2.5. *Si $u,v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v)$.*

Preuve. On a

$$\widehat{u*v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\cdot\xi)\left[\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

En effectuant le changement de variable $(x,y) \to (x-y,y)$ on a

$$\widehat{u*v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp[-i(y+z)\cdot\xi]u(z)v(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

La fonction à intégrer est sommable dans $\mathbb{R}^{2n}$, donc, en appliquant le Théorème de Fubini, on obtient

$$\widehat{u*v}(\xi) = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-iz\cdot\xi)u(z)\,\mathrm{d}z\right]\left[\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-iy\cdot\xi)v(y)\,\mathrm{d}y\right].$$

Cela achève la démonstration. ■

4.3 L'espace $\mathcal{S}$ de Schwartz

Définition 4.3.1. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est à décroissance rapide si pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \|x\|^m f(x) = 0$. On dit que la fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ appartient à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de Schwartz si, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha f$ est à décroissance rapide.

Il est équivalent de dire que $\phi \in \mathcal{S}$ si les quantités

$$\mathcal{N}_p(\phi) = \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} \left\| x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \right\|_{L^\infty},$$

sont finies pour tout p.

Proposition 4.3.2. *L'espace $\mathcal{S}$ est stable par dérivation et par multiplication par des polynômes. Les éléménts de $\mathcal{S}$ sont des fonctions sommables tendant vers 0 à l'infini, et il existe des constantes C_p telles que*

$$\sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} \left\| x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \right\|_{L^1} \leq C_p \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi), \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{S}. \tag{3.4}$$

Preuve. Il s'agit de conséquences immédiates de la définition. La majoration (3.4) provient du fait que, pour $|\alpha| \leq p$, $|\beta| \leq p$, on a

$$\left\| \left(1 + \sum_{i=1}^n |x_i|^{n+1} \right) x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \right\|_{L^\infty} \leq \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi).$$

On obtient donc

$$\sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} \left\| x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \right\|_{L^1} \leq \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n |x_i|^{n+1}} dx,$$

et, l'intégrale étant finie, l'estimation (3.4). ■

Dans la suite nous donnons quelques propriétés très importantes de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$.

Lemme 4.3.3. *Soit $\phi \in \mathcal{S}$. Alors $\mathcal{F}\phi \in C^1$, et on a*

$$\partial_j(\mathcal{F}\phi) = \mathcal{F}\left\{ (-ix_j)\phi(x) \right\}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale (Théorème 2.4.4). Plud précisément, considérons la fonction $f(x,\xi) = \exp(-ix\cdot\xi)\phi(x)$. La dérivée par rapport à ξ_j donne $\exp(-ix\cdot\xi)(-ix_j)\phi(x)$, fonction majorée en module par $|x_j\phi(x)|$. Compte tenu de la Proposition 4.3.2, la fonction $x \to x_j\phi(x)$ appartient à $\mathcal{S}$ et donc à L^1, d'où le résultat. ■

Le résultat ci-desous est fondamental pour l'application de la transformation de Fourier à l'étude des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles.

Lemme 4.3.4. *Si $\phi \in \mathcal{S}$ alors*

$$\mathcal{F}(\partial_j\phi) = i\xi_j\ \widehat{\phi}\ (\xi). \tag{3.5}$$

Preuve. Pour simplifier lers notations, nous supposerons $j = n$, et nous poserons $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Pour chaque $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ on intégre par parties par rapport à x_n et on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-ix_n\xi_n) \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x', x_n)\, \mathrm{d}x_n = \int_{\mathbb{R}} (i\xi_n) \exp(-ix_n\xi_n) \phi(x', x_n)\, \mathrm{d}x_n,$$

car la fonction intégrée tend vers 0 pour $|x_n| \to \infty$. Il suffit maintenat de multiplier chacun des membres par $\exp(-ix' \cdot \xi')$ et d'intégrer par rapport à x' pour obtenir la conclusion (3.5). ■

Le comportement de la transformée de Fourier d'une fonction lorsqu'on effectue une translation de l'argument est précisé par le résultat ci-dessous, dont la preuve, très simple, est laissée comme exercice au lecteur.

Lemme 4.3.5. *Si $a \in \mathbb{R}^n$ on note par $\tau_a : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ l'opérateur de translation par a, défini par $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$, pour tout $f \in \mathcal{S}$. Alors $(\mathcal{F}(\tau_a f))(\xi) = \exp(-ia \cdot \xi)\, \widehat{f}(\xi)$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.*

Le résultat principal de cette section est :

Théorème 4.3.6. *1. La transformation de Fourier applique l'espace $\mathcal{S}$ dans lui même et,pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe C_p telle que*

$$\mathcal{N}_p\left(\widehat{\phi}\right) \leq C_p \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi), \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{S}. \tag{3.6}$$

2. Si $\phi \in \mathcal{S}$ et $\psi = \mathcal{F}(\phi)$ alors on a la formule d'inversion de Fourier suivante

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \overline{\mathcal{F}}(\psi), \tag{3.7}$$

où

$$\overline{\mathcal{F}}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix \cdot \xi)\, \psi(\xi)\, \mathrm{d}\xi \qquad \forall\, \psi \in \mathcal{S}.$$

Preuve. En appliquant $|\beta|$ fois de suite le Lemme 4.3.3 on obtient que $\partial_\xi^\beta\, \widehat{\phi} = (-i)^{|\beta|} \mathcal{F}(x^\beta \phi)$. En appliquant ensuite $|\alpha|$ fois le Lemme 4.3.4, on a

$$\left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta\, \widehat{\phi}\,(\xi)\right| = \left|\mathcal{F}\left\{\partial_x^\alpha \left(x^\beta \phi(x)\right)\right\}\right| \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{S}.$$

En utilisant la relation ci-dessus, l'estimation (2.2) et de la formule de Leibniz on obtient qu'il existe une constante C_p' telle que

$$\mathcal{N}_p\left(\widehat{\phi}\right) \leq \sum_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \left\|\partial_x^\alpha \left(x^\beta \phi\right)\right\|_{L^1} \leq C_p' \sum_{|\alpha'| \leq p, |\beta'| \leq p} \left\|x^{\alpha'} \partial_x^{\beta'} \phi\right\|_{L^1}.$$

Pour conclure la démonstration de la première affirmation du Théorème, il ne reste plus qu'à majorer le membre de droite par une constante fois $\mathcal{N}_{p+n+1}(\phi)$ à l'aide de la Proposition 4.3.2.

Pour prouver la deuxième affirmation du Théorème on introduit

$$I_\epsilon(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \exp\left(i(x-y)\cdot\xi\right) \exp\left(-\frac{\epsilon^2|\xi|^2}{4}\right)\phi(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi. \tag{3.8}$$

Le Théorème de Fubini étant applicable dans ce cas, en intégrant par rapport à y on obtient que

$$I_\epsilon(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(ix\cdot\xi\right) \exp\left(-\frac{\epsilon^2|\xi|^2}{4}\right) \widehat{\phi}\,(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Lorsque $\epsilon \to 0$, la fonction à intégrer reste majorée en module par la fonction sommable fixe $\left|\widehat{\phi}\,(\xi)\right|$. Le théorème de Lebesgue entraîne que

$$\lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(ix\cdot\xi\right) \widehat{\phi}\,(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Les fonctions I_ϵ convergent vers $(2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}\left(\widehat{\phi}\right)$ en chaque point x et elles sont majorées par la constante $(2\pi)^{-n}\left\|\,\widehat{\phi}\,\right\|_{L^1}$. On a donc

$$I_\epsilon \to (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}\left(\widehat{\phi}\right) \quad \text{dans } \mathcal{D}'. \tag{3.9}$$

Si nous calculons maintenant (3.8) en intégrant d'abord par rapport à ξ, on obtient

$$I_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\epsilon(x-y)\phi(y)\,\mathrm{d}y \;=\; (G_\epsilon * \phi)(x), \tag{3.10}$$

où on a posé

$$G_\epsilon(z) \;=\; (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(iz\cdot\xi\right) \exp\left(\frac{-\epsilon^2|\xi|^2}{4}\right) \mathrm{d}\xi\,.$$

En utilisant (2.3) avec $a = \frac{\epsilon^2}{4}$, et en remarquant que le résultat est invariant en remplaçant z par $-z$, on obtient

$$G_\epsilon(z) = \epsilon^{-n} G_1\left(\frac{z}{\epsilon}\right),$$

où

$$G_1(z) = \pi^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-|z|^2\right).$$

En notant que G_ϵ est d'intégrale 1, on voit que la famille des G_ϵ a toutes les propriétes d'une approximation de l'identité (ou d'une suite régularisante), à l'exception du fait que les gaussiennes ne sont pas à support compact. Cela n'empeche pas les $G_\epsilon * \phi$ de converger en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ vers ϕ. En effet

$$G_\epsilon * \phi(x) - \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\epsilon(y)\left(\phi(x-y) - \phi(x)\right)\mathrm{d}y.$$

En utilisant le changement de variable $y = \frac{z}{\epsilon}$ on obtient

$$G_\epsilon * \phi(x) - \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_1(z)\left(\phi(x-\epsilon z) - \phi(x)\right)\mathrm{d}z.$$

Compte tenu du fait que $\phi \in \mathcal{S}$, on peut appliquer le Théorème des accroissements finis et obtenir facilement que $G_\epsilon * \phi$ converge uniformement vers ϕ dans $\mathbb{R}^n$.

