Premier cours d'analyse mathématique

Sabin Lessard

Université de Montréal

24 avril 2013

Avant-propos

Ces notes sont utilisées pour un premier cours d'analyse (MAT1000) offert aux étudiants du premier cycle en mathématiques et statistique de l'Université de Montréal, ce qui comprend les étudiants en actuariat. Bien que le cours n'exige pas officiellement de préalables, il s'adresse à des étudiants qui ont déjà des connaissances en mathématiques. Celles-ci ont pu avoir été acquises par exemple par des cours de calcul différentiel et intégral, d'algèbre linéaire ou de mathématiques discrètes.

L'analyse mathématique a pour objet l'étude du continu. C'est la branche des mathématiques qui traite explicitement de la notion de limite, que ce soit la limite d'une suite ou la limite d'une fonction. Ce qui la distingue du calcul infinitésimal est l'explication rigoureuse des calculs. L'analyse mathématique demande un effort sérieux de la part des étudiants qui ne sont pas toujours familiers avec la notion de preuve. Or, toutes les affirmations dans un cours d'analyse mathématique sont habituellement démontrées. On ne se contente pas d'indiquer comment faire des calculs, on explique pourquoi on peut les faire ainsi. Un choc culturel pour plusieurs.

Le premier cours approfondit le calcul différentiel. Il commence par une présentation des nombres réels (chapitre 1), suivie par une étude des suites et des séries numériques autour de la notion de convergence (chapitres 2 et 3). Il se poursuit et se termine par l'étude des fonctions numériques autour des notions de continuité et de dérivation (chapitre 4 et 5). Les points culminants sont la propriété de Bolzano-Weierstass sur l'existence d'une sous-suite convergente, la règle de l'Hôpital sur la limite d'un quotient de fonctions de forme indéterminée, et la formule de Taylor pour approcher une fonction plusieurs fois dérivable.

Le contenu du cours est de nature essentiellement théorique. L'objectif est de revenir aux sources de la pensée mathématique et de fournir des bases solides pour les développements ultérieurs. Les applications sont l'objet de nombreux autres cours, notamment sur les probabilités ou les équations différentielles.

Les notes ont été fortement influencées à l'origine par le livre Introduction à l'analyse réelle, par Jacques Labelle et Armel Mercier, ainsi que par les notes de cours Analyse 1, de notre collègue André Giroux. Mentionnons également l'excellent et volumineux Calculus, de Michael Spivak, ainsi que

de nombreux articles en ligne dans Wikipedia, qui sont souvent des exemples de concision et de clarté. La bibliographie contient une liste complète des ouvrages qui ont été utilisés.

Enfin un grand merci aux générations d'étudiants et étudiantes ainsi qu'à mes collègues anciens ou actuels du département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal pour des commentaires judicieux et des discussions stimulantes sur la matière du cours.

Un merci spécial pour mon directeur de thèse de doctorat, Richard Duncan, dont j'ai toujours admiré l'enthousiasme pour l'enseignement, et une pensée pour mon superviseur de stage postdoctoral et mentor en génétique mathématique, Samuel Karlin, décédé en 2007, le mathématicien le plus énergique et inspirant que j'ai eu le privilège de connaître, et à qui je pense souvent avec affection.

Montréal, 18 *janvier* 2013 *Sabin Lessard*

Symboles et notations

$\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels
$\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Q}$ ensemble des nombres rationnels
∞ infini
$\forall$ pour tout (tous)
$\exists$ il existe
$\in$ appartient à (l'ensemble)
$\notin$ négation de $\in$
$\ni$ contient (l'élément)
$\subseteq$ inclus dans (l'ensemble)
$\nsubseteq$ négation de $\subseteq$
$\supseteq$ contient (l'ensemble)
$\nsupseteq$ négation de $\supseteq$
$\cup$ union (d'ensembles)
$\cap$ intersection (d'ensembles)
E^c complémentaire de l'ensemble E
$\overline{E}$ fermeture ou adhérence de l'ensemble E
$int(E)$ in térieur de l'ensemble E
$Fr(E)$ frontière de l'ensemble E
$=$ égal à (un nombre ou un ensemble)
$\neq$ inégal à (négation de $=$)
$<$ inférieur (strictement) à, plus petit (strictement) que
$\leq$ inférieur ou égal à, plus petit ou égal à
$>$ supérieur (strictement) à, plus grand (strictement) que
$\geq$ supérieur ou égal à, plus grand ou ègal à
$+$ plus (pour l'addition de deux nombres ou fonctions)
$-$ moins (pour la soustraction de deux nombres ou fonctions, ou la différence de deux ensembles)
$\cdot$ fois (pour la multiplication de deux nombres ou fonctions)
$/$ (oblique ou horizontal) sur (pour la division de deux nombres ou fonctions)
inf infimum (d'un ensemble)
sup supremum (d'un ensemble)
min minimum (d'un ensemble)

max maximum (d'un ensemble)
lim limite (d'une suite ou d'une fonction)
$\limsup$ ou $\overline{\lim}$ limite supérieure (d'une suite)
$\liminf$ ou $\underline{\lim}$ limite inférieure (d'une suite)
$\rightarrow$ tend vers (un nombre ou l'infini) ou à valeur dans (un ensemble)
$\sum$ somme (de nombres ou fonctions)
$n!$ factorielle de l'entier naturel n
$\lfloor a \rfloor$ partie entière du nombre a
$|a|$ valeur absolue du nombre a
a^{-1} élément inverse du nombre a
a^2 carré du nombre a
a^n puissance n-ième du nombre a
a^x puissance du nombre a d'exposant réel x
$\sqrt{a}$ racine carrée du nombre a
$\sqrt[n]{a}$ racine n-ième du nombre a
e constante d'euler
π constante pi
sin fonction sinus
cos fonction cosinus
ln fonction logarithme népérien
exp fonction exponentielle
$f(a)$ valeur de la fonction f au point a
$f(a^-)$ limite à gauche de la fonction f au point a
$f(a^+)$ limite à droite de la fonction f au point a
$f^{-1}(b)$ fonction réciproque de la fonction f au point b
$f'(a)$ dérivée de la fonction f au point a
$f'_g(a)$ dérivée à gauche de la fonction f au point a
$f'_d(a)$ dérivée à droite de la fonction f au point a
$f^{(n)}(a)$ dérivée n-ième de la fonction f au point a
$f \circ g(a)$ ou $f(g(a))$ composition de la fonctions g par la fonction f évaluée au point a

Table des matières

1 Droite numérique

1.1 Nombres réels

L'ensemble des ***nombres réels*** est représenté par $\mathbb{R}$. Cet ensemble est muni d'une ***opération d'addition*** qui associe un nombre réel x plus y à tous nombres réels x et y :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y \in \mathbb{R};$$

et d'une ***opération de multiplication*** qui associe un nombre réel x fois y à tous nombres réels x et y :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y \text{ (aussi noté } xy) \in \mathbb{R}.$$

Les cinq propriétés suivantes, où le signe $=$ signifie l'***égalité***, c'est-à-dire l'identité, font de $\mathbb{R}$ un ***corps commutatif*** :

P1 (commutativité) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x + y = y + x,$$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

P2 (associativité) Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x + y) + z = x + (y + z), \text{ noté } x + y + z,$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \text{ noté } x \cdot y \cdot z \text{ ou } xyz.$$

P3 (distributivité) Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

P4 (éléments neutres) Il existe des éléments $0 \in \mathbb{R}$ et $1 \in \mathbb{R}$ $(1 \neq 0)$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x + 0 = 0 + x = x,$$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

Les éléments 0 et 1 sont uniques.

P5 (éléments symétriques) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un ***élément opposé*** $-x \in \mathbb{R}$ et un ***élément inverse*** $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (en autant que $x \neq 0$ dans ce dernier cas, et alors $x^{-1} \neq 0$), tels que

$$x + (-x) = 0,$$

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

Les éléments opposé et inverse sont uniques. La commutativité entraîne immédiatement les relations

$$-(-x) = x = (x^{-1})^{-1}.$$

De plus, les éléments neutres sont leurs propres éléments symétriques, c'est-à-dire, $-0 = 0$ et $1^{-1} = 1$. Enfin, pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, l'***opération de soustraction*** est définie par

$$x - y = x + (-y),$$

et l'***opération de division*** par

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1},$$

en autant que $y \neq 0$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est également muni d'une ***relation d'ordre strict*** de telle sorte que $x < y$ pour deux nombres réels x et y distincts, c'est-à-dire inégaux ($x \neq y$), signifie que x est ***inférieur*** à y ou, ce qui est équivalent, que y est ***supérieur*** à x, ce qui est aussi noté $y > x$. On écrit $x \leq y$ pour signifier que x est ***inférieur ou égal*** à y, c'est-à-dire, $x < y$ ou $x = y$, et de même $x \geq y$ pour signifier que x est ***supérieur ou égal*** à y, c'est-à-dire, $x > y$ ou $x = y$. On dit que x est ***positif (strictement)*** lorsque $x \geq 0$ ($x > 0$), et ***négatif (strictement)*** lorsque $x \leq 0$ ($x < 0$). Les proriétés suivantes font de $\mathbb{R}$ un ensemble ***totalement ordonné***, la relation d'ordre strict étant compatible avec l'opération d'addition par un nombre réel quelconque et l'opération de multiplication par un nombre réel strictement positif :

P6 (trichotomie) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\text{soit } x < y, \text{ soit } x = y, \text{ soit } x > y,$$

ces trois possibilités étant mutuellement exclusives.

P7 (transitivité) Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\text{si } x < y \text{ et } y < z, \text{ alors } x < z.$$

P8 (compatibilité) Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

(a) si $x < y$, alors $x + z < y + z$, en particulier $x - y < y - y = 0$;

(b) si $x < y$ et $z > 0$, alors $x \cdot z < y \cdot z$.

Finalement, l'ensemble le corps commutatif totalement ordonné $\mathbb{R}$ possède la propriété suivante :

P9 (axiome de complétude) Si $E \subseteq \mathbb{R}$ non vide possède un ***majorant*** $M \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire,

$$\forall x \in E, x \leq M,$$

alors E possède une ***borne supérieure*** ou ***supremum***, $\sup E \in \mathbb{R}$, qui est le plus petit majorant de E, c'est-à-dire,

$$\forall x \in E, x \leq \sup E,$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \text{ majorant de } E, \sup E \leq M.$$

Sinon, $\sup E = +\infty$. Le supremum est unique. De façon analogue, si $E \subseteq \mathbb{R}$ non vide possède un ***minorant*** $m \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire,

$$\forall x \in E, x \geq m,$$

alors E possède une ***borne inférieure*** ou ***infimum***, $\inf E \in \mathbb{R}$, qui est le plus grand minorant de E, c'est-à-dire,

$$\forall x \in E, x \geq \inf E,$$

$$\forall m \in \mathbb{R} \text{ minorant de } E, \inf E \geq m.$$

Sinon, $\inf E = -\infty$. L'infimum est unique. Enfin, si $E \subseteq \mathbb{R}$ non vide possède un majorant et un minorant, donc une borne supérieure et une borne inférieure, alors E est dit ***borné***.

L'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés ci-dessus est une question qui relève de la théorie des ensembles. Les propriétés ci-dessous sont des conséquences de ces propriétés.

C1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$. En effet, $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, et donc $0 = 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-0 \cdot x) = 0 \cdot x + (0 \cdot x - 0 \cdot x) = 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x = x \cdot 0$.

C2 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$, en particulier $-y = -(1 \cdot y) = (-1) \cdot y$. En effet, $x \cdot y + (-x) \cdot y = (x - x) \cdot y = 0 \cdot y = 0 = x \cdot 0 = x \cdot (y - y) = x \cdot y + x \cdot (-y)$.

C3 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \cdot y = (-x) \cdot (-y)$. En effet, $(-x) \cdot (-y) = -x \cdot (-y) = -(-x \cdot y) = x \cdot y$.

C4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0)$, on a $(-x)^{-1} = -x^{-1}$, et en particulier $(-1)^{-1} = -1^{-1} = -1$. En effet, $(-x) \cdot (-x^{-1}) = (-x) \cdot (-1 \cdot x^{-1}) = (-x) \cdot ((-1) \cdot x^{-1}) = ((-x) \cdot (-1)) \cdot x^{-1} = (x \cdot 1) \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1$.

C5 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $-(x+y) = -x-y$. En effet, $(x+y)+(-x-y) = (y+x)+(-x-y) = y+(x+(-x-y)) = y+((x-x)-y) = y+(0-y) = y - y = 0$.

C6 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ $(x, y \neq 0)$, on a $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$. En effet, on a alors $(x \cdot y) \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1}) = (x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = ((x \cdot y) \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} = (x \cdot (y \cdot y^{-1})) \cdot x^{-1} = (x \cdot 1) \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1$.

C7 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0)$, on a $x > 0$ si et seulement si $-x < 0$. En effet, si $x > 0$, alors $0 = x + (-x) > 0 + (-x) = -x$, et si $x < 0$, alors $0 = x + (-x) < 0 + (-x) = -x$.

C8 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ $(x \neq y)$, on a $x > y$ si et seulement si $-x < -y$. En effet, on a alors $x - y > 0$ si et seulement si $-(x - y) = -x + y < 0$.

C8′ Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $x > 0$ et $y > 0$, alors $x + y > 0$ et $x \cdot y > 0$. En effet, on a alors $x + y > 0 + y = y > 0$ et $x \cdot y > 0 \cdot y = 0$.

C8″ Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $x < 0$ et $y < 0$, alors $x + y < 0$ et $x \cdot y > 0$. En effet, on a alors $x + y < 0 + y = y < 0$ et $x \cdot y = (-x) \cdot (-y) > 0$.

C9 Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x < y$ et $z < 0$, alors $x \cdot z > y \cdot z$. En effet, on a alors $-z > 0$ et donc $-(x \cdot z) = x \cdot (-z) < y \cdot (-z) = -(y \cdot z)$, ce qui est équivalent à la conclusion.

C10 On a $1 > 0$. Sinon, $1 < 0$, donc $-1 > 0$, et alors on a $1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) > 0 \cdot (-1) = 0$, ce qui est une contradiction.

C11 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($x \neq 0$), on a $x > 0$ si et seulement si $x^{-1} > 0$. En effet, si $x > 0$ et $x^{-1} < 0$, alors $1 = x \cdot x^{-1} < x \cdot 0 = 0$, ce qui est une contradiction. De même, si $x < 0$ et $x^{-1} > 0$, alors $1 = x \cdot x^{-1} < 0 \cdot x^{-1} = 0$, ce qui est une contradiction.

C12 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $y > x > 0$, alors $y^{-1} < x^{-1}$, en particulier $y^{-1} < 1^{-1} = 1$ si $y > 1$. En effet, si $y^{-1} = x^{-1}$, alors

$$y = (y^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} = x,$$

ce qui est une contradiction. D'autre part, si $y^{-1} > x^{-1}$, alors

$$1 = y \cdot y^{-1} > y \cdot x^{-1} > x \cdot x^{-1} = 1,$$

$parC12etlapropritdecompatibilit. Maisalorsona 1 > 1$par transitivité, ce qui est une autre contradiction.

C13 Pour tous $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, si $y > x > 0$ et $b > a > 0$, alors $y + b > x + a > 0$. En effet, on a alors $0 = 0 + 0 < x + 0 < x + a < y + a < y + b$.

C14 Pour tous $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, si $y > x > 0$ et $b > a > 0$, alors $y \cdot b > x \cdot a > 0$. En effet, on a alors $0 = 0 \cdot x = x \cdot 0 < x \cdot a < y \cdot a < y \cdot b$.

1.2 Valeur absolue

La ***valeur absolue*** de $x \in \mathbb{R}$ est définie par

$$|x| = \begin{cases} x > 0 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -x > 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On a donc $|x| \geq 0$, avec $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est ainsi ***valuée***. En utilisant la quantité $|x - y|$ comme ***distance*** entre deux nombres réels x et y, l'ensemble $\mathbb{R}$ est un ***espace métrique***. Les principales propriétés de la valeur absolue sont énoncées dans la proposition suivante.

Proposition : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

(a) $|-x| = |x|$;

(b) $-|x| \leq x \leq |x|$, et plus généralement $-m \leq x \leq m$ si $|x| \leq m \in \mathbb{R}$;

(c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

(d) $|x + y| \leq |x| + |y|$, appelé **inégalité du triangle**.

Démonstration :

(a) Si $x = 0$, alors $-x = 0$, et donc $|-x| = |x| = 0$. Si $x > 0$, alors $-x < 0$, et donc $|-x| = -(-x) = x = |x|$. Enfin, si $x < 0$, alors $-x > 0$, et donc $|-x| = -x = |x|$.

(b) Si $x = 0$, alors $-|x| = 0 = x = |x|$. Si $x > 0$, alors $-|x| < 0 < x = |x|$. Enfin, si $x < 0$, alors $-|x| = -(-x) = x < 0 < |x|$. La généralisation découle du fait que $-m \leq -|x|$, c'est-à-dire, $-m = -|x|$ ou $-m < -|x|$, si $|x| = m$ ou $|x| < m$, c'est-à-dire, $|x| \leq m$.

(c) Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $x \cdot y = 0$ et $|x| = 0$ ou $|y| = 0$, d'oú $|x \cdot y| = 0 = |x| \cdot |y|$. Si $x > 0, y > 0$, alors $x \cdot y > 0$, et donc $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$. Si $x < 0, y > 0$, alors $x \cdot y < 0 \cdot y = 0$, et donc $|x \cdot y| = -x \cdot y = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y|$. Le cas $x > 0, y < 0$ est symétrique au précédent. Enfin, si $x < 0, y < 0$, alors $xy = (-x) \cdot (-y) > 0$, et donc $|x \cdot y| = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.

(d) Si $y = 0$, alors

$$|x + y| = |x + 0| = |x| = |x| + 0 = |x| + |y|.$$

Le cas $x = 0$ est symétrique au précédent. Si $x > 0, y > 0$, alors $x + y > 0$, et donc

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|.$$

Si $x < 0, y < 0$, alors $-x > 0, -y > 0$, et donc selon le cas précédent et (a), on a

$$|x + y| = | - (x + y)| = | - x - y| = | - x| + | - y| = |x| + |y|.$$

Considérons maintenant le cas $x > 0, y < 0$. Si $y < -x < 0$, alors $x + y < x - x = 0$, et donc

$$|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) < 0 + (-y) < x + (-y) = |x| + |y|.$$

Si $y = -x < 0$, alors

$$|x + y| = |x - x| = |0| = 0 < 0 + x < x + x = |x| + |y|.$$

Enfin, si $-x < y < 0$, alors $-y > 0$ et $x + y > x - x = 0$, et donc

$$|x + y| = x + y < x + 0 < x + (-y) = |x| + |y|.$$

1.3 Entiers naturels et induction mathématique

L'ensemble des ***entiers naturels*** est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ représenté par

$$\mathbb{N} = \{1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, \ldots\} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Ce sous-ensemble est tel que :

(a) $1 \in \mathbb{N}$.

(b) $m + 1 \in \mathbb{N}$ si $m \in \mathbb{N}$.

(c) $\mathbb{N}$ est le plus petit sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés (a) et (b), de telle sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geq 1$ et il n'existe pas d'élément $m \in \mathbb{N}$ qui satisfait $n < m < n + 1$.

L'ensemble $\mathbb{N}$ est obtenu en prenant l'intersection de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui satisfont les propriétés (a) et (b), dont l'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même. La propriété (c) signifie que les propriétés (a) et (b) génèrent tous les entiers naturels. Autrement dit, on a le principe ci-dessous.

Principe d'induction mathématique : Si $E \subseteq \mathbb{N}$ est tel que : (i) $1 \in E$, et (ii) $m + 1 \in E$ dès que $m \in E$, alors $E = \mathbb{N}$.

Ce principe s'applique en particulier lorsque

$$E = \{n \in \mathbb{N} : \text{ une affirmation est vraie pour } n\}.$$

On obtient ainsi une façon de démontrer une affirmation parmi les plus utilisées en mathématiques, connue sous le nom de ***preuve par induction***. Les propriétés suivantes découlent des propriétés précédentes sur les nombres naturels et sur les nombres réels :

(d) Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on a $m + n \in \mathbb{N}$. En effet,

$$E = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}, m + n \in \mathbb{N}\}$$

contient 1 par définition de $\mathbb{N}$. De plus, si $n \in E$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1 \in \mathbb{N},$$

par l'hypothèse d'induction, d'où $n + 1 \in E$.

(e) Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on a $m \cdot n \in \mathbb{N}$. En effet,

$$E = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}, m \cdot n \in \mathbb{N}\}$$

contient 1 du fait que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m \cdot 1 = m$. De plus, si $n \in E$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m \in \mathbb{N},$$

par l'hypothèse d'induction et ce qui précède, d'où $n + 1 \in E$.

(f) Pour tout $m \in \mathbb{N}$ $(m > 1)$, on a $m - 1 \in \mathbb{N}$. En effet,

$$E = \{m - 1 \in \mathbb{N} : m \in \mathbb{N}, m > 1\}$$

contient $(1 + 1) - 1 = 1 + (1 - 1) = 1 + 0 = 1$. De plus, si $n \in E$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ $(m > 1)$, tel que

$$n + 1 = (m - 1) + 1 = (m + 1) - 1$$

avec $m + 1 \in \mathbb{N}$ satisfaisant $m + 1 > m > 1$, d'où $n + 1 \in E$.

(g) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\max\{x_1, \dots, x_n\} = \sup\{x_1, \dots, x_n\} \in \{x_1, \dots, x_n\},$$

$$\min\{x_1, \dots, x_n\} = \inf\{x_1, \dots, x_n\} \in \{x_1, \dots, x_n\}.$$

L'affirmation pour le ***maximum***, représenté par max, est évidemment vraie pour $n = 1$. De plus, si elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\max\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\} = \begin{cases} \max\{x_1, \dots, x_n\} & \text{si } x_{n+1} < \max\{x_1, \dots, x_n\}, \\ x_{n+1} & \text{si } x_{n+1} \geq \max\{x_1, \dots, x_n\}, \end{cases}$$

qui est alors un élément dans $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\} = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. L'affirmation est donc vraie pour $n + 1$. La conclusion pour le max découle du principe d'induction. La conclusion pour le ***minimum***, représenté par min, est obtenue de façon analogue.

(h) (propriété d'Archimède) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(x > 0)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > x, \text{c'est-à-dire, } \frac{1}{n} < \frac{1}{x}.$$

Donc, l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est non majoré (c'est-à-dire $\sup \mathbb{N} = +\infty$). Sinon, on a

$$s - 1 < s = \sup \mathbb{N} \leq x.$$

Il existe alors $m \in \mathbb{N}$ de telle sorte que

$$s - 1 < m \leq s,$$

et donc de telle sorte que

$$s = s - 1 + 1 < m + 1 \in \mathbb{N},$$

ce qui est une contradiction avec la définition du supremum.

(i) (partie entière d'un nombre réel) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique élément $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, où

$$\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{R} : n = 0, \text{ou } n \in \mathbb{N}, \text{ou } -n \in \mathbb{N}\}$$

représente l'ensemble des entiers relatifs, de telle sorte que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Si $x = 0$, on prend $\lfloor x \rfloor = 0$. Si $x \neq 0$, la propriété d'Archimède garantit l'existence d'un entier $m \in \mathbb{N}$ satisfaisant $m > |x| > 0$, et donc $-m \leq x \leq m$. Le nombre d'entiers k satisfaisant $-m \leq k \leq x$ est alors fini, en fait inférieur ou égal $2m + 1$. On prend

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : -m \leq k \leq x\},$$

qui satisfait toutes les conditions requises.

(j) (principe du bon ordre) Pour tout ensemble non vide $E \subseteq \mathbb{N}$, on a $\inf E \in E$. En effet, on note d'abord que $\inf E \in \mathbb{R}$, car E est minoré par 1. Mais alors $\inf E \in E$, car sinon pour tout $n \in E$, on a $\inf E < n$, c'est-à-dire, $\lfloor \inf E \rfloor \leq n - 1$. Dans ce cas,

$$\lfloor \inf E \rfloor \leq \inf E < \lfloor \inf E \rfloor + 1 \leq n,$$

ce qui est une contradiction avec la définition de l'infimum.

1.4 Nombres rationnels et nombres irrationnels

L'ensemble des ***nombres rationnels*** est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Ce sous-ensemble possède les propriétés suivantes :

(a) (opérations sur les nombres rationnels) Pour tous $r, s \in \mathbb{Q}$, on a $-r \in \mathbb{Q}, r^{-1} \in \mathbb{Q}$ si $r \neq 0$, $r + s \in \mathbb{Q}$ et $r \cdot s \in \mathbb{Q}$. En effet, si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $(b, d \neq 0)$, alors on a

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d},$$

$$\left(\frac{b}{d}\right)^{-1} = (b \cdot d^{-1})^{-1} = (d^{-1})^{-1} \cdot b^{-1} = d \cdot b^{-1} = \frac{d}{b}.$$

Il reste à montrer que $b \cdot d \neq 0$ si et seulement si $b, d \neq 0$, et que $a + b, a \cdot b \in \mathbb{Z}$ si $a, b \in \mathbb{Z}$. La vérification de ces affirmations est laissée en exercice.

(b) (nombres irrationnels) Il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels, appelés ***nombres irrationnels***, c'est-à-dire,

$$\mathbb{Q}^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\} \neq \emptyset.$$

Par exemple, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, où $\sqrt{2}$ est défini comme le nombre réel strictement positif satisfaisant $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$. Ici on suppose l'existence de ce nombre, ce qui est démontré au chapitre 4. Si ce nombre est rationnel, alors il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

On peut supposer que m, n n'appartiennent pas tous les deux à l'ensemble des nombres naturels pairs défini par

$$\mathbb{N}_{\text{pairs}} = \{2k : k \in \mathbb{N}\},$$

car un facteur 2 dans m et un facteur 2 dans n peuvent être remplacés par une multiplication par 1. Mais alors

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2, \text{ c'est-à-dire, } m^2 = 2n^2 \in \mathbb{N}_{\text{pairs}}.$$

Cela implique que m ne peut pas appartenir à l'ensemble des nombres naturels impairs défini par

$$\mathbb{N}_{\text{impairs}} = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

En effet, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on a

$$(2k + 1)^2 = (2k + 1) \cdot (2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1 \in \mathbb{N}_{\text{impairs}}.$$

Puisque m est pair, on a $m = 2k$ pour $k \in \mathbb{N}$, d'où

$$2n^2 = (2k)^2 = 4k^2, \text{ c'est-à-dire, } n^2 = 2k^2 \in \mathbb{N}_{\text{pairs}}.$$

Comme pour m, cela implique que n est pair, ce qui est une contradiction avec le choix de m et n.

(c) (densité des nombres rationnels) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $a < r < b$. En effet, la propriété d'Archimède garantit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ qui satisfait

$$n > \frac{1}{b-a}, \text{c'est-à-dire, } b - a > \frac{1}{n}.$$

Soit $m = \lfloor na \rfloor + 1$. On a les inégalités

$$m - 1 \leq na < m,$$

d'où

$$na < m \leq na + 1.$$

Le nombre $r = mn^{-1} \in \mathbb{Q}$ vérifie alors

$$a < r \leq a + \frac{1}{n} < b.$$

(d) (densité des nombres irrationnels) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, il existe $z \in \mathbb{Q}^c$ tel que $a < z < b$. En effet, on a alors $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$, et la densité des nombres rationnels garantit l'existence de $r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2},$$

c'est-à-dire,

$$a < r + \sqrt{2} < b.$$

Or, $z = r + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, car sinon

$$\sqrt{2} = z - r \in \mathbb{Q},$$

ce qui est une contradiction.

1.5 Applications

(a) (somme des premiers entiers naturels) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

L'affirmation est évidemment vraie pour $n = 1$. De plus, si elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Elle est donc vraie pour $n+1$. La conclusion suit par induction.

(b) (somme des premières puissances entières d'un nombre réel) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ $(a \neq 1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a^i = 1 + a + a^2 \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a},$$

où $a^0 = 1$ et $a^n = a \cdot a^{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'affirmation est vraie pour $n = 1$, puisque

$$1 + a = \frac{(1+a)(1-a)}{1-a} = \frac{1 + a - a - a^2}{1-a} = \frac{1 - a^2}{1-a}.$$

Supposons qu'elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Alors elle est vraie pour $n+1$, car

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + a^{n+1} &= \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} \\ &= \frac{(1 - a^{n+1}) + (1-a)a^{n+1}}{1-a} \\ &= \frac{1 - a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}}{1-a} \\ &= \frac{1 - a^{n+2}}{1-a}. \end{aligned}$$

La conclusion suit par induction.

(c) (binôme de Newton) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ ($ab \neq 0$), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} > 0,$$

pour $0 \leq k \leq n$, avec $0! = 1$ et $n! = n \cdot (n-1)!$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'identité est facilement vérifiée pour $n = 1$. En la supposant vérifiée pour $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi pour $n+1$, car

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

Ici, on utilise l'identité

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n-k+1) \cdot n! + k \cdot n!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1) \cdot n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k},
\end{aligned}$$

pour $1 \leq k \leq n$. Le principe d'induction permet de conclure.