En utilsant maintenant (3.10) on déduit que

$$I_\epsilon \to \phi \text{ dans } \mathcal{D}'. \tag{3.11}$$

Les relation (3.9) et (3.11) impliquent que les fonctions ϕ et $(2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}\left(\widehat{f}\right)$ sont égales en tant que distributions et donc en tant qu'éléments de L^1. Le Théorème 4.3.6 est complètement démontré. ■

Remarque 4.3.1. La démonstration ci-dessus montre que la formule d'inversion (3.7) reste valable pour les fonctions $\phi \in L^1$ telles que $\widehat{\phi} = \psi \in L^1$.

Une autre propriété utile de la transformation de Fourier est donnée dans le résultat ci-dessous.

Lemme 4.3.7. *Si* $f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *alors* $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)g(y)\,\mathrm{d}y$.

Preuve. La fonction $|f(x)g(y)|$ étant sommable dans $\mathbb{R}^{2n}$, en appliquant le Théorème de Fubini on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left\{\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-ix\cdot y\right)g(y)\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)g(y)\,\mathrm{d}y,$$

ce qui achève la preuve du lemme. ■

On finit cette section par un résultat de densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 4.3.8. *Soit* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Il existe alors une suite* (ϕ_j) *d'éléménts de* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *telle que l'on ait*

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{N}_p(\phi - \phi_j) = 0 \qquad \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Preuve. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi(x) = 1$ si x appartient à la boule de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^n$. Posons $\phi_j(x) = \psi\left(\frac{x}{j}\right)\phi(x)$. Ces fonctions sont à support compacts, et coïncident avec ϕ sur la boule de rayon j. D'après la formule de Leibniz, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ on a

$$\partial^\beta\left[(\phi-\phi_j)(x)\right] = \left[\partial^\beta\phi(x)\right]\left[1-\psi\left(\frac{x}{j}\right)\right] - \sum_{1\le|\gamma|\le|\beta|}\binom{\beta}{\gamma}\frac{1}{j^{|\gamma|}}\left[\partial^{\beta-\gamma}\phi(x)\right]\left[\partial^\gamma\psi\left(\frac{x}{j}\right)\right].$$

En multipliant par x^α la relation précédente, et en prenant les bornes supérieures, on en déduit

$$\left\|x^\alpha\partial^\beta(\phi-\phi_j)\right\|_{L^\infty} \le \max_{|x|\ge j}\left|x^\alpha\partial^\beta\phi(x)\right| + \frac{C}{j}\sum_{\gamma\le\beta}\left\|x^\alpha\partial^{\beta-\gamma}\phi\right\|_{L^\infty}.$$

Le premier terme tend vers 0 pour $j\to\infty$ car $x^\alpha\partial^\beta\phi$ tend vers 0 à l'infini. Le second terme contient $\frac{1}{j}$ en facteur d'une quantité fixe. L'expression $\mathcal{N}_p(\phi-\phi_j)$ est donc somme finie de quantités tendant vers 0, d'où le résultat. ■

4.4 L'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées

Définition 4.4.1. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On dit que u est une distribution tempérée, ce qu'on note $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que

$$|\langle u,\phi\rangle| \leq C\mathcal{N}_p(\phi) \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{4.12}$$

Théorème 4.4.2 (Extension de la dualité). *Soit $u \in \mathcal{S}'$. L'application $\phi \to \langle u,\phi\rangle$, définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, se prolonge de manière unique en une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (que l'on notera encore par $\phi \to \langle u,\phi\rangle$) qui vérifie*

$$|\langle u,\phi\rangle| \leq C\mathcal{N}_p(\phi) \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{4.13}$$

Cette extension de la dualité identifie $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ à l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie une estimation du type (4.13)*.*

Preuve. On utilise ici la Proposition 4.3.8 : pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, on peut trouver une suite (φ_j) de $\mathcal{D}$ telle que $\mathcal{N}_p(\varphi - \varphi_j) \to 0$ pour tout p. Si $u \in \mathcal{S}'$, il resulte de la majoration 4.12 que la suite numérique $\langle u,\varphi_j\rangle$ est de Cauchy, et à donc une limite. La même estimation assur que cette limite, qu'on notera $\langle u,\varphi\rangle$, ne dépend pas de la suite (φ_j) choisie, et que l'on a l'estimation (4.13). Enfin, si un autre prolongement u_1 vérifait (4.13), on aurait $\langle u_1,\varphi - \varphi_j\rangle \to 0$, et donc $u_1 = u$.

Si on se donne maintenant une forme linéaire sur $\mathcal{S}$ vérifiant une majoration de type (4.13), elle définit évidemment par restriction à $\mathcal{D}$ une distribution tempérée u, et l'unicité précédemment démontrée prouve qu'elle coïncide avec l'extension de u. ■

Exemple 4.4.3. Si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ alors pour chaque entier p il existe une constante C telle que $\mathcal{N}_p(\tau_a\phi) \leq C(1 + |a|)^p$. Cette estimation implique que $e^x \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exemple 4.4.4. $L^1 \subset \mathcal{S}'$. En effet, si $f \in L^1$ alors la forme linéaire $\varphi \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ est continue sur $\mathcal{S}$ car

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \|f\|_{L^1}\mathcal{N}_0(\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}.$$

Exemple 4.4.5. $L^\infty \subset \mathcal{S}'$. En effet, si $f \in L^\infty$ alors

$$|f(x)\varphi(x)| \leq C_n\|f\|_{L^\infty}\frac{\mathcal{N}_{n+1}(\varphi)}{(1 + ||x||)^{n+1}} \quad \text{presque partout dans } \mathbb{R}^n,$$

donc $f\varphi \in L^1$ et

$$|\langle f,\varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \underbrace{C_n\|f\|_{L^\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathrm{d}x}{(1 + ||x||)^{n+1}}\right)}_{\gamma_n}\mathcal{N}_{n+1}(\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}.$$

Exemple 4.4.6. $L^2 \subset \mathcal{S}'$. Cette inclusion découle de l'inégalité de Cauchy-Schwartz qui donne

$$|\langle f,\varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D},$$

et de

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq C\mathcal{N}_{E(\frac{n}{2})+1}(\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}.$$

Exemple 4.4.7. $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$. Si $u \in \mathcal{E}'$ et $\varphi \in \mathcal{S}$ on pose

$$\langle u,\varphi\rangle = \langle u,\eta\varphi\rangle \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{S},$$

avec $\eta \in \mathcal{D}$ avec $\eta \equiv 1$ dans un voisinage compact K de $\mathrm{supp}(u)$. On alors

$$|\langle u,\varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in K,\ |\alpha|\leq p} |\partial^\alpha \varphi(x)| \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D},$$

et on majore facilement le membre de droite par $C'\mathcal{N}_p(\varphi)$.

Exemple 4.4.8. On définit

$$L^1_{\mathrm{loc,mod}} = \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}} \;\middle|\; |f(x)| \leq C(1+||x||)^N \text{ presque partout si } ||x|| > R \right\}.$$

On a $L^1_{\mathrm{loc,mod}} \subset \mathcal{S}'$. En effet, comme $f\chi_{B(0,R)} \in \mathcal{S}'$, on peut supposer que

$$|f(x)| \leq C(1+||x||)^N \text{ presque partout dans } \mathbb{R}^n.$$

Dans ce cas on a

$$|\langle f,\varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq C_1\mathcal{N}_{N+n+1}(\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D},$$

car

$$(1+||x||)^N|\varphi(x)| \leq C_1\frac{\mathcal{N}_{N+n+1}(\varphi)}{(1+||x||)^{n+1}}.$$

Définition 4.4.9. (Convergence dans $\mathcal{S}'$) On dit que las suite (u_j) d'éléments de $\mathcal{S}'$ converge vers u dans $\mathcal{S}'$, si on a

$$\lim_{j\to\infty} \langle u_j,\phi\rangle = \langle u,\phi\rangle \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{S}.$$

Remarque 4.4.1. Il est clair que, si $u_j \to u$ dans $\mathcal{S}'$ alors $u_j \to u$ dans $\mathcal{D}'$. D'autre part, si les u_j ont leur support dans un même K, la convergence dans $\mathcal{D}'$ est équivalente à la convergence dans $\mathcal{S}'$. La différence entre les deux notions de convergence n'apparaît donc qu'à l'infini. Par exemple la suite $(\exp(k^4)\delta_k)$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'$ mais elle ne converge pas dans $\mathcal{S}'$.