(d) (puissances entières de 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geq n.$$

L'égalité est l'application du binôme de Newton pour $a = b = 1$. L'inégalité se démontre par induction. Elle est évidemment vraie pour $n = 1$. En fait,

$$2^n \geq \binom{n}{0} = 1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, si elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, alors elle l'est aussi pour $n + 1$, car

$$n + 1 \leq 2^n + 1 \leq 2^n + 2^n = (1 + 1) \cdot 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

(e) (inégalité de Bernoulli) Pour tout $b \in \mathbb{R}$ ($b > 0$), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(1 + b)^n \geq 1 + nb.$$

C'est une conséquence directe du binôme de Newton, puisque

$$(1 + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k \geq \binom{n}{0} b^0 + \binom{n}{1} b^1 = 1 + nb.$$

(f) (infimum et supremun d'un ensemble infini) L'infimum et le supremum d'un ensemble ne sont pas nécessairement atteints dans cet ensemble lorsque l'ensemble contient une infinité d'éléments. Soit, par exemple,

$$E = \left\{ \frac{an}{bn + c} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

pour des nombres réels $a, b, c > 0$. On a $\inf E \in E$, mais $\sup E \notin E$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{an}{bn + c} \geq \frac{an}{bn + cn} = \frac{a}{b + c},$$

avec égalité lorsque $n = 1$. On a donc $\inf E = a/(b+c) \in E$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{an}{bn+c} \leq \frac{an}{bn} = \frac{a}{b},$$

ce qui montre que $\sup E \leq a/b$. De plus,

$$\frac{an}{bn+c} > s,$$

pour tout $0 < s < a/b$, dès que

$$n > \frac{cs}{a-bs} > 0.$$

Un tel entier $n \in \mathbb{N}$ existe par la propriété d'Archimède. On a donc $\sup E \geq a/b$. On conclut que $\sup E = a/b$. Cependant, $a/b \notin E$. Sinon, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{an}{bn+c} = \frac{a}{b},$$

c'est-à-dire, $abn = abn + ac$. Cela implique que $ac = 0$, ce qui est une contradiction avec $a > 0$ et $b > 0$.

1.6 Intervalles

Les ***intervalles bornés*** de $\mathbb{R}$ qui ont $a \in \mathbb{R}$ comme infimum et $b \in \mathbb{R}$ comme supremum sont

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.
\end{aligned}$$

La vérification que a et b sont les bornes inférieure et supérieure de tous ces intervalles est laissée en exercice. Les ***intervalles semi-bornés*** de $\mathbb{R}$ qui ont $a \in \mathbb{R}$ comme infimum ou $b \in \mathbb{R}$ comme supremum sont

$$\begin{aligned}
(a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \\
[a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, \\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}, \\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}.
\end{aligned}$$

La ***droite numérique entière*** est un ***intervalle non borné*** qui a $-\infty$ comme infimum et $+\infty$ comme supremum. Elle est représentée par

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)\,.$$

On utilise la convention d'ordre $-\infty < x < +\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. La ***droite numérique achevée*** est définie par

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

On a les règles suivantes sur les opérations d'addition et de multiplication qui impliquent $-\infty$ ou $+\infty$ et $a \in \mathbb{R}$ $(a > 0)$:

$$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty \quad (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty \quad (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty \qquad a \pm \infty = \pm\infty \qquad -a \pm \infty = \pm\infty$$

$$0 \pm \infty = \pm\infty \qquad a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \qquad -a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty.$$

De plus, on a $(\pm\infty)^{-1} = 0$. En revanche, les multiplications $0 \cdot (\pm\infty)$ et les divisions $\pm\infty / \pm\infty$, comme $0/0$ par ailleurs, sont des ***opérations indéterminées***.

1.7 Ensembles ouverts et ensembles fermés

Un sous-ensemble $O \subseteq \mathbb{R}$ est un ***ensemble ouvert*** si

$$\forall x \in O, \exists \delta > 0, (x - \delta, x + \delta) \subseteq O.$$

Il est sous-entendu que δ est un nombre réel qui dépend généralement de x. Un sous-ensemble $F \subseteq \mathbb{R}$ est un ***ensemble fermé*** si son complémentaire par rapport à $\mathbb{R}$, défini par

$$F^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin F\}\,,$$

est un ensemble ouvert. Enfin, un ensemble fermé et borné est dit ***compact***.

Pour un sous-ensemble quelconque $E \subseteq \mathbb{R}$, l'***adhérence*** de E est définie par

$$\overline{E} = \{x \in \mathbb{R} : \forall \delta > 0, (x - \delta, x + \delta) \cap E \neq \emptyset\}\,,$$

et l'***intérieur*** de E par

$$int(E) = \{x \in E : \exists \delta > 0, (x - \delta, x + \delta) \subseteq E\}\,.$$

La ***frontière*** de E est alors donnée par

$$Fr(E) = \overline{E} - int(E) = \left\{x \in \overline{E} : x \notin int(E)\right\}.$$

Il est évident à partir des définitions ci-dessus que

$$int(E) \subseteq E \subseteq \overline{E}.$$

Si $E = int(E)$, alors E est ouvert. Un ensemble ouvert est donc un ensemble dont tous les éléments sont des points intérieurs. D'autre part, si $E = \overline{E}$, alors E est fermé. En effet, dans ce cas

$$E^c = \overline{E}^c = \{x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0, (x-\delta, x+\delta) \cap E = \emptyset\}$$

est ouvert, puisque $(x-\delta, x+\delta) \cap E = \emptyset$ si et seulement si $(x-\delta, x+\delta) \subseteq E^c$. Un ensemble fermé est donc un ensemble qui contient tous ses points d'adhérence.

Enfin, un point $x \in \mathbb{R}$ est appelé un ***point d'accumulation*** de E si pour tout $\delta > 0$, $(x-\delta, x+\delta) \cap E$ contient une infinité d'éléments. Un point d'accumulation de E est donc un point d'adhérence de E qui n'est pas isolé.

Proposition : Pour toute collection d'ensembles ouverts

$$\{O_i : \forall i \in \mathbb{N}, O_i \subseteq \mathbb{R} \text{ ouvert}\},$$

et toute collection d'ensembles fermés

$$\{F_i : \forall i \in \mathbb{N}, F_i \subseteq \mathbb{R} \text{ fermé}\},$$

on a les propriétés suivantes :

(a) $\cup_{i=1}^{\infty} O_i = \{x \in \mathbb{R} : \exists i \in \mathbb{N}, x \in O_i\}$ est ouvert ;

(b) $\cap_{i=1}^{n} O_i = \{x \in \mathbb{R} : \forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n, x \in O_i\}$ est ouvert ;

(c) $\cap_{i=1}^{\infty} F_i = \{x \in \mathbb{R} : \forall i \in \mathbb{N}, x \in F_i\}$ est fermé ;

(d) $\cup_{i=1}^{n} F_i = \{x \in \mathbb{R} : \exists i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n, x \in F_i\}$ est fermé.

Démonstration :

(a) Si $x \in \cup_{i=1}^{\infty} O_i$, alors il existe $i \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$ tels que

$$(x-\delta, x+\delta) \subseteq O_i \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} O_i.$$

(b) Si $x \in \cap_{i=1}^{n} O_i$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$, il existe $\delta_i > 0$ tel que

$$(x-\delta_i, x+\delta_i) \subseteq O_i.$$

En définissant $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$, on a

$$(x-\delta, x+\delta) \subseteq \cap_{i=1}^{n}(x-\delta_i, x+\delta_i) \subseteq \cap_{i=1}^{n} O_i.$$

(c) La conclusion découle de (a) et de l'identité

$$(\cap_{i=1}^{\infty} F_i)^c = \cup_{i=1}^{\infty} F_i^c.$$

(d) La conclusion découle de (b) et de l'identité

$$(\cup_{i=1}^{n} F_i)^c = \cap_{i=1}^{n} F_i^c.$$

Intervalles ouverts et intervalles fermées

L'intervalle (a, b), pour $-\infty < a < b < +\infty$, est ouvert. En effet, pour tout $x \in (a, b)$, $(x-\delta, x+\delta) \subseteq (a, b)$ pour $\delta = \min\{x-a, b-x\} > 0$. De même, on montre que $(a, +\infty), (-\infty, b)$ et $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ sont des intervalles ouverts. L'ensemble $\emptyset$ est considéré ouvert.

En revanche, l'intervalle $[a, b]$, pour $-\infty < a < b < +\infty$, est fermé. En effet,

$$[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$

est ouvert par la proposition qui précède. On montre de façon analogue que $[a, +\infty), (-\infty, b]$ et $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ sont des intervalles fermés. L'ensemble $\emptyset$ est considéré également fermé.

On a $\overline{(a, b)} = [a, b]$, pour $-\infty < a < b < +\infty$. En effet, on a évidemment $(a, b) \subseteq \overline{(a, b)}$. De plus, $a \in \overline{(a, b)}$, car pour tout $\delta > 0$, on a

$$(a-\delta, a+\delta) \cap (a, b) = (a, a+\delta) \neq \emptyset.$$

Par symétrie, $b \in \overline{(a,b)}$. En revanche, $x \notin \overline{(a,b)}$ si $x < a$, c'est-à-dire, $a - x > 0$, car alors

$$(x - (a - x), x + (a - x)) \cap (a, b) = \emptyset.$$

De même, $x \notin \overline{(a,b)}$ si $x > b$. On a donc $\overline{(a,b)} = [a,b]$. Or, les mêmes arguments restent valides si (a,b) est remplacé par $[a,b]$. Autrement dit, on a aussi $\overline{[a,b]} = [a,b]$. Ceci confirme que $[a,b]$ est fermé.

D'autre part, $int([a,b]) = (a,b)$, ce qui confirme que (a,b) est ouvert. On a évidemment $(a,b) \subseteq int([a,b])$. De plus, si $x \leq a$, alors pour tout $\delta > 0$

$$(x - \delta, x + \delta) \cap [a,b]^c \supseteq (x - \delta, x) \neq \emptyset.$$

Ceci signifie que $x \notin int([a,b])$. Il en est de même si $x \geq b$ par analogie.

Enfin,on a

$$Fr([a,b]) = Fr((a,b)) = [a,b] - (a,b) = \{a,b\},$$

pour $-\infty < a < b < +\infty$.

Ensembles ni ouverts ni fermées

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ peut n'être ni ouvert, ni fermé. C'est le cas notamment de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ qui n'est pas ouvert, puisque tout intervalle contient des nombres irrationnels, c'est-à-dire, des éléments de $\mathbb{Q}^c$. Il n'est également pas fermé, puisque tout intervalle contient aussi des éléments de $\mathbb{Q}$, ce qui fait en sorte que $\mathbb{Q}^c$ n'est pas ouvert.

2 Suites numériques

2.1 Limite d'une suite

La liste ordonnée $x_1, x_2, \ldots$, où $x_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est une ***suite numérique***. Elle est représentée par $\{x_n\}$. La suite est ***croissante*** si $x_n \leq x_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ***strictement croissante*** si $x_n < x_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. De façon analogue, la suite est ***décroissante*** si $x_n \geq x_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ***strictement décroissante*** si $x_n > x_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite est (strictement) ***monotone*** si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

La suite $\{x_n\}$ est ***majorée*** si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq M.$$

De même, elle est ***minorée*** si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq m.$$

Elle est dite ***bornée*** si

$$\exists B \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq B.$$

Si la suite est bornée par B, alors $-B \leq x_n \leq B$, et donc elle est minorée par $-B$ et majorée par B. Inversement, si la suite est minorée par m et majorée par M, alors

$$-\max\{|m|, |M|\} \leq -m \leq x_n \leq M \leq |M| \leq \max\{|m|, |M|\},$$

et donc la suite est bornée par $B = \max\{|m|, |M|\}$.

La suite $\{x_n\}$ ***tend*** vers une ***limite finie*** $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire, ***converge*** vers $x \in \mathbb{R}$, et on écrit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ou } x_n \to x,$$

dans le cas où

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, |x_n - x| < \epsilon \text{ dès que } n \geq N.$$

Il est sous-entendu que ϵ est un nombre réel et N un entier naturel qui dépend généralement de ϵ. Si la suite $\{x_n\}$ ne tend vers aucune limite $x \in \mathbb{R}$, alors elle ***diverge***.

La suite $\{x_n\}$ ***tend*** vers une ***limite infinie*** $+\infty$ $(-\infty)$, et on écrit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \ (-\infty) \text{ ou } x_n \to +\infty \ (-\infty),$$

dans le cas où

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, x_n > M \ (< -M) \text{ dès que } n \geq N.$$

Il est sous-entendu que M est un nombre réel et N un entier naturel qui dépend généralement de M.

Par la propriété d'Archimède, la condition dès que $n \geq N$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$ peut être remplacée dans tous les cas par la condition dès que $n > s$ pour un certain $s \in \mathbb{R}$.

Propriétés de la limite

(a) (limite et borne) Une suite $\{x_n\}$ qui converge vers $x \in \mathbb{R}$ est bornée. En effet, pour $\epsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$x - 1 < x_n < x + 1 \text{ dès que } n \geq N.$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m = \min\{x_1, \ldots, x_N, x - 1\} \leq x_n \leq \max\{x_1, \ldots, x_N, x + 1\} = M.$$

En revanche, une suite $\{x_n\}$ qui tend vers la limite $+\infty$ ou $-\infty$ est évidemment non bornée, car elle est ou bien non majorée ou bien non minorée.

(b) (unicité de la limite) La limite d'une suite est unique. En effet, si par exemple $x_n \to x \in \mathbb{R}$ et $x_n \to y \in \mathbb{R}$ $(x \neq y)$, alors en choisissant $\epsilon = |y - x|/2 > 0$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|x_n - x| < \frac{|y - x|}{2} \text{ dès que } n \geq N_1,$$

$$|x_n - y| < \frac{|y - x|}{2} \text{ dès que } n \geq N_2.$$

Par conséquent, dès que $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, l'inégalité du triangle implique que

$$|x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < |x - y|,$$

ce qui est une contradiction. Il est également facile d'obtenir une contradiction si x ou $y = +\infty$ ou $-\infty$.

(c) (limite et monotonicité) Une suite monotone possède nécessairement une limite et cette limite est réelle si la suite est bornée. Si par exemple $\{x_n\}$ est croissante, alors

$$x_n \to x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

En effet, si la suite est majorée, donc bornée, alors le supremum $x \in \mathbb{R}$ et, pour tout $\epsilon > 0$, $x - \epsilon$ ne peut pas être un majorant. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$x - \epsilon < x_N \leq x < x + \epsilon.$$

En utilisant la croissance de la suite, on a alors

$$x - \epsilon < x_N \leq x_n \leq x < x + \epsilon \text{ dès que } n \geq N.$$

En revanche, si la suite n'est pas majorée, alors $x = +\infty$ et, pour tout $M > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$M < x_N \leq x_n \text{ dès que } n \geq N.$$

De même, si $\{x_n\}$ est décroissante, alors

$$x_n \to x = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\},$$

et l'infimum x est réel si et seulement si la suite est minorée, donc bornée.

Exemples

(1) (entiers naturels et leurs inverses) La suite $\{n\}$ est strictement croissante et non majorée en vertu de la propriété d'Archimède, donc on a

$n \to +\infty$. La suite $\{1/n\}$ est strictement décroissante et minorée par 0, donc convergente vers un nombre réel. En fait, $1/n \to 0$, car

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon,$$

dès que $n > 1/\epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$ fixé. La suite $\{(-1)^n/n\}$ n'est ni croissante ni décroissante, car les nombres négatifs et positifs alternent. Cependant, on a $(-1)^n/n \to 0$, car

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \to 0.$$

(2) (puissances entières d'un nombre réel) On considère la suite $\{a^n\}$ pour $a \in \mathbb{R}$. La suite est strictement croissante, et $a^n \to +\infty$, si $a > 1$. En effet, l'inégalité de Bernoulli donne alors

$$a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1) > M,$$

dès que

$$n > \frac{M-1}{a-1},$$

pour tout $M > 0$. La suite est donc non majorée. La suite est en revanche strictement décroissante et minorée par 0 si $0 < a < 1$, c'est-à-dire si $b = a^{-1} - 1 > 0$. En fait, $a^n \to 0$ dans ce cas. En effet, l'inégalité de Bernoulli garantit alors que

$$0 < a^n = \frac{1}{(a^{-1})^n} = \frac{1}{(1+b)^n} \leq \frac{1}{1+nb} < \epsilon,$$

dès que

$$n > \frac{1-\epsilon}{b\epsilon},$$

pour tout $\epsilon > 0$. On obtient aussi $a^n \to 0$ si $-1 < a < 0$. En effet, on a alors $0 < |a| < 1$, et donc par ce qui précède

$$|a^n - 0| = |a^n| = |a|^n \to 0.$$

À remarquer que dans ce cas la suite $\{a^n\}$ n'est ni croissante ni décroissante, puisque les nombres négatifs et positifs alternent. C'est aussi le cas si $a = -1$, mais alors $\lim_{n\to\infty} a^n$ n'existe pas. En effet,

$$(-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ +1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La suite $\{(-1)^n\}$ étant bornée par 1, elle ne peut pas tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$. Supposons qu'elle converge vers un nombre réel A, c'est-à-dire que $(-1)^n \to A \in \mathbb{R}$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|(-1)^n - A| < 1 \text{ dès que } n \geq N.$$

Mais, on a

$$|(-1)^n - A| = \begin{cases} |1+A| & \text{si } n \text{ est impair,} \\ |1-A| & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Or, l'inégalité du triangle garantit que

$$|1+A| + |1-A| \geq |1+A+1-A| = 2,$$

c'est-à-dire que

$$|1+A| \geq 1 \text{ ou } |1-A| \geq 1,$$

ce qui est une contradiction. Les cas $a = 0$ et $a = 1$ sont trivaux et donnent $0^n \to 0$ et $1^n \to 1$. Il reste donc à considérer le cas $a < -1$. Sous cette condition, la suite $\{a^n\}$ n'est pas bornée, puisque $|a| > 1$ et

$$|a^n| = |a|^n \to +\infty.$$

Elle ne peut donc pas converger vers un nombre réel. D'autre part, elle ne peut pas tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$, puisque les nombres négatifs et positifs alternent. Finalement, on conclut que la suite $\{a^n\}$ converge vers un nombre réel si et seulement si $-1 < a \leq 1$.

(3) (racines entières d'un nombre réel strictement positif) La suite $\{\sqrt[n]{a}\}$, où $\sqrt[n]{a}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est défini comme le nombre réel strictement positif tel que

$$(\sqrt[n]{a})^n = a > 0,$$

est convergente. En fait, on a $\sqrt[n]{a} \to 1$, quel que soit $a \in \mathbb{R}$ $(a > 0)$. La question de l'existence de $\sqrt[n]{a}$ est reportée au chapitre 4. Le fait que $\sqrt[n]{a} > 1$ si et seulement si $a > 1$ est laissé en exercice. Dans le cas $a = 1$, la convergence vers 1 est évidente, puisque $\sqrt[n]{1} = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas $a > 1$, pour tout $\epsilon > 0$ fixé, on a

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon \text{ si } \sqrt[n]{a} < 1 + \epsilon.$$

Par l'inégalité de Bernoulli, cette condition est vérifiée si

$$a < 1 + n\epsilon \leq (1+\epsilon)^n,$$

et donc si $n > (a-1)/\epsilon$. Dans le cas $0 < a < 1$, on a

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = 1 - \sqrt[n]{a} < \epsilon \text{ si } 1 - \epsilon < \sqrt[n]{a}.$$

Puisque

$$1 - \epsilon = \frac{1-\epsilon^2}{1+\epsilon} < \frac{1}{1+\epsilon},$$

il suffit en fait que

$$(1+\epsilon)^{-1} < \sqrt[n]{a}, \text{ c'est-à-dire que } (1+\epsilon)^n > a^{-1}.$$

Par ce qui précède, cette condition est vérifiée si $n > (a^{-1} - 1)/\epsilon$.

(4) (racines entières des entiers naturels) On a $\sqrt[n]{n} \to 1$. En effet, pour tout $\epsilon > 0$ fixé, on a

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1 < \epsilon \text{ si } \sqrt[n]{n} < 1 + \epsilon, \text{ c'est-à-dire si } n < (1+\epsilon)^n.$$

Or, le binôme de Newton nous donne

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \epsilon^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \epsilon^k.$$

La condition est donc vérifiée si

$$n < 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \epsilon^2,$$

ce qui est le cas dès que $n > \max\{1, 2/\epsilon^2\}$, pour tout $\epsilon > 0$ fixé.

(5) (constante d'Euler) La constante d'Euler est le nombre réel défini par

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Cette limite réelle existe, car la suite est croissante et majorée. En effet, le binôme de Newton donne

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{n}{n}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdots \left(\frac{n-k+1}{n}\right),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les inégalités $k! \geq 2^{k-1}$ et

$$\left(\frac{n}{n}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdots \left(\frac{n-k+1}{n}\right) = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq 1,$$

pour $2 \leq k \leq n$, dont la vérification est laissée en exercice, mènent alors à

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\
&= 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&\leq 1 + \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 3.
\end{aligned}$$

D'autre part, l'inégalité

$$1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right),$$

pour $2 \leq k \leq n$, conduit à

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{n+1}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdots \left(\frac{n-k+2}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

2.2 Opérations sur les limites

Soient $x_n \to x$ et $y_n \to y$. Alors on a :

(a) $x_n + y_n \to x + y$;

(b) $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$, en particulier $a \cdot y_n \to a \cdot y$, pour tout $a \in \mathbb{R}$;

(c) $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$, en particulier $y_n^{-1} \to y^{-1}$, en autant que $y \neq 0$;

(d) $x \leq y$ si $x_n \leq y_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(e) $z_n \to x$ si $x_n \leq z_n \leq y_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $x_n, y_n \to x$, appelé **théorème des gendarmes**.

Ces résultats sont valides non seulement pour $x, y \in \mathbb{R}$ comme cela est démontré ci-dessous, mais aussi pour x ou $y = +\infty$ ou $-\infty$ en autant que les opérations sur x et y sont déterminées, ce qui est laissé en exercice.

Démonstration pour le cas $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \text{ dès que } n \geq N_1,$$

$$|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} \text{ dès que } n \geq N_2.$$

Dès que $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, l'inégalité du triangle garantit que

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(b) On a

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &= |x_n(y_n - y) + (x_n - x)y| \\ &\leq |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|, \end{aligned}$$

par l'inégalité du triangle. Soit $B > |y| \geq 0$ tel que $|x_n| \leq B$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2B} \text{ dès que } n \geq N_1,$$

$$|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2B} \text{ dès que } n \geq N_2.$$

Dès que $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, on a donc

$$|x_n y_n - xy| \leq B\frac{\epsilon}{2B} + B\frac{\epsilon}{2B} = \epsilon.$$

(c) Étant donné (b), il suffit de montrer que $y_n^{-1} \to y^{-1}$. Or, on a

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - y_n}{y_n y}\right| = \frac{|y - y_n|}{|y_n| \cdot |y|}.$$

Par l'inégalité du triangle et le fait que $y_n \to y \in \mathbb{R}$ ($y \neq 0$), on obtient que

$$\begin{aligned} |y_n| &\geq |y_n + y - y_n| - |y - y_n| \\ &> |y| - \frac{|y|}{2} = \frac{|y|}{2} > 0, \end{aligned}$$

dès que $n \geq N_1$, pour un certain $N_1 \in \mathbb{N}$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe par la suite un entier naturel $N_2 \geq N_1$ tel que

$$|y - y_n| < \frac{\epsilon y^2}{2} \text{ dès que } n \geq N_2.$$

On a alors $y_n \neq 0$ et

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| \leq \frac{\epsilon \cdot \frac{y^2}{2}}{\frac{|y|}{2} \cdot |y|} = \epsilon.$$

(d) Sinon ($x > y$), il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|x_n - x| < \frac{x - y}{2} \text{ dès que } n \geq N_1,$$

$$|y_n - y| < \frac{x - y}{2} \text{ dès que } n \geq N_2.$$

Dès que $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, on a alors

$$x_n - y_n = x_n - x + x - y + y - y_n > -\frac{x - y}{2} + x - y - \frac{x - y}{2} = 0.$$

Ceci entre en contradiction avec l'hypothèse $x_n \leq y_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(e) Soit $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|x_n - x| < \epsilon \text{ dès que } n \geq N_1,$$

$$|y_n - y| < \epsilon \text{ dès que } n \geq N_2,$$

pour $\epsilon > 0$ fixé. Dès que $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, on a alors

$$x - \epsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < x + \epsilon,$$

ce qui assure que $|z_n - x| < \epsilon$.

Exemples

(1) (puissance rationnelle strictement positive des entiers naturels) On a $n^r \to +\infty$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$ ($r > 0$), où on définit

$$n^r = (\sqrt[q]{n})^p,$$

si $r = p/q$, pour $p, q \in \mathbb{N}$. Le cas $r = 1$ correspond à $n \to +\infty$. Dans le cas $r > 1$, c'est-à-dire, $p > q$, on a

$$n^r = (\sqrt[q]{n})^p \geq (\sqrt[q]{n})^q = n \to +\infty,$$

et le résultat ci-dessus (d) permet de conclure. Ici, on utilise le fait que $\sqrt[q]{n} \geq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, car sinon

$$n = (\sqrt[q]{n})^q < 1^n = 1,$$

ce qui est une contradiction. De plus, $a^p \geq a^q$, pour tout réel $a \geq 1$, pour tous entiers naturels p, q qui satisfont $p > q$, ce qui est laissé en exercice. Dans le cas $0 < r < 1$, c'est-à-dire, $p < q$, on remarque d'abord que $\sqrt[q]{n} \leq \sqrt[q]{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, car sinon

$$n = (\sqrt[q]{n})^q > (\sqrt[q]{n+1})^q = n + 1,$$

ce qui est une contradiction. Cette croissance garantit que $\sqrt[q]{n} \to a$, pour un certain $a \in [1, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Mais alors

$$n = (\sqrt[q]{n})^q \to a^q,$$

en répétant q fois le résultat (b) ci-dessus, ce qui implique que $a^q = +\infty$, et donc que $a = +\infty$. Finalement, on conclut que

$$n^r = (\sqrt[q]{n})^p \to a^p = +\infty,$$

en répétant p fois le résultat (b) ci-dessus.

(2) (puissance rationnelle strictement négative des entiers naturels) On a $n^{-r} \to 0$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$ $(r > 0)$, où on définit

$$n^{-r} = (n^r)^{-1}.$$

En effet, on a alors par ce qui précède

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^r} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} n^r} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

On peut également procéder comme précédemment pour montrer que $n^{-1/q}$ décroit vers une limite $a \geq 0$, pour tout $q \in \mathbb{N}$ fixé, et qu'alors

$$n^{-1} = (n^{-1/q})^q \to a^q = 0,$$

d'où $a = 0$. Mais alors

$$n^{-p/q} = (n^{-1/q})^p \to a^p = 0,$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. Il suffit de faire $r = p/q$.

(3) (quotient de deux polynômes des entiers naturels) Soient

$$P(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i \ (a_k \neq 0),$$

$$Q(n) = \sum_{j=0}^{l} b_j n^j \ (b_l \neq 0),$$

deux polynômes de degré k et $l \in \mathbb{N}$, respectivement, par rapport à $n \in \mathbb{N}$, de coefficients a_i et $b_j \in \mathbb{R}$, respectivement, pour $0 \leq i \leq k$ et $0 \leq j \leq l$. Alors, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=0}^{k} a_i n^{-(k-i)}}{\sum_{j=0}^{l} b_j n^{-(l-j)}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{n^l} = \frac{a_k}{b_l} \cdot \lim_{n\to+\infty} n^{k-l}.$$

La limite est alors donnée par

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_l} & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{si } k < l, \\ +\infty & \text{si } k > l, a_k/b_l > 0, \\ -\infty & \text{si } k > l, a_k/b_l < 0. \end{cases}$$

(4) (racines carrées itérées d'un nombre réel strictement positif) On définit $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $a_0 > 0$. On montre que $a_n \to 1$. Notons d'abord que, si $1 \leq a_0$, alors $1 \leq a_1 \leq a_0$, car

$$1 \leq a_1^2 = a_0 \leq a_0^2.$$

De plus, en supposant $1 \leq a_n \leq a_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient que

$$1 \leq a_{n+1}^2 = a_n \leq a_n^2,$$

d'où $1 \leq a_{n+1} \leq a_n$. Par induction, la suite $\{a_n\}$ est alors décroissante et minorée par 1. Par symétrie, la suite est croissante et majorée par 1 si $a_0 \leq 1$. Dans les deux cas, la suite possède une limite finie strictement positive. Supposons que $a_n \to x \in \mathbb{R}$, où $x > 0$. On a alors

$$a_n = \sqrt{a_n} \cdot \sqrt{a_n} = a_{n+1} \cdot a_{n+1} \to x^2 = x.$$

L'équation $x^2 = x$ a une seule solution $x \neq 0$ qui est obtenue en multipliant les deux côtés de l'équation par l'inverse de x, ce qui donne $x = 1$.

2.3 Limite inférieure et limite supérieure

Étant donné une suite $\{x_n\}$, on considère

$$\underline{x}_n = \inf_{k \geq n} x_k = \inf \{x_k : k \geq n\},$$

$$\overline{x}_n = \sup_{k \geq n} x_k = \sup \{x_k : k \geq n\},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $\{\underline{x}_n\}$ est croissante, alors que la suite $\{\overline{x}_n\}$ est décroissante. On définit la ***limite inférieure*** comme

$$\liminf_{n \to +\infty} x_n = \underline{\lim}_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \underline{x}_n \in [-\infty, +\infty],$$

et la ***limite supérieure*** comme

$$\limsup_{n \to +\infty} x_n = \overline{\lim}_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \overline{x}_n \in [-\infty, +\infty].$$

On a le résultat fondamental qui suit.

Proposition : Une condition nécessaire et suffisante pour que $x_n \to x \in [-\infty, +\infty]$ est que

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = x \in [-\infty, +\infty].$$

Démonstration : La suffisance découle du théorème des gendarmes, car

$$\underline{x}_n \leq x_n \leq \overline{x}_n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour la nécessité, si $x_n \to x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$x - \epsilon < x_n < x + \epsilon, \text{ dès que } n \geq N.$$

Sous la même condition, on a donc

$$x - \epsilon \leq \underline{x}_n \leq \overline{x}_n \leq x + \epsilon,$$

d'où

$$x - \epsilon \leq \lim_{n\to+\infty} \underline{x}_n \leq \lim_{n\to+\infty} \overline{x}_n \leq x + \epsilon.$$

Le nombre réel $\epsilon > 0$ pouvant être choisi arbitrairement petit, la conclusion s'ensuit. Si $x_n \to +\infty$, alors pour tout $M > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$x_n > M, \text{ dès que } n \geq N.$$

Dans ce cas, on a

$$\overline{x}_n \geq \underline{x}_n \geq M,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{x}_n \geq \lim_{n\to+\infty} \underline{x}_n \geq M.$$

Le nombre réel $M > 0$ pouvant être choisi arbitrairement grand, la conclusion s'ensuit. L'analyse du cas où $x_n \to -\infty$ est analogue.