Remarque 4.4.2. Soient $(f_j) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ et $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Le lecteur démontrera à titre d'exercice que sous l'une des hypothèses suivantes, on $f_j \to f$ dans $\mathcal{S}'$.

1. $f_j \to f$ dans L^1.

2. $f_j \to f$ dans L^2.
3. $f_j \to f$ dans L^∞.
4. $f_j \to f$ presque partout et les $|f_j(x)|$ sont majorées par un polynôme fixe.

Théorème 4.4.10. *Si $u \in \mathcal{S}'$ alors toutes ses dérivées appartiennent à $\mathcal{S}'$. De plus, si $u_j \to u$ dans $\mathcal{S}'$ alors $\partial^\alpha u_j \to \partial^\alpha u$ dans $\mathcal{S}'$.*

La démonstration du résultat ci-dessus est proposée comme exercice au lecteur.

Exemple 4.4.11. Soit $G \in L^1$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} G(x)\,\mathrm{d}x = 1$. On pose $G_\epsilon(x) = \varepsilon^{-n} G\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Alors

$$G_\varepsilon \to \delta \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'. \tag{4.14}$$

En effet, après un changement de variable, on a

$$\langle G_\varepsilon, \varphi \rangle = \varphi(0) + \int_{\mathbb{R}^n} G(y)(\varphi(\varepsilon y) - \phi(0))\ \mathrm{d}y \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}.$$

Il est facile de vérifier que le deuxième terme du membre de droite tend vers 0 si $\varepsilon \to 0$ d'où on obtient (4.14).

Définition 4.4.12. On dit qu'une fonction f est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées, ce qu'on note $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$, si f est de classe C^∞, et si pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe C_β et m_β tels que

$$\left|\partial^\beta f(x)\right| \leq C_\beta (1 + |x|)^{m_\beta} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.15}$$

Théorème 4.4.13. *Soit $f \in \mathcal{O}_M$. Alors :*

1. *Pour tout $\phi \in \mathcal{S}$ on a $f\phi \in \mathcal{S}$.*
2. *Pour tout $u \in \mathcal{S}'$, on a $fu \in \mathcal{S}'$. Si $u_j \to u$ dans $\mathcal{S}'$, on a $fu_j \to fu$ dans $\mathcal{S}'$.*

Preuve. En utilisant la formule de Leibniz on a

$$\sum_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \left|x^\alpha \partial^\beta (f\varphi)(x)\right| \leq\ C_p \sum_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p, |\gamma \leq p} \left|x^\alpha \partial^\beta f(x) \partial^\gamma \varphi(x)\right| \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S},$$

où C_p s'exprime en fonction d'un nombre fini de coefficients binomiaux. Si on désigne par M_p les plus grand des m_β intervenant dans (4.15) pour $|\beta| \leq p$, on obtient qu'il existe une constante C'_p telle que

$$\mathcal{N}_p(f\varphi) \leq C \mathcal{N}_{p+M_p}(\varphi) \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{S}.$$

On en déduit la première conclusion du théorème.

Si $u \in \mathcal{S}'$, il exte $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle fu, \varphi \rangle| = |\langle u, f\varphi \rangle| \leq C \mathcal{N}_p(f\varphi) \leq C C'_p \mathcal{N}_{p+M_p}(\varphi).$$

Cela prouve que la distribution fu est tempérée. Enfin, si $u_j \to u$ dans $\mathcal{S}'$, on a $\langle fu_j, \varphi \rangle = \langle u_j, f\varphi \rangle \to \langle u, f\varphi \rangle = \langle fu, \varphi \rangle$ lorsque φ et donc $f\varphi$ appartiennent à $\mathcal{S}$, ce qui achève la démonstration. ∎

4.5 Transformation de Fourier des distributions tempérées

Définition 4.5.1. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La transformée de Fourier de u est la distribution tempérée notée $\widehat{u}$ ou $\mathcal{F}u$ définie par

$$\langle \widehat{u}\ , \phi\rangle = \langle u, \widehat{\phi}\ \rangle \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{S}.$$

La conjugée $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ est définie par

$$\langle \overline{\mathcal{F}}u, \varphi\rangle = \langle u, \overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}.$$

Théorème 4.5.2. *La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}'$ sur lui même, d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\bar{\mathcal{F}}$.*

Preuve. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$ on a

$$\langle \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}u, \varphi\rangle = \langle \overline{\mathcal{F}}u, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle u, \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi\rangle = (2\pi)^n\langle u, \varphi\rangle.$$

■

La transformation de Fourier est une opération continue dans $\mathcal{S}'$, au sens du résultat ci-dessous. La preuve, très simple, est proposée comme exercice au lecteur.

Théorème 4.5.3. *Si $u_j \to u$ dans $\mathcal{S}'$ alors $\widehat{u}_j\ \to \widehat{u}$ dans $\mathcal{S}'$.*

Exemple 4.5.4. $\widehat{1} = (2\pi)^n\delta$. En effet nous avons déjà calculé les transformées de Fourier de Gaussiennes, et on a

$$\mathcal{F}\left(\exp\left(\frac{-\epsilon^2\|x\|^2}{4}\right)\right) = \left(\frac{4\pi}{\epsilon^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-\|\xi\|^2}{\epsilon^2}\right).$$

Le membre de droite peut se mettre sous la forme $(2\pi)^n\epsilon^{-n}G\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right)$, en posant $G(z) = \pi^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\|z\|^2\right)$. Cette dernière fonction étant d'intégrale 1, on sait (voir l'Exemple 4.4.11) que $\epsilon^{-n}G\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right)$ converge vers δ dans $\mathcal{S}'$, donc

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \mathcal{F}\left(\exp\left(\frac{-\epsilon^2\|x\|^2}{4}\right)\right) = (2\pi)^n\delta \ \text{ dans } \ \mathcal{S}'.$$

Par ailleurs, compte tenu de la Remarque 4.4.2, les fonctions $\exp\left(\frac{-\epsilon^2\|x\|^2}{4}\right)$ convergent vers 1 dans $\mathcal{S}'$ pour $\epsilon \to 0$. Il en resulte que leurs transformées de Fourier convergent vers $\mathcal{F}(1)$ dans $\mathcal{S}'$. Or elles convergent aussi vers $(2\pi)^n\delta$. On a donc

$$\mathcal{F}(1) = (2\pi)^n\delta.$$

Exemple 4.5.5. $\widehat{\delta} = 1$. En effet l'exemple précédent et la formule d'inversion de Fourier entraîne que $(2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}\ [(2\pi)^n\delta] = 1$, et donc que $\overline{\mathcal{F}}\ (\delta) = 1$. Le résulat est obtenu en "changeant" i et $-i$.

Les propriétés de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$ donnent, par dualité des propriétés similaires pour la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$. Plus précisément on a le résultat suivant donc la preuve, très simple, est proposée comme exercice au lecteur.

Proposition 4.5.6. *Soit $u \in \mathcal{S}'$. Alors on a*

- $\widehat{\widehat{u}} = \check{\widehat{u}}$ *où* $\langle \check{u},h\rangle = \langle u,\check{h}\rangle$ *pour tout* $h \in \mathcal{S}$ *et* $\check{h}(x) = h(-x)$*, pour tout* $h \in \mathcal{S}$ *et tout* $x \in \mathbb{R}^n$*;*
- $\widehat{\tau_a u} = \exp(-ia\cdot\xi)\,\widehat{u}$ *;*
- $\widehat{\exp(ia\cdot x)u} = \tau_a\,\widehat{u}$ *;*
- $\widehat{\partial^\alpha u} = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\,\widehat{u}$;
- $\widehat{x^\alpha u} = i^{|\alpha|}\partial^\alpha\,\widehat{u}$;

De plus

- $\widehat{\delta_a} = \exp(-ia\cdot\xi)$, $\quad \widehat{\exp(ia\cdot x)} = (2\pi)^n\delta_a$.
- $\widehat{\partial^\alpha\delta} = i^{|\alpha|}\xi^\alpha$, $\quad \widehat{x^\alpha} = (2\pi)^n i^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta$.

La transformation de Fourier et la notion de symbole d'un opérateur différentiel permettent d'obtenir une caractérisation symple de la solution fondamentale d'un opérateur différentiel. On définit d'abord la notion symbole d'un opérateur différentiel.