2.4 Propriété de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée $x_1, x_2, x_3, \ldots$, représentée par $\{x_n\}$, contient une ***sous-suite*** (ou ***suite extraite***)

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, \text{ où } 1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \ldots,$$

représentée par $\{x_{n_k}\}$, qui converge vers un nombre réel.

Puisque toute suite monotone bornée converge vers un nombre réel, il suffit de montrer ce qui suit.

Lemme : Toute suite $\{x_n\}$ contient une sous-suite monotone qui tend vers $\limsup_{n\to+\infty} x_n$ et une suite monotone qui tend vers $\liminf_{n\to+\infty} x_n$.

Démonstration : On définit

$$E = \{n \in \mathbb{N} : x_n > x_m, \text{ pour tout entier } m > n\},$$

qui représente l'ensemble des pics successifs de la suite $\{x_n\}$. Dans le cas où E est non vide et non majoré, on utilise le principe du bon ordre et le principe d'induction pour définir

$$n_1 = \inf\{n \in E\} \in E,$$

donc $n_1 \geq 1$, puis, étant donné

$$n_i = \inf\{n \in E : n > n_{i-1}\} \in E,$$

pour $i \in \mathbb{N}$ avec $n_0 = 0$,

$$n_{i+1} = \inf\{n \in E : n > n_i\} \in E,$$

donc $n_{i+1} > n_i$. Par construction, la sous-suite $\{x_{n_i}\}$ est décroissante et

$$x_{n_i} = \sup_{k \geq n_i} x_k \to \limsup_{n\to+\infty} x_n.$$

Dans le cas où E est vide ou majoré, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_1\} \subseteq E^c,$$

où

$$E^c = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_m, \text{ pour un certain entier } m > n\}.$$

Alors, pour tout $n \geq n_1$,

$$\sup_{k \geq n} x_k = \max\{x_n, \sup_{k \geq n+1} x_k\} = \sup_{k \geq n+1} x_k.$$

Ici, on définit $\max\{x_n, +\infty\} = +\infty$. On a donc

$$\sup_{k \geq n} x_k = \sup_{k \geq n_1} x_k,$$

pour tout $n \geq n_1$, d'où

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \sup_{k\geq n_1} x_k.$$

Si $\sup_{k\geq n_1} x_k = +\infty$, alors il existe $n_2 > n_1$ tel que

$$x_{n_2} > \max\{x_{n_1}, 1\},$$

puis, étant donné $n_k \geq n_1$ pour $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_{k+1} > n_k$ tel que

$$x_{n_{k+1}} > \max\{x_{n_k}, k\}.$$

La sous-suite $\{x_{n_k}\}$ est alors croissante, et possède donc une limite. De plus, on a $x_{n_k} \geq k \to +\infty$, d'où $x_{n_k} \to +\infty$. Si $\sup_{k\geq n_1} x_k = M \in \mathbb{R}$, alors il existe $n_2 > n_1$ tel que

$$M \geq x_{n_2} \geq x_{n_1} + \frac{M - x_{n_1}}{2} = \frac{M + x_{n_1}}{2} \geq x_{n_1}.$$

Puis, étant donné $n_k \geq n_1$ pour $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_{k+1} > n_k$ tel que

$$M \geq x_{n_{k+1}} \geq x_{n_k} + \frac{M - x_{n_k}}{2} = \frac{M + x_{n_k}}{2} \geq x_{n_k}.$$

La sous-suite $\{x_{n_k}\}$ étant croissante et majorée, $x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$. Le théorème des gendarmes nous assure alors que

$$\frac{M + x}{2} = x, \text{ c'est-à-dire, } M = x.$$

Ceci complète la démonstration de l'existence d'une sous-suite monotone qui tend vers la limite supérieure de la suite. La démonstration de l'existence d'une sous-suite monotone qui tend vers la limite inférieure de la suite est analogue.

Corollaire : Une suite possède une limite finie ou infinie L si et seulement si L est la seule limite possible pour toute sous-suite.

Démonstration : La nécessité est évidente, car toute sous-suite possède la même limite que la suite si cette limite existe. La suffisance découle du lemme précédent, car alors les limites inférieure et supérieure de la suite sont égales.

2.5 Propriété de Cauchy

Une suite numérique $\{x_n\}$ converge vers un nombre réel si et seulement si elle possède la ***propriété de Cauchy***, c'est-à-dire,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, |x_n - x_m| < \epsilon \text{ dès que } n, m \geq N.$$

Démonstration : Si $x_n \to x \in \mathbb{N}$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \text{ dès que } n \geq N.$$

L'inégalité du triangle donne alors

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

dès que $n, m \geq N$. Inversement, si $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy, alors elle est bornée. En effet, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_n - x_N| < 1 \text{ dès que } n \geq N.$$

On obtient alors que

$$\min\{x_1, \ldots, x_{N-1}, 1 - x_N\} \leq x_n \leq \max\{x_1, \ldots, x_{N-1}, 1 + x_N\},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par la propriété de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ telle que $x_{n_k} \to x \in \mathbb{N}$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2} \text{ dès que } n_k \geq N_1,$$

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2} \text{ dès que } n, n_k \geq N_2.$$

Dès que $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, on prend $n_k \geq \max\{N_1, N_2\}$ et on utilise l'inégalité du triangle pour obtenir que

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

3 Séries numériques

3.1 Séries convergentes

La ***série numérique*** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$ associée à une suite numérique $\{a_k\}$ ***converge*** si la suite des sommes partielles des premiers termes tend vers une limite finie, donc converge, lorsque le nombre de termes tend vers $+\infty$, c'est-à-dire,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n \to S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}.$$

Sinon, la série ***diverge***. La quantité a_k est appelée le ***terme général*** de la série.

La convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ entraîne que

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.$$

L'inverse n'est pas nécessairement vrai.

À remarquer que la convergence de la série $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ pour un entier $N \geq 1$ entraîne la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k.$$

En effet, pour tout entier $n \geq N$, on a alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} a_k \to \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k.$$

Inversement, la convergence de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ entraîne la convergence de $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ pour tout entier $N \geq 1$, car alors

$$\sum_{k=N}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{N-1} a_k \to \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{N-1} a_k.$$

D'autre part, si les séries $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergent, alors les séries $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ et $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$, pour tout $c \in \mathbb{R}$, convergent. De plus, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

En effet, les opérations sur les limites garantissent que

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \to \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k \to c\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Exemples

(1) (série géométrique) La série géométrique de raison r définie par $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge si $|r|<1$ et diverge sinon. En effet, dans le cas $r \neq 1$, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \to \frac{1}{1-r} \in \mathbb{R}$$

si et seulement si $|r|<1$. Dans le cas $r=1$, on a $S_n = n+1 \to +\infty$.

(2) (série harmonique) La série des inverses des entiers naturels, c'est-à-dire $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, diverge. En effet,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, satisfait

$$|S_{2n}-S_n| = S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

La suite $\{S_n\}$ n'étant pas une suite de Cauchy, elle ne converge pas. En fait, la suite étant croissante, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

3.2 Critères de convergence pour les séries positives

La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est une ***série positive*** si les termes de la suite associée sont tous positifs, c'est-à-dire, $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \geq 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, est croissante, car elle satisfait $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$. Par conséquent, la limite

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

existe toujours. La série converge si $S < +\infty$ et diverge si $S = +\infty$. Des conditions pour la convergence de séries positives sont présentées ci-dessous. La première condition est la plus importante, car toutes les autres en découlent.

(a) (critère de comparaison) Si $0 \leq a_n \leq b_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si la série majorante $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge ou, ce qui est équivalent, la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge si la série minorante $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Ces inégalités sont préservées pour les limites lorsque $n \to +\infty$, ce qui donne le résultat annoncé.

(b) (critère du quotient) Si $a_n, b_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

$$\frac{a_n}{b_n} \to c > 0,$$

alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Démonstration : Puisque $a_n/b_n \to c$ et $c > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{a_n}{b_n} - c \leq c, \text{ c'est-à-dire, } a_n \leq 2cb_n, \text{ dès que } n \geq N.$$

Par le critère de comparaison, on a

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} 2cb_n = 2c \sum_{n=N}^{\infty} b_n,$$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Inversement, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, on montre par les mêmes arguments que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, en utilisant le fait que $b_n/a_n \to c^{-1} > 0$.

(c) (critère du rapport) Si $a_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to r \geq 0,$$

alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $r < 1$ et diverge si $r > 1$.

Démonstration : On définit $s = (1 + r)/2$. Dans le cas où $0 \leq r < 1$, on a $0 \leq r < s < 1$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < s \text{ dès que } n \geq N.$$

En particulier, $a_{N+1} < sa_N$. De plus, si $a_{N+k} < s^k a_N$ pour $k \in \mathbb{N}$, alors

$$a_{N+k+1} < sa_{N+k} < s^{k+1} a_N.$$

Par induction, on a donc l'inégalité pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par le critère de comparaison, on a alors

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_N = a_N \sum_{k=0}^{\infty} s^k = \frac{a_N}{1-s} < +\infty.$$

On conclut alors que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. En revanche, dans le cas où $r > 1$, on a $1 < s < r$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > s \text{ dès que } n \geq N.$$

On a alors $a_{N+k} > s^k a_N$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k} \geq \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_N = a_N \sum_{k=0}^{\infty} s^k = +\infty,$$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(d) (critère de la racine) Si $a_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

$$\sqrt[n]{a_n} \to r \geq 0,$$

alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $r < 1$ et diverge si $r > 1$.

Démonstration : On procède comme pour le critère du rapport, mais en utilisant l'inégalité $\sqrt[n]{a_n} < s < 1$, c'est-à-dire, $a_n < s^n$, si $r < 1$, et l'inégalité $\sqrt[n]{a_n} > s > 1$, c'est-à-dire, $a_n > s^n$, si $r > 1$, pour tout $n \geq N \in \mathbb{N}$.

Exemples

(1) (série des inverses des carrés des entiers naturels) La série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ converge. On remarque d'abord que

$$0 \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

pour tout entier $k \geq 2$. De plus, on a

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} \to 1.$$

Le critère de comparaison permet alors de conclure, puisque

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2.$$

(2) (série des inverses des puissances rationnelles des entiers naturels) La série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^r$, pour $r \in \mathbb{Q}$, converge si $r > 1$ et diverge si $0 < r \leq 1$. En effet, si $0 < r \leq 1$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

En revanche, si $r \geq 2$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Pour le cas $1 < r < 2$, on choisit d'abord $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$1 < s = 1 + \frac{1}{2^N} < r.$$

Par le critère de comparaison, la série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^r$ converge si $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^s$ converge. Or, pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$\frac{1}{(k-1)^{1/2^N}} - \frac{1}{k^{1/2^N}} = \frac{k^{1/2^N} - (k-1)^{1/2^N}}{(k-1)^{1/2^N} \cdot k^{1/2^N}} \geq \frac{k^{1/2^N} - (k-1)^{1/2^N}}{k^{1/2^{N-1}}},$$

où

$$\begin{aligned} k^{1/2^N} - (k-1)^{1/2^N} &= \frac{\left(k^{1/2^N} - (k-1)^{1/2^N}\right) \cdot \left(k^{1/2^N} + (k-1)^{1/2^N}\right)}{k^{1/2^N} + (k-1)^{1/2^N}} \\ &= \frac{k^{2/2^N} - (k-1)^{2/2^N}}{k^{1/2^N} + (k-1)^{1/2^N}} \\ &\geq \frac{k^{1/2^{N-1}} - (k-1)^{1/2^{N-1}}}{2k^{1/2^N}} \\ &\geq \frac{k - (k-1)}{2^N \cdot k^{1/2^N + 1/2^{N-1} + \cdots + 1/2}} \\ &= \frac{1}{2^N \cdot k^{1-1/2^N}}, \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\frac{1}{(k-1)^{1/2^N}} - \frac{1}{k^{1/2^N}} \geq \frac{1}{2^N \cdot k^{1+1/2^N}} = \frac{1}{2^N \cdot k^s}.$$

On obtient donc que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s} &\leq 1+2^N\cdot\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)^{1/2^N}}-\frac{1}{k^{1/2^N}}\right)\\ &= 1+2^N\cdot\left(1-\frac{1}{n^{1/2^N}}\right)\to 1+2^N.\end{aligned}$$

Le critère de comparaison nous permet de conclure que la série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^s$ converge.

(3) (série des quotients de deux polynômes positifs des entiers naturels) Soient deux polynômes de degré k et l, respectivement, donnés par

$$P(n)=\sum_{i=0}^{k}a_i n^i \ > 0 \ (a_k>0),$$

$$Q(n)=\sum_{j=0}^{l}b_j n^j \ > 0 \ (b_l>0),$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$, où $0\leq a_i, b_j\in\mathbb{R}$ pour $0\leq i\leq k$ et $0\leq j\leq l$. La série des quotients de ces deux polynômes converge si $l-k\geq 2$ et diverge si $l-k\leq 1$, c'est-à-dire,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}\begin{cases}<+\infty & \text{si } l-k\geq 2,\\ =+\infty & \text{si } l-k\leq 1.\end{cases}$$

Ainsi, si

$$P(n)=2n^2+8n+3,$$
$$Q(n)=4n^4+3n^2+6,$$

la série converge. En revanche, si

$$P(n)=5n^3+2n^2+3,$$

$$Q(n)=3n^4+8n+6,$$

alors la série diverge. La démonstration utilise le critère du quotient. On compare le terme général de la série à $1/n^{l-k}$. On obtient que

$$\frac{P(n)}{Q(n)}\cdot n^{l-k}=\frac{\sum_{i=0}^{k}a_i n^{i-k}}{\sum_{j=0}^{l}b_j n^{j-l}}\to\frac{a_k}{b_l}>0.$$

Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{l-k}$ converge si $l-k \geq 2$ et diverge si $l-k \leq 1$, il en est de même de la série $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)/Q(n)$.

(5) (fonction exponentielle) La ***fonction exponentielle*** est définie par la série

$$\exp\{x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. La convergence pour tout $x > 0$ est confirmée par le critère du rapport, car on a alors

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0 < 1.$$

Notons que

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = s_n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où

$$e = \lim_{n\to\infty} e_n \leq \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = \exp\{1\}.$$

D'autre part, pour tout entier $n \geq k$ pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a

$$e_n \geq 2 + \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

d'où

$$e = \lim_{n\to\infty} e_n \geq s_k.$$

Cela implique que

$$e \geq \lim_{k\to\infty} s_k = \exp\{1\}.$$

Donc, on a

$$e = \exp\{1\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

3.3 Séries absolument convergentes

La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***converge absolument*** si la série positive des valeurs absolues $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, et alors

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

En effet,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifie

$$|S_{n+k} - S_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i\right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} |a_i| = S_{n+k}^* - S_n^* = \left|S_{n+k}^* - S_n^*\right|,$$

pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, par l'inégalité du triangle, où

$$S_n^* = \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

La suite $\{S_n\}$ est une suite de Cauchy, et donc converge, puisque la suite $\{S_n^*\}$ converge, et qu'elle est donc une suite de Cauchy. De plus, on a

$$|S_n| \leq S_n^*, \text{ c'est-à-dire, } -S_n^* \leq S_n \leq S_n^*,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où

$$-\lim_{n\to\infty} S_n^* \leq \lim_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} S_n^*, \text{ c'est-à-dire, } \left|\lim_{n\to\infty} S_n\right| \leq \lim_{n\to\infty} S_n^*.$$

Proposition 1 : Tout réarrangement $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ d'une série absolument convergente $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge vers la même limite. Ici, $a_i = b_{f(i)}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, où f est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe un et un seul $i \in \mathbb{N}$ tel que $f(i) = j$.

Démonstration : Soient

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i \to S \in \mathbb{R}, \\ S_n^* &= \sum_{i=1}^{n} |a_i| \to S^* \in \mathbb{R}, \\ T_m &= \sum_{j=1}^{m} b_j. \end{aligned}$$

On va montrer que $T_m \to S$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|S - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| = S^* - S_n^* < \frac{\epsilon}{2},$$

dès que $n \geq N$. Soit

$$M = \max\{f(1), \ldots, f(N)\}.$$

Les termes $a_1, \ldots, a_N$, qui correspondent aux termes $b_{f(1)}, \ldots, b_{f(N)}$, se retrouvent tous parmi les termes $b_1, \ldots, b_M$. Pour tout $m \geq M$, on a alors

$$|T_m - S_N| = \left| \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{N} a_i \right| \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i| = S^* - S_N^* < \frac{\epsilon}{2}.$$

L'inégalité du triangle donne alors

$$|T_m - S| = |T_m - S_N + S_N - S| \leq |T_m - S_N| + |S_N - S| < \epsilon.$$

Proposition 2 : Si les séries $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ et $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ convergent absolument vers les nombres réels A et B, respectivement, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ dont le terme général est défini par

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i},$$

pour tout entier $k \geq 0$, converge absolument vers le nombre réel AB. Cette série est appelée le ***produit de Cauchy***.

Démonstration : On définit

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=0}^{n} a_i \to A \in \mathbb{R}, \\ A_n^* &= \sum_{i=0}^{n} |a_i| \to A^* \in \mathbb{R}, \\ B_n &= \sum_{j=0}^{n} b_j \to B \in \mathbb{R}, \\ B_n^* &= \sum_{j=0}^{n} |b_j| \to B^* \in \mathbb{R}, \\ C_n &= \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_i b_j. \end{aligned}$$

Si $A^* = 0$ ou $B^* = 0$, alors $a_i = 0$, pour tout entier $i \geq 0$, ou $b_j = 0$, pour tout entier $j \geq 0$, et donc $c_k = 0$, pour tout entier $k \geq 0$. L'affirmation est alors triviale. On suppose dans ce qui suit que $A^* > 0$ et $B^* > 0$. De plus, on sait que $A_n B_n \to AB \in \mathbb{R}$. Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} |A^* - A_n^*| &< \frac{\epsilon}{3B^*}, \\ |B^* - B_n^*| &< \frac{\epsilon}{3A^*}, \\ |AB - A_n B_n| &< \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Dès que $n \geq 2N + 2$, et donc que $\lfloor n/2 \rfloor \geq N + 1$, les propriétés de la valeur absolue, dont l'inégalité du triangle, entraînent alors que

$$\begin{aligned}
|AB - C_n| &= |AB - A_nB_n + A_nB_n - C_n| \\
&\le |AB - A_nB_n| + |A_nB_n - C_n| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n-i+1}^{n} a_i b_j \right| \\
&\le \frac{\epsilon}{3} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n-i+1}^{n} |a_i| \cdot |b_j| \\
&\le \frac{\epsilon}{3} + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor}^{n} |a_i| \cdot |b_j| + \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor}^{n} |a_i| \cdot |b_j| \\
&\le \frac{\epsilon}{3} + A^* \sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor}^{\infty} |b_j| + B^* \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor}^{\infty} |a_i| \\
&= \frac{\epsilon}{3} + A^* \left(B^* - B^*_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \right) + B^* \left(A^* - A^*_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \right) \\
&< \frac{\epsilon}{3} + A^* \cdot \frac{\epsilon}{3A^*} + B^* \cdot \frac{\epsilon}{3B^*} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Donc, la suite $\{C_n\}$ converge et sa limite est donnée par AB. En fait, la suite converge absolument, car

$$C_n^* = \sum_{k=0}^{n} |c_k| \le \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} |a_i| \cdot |b_{k-i}| \le \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} |a_i| \cdot |b_j| = A_n^* B_n^* \le A^* B^* \in \mathbb{R}.$$

Exemple (propriété de la fonction exponentielle) : La fonction exponentielle satisfait

$$\exp\{x + y\} = \exp\{x\} \exp\{y\},$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. En effet, la série

$$\exp\{x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

est absolument convergente, car $\exp\{|x|\} = 1$ lorsque $|x| = 0$ et $\exp\{|x|\} < +\infty$ lorsque $|x| > 0$, et il en est de même pour $\exp\{y\}$. D'après ce qui précède et le binôme de Newton, on a donc

$$\begin{aligned}
\exp\{x\}\exp\{y\} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} = \exp\{x+y\}.
\end{aligned}$$

3.4 Séries alternées

Une ***série alternée*** est une série dont les termes négatifs et positifs alternent. Il suffit que les termes décroissent vers 0 en valeur absolue pour que la série converge.

Proposition : Une série alternée $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, avec $0 \le a_{n+1} \le a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge si $a_n \to 0$.

Démonstration : On considère séparément les sommes partielles d'un nombre pair et d'un nombre impair de termes de la série. En définissant $S_0 = 0$, on a

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}a_k = S_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \ge S_{2n-2},$$

$$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}a_k = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \le S_{2n-1},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus,

$$S_2 \le S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n} \le S_{2n-1} \le S_1.$$

La suite $\{S_{2n}\}$ est croissante et majorée et elle converge donc vers un certain $S \in \mathbb{R}$. De même, la suite $\{S_{2n-1}\}$ est décroissante et minorée et elle converge vers un certain $s \in \mathbb{R}$. Mais alors

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n-1} - \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = s.$$

Exemple (série alternée convergente non absolument convergente)
La série alternée

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

converge, puisque $0 \leq 1/(n+1) \leq 1/n \to 0$. Cependant, elle ne converge pas absolument, car

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

D'ailleurs, il existe un réarrangement qui converge vers une autre valeur. En effet, on a

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots,$$

avec $1 - 1/2 = 1/2 \leq S \leq 1$. De plus, on peut écrire

$$\frac{S}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \ldots.$$

En additionnant les deux séries terme à terme, on obtient que

$$\frac{3S}{2} = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

En éliminant les 0, on a alors un réarrangement de la série dont la limite est différente de S.

3.5 Développement décimal d'un nombre réel

Pour toute suite $\{d_k\}$, où $d_k \in D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a convergence de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{10^k} \in [0, 1]\,.$$

En effet,

$$0 \leq \frac{d_k}{10^k} \leq \frac{9}{10^k},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{10^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{1 - 1/10} \right) = 1.$$

Inversement, pour tout $x \in [0,1)$, il existe une suite $\{d_k\}$ avec $d_k \in D$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, telle que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{10^k}.$$

Cette série est appelée le ***développement décimal*** de x.

Pour obtenir ce développement, on définit d'abord

$$d_1 = \max\left\{d \in \mathbb{N}_0 : \frac{d}{10} \leq x\right\},$$

où $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. L'entier $d_1 \geq 0$ est bien défini en vertu de la propriété d'Archimède qui garantit que le nombre d'entiers $d \geq 0$ satisfaisant $d \leq 10x$ est fini. De plus, on a $d_1 \in D$, car sinon $d_1/10 \geq 10/10 = 1 > x$, ce qui est une contradiction. Supposons maintenant

$$d_l = \max\left\{d \in \mathbb{N}_0 : \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_{l-1}}{10^{l-1}} + \frac{d}{10^l} \leq x\right\} \in D,$$

pour $l \leq k \in \mathbb{N}$, et définissons

$$d_{k+1} = \max\left\{d \in \mathbb{N}_0 : \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_k}{10^k} + \frac{d}{10^{k+1}} \leq x\right\}.$$

L'entier $d_{k+1} \geq 0$ est bien défini en vertu de la propriété d'Archimède pour la même raison que précédemment. De plus, $d_{k+1} \in D$, car sinon

$$x \geq \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_k}{10^k} + \frac{d_{k+1}}{10^{k+1}} \geq \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_k + 1}{10^k},$$

ce qui entre en contradiction avec la définition de d_k. Selon le principe d'induction, la somme partielle

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k}$$

est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, on a $s_n \to x$ par le théorème des gendarmes, puisque

$$x - \frac{1}{10^n} \leq x - \frac{d_{n+1} + 1}{10^{n+1}} < s_n \leq x.$$

Cela confirme le développement décimal pour $x \in [0,1)$.

D'autre part, pour tout $x \in [1, +\infty)$, on définit

$$N = \max\left\{n \in \mathbb{N} : 10^{n-1} \leq \lfloor x \rfloor\right\} \in \mathbb{N},$$

qui est bien défini du fait que $10^{n-1} \to +\infty$, et qui est tel que

$$10^{N-1} \leq x < 10^N.$$

Puisque

$$0 < \frac{1}{10} \leq \frac{x}{10^N} < 1,$$

il existe une suite $\{d_k\}$ avec $d_k \in D$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, qui satisfait

$$x = 10^N \cdot \frac{x}{10^N} = 10^N \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{10^{k-N}}.$$

On écrit aussi

$$x = d_1 \ldots d_N, d_{N+1} d_{N+2} \ldots.$$

Enfin, pour tout $x \in (-\infty, 0)$, le développement décimal est donné par celui de $|x|$ en utilisant l'identité $x = -|x|$.

4 Limite et continuité d'une fonction numérique

4.1 Limite d'une fonction numérique

Soit une ***fonction numérique***

$$f : (a, b) \to \mathbb{R},$$

qui associe $f(x) \in \mathbb{R}$ à tout $x \in (a, b)$, pour $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Cette fonction possède une ***limite finie*** $L \in \mathbb{R}$ en un ***point fini*** $x_0 \in [a, b] \cap \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |f(x) - L| < \epsilon \text{ dès que } |x - x_0| < \delta,$$

et **(a)** $x < x_0$ dans le cas d'une ***limite unilatérale à gauche***, et alors on note

$$L = L_g(x_0) = f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x), \text{ ou } f(x) \to L \text{ lorsque } x \to x_0^-;$$

ou **(b)** $x > x_0$ dans le cas d'une ***limite unilatérale à droite***, et alors on note

$$L = L_d(x_0) = f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x), \text{ ou } f(x) \to L \text{ lorsque } x \to x_0^+;$$

ou **(c)** $x \neq x_0$ dans le cas d'une ***limite bilatérale***, et alors on note

$$L = L(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x), \text{ ou } f(x) \to L \text{ lorsque } x \to x_0.$$

La limite à gauche n'est pas définie en $x_0 = a$, et la limite à droite n'est pas définie en $x_0 = b$. En un ***point infini*** $x_0 = +\infty$ ($-\infty$, respectivement), la condition $|x - x_0| < \delta$ pour un certain $\delta > 0$ est remplacée par

$$x > \Delta \ (< -\Delta, \text{ respectivement}), \text{ pour un certain } \Delta > 0.$$

Pour une ***limite infinie*** $L = +\infty$ ($-\infty$, respectivement), la condition $|f(x) - L| < \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ est remplacée par

$$f(x) > M \ (< -M, \text{ respectivement}), \text{ pour tout } M > 0.$$

Dans tous les cas, il est sous-entendu que $x \in (a, b)$ et que δ ou Δ est un nombre réel strictement positif qui dépend généralement de x_0 et ϵ.

Les deux propositions suivantes donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la limite d'une fonction numérique en un point.

Proposition 1 : Une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ possède une limite bilatérale $L(x_0)$ en un point fini $x_0 \in (a, b)$ si et seulement si elle possède des limites unilatérales à gauche et à droite en $x_0 \in (a, b)$ qui sont égales, c'est-à-dire, $L_g(x_0) = L_d(x_0) = L(x_0)$.

Démonstration : La nécessité est évidente, car si la condition est vérifiée pour tout $x \neq x_0$, alors elle est vérifiée pour tout $x < x_0$ et pour tout $x > x_0$. Pour démontrer la suffisance, il suffit de prendre pour valeur du δ dans la condition d'existence de $L(x_0)$ le minimum des valeurs du δ dans les conditions d'existence de $L_g(x_0)$ et $L_d(x_0)$.

Proposition 2 : Une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ possède une limite L en $x_0 \in [a, b]$ dans l'un des sens (a), (b) ou (c) ci-dessus si et seulement si

$$f(x_n) \to L \text{ dès que } x_n \to x_0,$$

pour toute suite numérique $\{x_n\}$ qui satisfait les conditions correspondantes (a), (b) ou (c) ci-dessus. Les limites de fonctions possèdent donc les mêmes propriétés que les limites de suites numériques.

Démonstration dans le cas $L \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in (a, b)$: Pour la nécessité, il suffit de remarquer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x_n) - L| < \epsilon \text{ dès que } |x_n - x_0| < \delta.$$

D'autre part, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_n - x_0| < \delta \text{ dès que } n \geq N,$$

ce qui termine la démonstration. Pour la suffisance, on suppose au contraire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in (a, b)$ qui satisfait

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - L| \geq \epsilon.$$

On a alors $x_n \to x_0$, mais $f(x_n) \nrightarrow L$, ce qui est une contradiction.

Corollaire : Si les fonctions $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ admettent des limites L et M en $x_0 \in [a, b]$ dans l'un des sens (a), (b) ou (c) ci-dessus, alors $f + g$, $f \cdot g$ et f/g admettent les limites $L + M, L \cdot M$ et L/M (si $M \neq 0$) dans le même sens, à la condition que ces limites soient déterminées.

Démonstration : Les conclusions découlent directement de la proposition 2 et des opérations sur les limites de suites numériques.

Exemples

(1) (fonction partie entière) La fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est telle que $f(n^+) = n$ et $f(n^-) = n - 1$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(2) (fonction indicatrice des entiers relatifs) La fonction définie par

$$1_{\mathbb{Z}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, satisfait $1_{\mathbb{Z}}(n^+) = 1_{\mathbb{Z}}(n^-) = 0$, mais $1_{\mathbb{Z}}(n) = 1$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(3) (fonction indicatrice des nombres rationnels) La fonction définie par

$$1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, est telle que $1_{\mathbb{Q}}(x^+)$ et $1_{\mathbb{Q}}(x^-)$ n'existent pas, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, il y a des nombres qui appartiennent à $\mathbb{Q}$ et des nombres qui appartiennent à $\mathbb{Q}^c$ dans tout intervalle non vide de nombres réels.