Définition 4.5.7. Soit $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|\le m}$ une famille de fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ et

$$P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha\partial^\alpha$$

un opérateur différentiel. La fonction $P(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ définie par

$$P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$$

est appelée symbole de l'opérateur différentiel $P(x,\partial)$.

Remarque 4.5.1. Si l'on pose $D_j = \frac{1}{i}\partial_j$ pour $j = 1,n$ alors l'opérateur différentiel $P(x,\partial)$ peut s'écrire

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x)D^\alpha,$$

où $c_\alpha(x) = i^{|\alpha|}a_\alpha(x)$. Avec la notation ci-dessus le symbole de $P(x,D)$ est

$$P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Exemple 4.5.8 (Les symboles de quelques opérateurs différentiels).

Operateur	Symbole
$\partial_t + c\partial_x$	$i\tau + ic\xi$
Δ_x	$-\sum_{j=1}^n \xi_j^2$
$\partial_t^2 - \Delta_x$	$-\tau^2 + \sum_{j=1}^n \xi_j^2$
$\partial_t - \Delta_x$	$i\tau + \sum_{j=1}^n \xi_j^2$

La transformation de Fourier est liée aux notions de symbole et de solution fondamentale d'un opérateur différentiel par l'intermédiare du résultat qui suit.

Proposition 4.5.9. *Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel à coefficients constants de symbole $P(\xi)$ et $u \in \mathcal{S}'$. Alors*

$$\mathcal{F}\left(P(\partial)u\right) = P(\xi)\,\widehat{u}. \tag{5.16}$$

En particulier $E \in \mathcal{S}'$ est une solution fondamentale de de $P(\partial)$ si et seulement si

$$P(\xi)\,\widehat{E} = 1.$$

Preuve. La relation (5.16) est une conséquence directe de la Proposition 4.5.6. Pour prouver la dernière partie de l'enoncé il suffit maintenant d'utiliser l'Exemple 4.5.5. ∎

Remarque 4.5.2. La transformation de Fourier nous permet de **trouver** la solution fondamentale de certains opérateurs différentiels et en particulier celle du laplacien. En effet, si l'on suppose que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ est telle que $\Delta u = \delta_0$ alors, en appliquant la Proposition 4.5.9, on obtient que $|\xi|^2\,\widehat{u} \; = 1$. Une solution évidente semble $\widehat{u}(\xi) = -\dfrac{1}{||\xi||^2}$. Cette solution convient car la fonction $\xi \to -\frac{1}{||\xi||^2}$ est dans $L^1_{\text{loc,mod}}(\mathbb{R}^3)$, donc elle définit une distribution tempérée v. Sa transformée de Fourier inverse est (voir l'Exercice 4.9)

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi||x||}$$

Une application intéressante de la transformation de Fourier est le résultat classique suivant.

Théorème 4.5.10 (Théorème de Liouville généralisé). *Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants tel que $P(\xi) \neq 0$ si $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Si $u \in \mathcal{S}'$ satisfait $Pu = 0$ alors, alors u est une fonction polynomiale.*

Preuve. En appliquant la transformation de Fourier un obtient que $P(\xi)\widehat{u} = 0$. Comme $P(\xi) \neq 0$ si $\xi \neq 0$ on déduit que $\operatorname{supp}(\widehat{u}) \subset \{0\}$. En appliquant le Corollaire 3.5.9 on déduit que $\widehat{u}$ est une combinaison linéaire finie de dérivées de la masse de Dirac en 0, c.a.d. que

$$\widehat{u} = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0.$$

En appliquant la transformation de Fourier inverse on obtient la conclusion. ■

Remarque 4.5.3. Les opérateurs $P = \partial_x + i\partial_y$ (opérateur de Cauchy-Riemann), le laplacien ainsi que l'opérateur $P = \partial_t - \Delta$ (l'opérateur de la chaleur) satisfont l'hypothèse du théorème ci-dessus. Les opérateurs "hyperboliques" $P = \partial_t - \partial_x$ et $P = \partial_t^2 - \Delta$ ne satisfont pas cette hypothèse.

Corollaire 4.5.11. *Les seuls fonctions harmoniques (resp. holomorphes) bornées dans $\mathbb{R}^n$ (resp. dans $\mathbb{C}$) sont les fonctions constantes.*

4.6 Transformation de Fourier dans L^2

La formule définissant la transformée de Fourier d'une fonction f de L^1 n'a , en général, pas de sens lorsque $f \in L^2$. Pour définir la transformée de Fourier de $f \in L^2$ on utilisera le prolongement par continuité de la transformation de Fourier vue comme application linéaire de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.

Théorème 4.6.1 (Plancherel). *L'application $u \to (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}u$ est une isométrie bijective de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur lui même, d'inverse $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,\overline{\mathcal{F}}$.*

Preuve. Compte tenu de la densité de $\mathcal{S}$ dans L^2 (qui découle du Corollaire 2.5.7) il suffit de démontrer que les applications $u \to (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}u$ et $u \to (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,\overline{\mathcal{F}}\,u$ sont des isométries de $\mathcal{S}$ sur lui même, lorsque celui-ci est muni de la norme L^2.

Soient f et g appartenant à $\mathcal{S}$ et posons $h = \overline{\widehat{g}}$. D'après le Lemme 4.3.7 on a $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\widehat{h}\,(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\,(x)h(x)\,\mathrm{d}x$. En remarquant que

$$\mathcal{F}h = \mathcal{F}\,\overline{\widehat{g}}\; = \overline{\overline{\mathcal{F}}\,\widehat{g}}\; = (2\pi)^n\,\overline{g},$$

on obtient immédiatement

$$(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\overline{g(x)}\;\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\;(x)\overline{\widehat{g}\;(x)}\;\mathrm{d}x,$$

ce qui montre que $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}$ conserve le produit scalaire, et donc la norme L^2, pour les éléments de $\mathcal{S}$. Ce qui précède s'applique également à $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,\overline{\mathcal{F}}$. Cela termine la démonstration du théorème. ■

Une application intéressante du Théorème de Plancherel et de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$ permet la solvabilité d'une classe d'équations elliptiques.

Proposition 4.6.2. *Soient $m > 0$ et $f \in \mathcal{S}'$. Alors il existe une unique distribution $u \in \mathcal{S}'$ telle que*

$$mu - \Delta u = f. \tag{6.17}$$

De plus, si $f \in \mathcal{S}$ alors $u \in \mathcal{S}$. Si $f \in L^2$ alors $\partial^\alpha u \in L^2$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq 2$.

Preuve. Si $f,u \in \mathcal{S}'$ alors l'équation (6.17) est équivalente à

$$\left(m + |\xi|^2\right) \widehat{u} = \widehat{f},$$

donc à

$$\widehat{u} = \left(m + |\xi|^2\right)^{-1} \widehat{f}.$$

La relation ci-dessus montre que, pour tout $f \in \mathcal{S}'$, l'équation (6.17) admet une solution unique $u \in \mathcal{S}'$ et que $u \in \mathcal{S}$ lorsque $f \in \mathcal{S}$.

Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq 2$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = \frac{(i\xi)^\alpha}{m + |\xi|^2} \mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

En appliquant le Théorème de Plancherel on déduit que $\partial^\alpha u \in L^2$. ■

Remarque 4.6.1. Le résultat de la Proposition 4.6.2 n'est pas valable pour $m = 0$.

4.7 Espaces de Sobolev

4.7.1 Définition et propriétés des espaces de Sobolev d'ordre entier

Définition 4.7.1 (Espaces de Sobolev). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit m un entier positif ou nul. On dit que $u \in H^m(\Omega)$ si $u \in L^2(\Omega)$ et si les dérivées de u, au sens des distributions, jusqu'à l'ordre m appartiennent également à $L^2(\Omega)$. On notera $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Théorème 4.7.2. *Les espaces $H^m(\Omega)$, $m \geq 0$ sont hilbertisables : munis du produit scalaire*

$$\langle u,v \rangle_m = \sum_{|\alpha \leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)} \mathrm{d}x, \tag{7.18}$$

ou de tout autre produit scalaire donnant une norme équivalente à la norme

$$\|u\|_m = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2}, \tag{7.19}$$

ce sont des espaces de Hilbert.