(4) (fonction signe) La fonction définie par

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

est telle que $\operatorname{sgn}(0^-) = -1$ et $\operatorname{sgn}(0^+) = 1$, mais $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

(5) (fonction inverse) On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ , pour tout } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) .$$

On a

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty,$$

car pour tout $M > 0$,

$$\frac{1}{x} > M \text{ dès que } 0 < x < \frac{1}{M}.$$

D'un autre côté, on a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

car pour tout $\epsilon > 0$,

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \epsilon \text{ dès que } x > \frac{1}{\epsilon} > 0.$$

De façon analogue, on montre que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

(6) (cosinus de la fonction inverse) Soit

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. La limite en $x = 0$ n'existe pas. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x_{2n} = \frac{1}{2n\pi} \to 0 \text{ et } f(x_{2n}) = \cos(2n\pi) = 1 \to 1,$$

mais

$$x_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)\pi} \to 0 \text{ et } f(x_{2n+1}) = \cos((2n+1)\pi) = -1 \to -1.$$

Donc la limite à droite en $x = 0$, et *a fortiori* la limite bilatérale, n'existe pas. En revanche, la fonction $g(x) = x \cdot f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, possède une limite bilatérale égale à 0 en $x = 0$. En effet, pour tout $\epsilon > 0$,

$$|g(x)| = |x| \cdot \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| < \epsilon,$$

dès que $0 < |x| < \epsilon$.

4.2 Fonctions continues

Soit une fonction numérique

$$f : I \to \mathbb{R},$$

où $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle. La fonction est ***continue à gauche en un point*** $a \in I$ si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

De même, le fonction est ***continue à droite en un point*** $a \in I$ si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Enfin, la fonction f est ***continue en un point*** $a \in I$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

La fonction est dite ***continue*** si elle est continue en tout point $a \in I$.

Puisque $|f(x) - f(a)| = 0$ lorsque $x = a$, la fonction f est continue à gauche, continue à droite ou simplement continue, respectivement, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |f(x) - f(a)| < \epsilon \text{ dès que } |x - a| < \delta,$$

et $a \geq x \in I$, $a \leq x \in I$ ou $x \in I$, respectivement. Comme dans la section précédente, une condition nécessaire et suffisante est

$$f(x_n) \to f(a) \text{ dès que } x_n \to a,$$

pour toute suite numérique $\{x_n\}$ satisfaisant $a \geq x_n \in I$, $a \leq x_n \in I$ ou $x_n \in I$, respectivement, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions continues satisfont les règles suivantes.

(a) (opérations sur les fonctions continues) Soient

$$f, g : I \to \mathbb{R}$$

deux fonctions continues en $a \in I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors, les fonctions $f + g$, $f \cdot g$ et f/g (si $g(a) \neq 0$) sont continues en $a \in I$.

Démonstration : Les conclusions découlent directement des opérations correspondantes sur les limites de suites numériques.

(b) (composition de fonctions continues) Soient

$$f : I \to J$$

une fonction continue en $a \in I$, et

$$g : J \to \mathbb{R}$$

une fonction continue en $f(a) \in J$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Alors, la composition

$$g \circ f : I \to \mathbb{R}$$

est une fonction continue en $a \in I$.

Démonstration : Soit $\{x_n\}$ une suite dans I telle que $x_n \to a \in I$. Alors, $\{f(x_n)\}$ est une suite dans J telle que $f(x_n) \to f(a) \in J$, par la continuité de f en a. La continuité de g en $f(a)$ permet finalement de conclure que $g(f(x_n)) \to g(f(a)) \in \mathbb{R}$, ce qui garantit la continuité de $g \circ f$ en a.

Exemples

(1) (fonction valeur absolue) La fonction $f(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est continue, car

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En effet, l'inégalité du triangle garantit que

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|,$$

et aussi par symétrie que

$$|y| \leq |y-x| + |x| = |x-y| + |x|,$$

d'où

$$-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|.$$

(2) (polynômes d'un nombre réel) Soient

$$P(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i \quad ,$$

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{l} b_j x^j \quad ,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, pour $0 \leq i \leq k$ et $0 \leq j \leq l$. Ces deux polynômes sont continus. En effet, une fonction constante, $f(x) = c \in \mathbb{R}$, et la fonction identité, $f(x) = x$, sont évidemment continues, et donc aussi $f(x) = x \cdot x = x^2$ et $f(x) = x^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par induction. Il en est de même pour toute somme de produits de telles fonctions. De plus, le quotient $P(x)/Q(x)$ est continu en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x) \neq 0$. Il en est alors de même de $|P(x)/Q(x)|$, qui est la composition de la fonction précédente avec la valeur abolue.

(3) (fonction racine carrée) La racine carrée d'un nombre réel $x > 0$ est un nombre réel $\sqrt{x} > 0$ tel que $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$. Soit $0 < x_n \to x > 0$. On a alors

$$0 \leq \left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| = \left|\frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}\right| \leq \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}} \to 0.$$

La continuité de $\sqrt{x}$ en x découle alors du théorème des gendarmes.

4.3 Propriété des valeurs intermédiaires

Soit une fonction continue

$$f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

où $-\infty < a < b < +\infty$, qui est telle que $f(a) < f(b)$. Alors, pour tout $y \in (f(a), f(b))$, il existe $c \in (a,b)$ tel que $f(c) = y$.

Démonstration : On pose

$$E = \{x \in [a, b] : f(x) \leq y\},$$

qui est un sous-ensemble non vide, car il contient a, et majoré par b par définition. On définit

$$c = \sup E \in [a, b].$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in E$ tel que

$$c - \frac{1}{n} \leq x_n \leq c.$$

Le théorème des gendarmes garantit alors que $x_n \to c$, et la continuité de f en c que

$$f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \leq y < f(b),$$

ce qui assure en particulier que $c < b$. Supposons que $f(c) < y$. Toujours par la continuité de f en c, il existe $x \in (c, b)$ tel que

$$f(x) < f(c) + y - f(c) = y,$$

ce qui est une contradiction avec la définition de c. Donc, $f(c) = y > f(a)$, ce qui implique en particulier que $c > a$.

Exemples

(1) (existence d'une racine entière et d'une puissance rationnelle) Pour tout nombre réel $a > 0$ et tout entier $n \geq 2$, il existe un nombre réel $\sqrt[n]{a} > 0$ tel que $(\sqrt[n]{a})^n = a$. En effet, la fonction $f(x) = x^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, est continue, car elle est le produit n fois de la fonction identité, $g(x) = x$, qui est continue. En particulier, elle est continue sur l'intervalle $[0, a+1]$. Or,

$$f(0) = 0 < a < a + 1 < (a+1)^n = f(a+1).$$

Par la propriété des valeurs intermédiaires, il existe $y \in (0, a+1)$ tel que $f(y) = y^n = a$. On pose $\sqrt[n]{a} = y$. Pour tout entier $m \geq 1$, on a alors

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = y^m,$$

ce qui définit la puissance rationnelle a^r et son inverse a^{-r}, pour $r = m/n$.

(2) (existence d'un zéro d'un polynôme de degré impair) Soit un polynôme de degré $n \geq 1$ défini par

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $a_i \in \mathbb{R}$, pour $0 \leq i \leq n$, et $a_n > 0$. Si n est impair, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$. En effet, P est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, car une somme de produits de fonctions continues. De plus, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(a) < 0 < P(b).$$

Pour s'en convaincre, écrivons d'abord

$$P(x) = x^n \cdot \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Puisque n est impair, on a alors

$$\begin{aligned} P(2^k) &= 2^{nk} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{2^k} + \frac{a_{n-2}}{2^{2k}} + \cdots + \frac{a_1}{2^{(n-1)k}} + \frac{a_0}{2^{nk}} \right) \to +\infty, \\ P(-2^k) &= -2^{nk} \left(a_n - \frac{a_{n-1}}{2^k} + \frac{a_{n-2}}{2^{2k}} + \cdots + \frac{a_1}{2^{(n-1)k}} - \frac{a_0}{2^{nk}} \right) \to -\infty, \end{aligned}$$

lorsque $k \to +\infty$. La propriété des valeurs intermédiaires permet alors de conclure.

4.4 Propriété des bornes atteintes

Soit une fonction continue

$$f : [a, b] \to \mathbb{R},$$

où $-\infty < a < b < +\infty$. Alors, il existe $c, d \in [a, b]$ tels que

$$\begin{aligned} f(c) &= m = \inf \{ f(x) : x \in [a, b] \}, \\ f(d) &= M = \sup \{ f(x) : x \in [a, b] \}. \end{aligned}$$

Démonstration : On montre d'abord que $M < +\infty$. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$. La suite $\{x_n\}$ étant bornée, la propriété de Bolzano-Weierstrass garantit l'existence d'une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ telle que

$$x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}.$$

En fait, $x \in [a,b]$ par le théorème des gendarmes, car $a \leq x_{n_k} \leq b$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. La continuité de f au point x implique alors que

$$f(x_{n_k}) \to f(x) \in \mathbb{R}.$$

Or, ceci entre en contradiction avec

$$f(x_{n_k}) > n_k \to +\infty.$$

Donc, $M \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M.$$

La propriété de Bolzano-Weierstrass, le théorème des gendarmes et la continuité de f garantissent alors l'existence d'une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ telle que

$$x_{n_k} \to d \in [a,b]$$

et

$$f(x_{n_k}) \to f(d) \in \mathbb{R}.$$

Mais on a

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le théorème des gendarmes implique alors que $f(d) = M$. La démonstration de l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = m$ est analogue.

Corollaire : Sous les conditions ci-dessus, on a

$$f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\} = [m, M] \subseteq \mathbb{R},$$

ce qui signifie que l'image de f est un intervalle borné et fermé, donc compact.

Démonstration : Par la définition de m et M, on a

$$m \leq f(x) \leq M,$$

pour tout $x \in [a,b]$. Si $m = M$, alors la fonction f est constante, et son image se réduit à un point unique. Supposons que

$$m = f(c) < f(d) = M,$$

avec $a \leq c < d \leq b$ (sinon, il suffit de considérer la fonction $-f$ qui atteint sa borne inférieure $-M$ au point d et sa borne supérieure $-m$ au point c). La fonction f étant continue sur l'intervalle $[c, d]$, la propriété des valeurs intermédiaires garantit que, pour tout $y \in (m, M)$, il existe $x \in (c, d) \subseteq [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

4.5 Fonctions uniformément continues

Soit une fonction continue

$$f : I = [a, b] \to \mathbb{R},$$

où $-\infty < a < b < +\infty$. Alors, f est ***uniformément continue*** sur I, c'est-à-dire,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall x, y \in I \text{ dès que } |x - y| < \delta.$$

Ici, la valeur de δ ne dépend pas de $x, y \in I$.

Démonstration : Supposons que la fonction f ne soit pas uniformément continue sur $[a, b]$. Alors, on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n, y_n \in [a, b]$ tels que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon.$$

Par la propriété de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ telle que

$$x_{n_k} \to x \in [a, b] \,.$$

Puisque

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} \leq y_{n_k} \leq x_{n_k} + \frac{1}{n_k},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a aussi

$$y_{n_k} \to x \in [a, b] \,,$$

par le théorème des gendarmes. La fonction f étant continue au point x, on a alors

$$f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to f(x) - f(x) = 0.$$

Mais ceci entre en contradiction avec le fait que

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon > 0,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exemples

(1) (fonction carré) La fonction $f(x) = x^2$ est continue en tout point $x \in \mathbb{R}$, donc uniformément continue sur tout intervalle $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Cependant, elle n'est pas uniformément continue sur $I = (-\infty, +\infty)$. En effet, pour tout $\delta > 0$, les nombres réels

$$x = \frac{1}{\delta}, y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2},$$

satisfont $|x - y| = \delta/2 < \delta$. Cependant, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| = |(x-y)\cdot(x+y)| = |x-y|\cdot|x+y| \\ &= \frac{\delta}{2}\cdot\left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) > \frac{\delta}{2}\cdot\frac{2}{\delta} = 1. \end{aligned}$$

(2) (fonction inverse) La fonction $f(x) = 1/x$ est continue pour tout nombre réel $x > 0$, donc uniformément continue sur tout intervalle $I = [a,b] \subseteq (0,1]$. Elle n'est cependant pas uniformément continue sur $I = (0,1]$. En effet, les nombres réels

$$x = \delta, y = \frac{\delta}{2},$$

satisfont $|x - y| = \delta/2 < \delta$, mais on a

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta}\right| = \frac{1}{\delta} \geq 1,$$

dès que $0 < \delta \leq 1$.

4.6 Fonction réciproque

Soit une fonction continue

$$f : [a, b] \to [m, M] ,$$

où $-\infty < a < b < +\infty$ et

$$\begin{aligned} m &= \inf \{f(x) : x \in [a, b]\} , \\ M &= \sup \{f(x) : x \in [a, b]\} . \end{aligned}$$

La fonction f est alors ***surjective***, car pour tout $y \in [m, M]$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$. Cela est une conséquence directe des propriétés des bornes atteintes et des valeurs intermédiaires. La fonction f est ***bijective*** si elle est en plus ***injective***, c'est-à-dire si $f(x_1) = f(x_2)$ seulement lorsque $x_1 = x_2 \in [a, b]$. La fonction f possède alors une ***fonction réciproque***

$$f^{-1} : [m, M] \to [a, b] ,$$

qui est telle que

$$f^{-1}(f(x)) = x,$$

pour tout $x \in [a, b]$. La fonction réciproque est unique, car pour tout $y \in [m, M]$, il existe un et un seul $x \in [a, b]$ satisfaisant $f(x) = y$ et alors $x = f^{-1}(y)$.

La fonction f est ***strictement monotome*** si elle est ***strictement croissante***, c'est-à-dire,

$$f(x_1) \leq f(x_2) \text{ si } x_1 \leq x_2,$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2$, ou ***strictement décroissante***, c'est-à-dire,

$$f(x_1) \geq f(x_2) \text{ si } x_1 \leq x_2,$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2$.

Proposition : Une fonction continue et surjective

$$f : [a, b] \to [m, M] ,$$

où $-\infty < a < b < +\infty$, est injective si et seulement si elle est strictement monotone. Dans ce cas, la fonction réciproque

$$f^{-1} : [m, M] \to [a, b] ,$$

est également continue et strictement monotone.