Preuve. On voit facilement que l'expression (7.18) est un produit scalaire. Il suffit de vérifier que l'espace est complet pour la norme associé, et il le sera évidemment pour toute norme équivalente. Soit donc (u_j) une suite de Cauchy pour cette norme. On a

$$\lim_{j,k \to \infty} \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u_j - \partial^\alpha u_k\|_{L^2}^2 = 0,$$

ce qui exprime que, pour chaque α de longueur inférieure ou égale à m, la suite $\partial^\alpha u_j$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Ce dernier espace étant complet, il existe donc de v_α tels que

$\partial^\alpha u_j \to v_\alpha$ dans $L^2(\Omega)$. La convergence dans $L^2(\Omega)$ impliquant la convergence au sens des distributions, on a également $u_j \to v_0$ au sens des distributions. En appliquant le Théorème 3.4.6 on obtient que $\partial^\alpha u_j \to \partial^\alpha u^0$ au sens des distributions. On a donc $\partial^\alpha v_0 = v_\alpha \in L^2(\Omega)$, ce qui prouve que $v_0 \in H^m(\Omega)$. De plus, par la définition même des v_α, on a

$$\|v_0 - u_j\|_m^2 = \sum_{|\alpha|\le m} \|v_\alpha - \partial^\alpha u_j\|_{L^2}^2 \to 0,$$

donc $u_j \to v_0$ pour la norme de $H^m(\Omega)$. Cela achève la démonstration. ■

Remarque 4.7.1. Il est clair que l'inclusion $H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ est continue. De plus, comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ (cf. Corollaire et 2.5.7) et $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$, on a que $H^m(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

Théorème 4.7.3. *On suppose que Ω est un ouvert régulier avec $\partial\Omega$ borné (ou bien $\Omega = \mathbb{R}^n_+$). Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un opérateur linéaire $P : H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^n)$ tel que pour tout $u \in H^m(\Omega)$*

1. *$Pu|_\Omega = u$.*
2. *$\|Pu\|_{H^m(\mathbb{R}^N)} \le C\|u\|_{H^m(\Omega)}$*

où C dépend seulement de Ω.

Preuve. Nous donnons la preuve dans le cas particulier où $N = 1$, $m = 1$ et Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\Omega =]0,\infty[$ et $u \in H^1(\Omega)$ on définit

$$(Pu)(x) = u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad x \ge 0 \\ u(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Posons

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ -u'(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Un calcul simple montre que $v \in L^2(\mathbb{R})$. Pour conclure la démonstration (au cas où $\Omega =]0,\infty[$) il suffit de prouver que

$$(Pu)' = v \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{7.20}$$

En effet, en supposant (7.20), on déduit que $Pu \in H^1(\mathbb{R})$ et $\|Pu\|_{H^1(\mathbb{R})} \le 2\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Il reste à prouver (7.20). On utilisera la suite (η_k) de fonctions de $C^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$\eta_k(t) = \eta(kt) \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 1,2,\ldots$$

où $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction fixée telle que

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}.$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^*(x)\phi'(x)dx = \int_0^{\infty} u(x)\chi'(x)dx, \tag{7.21}$$

où $\chi(x) = \phi(x) - \phi(-x)$. On notera que $\chi(0) = 0$, donc il existe une constante $C > 0$ telle que $\chi(x) \leq M|x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $\eta_k\chi \in \mathcal{D}(0,\infty)$ on a

$$\int_0^{\infty} u(\eta_k\chi)'dx = -\int_0^{\infty} u'(\eta_k\chi)dx. \tag{7.22}$$

Mais

$$(\eta_k\chi)'(x) = \eta_k(x)\chi'(x) + k\eta'(kx)\chi(x). \tag{7.23}$$

Par ailleurs

$$\left|\int_0^{\infty} ku(x)\eta'(kx)\chi(x)dx\right| \leq kMC\int_0^{\frac{1}{k}} x|u(x)|dx \leq MC\int_0^{\frac{1}{k}} |u(x)|dx,$$

avec $C = \sup_{t\in[0,1]} |\eta'(t)|$, d'où

$$\lim_{k\to\infty} \left|\int_0^{\infty} ku(x)\eta'(kx)dx\right| = 0. \tag{7.24}$$

On déduit alors de (7.22), (7.23) et (7.24) que

$$\int_0^{\infty} u\chi'dx = -\int_0^{\infty} u'\chi dx = -\int_{\mathbb{R}} u'\phi dx. \tag{7.25}$$

Les relations (7.21) et (7.25) implique (7.20).

Considérons maintenant le cas d'un intervalle borné I; on peut toujours se ramener au cas $I =]0,1[$. En utilisant la fonction $\widetilde{G}$ de la preuve de la Proposition 2.2.6 on peut construire $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ telle que $\eta(x) \in [0,1]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{si} \quad x > \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Si $u \in H^1(0,1)$ on définit $\widetilde{u} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}.$$

Alors $\eta\widetilde{u} \in H^1(]0,\infty[)$ et $(\eta\widetilde{u})' = \eta'\widetilde{u} + \eta\widetilde{u}'$. La fonction $u \in H^1(0,1)$ s'ecrit

$$u = \eta u + (1-\eta)u.$$

La fonction ηu est **d'abord** prolongée à $]0,\infty[$ à $\eta\widetilde{u} \in H^1(]0,\infty[)$ et **ensuite** prolongéé à $\mathbb{R}$ par réflexion. On obtient ainsi une fonction $v_1 \in H^1(\mathbb{R})$ qui prolonge ηu et telle que

$$\|v_1\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^2(I)}\ ,\ \ \|v_1\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{H^1(I)}$$

(où C dépend de $\|\eta'\|_{L^\infty}$). On procède de manière analogue avec $(1-\eta)u$, c'est à dire que l'on prolonge **d'abord** $(1-\eta)u$ à $]-\infty,-1[$ par 0 sur $]-\infty,0[$ et **ensuite** on prolonge à $\mathbb{R}$ par une réflexion (par rapport au point 1). On obtient ainsi une fonction $v_2 \in H^1(\mathbb{R})$ qui prolonge $(1-\eta)u$ et telle que

$$\|v_2\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^2(I)} \ , \ \ \|v_2\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{H^1(I)}.$$

Alors $Pu = v_1 + v_2$ répond à la question. ■

4.7.2 Les espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$, avec $s \in \mathbb{R}$

Au cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$ les espaces de Sobolev ont une caractérisation simple en utilisant la transformation de Fourier.

Proposition 4.7.4. *Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \ \middle| \ \left(1+\|\xi\|^2\right)^{\frac{m}{2}} \ \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Preuve. Si $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ alors $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = m$, donc $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\xi^\alpha \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = m$. On déduit que $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\|\xi\|^m \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ donc $(1+\|\xi\|^2)^{\frac{m}{2}} \ \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Réciproquement supposons que $(1+\|\xi\|^2)^{\frac{m}{2}} \ \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On peut facilement vérifier qu'il existe une constante C telle que

$$|\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)| \leq C \left| \left(1+\|\xi\|^2\right)^{\frac{m}{2}} \ \widehat{u}(\xi) \right|,$$

pour $\xi \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$, donc $\xi^\alpha \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$. En utilisant le Théorème de Plancherel on déduit que $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$, donc $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$. ■

Le résultat de la Proposition 4.7.4 suggère la définition suivante.

Définition 4.7.5. Soit $s \in \mathbb{R}$. On dit qu'une distribution u dans $\mathbb{R}^n$ appartient à l'espace H^s si u est tempérée, si $\widehat{u}$ est une fonction localement sommable, et si

$$\left(1+\|\xi\|^2\right)^{\frac{s}{2}} \ \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 4.7.6. *Les espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$ sont hilbertisables ; munis du produit scalaire*

$$(u,v)_s = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+\|\xi\|^2\right)^s \ \widehat{u}(\xi) \, \overline{\widehat{v}(\xi)} \mathrm{d}\xi,$$

ou de tout autre produit scalaire donnant une norme équivalente à la norme

$$\|u\|_s = \left\| \left(1+\|\xi\|^2\right)^{\frac{s}{2}} \ \widehat{u} \right\|_{L^2},$$

ce sont des espaces de Hilbert.

Preuve. Il est clair que $(u,v)_s$ est un produit scalaire. D'autre part, l'application

$$u \to \left(1+\|\xi\|^2\right)^{\frac{s}{2}}\,\widehat{u}$$

est par définition une bijection isométrique de $H^s(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ce dernier espace étant complet, il en est de même de $H^s(\mathbb{R}^n)$, pour la norme $\|\cdot\|_s$ ou pour toute norme équivalente. ■

Une propriété importante des espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ est la suivante :

Théorème 4.7.7. *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout s.*

Preuve. On sait que l'application $u \to (1+\|\xi\|^2)^{\frac{s}{2}}\,\widehat{u}$ est une isométrie de de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. L'isométrie inverse doit transformer le sous espace dense $\mathcal{S}$ de L^2 en un sous espace dense de H^s. Or cette même application est une bijection de $\mathcal{S}$ sur lui même : elle est composée de la transformation de Fourier et de la multiplication par $(1+\|\xi\|^2)^{\frac{s}{2}}$, fonction qui appartient à $\mathcal{O}_M$ ainsi que son inverse. On obtient donc que $\mathcal{S}$ est dense dans H^s pour tout s.

Montrons maintenant qu'il existe p et C, ne dépendant que de s, tels que

$$\|\varphi\|_s \leq C\mathcal{N}_p(\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}. \tag{7.26}$$

En effet, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\|\left(1+\|\xi\|^2\right)^{\frac{s}{2}}\,\widehat{\varphi}\right\|_{L^2} \leq \left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left[\left(1+\|\xi\|^2\right)^{\frac{s}{2}+N}|\widehat{\varphi}(\xi)|\right]\right)\left\|\left(1+\|\xi\|^2\right)\right\|^{-N}.$$

En choisissant $N > \frac{n}{2}$, le membre de droite est majoré par une constante fois $\mathcal{N}_q(\,\widehat{\varphi})$, où q est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{s}{2}+N$. D'après le Théorème 4.3.6 on a l'estimation (7.26) avec $p = q+n+1$.

Un élément $u \in H^s$ et $\epsilon > 0$ étant donnés, on peut d'abord trouver $\varphi \in \mathcal{S}$, vérifiant $\|u-\varphi\|_s \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'après le Théorème 4.3.8, il existe une suite (φ_j) de $\mathcal{D}$ telle que l'on ait $\mathcal{N}_p(\varphi-\varphi_j) \to 0$. Il resulte de la majoration (7.26) que l'on a $\|\varphi-\varphi_j\|_s \leq \frac{\varepsilon}{2}$ en choisissant j assez grand. On peut donc, pour tout ε, trouver un élément $\varphi_j \in \mathcal{D}$ tel que $\|u-\varphi_j\|_s \leq \varepsilon$, ce qui achève la démonstration. ■

En utilisant le Théorème 4.7.3 et le Théorème 4.7.7 on obtient le résultat suivant :

Corollaire 4.7.8 (densité). *On suppose que Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$ et que $u \in H^m(\Omega)$. Alors il existe une suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$. Autrement dit les restrictions à Ω des fonctions $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ forment un sous-espace dense de $H^m(\Omega)$.*

Le résultat suivant montre que, si s est assez grand, les fonctions de $H^s(\mathbb{R}^n)$ sont continues.

Théorème 4.7.9 (Théorème d'injection de Sobolev). *Pour $s > \frac{n}{2}$ les éléments de $H^s(\mathbb{R}^n)$ sont des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.*

Preuve. On peut écrire

$$\widehat{u}\,(\xi) = \left[\left(1+\|\xi\|^2\right)^{\frac{s}{2}}\,\widehat{u}(\xi)\right]\left[\left(1+\|\xi\|^2\right)^{-\frac{s}{2}}\right].$$

Le premier facteur appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$ si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, et le second facteur appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$ dès que $s > \frac{n}{2}$. On a donc $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et, en appliquant le Théorème 4.2.2, on obtient que la fonction u est continue et tend vers 0 à l'infini. ∎

En appliquant le Théorème 4.7.9 aux dérivées d'ordre $\leq m$ de u on obtient

Corollaire 4.7.10. *Pour tout m entier positif et $s > \frac{n}{2} + m$, les élément de $H^s(\mathbb{R}^n)$ sont des fonctions de classe C^m. En particulier une fonction appartenant à H^s pour tout s est une fonction de classe C^∞.*

En combinant le Théorème 4.7.3 et le Corollaire 4.7.10 on obtient

Corollaire 4.7.11. *Pour tout Ω ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$, m entier positif et $p \in \mathbb{N}$, $p > \frac{n}{2} + m$ on a $H^p(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega})$, avec inclusion continue.*

4.8 Exercices du Chapitre 4

Exercice 4.1. Calculer la transformation de Fourier de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$;
- $f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$;
- $f(x) = e^{-t|x|}$, $t > 0$;
- $f(x) = \frac{1}{\cosh(\pi x)}$;
- $f(x) = xe^{-tx^2}$.

Exercice 4.2. Soit $f \in \mathcal{S}$ une fonction positive. Trouver le pont ξ où la fonction $\xi \to |\widehat{f}\,(\xi)|^2$ atteint son maximum.

Exercice 4.3. Soit $t > 0$.

1. Démontrer que
$$\exp(-t|x|) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{t}{t^2+\xi^2}\exp(-ix\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
2. En déduire les formules
$$\exp(-t|x|) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} t\int_0^\infty \exp(-st^2)\exp(-s\xi^2)\,\mathrm{d}s\,\exp(-ix\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$
et
$$\exp(-t\lambda) = \int_0^\infty \frac{t}{(\pi s)^{\frac{1}{2}}}\exp(-st^2)\exp\left(\frac{-\lambda^2}{4s}\right)\mathrm{d}s \qquad \forall\, \lambda > 0.$$

3. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \exp(-t||x||) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

en utilisant la fonction Γ d'Euler dédifinie par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x+1} \exp(-s)\,\mathrm{d}s.$$

Préciser le résultat pour $n \in \{1,2,3\}$.

Exercice 4.4. Soit $u \in \mathcal{S}'$. Prouver les formules suivantes

- $\widehat{\check{u}} = \check{\widehat{u}}$;
- $\widehat{\tau_a u} = \exp(-ia\cdot\xi)\,\widehat{u}$;
- $\widehat{\exp(ia\cdot x)u} = \tau_a\,\widehat{u}$;
- $\widehat{\partial^\alpha u} = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\,\widehat{u}$;
- $\widehat{x^\alpha u} = i^{|\alpha|}\partial^\alpha\,\widehat{u}$;

En déduire

- $\widehat{\delta_a} = \exp(-ia\cdot\xi), \quad \widehat{\exp(ia\cdot x)} = (2\pi)^n\delta_a$.
- $\widehat{\partial^\alpha\delta} = i^{|\alpha|}\xi^\alpha, \quad \widehat{x^\alpha} = (2\pi)^n i^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta$.

Exercice 4.5. Soit H la fonction de Heaviside.

1. Utiliser les relations $H + \check{H} = 1$ et $H' = \delta$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ pour démontrer que

$$\widehat{H} = -i\mathrm{Vp}\left(\frac{1}{\xi}\right) + \pi\delta.$$

2. Déduire que

$$\widehat{\mathrm{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)} = i\pi(1-2H)$$

3. Sachant que $|x| = xH - x\check{H}$ et que $\left(\mathrm{Vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, prouver que

$$\widehat{|x|} = -2\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \widehat{\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)} = -\pi|\xi|.$$

Exercice 4.6. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ homogène de degré $k \in \mathbb{C}$. Montrer que $\widehat{T}$ est homogène de degré $-n-k$.

Exercice 4.7. On rapelle qu'une fonction f est dite à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées, ce qu'on note $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$, si f est de classe C^∞, et si pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe C_β et m_β tels que

$$\left|\partial^\beta f(x)\right| \le C_\beta(1+|x|)^{m_\beta} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $f \in \mathcal{O}_M$. Alors :

1. Pour tout $\phi \in \mathcal{S}$ on a $f\phi \in \mathcal{S}$.

2. Pour tout $u \in \mathcal{S}'$, on a $fu \in \mathcal{S}'$. Si de plus $u_j \to u$ dans $\mathcal{S}'$, on a $u_j \to u$ dans $\mathcal{S}'$.

Exercice 4.8. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{||x||} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

1. Prouver que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ et que la distribution associée à f est dans $\mathcal{S}'$.
2. Calculer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}} \exp(-s\|x\|^2)\, \mathrm{d}s$.
3. Montrer que la transformée de Fourier de f est donnée par

$$\widehat{f}\,(\xi) = \frac{4\pi}{||\xi||^2}.$$

Exercice 4.9. 1. Soient $\mathbb{C}_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ et φ une fonction fixée de $\mathcal{S}$. Montrer que les fonctions

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-z|x|^2)\, \widehat{\phi}(x)\ \mathrm{d}x,$$

et

$$G(z) = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4z}\right) \phi(x)\, \mathrm{d}x.$$

Démontrer que les fonctions F et G sont bien définies et holomorphes sur $\mathbb{C}_0$. Prouver que F et G peuvent être prolongées d'une manière unique à des fonctions continues sur $\overline{\mathbb{C}_0}$.

2. Prouver que

$$F(z) = G(z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}_0.$$

3. En déduire que si $f(x) = \exp(is|x|^2)$, avec $s \in \mathbb{R}^*$ alors

$$\widehat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{-is}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-i|x|^2}{4s}\right).$$

Exercice 4.10. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ et u la fonction définie sur $\Omega \setminus \{(0,0)\}$ par

$$u(x,y) = \left|\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)\right|^\alpha,$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, u est une fonction dans $H^1(\Omega)$ qui n'admet pas de représentant continu sur Ω.

Exercice 4.11. On suppose que l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ n'est pas borné et que $u \in H^1(I)$. Alors on a $\lim_{|x| \to \infty,\, x \in I}\ u(x) = 0$.

Exercice 4.12. Soient $u,v \in H^1(I)$. Alors $uv \in H^1(I)$ et

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

De plus on a la formule d'intégration par parties

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv'.$$

Exercice 4.13. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné.

1. Montrer que l'inclusion $H^1(I) \subset L^2(I)$ est compacte.
2. Prouver qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2} \leq C \left(\|u'\|_{L^2} + \left| \int_\Omega u(x)dx \right| \right), \quad \forall u \in H^1(I).$$

Exercice 4.14. 1. Quelles sont les valeurs de s telles que $\chi_{[0,1]} \in H^s(\mathbb{R})$?

2. Quelles sont les valeurs de s telles que $\chi_{[0,1]\times[0,1]} \in H^s(\mathbb{R}^2)$?
3. Soit $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $K - \Delta K = \delta$. Quelles sont les valeurs de s telles que $K \in H^s(\mathbb{R}^n)$?

Exercice 4.15. On considère la distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ définie par

$$\langle u,\varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(x,0)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

1. Préciser l'ordre et le support de u, en justifiant vos réponses.
2. Prouver que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.
3. Calculer la transformée de Fourier de u.

Exercice 4.16. Soit $\alpha \in \{0,1\}$. On considère l'opérateur différentiel $P_\alpha : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ défini par

$$P_\alpha u = \Delta(\Delta u) + \alpha u \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

1. Prouver que P_1 admet une et une seule solution fondamentale $E \in \mathcal{S}'$.
2. Si E est la distribution dont on a prouvé l'existence à la question précédente, dire si les affirmations suivantes sont vraies
   (a) $E \in H^{\frac{11}{4}}(\mathbb{R}^2)$;
   (b) $E \in H^{\frac{13}{4}}(\mathbb{R}^2)$.
3. Trouver toutes les distributions $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$P_1 u = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

4. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ telle que $P_0 u = 0$. Que peut-on dire sur le support de $\widehat{u}$?
5. Prouver que si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ satisfait la condition

$$P_0 u = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$$

alors u est une fonction polynomiale. Trouver ensuite toutes les fonctions $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ vérifiant

$$P_0 u = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Exercice 4.17. 1. Soit $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ une fonction 2π-périodique. Prouver que la distribution associée à f est une distribution tempérée.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes pour que la série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta_k$$

converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et soit la transformée de Fourier d'une fonction de $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ 2π-périodique.

Exercice 4.18. Soit I un intervalle borné $]a{,}b[$ et fixons $f \in L^2(I)$. On se propose de trouver une fonction $u \in H^2(I)$ telle que

$$\begin{cases} -u" = f \quad \text{dans} \quad L^2(I) \\ u'(a) = u'(b) = 0, \\ \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = 0. \end{cases} \tag{8.27}$$

On introduit l'espace

$$V = \left\{ v \in H^1(I) \;\middle|\; \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

1. Montrer que si (8.27) admet une solution alors f satisafait

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{8.28}$$

2. Montrer que V est un espace de Hilbert. Démontrer que la fonction

$$u \to \left[\int_a^b |u'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}},\ u \in V$$

définit une norme équivalente à la restriction de la norme de H^1 à V. En déduire que pour tout $f \in L^2(I)$ satisfaisant (8.28) il existe un unique $u \in V$ tel que

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall\, v \in V. \tag{8.29}$$

3. Montrer que la solution u de (8.29) satisfait

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall\, v \in H^1(I).$$

En déduire que $u \in H^2(I)$ et que u satisfait (8.27).

Exercice 4.19. Soit $I =]a{,}b[$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

1. Prouver l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|_{L^2(I)} \le (b-a)\|u'\|_{L^2(I)} \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}(I).$$

2. On note $H_0^1(I)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(I)$ dans $H^1(I)$. Prouver que l'application

$$v \to \|v\|_1 = \|v'\|_{L^2(I)},$$

définit sur $H_0^1(I)$ une norme équivalente à la restriction de la norme de $H^1(I)$.

Exercice 4.20. Soit $I =]a,b[$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$. On considère l'espace vectoriel suivant :

$$H^{-1}(I) = \{u \in \mathcal{D}'(I\!R) \; ; \; \exists C > 0 \;\; |\langle u ,\phi\rangle| \leq C \,\|\phi\|_1 \;\; \forall \phi \in \mathcal{D}(I\!R)\}$$

1. Prouver que pour tout $u \in H^{-1}(I)$, l'application $\phi \to \langle u ,\phi\rangle$ se prolonge d'une manière unique en une forme linéaire continue sur $H_0^1(I)$. On notera :

$$\langle u ,v\rangle_{H^{-1}(I),H_0^1(I)} \qquad \forall u \in H^{-1}(I) \quad \forall v \in H_0^1(I)$$

   ce prolongement.
2. Soit L une forme linéaire continue sur $H_0^1(I)$. Prouver que la restriction de L à $\mathcal{D}(I\!R)$ est une distribution d'ordre ≤ 1 qui appartient à $H^{-1}(I)$. On notera u cette distribution. Démontrer que l'application :

$$\rho \;:\; \left(H_0^1(I)\right)' \longrightarrow H^{-1}(I)$$

   qui à L associe u, est un isomorphisme algébrique d'isomorphisme inverse :

$$u \longrightarrow \langle u ,\cdot\rangle_{H^{-1}(I),H_0^1(I)}$$

3. Soit $h \in L^2(I)$. Vérifier que h' est un élément de $H^{-1}(I)$.

Exercice 4.21. Soient I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in C(\bar{I})$ telle que $\alpha(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$. On considère l'opérateur linéaire A_α défini par

$$A_\alpha\phi = -\phi" + \alpha\phi \qquad \forall\, \phi \in H_0^1(I).$$

1. Démontrer que A_α est un isomorphisme de $H_0^1(I)$ dans $H^{-1}(I)$. En déduire que $\psi \in H^{-1}(I)$ si et seulement si il existe $f,g \in L^2(I)$ telles que $\psi = f + g'$.
2. On note

$$\mathcal{D}(A_\alpha) = \left\{\phi \in H_0^1(I) \,\middle|\, A_\alpha\phi \in L^2(I)\right\}.$$

   Montrer que $\mathcal{D}(A_\alpha) = H^2(I) \cap H_0^1(I)$.
3. Prouver que la restriction de A_α^{-1} à $L^2(I)$ est un opérateur compact dans $L^2(I)$.
4. En déduire qu'il existe une suite $(\lambda_n) \subset]0,\infty[$ et une suite $(\psi_n) \subset \mathcal{D}(A_\alpha)$ telles que
   (a) $\lambda_n \to \infty$;
   (b) $A_\alpha\psi_n = \lambda_n\psi_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) La famille (ψ_n) est orthonormée dans $L^2(I)$.
5. Calculer les fonctions ψ_n au cas où $I =]0,\pi[$ et $\alpha = 0$.

Chapitre 5

Transformation de Fourier et équations aux dérivées partielles

5.1 Problème de Dirichlet pour le Laplacien dans un demi-espace

Soit Ω on ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction donnée. Le problème de Dirichlet dans l'ouvert Ω consiste dans la détermination d'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

On va s'intéresser au cas particulier où Ω est un demi-espace, c.a.d. $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$.

Théorème 5.1.1. *On suppose que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ est une fonction bornée. Alors le problème* (1.1) *admet une solution unique avec $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et $\nabla u \in L^2(\Omega)$. Cette solution est donnée par la formule*

$$u(x', x_n) = \pi^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(y) \frac{x_n}{(x_n^2 + \|x' - y\|^2)^{\frac{n}{2}}} \, \mathrm{d}y, \tag{1.2}$$

où $\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x+1} \exp(-s) \mathrm{d}s$ est la fonction d'Euler et $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Preuve. *Première étape:un calcul formel:* L'équation $\Delta u = 0$ est équivalente à

$$\Delta_{x'} u(x', x_n) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x', x_n) = 0.$$

En appliquant la transformation de Fourier par rapport à x', on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \widehat{u}(\xi', x_n) - \|\xi'\|^2 \widehat{u}(\xi', x_n) = 0 \qquad \forall\, \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}, \qquad \forall\, x_n \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, la relation ci-dessus est une équation différentielle ordinaire dont la solution générale est

$$\widehat{u}(\xi',x_n) = C_1(\xi')e^{x_n\|\xi'\|} + C_2(\xi')e^{-x_n\|\xi'\|},$$

avec $C_1(\xi')$, $C_2(\xi') \in \mathbb{C}$. Comme on cherche u telle que $\nabla_{x'}u \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ et donc (par Plancherel) avec $\nabla_{\xi'}\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ on déduit que $C_1(\xi') = 0$. Par consequent on a

$$\widehat{u}(\xi',x_n) = C_2(\xi')e^{-x_n\|\xi'\|}. \tag{1.3}$$

Par ailleurs, en appliquant la transformée de Fourier par rapport à x' à la condition initiale $u(x',0) = f(x')$, on obtient que

$$\widehat{u}(\xi',0) = \widehat{f}(\xi'). \tag{1.4}$$

Les relations (1.3) et (1.4) impliquent que

$$\widehat{u}(\xi',x_n) = \widehat{f}(\xi')e^{-x_n\|\xi'\|}.$$

Par conséquent

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}_{x'}\left(e^{-x_n\|\xi'\|}\right) * f(x').$$

D'après un exercice vu en TD10

$$\mathcal{F}^{-1}_{x'}\left(e^{-x_n\|\xi'\|}\right) = \pi^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{x_n}{(x_n + \|x'\|^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Les deux dernières relations impliquent (1.2).

Deuxième étape: On démontre que la fonction définie par (1.2) est bien solution du problème de Dirichlet et qu'elle a la régularité requise. Tout d'abord on remarque que (1.2) implique la relation

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}_{x'}\left(e^{-x_n\|\xi'\|}\right) * f(x') \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

En appliquant $\mathcal{F}_{x'}$ aux deux membres de l'égalité ci-dessus on obtient que

$$\widehat{u}(\xi',x_n) = \widehat{f}(\xi')e^{-x_n\|\xi'\|} \qquad \forall\, \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \qquad \forall\, x_n > 0. \tag{1.5}$$

On vérifie facilement que la relation ci-dessus implique que

$$\lim_{x_n \to 0^+} \widehat{u}(\xi',x_n) = \widehat{f}(\xi') \;\text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Comme $\mathcal{F}_{x'}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^{n-1}$ on déduit que

$$\lim_{x_n \to 0^+} u(x',x_n) = f(x') \;\text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}),$$

donc u satisfait bien la condition au bord.

Par ailleurs (1.5) implique que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}[\widehat{u}(\xi',x_n)] + \|\xi'\|^2\widehat{u}(\xi',x_n) = 0 \qquad \forall\, \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \qquad \forall\, x_n > 0.$$

La relation ci-dessus et le fait que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}[\widehat{u}(\xi',x_n)] = \mathcal{F}_{x'}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x',x_n)\right],$$

impliquent que

$$\mathcal{F}_{x'}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x',x_n)\right] + \|\xi'\|^2\widehat{u}(\xi',x_n) = 0 \qquad \forall\, \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \qquad \forall\, x_n > 0.$$

En appliquant $\mathcal{F}_{x'}^{-1}$ à la relation ci-dessus on obtient que

$$\Delta u = 0 \;\text{ dans }\; \Omega,$$

donc u est bien une fonction harmonique dans Ω. ■

5.2 Equation de la chaleur

5.2.1 Solutions classiques

Définition 5.2.1. Soit I in intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathcal{S}$. On dit que u est continue de I dans $\mathcal{S}$ et on écrit $u \in C^0(I,\mathcal{S})$ si, pour tout $t \in I$ et pour toute suite $(t_n) \subset I$, $t_n \to t$, on a que $u(t_n) \to u(t)$ dans $\mathcal{S}$.

Proposition 5.2.2. *Soit $u \in C^0(I,\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x))$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *La limite $\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(t+h-u(t)}{h}\right)$ existe dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$ et elle est uniforme sur des bornés.*
2. *La dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial t}$ existe pour tout $(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$ et la fonction $t \to \frac{\partial u}{\partial t}$ est continue de I dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$.*

Définition 5.2.3. Pour $k \geq 1$ l'espace $C^k(I;\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x))$ est l'ensemble des fonctions $u \in C^{k-1}(I;\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x))$ telles que $\partial_t^{k-1}u \in C^1(I;\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x))$. L'espace $C^\infty(I;\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x))$ est définie par

$$C^\infty(I;\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(I;\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)).$$

On considère le problème de Cauchy suivant : Etant donnée $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, trouver $u : \mathbb{R}^n \times [0;\infty[$ telle que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \;\text{ dans } \mathbb{R}^n\times]0,\infty[, \tag{2.6}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.7}$$

Théorème 5.2.4. *Supposons que* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*. Alors il existe une unique fonction* $u \in C^\infty([0,\infty[;\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ *satisfaisant* (2.6) *et* (2.7)*. La solution* u *est donnée par*

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4t}\right) f(y)\,\mathrm{d}y \qquad \forall\, t > 0. \tag{2.8}$$

Preuve. "L'unicité". On note par $(\mathcal{F}_x u)(\xi,t)$ la transformée de Fourier "partielle de u, i.e.

$$(\mathcal{F}_x)u(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-ix\cdot\xi\right) u(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Si $u \in C^\infty([0,\infty[;\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ satisfont (2.6) et (2.7) alors

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(\mathcal{F}_x u)(\xi,t]\right) = -\|\xi\|^2 (\mathcal{F}_x u)(\xi,t), \quad (\mathcal{F}_x u)(\xi,0) = \widehat{f}(\xi),$$

d'où on déduit que

$$(\mathcal{F}_x u)(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)\exp\left(-t\|\xi\|^2\right) \qquad \forall\, t \geq 0,$$

donc

$$u(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}\left[\widehat{f}(\xi)\exp\left(-t\|\xi\|^2\right)\right]. \tag{2.9}$$

La formule (2.9) implique que

$$u(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}\left[\exp\left(-t\|\xi\|^2\right)\right] * f,$$

d'où, en utilisant l'Exemple 4.2.4, on déduit (2.8).

L'existence. On vérifie que u définie par (2.9) ou (2.8) satisfait les conditions. ■

5.2.2 Solutions généralisées

Pour $t \geq 0$ fixé, on note par $S_H(t) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ l'opérateur $f \to u(\cdot,t)$, où u est la solution de (2.6), (2.7). La famille d'opérateurs $(S_H(t))_{t\geq 0}$ satisfait les conditions

$$S_H(0) = I, \quad S_H(t+s) = S_H(t)S_H(s) \qquad \forall\, s,t \geq 0.$$

On dit que la famille $(S_H(t))$ forme un semigroupe d'opérateurs linéaires sur $\mathcal{S}$.

Proposition 5.2.5. *Soit* $s \in \mathbb{R}$*. Alors, pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, l'opérateur* $S_H(t)$ *peut être prolongé d'une manière unique à un élément de* $\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n))$*, noté toujours par* $S_H(t)$*. De plus, pour tout* $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$*, l'application* $t \to S_H(t)f$ *est continue sur* $]0,\infty[$.

Preuve. La relation (2.9) implique que

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s} = \left\|(1+\|\xi\|^2)^{\frac{s}{2}}\,\widehat{f}(\xi)\left[\exp\left(-t\|\xi\|^2\right)\right]\right\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^s} \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}.$$

Pour conclure il suffit d'utiliser la relation ci-dessus et la densité de $\mathcal{S}$ dans H^s. ■

Remarque 5.2.1. La formule

$$S_H(t)f = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4t}\right) f(y)\,\mathrm{d}y \qquad \forall\, t > 0,$$

reste valable pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

5.3 L'équation des ondes

5.3.1 Solutions classiques

Soit $c > 0$. In considère le problème de Cauchy suivant :
Etant données $f,g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, trouver $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty[$ telle que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0, \text{ dans } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[, \tag{3.10}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.11}$$

Théorème 5.3.1. *Supposons que $f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe une unique fonction $u \in C^\infty([0,\infty[;\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ satisfaisant* (2.6) *et* (2.7)*. La solution u est donnée par*

$$(\mathcal{F}_x u)(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)\cos(c\|\xi\|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(c\|\xi\|t)}{c\|\xi\|}. \tag{3.12}$$

Remarque 5.3.1. Si $n = 1$ alors

$$\mathcal{F}_x^{-1}\left[\widehat{f}(\xi)\cos(c|\xi|t)\right](x) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right)$$

$$\mathcal{F}_x^{-1}\left[\widehat{g}(\xi)\frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|}\right](x) = \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} g(x+s)\,\mathrm{d}s.$$

Bibliographie

[1] J.-M Bony, *Analyse*, Cours de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1988.

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1993

[3] C. Goulaouic et Y. Meyer, *Analyse fonctionnelle et calcul différentiel*, Cours de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1984.

[4] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 1988.

[5] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[6] L. Schwartz, *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, Paris, 1997.

[7] C. Zuily, *Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 2002.