Démonstration : La suffisance est évidente, car pour tous $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que $x_1 \neq x_2$, disons $x_1 < x_2$, on a alors ou bien $f(x_1) < f(x_2)$ si f est strictement croissante, ou bien $f(x_1) > f(x_2)$ si f est strictement décroissante. Dans les deux cas, on a $f(x_1) \neq f(x_2)$. Pour la nécessité, considérons le cas où $f(a) < f(b)$ (le cas de l'inégalité inverse étant analogue et le cas d'égalité étant exclu par l'injectivité de f). Soit $x_1 \in (a, b)$. Alors, $f(x_1) \neq f(b)$, car $x_1 \neq b$. En fait, $f(x_1) < f(b)$, car sinon $f(a) < f(b) < f(x_1)$ et alors, par la propriété des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in (a, x_1)$, donc $x_0 \neq b$, tel que $f(x_0) = f(b)$, ce qui est une contradiction avec l'injectivité de f. Pour des raisons analogues, $f(x_1) > f(a)$. On a donc

$$f(a) < f(x_1) < f(b).$$

On montre de la même façon que si $x_1 < x_2 < b$, alors

$$f(x_1) < f(x_2) < f(b).$$

Sous les conditions $a < x_1 < x_2 < b$, on a donc

$$f(a) < f(x_1) < f(x_2) < f(b),$$

ce qui signifie que f est strictement croissante. La fonction réciproque f^{-1} est alors strictement croissante. En effet, si $m \leq y_1 < y_2 \leq M$, alors il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que

$$m \leq y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2 \leq M,$$

d'où

$$a \leq x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) = x_2 \leq b.$$

Il reste à montrer que f^{-1} est continue en tout point $y_0 \in [m, M]$, où $m = f(a)$ et $M = f(b)$.

Soit $\{y_n\}$ une suite dans $[m, M]$ telle que $y_n \to y_0 \in [m, M]$. On définit $x_n = f^{-1}(y_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ telle que

$$x_{n_k} \to x_0.$$

La fonction f étant continue en x_0, on a

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_0).$$

Donc, $f(x_0) = y_0$, c'est-à-dire, $x_0 = f^{-1}(y_0)$. La limite étant unique, on a nécessairement

$$f^{-1}(y_n) = x_n \to x_0 = f^{-1}(y_0),$$

d'où la continuité de f^{-1} en y_0.

Exemple (unicité et continuité d'une racine entière et d'une puissance rationnelle)

La fonction $\sqrt[n]{y}$, pour tout nombre réel $y > 0$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, est la réciproque de la fonction $f(x) = x^n$, qui est continue et strictement croissante sur tout intervalle de forme $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$. En particulier, cette fonction est unique. De plus, elle est continue et strictement croissante sur tout intervalle de forme $[a^n, b^n] \subseteq (0, +\infty)$. Il en est de même pour la puissance rationnelle

$$y^r = (\sqrt[n]{y})^m\,,$$

où $r = m/n$ pour $m, n \in \mathbb{N}$, qui est la composition de deux fonctions continues strictement croissantes pour tout nombre réel $y > 0$. Son inverse y^{-r} est aussi continue, mais strictement décroisssante.

5 Dérivation d'une fonction numérique

5.1 Fonctions dérivables

Une fonction

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

est ***dérivable en un point*** $x_0 \in (a, b)$ si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Cette limite est appelée la ***dérivée*** de f en x_0. Cette limite existe si et seulement si les limites à gauche et à droite, définies par

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0),$$

appelées les ***dérivées à gauche et à droite*** de f en x_0, respectivement, vérifient

$$f'_g(x_0) = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la fonction f est ***dérivable*** si elle possède une dérivée en tout point $x_0 \in (a, b)$.

Si f est dérivable en x_0, alors la fonction h définie par

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(f'(x_0) + h(x)),$$

pour tout $x \in (a, b)$, est telle que

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = 0.$$

Cela donne l'approximation affine

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0),$$

pour x assez près de x_0. En fait, la droite

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

de ***pente*** $f'(x_0)$ est ***tangente*** à la courbe $y = f(x)$ au point $x = x_0$.

Exemples

(1) (fonction valeur absolue) La fonction $f(x) = |x|$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, satisfait

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, x \neq a \geq 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, x \neq a \leq 0. \end{cases}$$

On a donc $f'(a) = 1$, si $a > 0$, mais $f'(a) = -1$ si $a < 0$. De plus, on a $f'_d(0) = 1 \neq -1 = f'_g(0)$. La fonction f n'est donc pas dérivable en 0.

(2) (fonction puissance entière positive d'un nombre réel) La fonction $f(x) = x^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, est dérivable et sa dérivée est donnée par $f'(a) = na^{n-1}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$. En effet,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{(x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x - a} \to na^{n-1},$$

lorsque $x \to a$.

(3) (fonction puissance entière négative d'un nombre réel) La fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^{-n} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, est dérivable en tout point $a \neq 0$, où

$$f'(a) = -na^{-n-1}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{a^n - x^n}{x^n a^n (x - a)} \\ &= -\frac{x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}}{x^n a^n} \\ &\to -na^{-n-1}, \end{aligned}$$

lorsque $x \to a \neq 0$. En revanche, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x^{n+1}} \to \begin{cases} +\infty & \text{lorsque } x \to 0^+, \\ +\infty & \text{lorsque } x \to 0^- \text{ et } n \text{ est impair}, \\ -\infty & \text{lorsque } x \to 0^- \text{ et } n \text{ est pair}. \end{cases}$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0.

(4) (fonction racine carrée) La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en tout point $a > 0$. En effet, on a

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \to \frac{1}{2\sqrt{a}},$$

lorsque $x \to a > 0$, en utilisant la continuité de la racine carrée en a.

Proposition 1 (continuité d'une fonction dérivable) : Une fonction

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$

qui est dérivable en $x_0 \in (a,b)$ est continue en x_0.

Démonstration : En utilisant les opérations sur les limites de fonctions (qui reproduisent les opérations sur les suites numériques), on a

$$\begin{aligned} f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0) + f(x_0) \\ &\to f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0), \end{aligned}$$

lorsque $x \to x_0$.

Proposition 2 (opérations sur les fonctions dérivables) : Soient $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $x_0 \in (a,b)$. Alors les fonctions $f+g$, $f \cdot g$ et f/g (si $g(x_0) \neq 0$) sont dérivables en x_0 avec dérivées données par

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0), \\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

En particulier, $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$, pour tout $c \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Les conclusions découlent des opérations sur les limites de fonctions et des propriétés des fonctions dérivables en un point, donc continues en ce point, à partir des équations suivantes :

$$\frac{(f(x)+g(x)) - (f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right),$$

et finalement

$$\begin{aligned} \left(\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}\right) &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)} \\ &= \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) \cdot \frac{g(x_0)}{g(x)g(x_0)} \\ &- \left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) \cdot \frac{g(x_0)}{g(x)g(x_0)}. \end{aligned}$$

Proposition 3 (dérivation en chaîne) : Si $f : (a,b) \to (C,D)$ est une fonction dérivable en $x_0 \in (a,b)$ et $g : (C,D) \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en $f(x_0) \in (C,D)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 avec dérivée donnée par

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dans la notation de Leibnitz, $y = f(x)$, $z = g(y)$ et

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Démonstration : On a

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(f'(x_0) + h(x)),$$

où

$$h(x) \to 0 \text{ lorsque } x \to x_0,$$

ainsi que

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = (f(x) - f(x_0))(g'(f(x_0)) + H(f(x))),$$

où

$$H(f(x)) \to 0 \text{ lorsque } f(x) \to f(x_0),$$

ce qui est le cas lorsque $x \to x_0$ par la continuité de f en x_0. La conclusion découle alors des opérations sur les limites de fonctions à partir de l'équation suivante :

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = (f'(x_0) + h(x)) \cdot (g'(f(x_0)) + H(f(x))).$$

Proposition 4 (dérivation de la fonction réciproque) : Soit une fonction continue et bijective

$$f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to [m, M] \subseteq \mathbb{R}$$

qui est dérivable en $x_0 \in (a, b)$. Alors la fonction réciproque

$$f^{-1} : [m, M] \subseteq \mathbb{R} \to [a, b] \subseteq \mathbb{R}$$

est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$, et alors

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dans la notation de Leibniz, $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ et

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Démonstration : Le résultat découle de l'identité

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}},$$

pour $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$, et du fait que

$$x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0,$$

lorsque $y \to y_0$, par la continuité de f^{-1} en y_0.

Exemples

(1) (dérivée d'une racine entière et d'une puissance rationnelle) La fonction $\sqrt[n]{y} = y^{1/n}$, pour tout nombre réel $y > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, est la réciproque de la fonction $f(x) = x^n$, qui est continue et bijective sur tout intervalle $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$, et dont la dérivée en $x = y^{1/n} \in (0, +\infty)$ est donnée par $f'(x) = nx^{n-1}$. On a donc

$$\frac{d(y^{1/n})}{dy} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}.$$

La dérivation en chaîne permet alors d'obtenir la dérivée de la puissance rationnelle $y^r = \left(\sqrt[n]{y}\right)^m$, où $r = m/n$ pour $m, n \in \mathbb{N}$, qui est la composition de la puissance m-ième et de la racine n-ième. On a alors

$$\frac{d(y^{m/n})}{dy} = \frac{1}{n} \cdot (y^m)^{\frac{1}{n}-1} \cdot my^{m-1} = \frac{m}{n} \cdot y^{\frac{m}{n}-1}.$$

La formule pour la dérivée de la fonction inverse donne dans ce cas

$$\frac{d(y^{-m/n})}{dy} = -\frac{\frac{m}{n} \cdot y^{\frac{m}{n}-1}}{y^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n} \cdot y^{-\frac{m}{n}-1},$$

comme dérivée de y^{-r}, où $r = m/n$ pour $m, n \in \mathbb{N}$. Donc, on a

$$\frac{d(y^r)}{dy} = ry^{r-1},$$

pour tout nombre réel $y > 0$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

(2) (dérivée des fonctions sinus et cosinus) Pour $a \in \mathbb{R}$ fixé et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(a - x) = \cos(a)\cos(x) + \sin(a)\sin(x),$$

ce qui correspond au produit scalaire du vecteur $(\cos(a), \sin(a))$ avec le vecteur $(\cos(x), \sin(x))$. On a alors

$$\frac{\cos(a-x)-\cos(a)}{a-x-a} = -\cos(a)\cdot\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} - \sin(a)\cdot\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0},$$

d'où, en faisant $x \to 0$,

$$\cos'(a) = -\cos(a)\cos'(0) - \sin(a)\sin'(0),$$

à la condition que les fonctions sin et cos soient dérivables en 0. Or, en comparant l'aire du secteur circulaire d'angle $0 < x < \pi/2$ à l'aire du triangle isocèle correspondant et à l'aire du triangle rectangle de base 1 correspondant, on obtient les inégalités

$$\frac{1\cdot\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2\pi}\cdot\pi \leq \frac{\sin(x)}{2\cos(x)},$$

c'est-à-dire,

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

De plus, ces dernières inégalités sont valides aussi pour $-\pi/2 < x < 0$, car toutes les expressions restent inchangées lorsque x est remplacée par $-x$. En particulier, ces inégalités impliquent que

$$|\sin(x)| \leq |x| \to 0,$$

$$\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} \to 1,$$

lorsque $x \to 0$, ce qui signifie que les fonction sin et cos sont continues en 0. En vertu du théorème des gendarmes, on a donc

$$\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x} = \frac{\sin(x)}{x} \to 1 = \sin'(0),$$

lorsque $x \to 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x} &= \frac{\cos(x)-1}{x}\cdot\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1} \\
&= -\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1} \\
&\to -1\cdot 0 = 0 = \cos'(0),
\end{aligned}$$

lorsque $x \to 0$. On conclut que

$$\cos'(a) = -\sin(a).$$

La règle de dérivation en chaîne appliquée à

$$\sin(y) = -\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

donne alors

$$\sin'(a) = \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a).$$

En particulier, les fonction sin et cos sont continues en tout point $a \in \mathbb{R}$.

5.2 Théorème des accroissements finis

Soit

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b). Alors, il existe $c \in (a, b)$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dans le cas où $f(a) = f(b)$, le résultat est appelé le ***théorème de Rolle***.

Démonstration : On définit

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a),$$

qui est une fonction continue sur $[a, b]$ avec $F(a) = F(b) = 0$, et dérivable sur (a, b) avec

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Par la propriété des bornes atteintes, il existe $c, d \in [a, b]$ tels que

$$\begin{array}{rcl} F(c) & = & m = \inf\left\{F(x) : x \in [a, b]\right\}, \\ F(d) & = & M = \sup\left\{F(x) : x \in [a, b]\right\}. \end{array}$$

Si $M = m = 0$, alors $F(x) = 0$, pour tout $x \in [a, b]$, et $F'(x) = 0$, pour tout $x \in (a, b)$. Si $M \neq m$, alors $M \neq 0$ ou $m \neq 0$. Considérons le cas où $M \neq 0$.

Alors, $d \in (a, b)$ et $F(x) \leq F(d)$, pour tout $x \in [a, b]$. On a donc

$$\begin{aligned} F'_g(d) &= \lim_{x \to d^-} \frac{F(x) - F(d)}{x - d} \geq 0, \\ F'_d(d) &= \lim_{x \to d^+} \frac{F(x) - F(d)}{x - d} \leq 0. \end{aligned}$$

Puisque F est dérivable en d, on a $F'd) = F'_g(d) = F'_d(d) = 0$.

Corollaire 1 (théorème des accroissements finis généralisé) : Soient

$$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$$

des fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur (a, b) avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$. Alors, il existe $c \in (a, b)$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Ce résultat est aussi appelé le ***théorème de la moyenne de Cauchy***.

Démonstration : On définit la fonction

$$G(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)),$$

qui est continue sur $[a, b]$ avec $G(a) = G(b) = 0$, et dérivable sur (a, b). Le théorème des accroissements finis garantit alors l'existence de $c \in (a, b)$ tel que

$$0 = \frac{G(b) - G(a)}{b - a} = G'(c) = f'(c) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right) g'(c),$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Corollaire 2 (conditions de monotonicité d'une fonction dérivable) : Une fonction

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b), est croissante (décroissante) si et seulement si $f'(x) \geq 0$ (≤ 0), pour tout $x \in (a, b)$. Elle est croissante strictement (décroissante strictement) si $f'(x) > 0$ (< 0), pour tout $x \in (a, b)$.

Démonstration : Par le théorème des accroissements finis, si $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, alors il existe $c \in (x_1, x_2)$ tel que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

La condition dans chaque cas est donc suffisante du fait que le signe de l'expression de gauche est le signe de la dérivée en c. D'autre part, si f est croissante, alors on a nécessairement

$$0 \leq \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \to f'_d(c) = f'(c),$$

pour $a < c < x < b$, lorsque $x \to c^+$, d'où $f'(c) \geq 0$. L'inégalité est inversée lorsque f est décroissante.

Exemple (condition de croissance d'un polynôme cubique)

Soit le polynôme

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$. La dérivée en x est donnée par

$$P'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 3\left(x + \frac{a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3}\right).$$

On a $P'(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si et seulement si $a^2 - 3b \leq 0$. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que $P(x)$ soit une fonction croissante sur tout intervalle fermé borné, donc sur tout $\mathbb{R}$. Si l'inégalité est stricte, alors $P(x)$ est en fait une fonction strictement croissante. C'est aussi le cas si $a^2 - 3b = 0$, car alors $P'(x) \geq 0$ avec égalité seulement si $x = -a/3$. Par conséquent, $P(x)$ est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $(-\infty, -a/3]$ et sur l'intervalle $[-a/3, +\infty)$. D'autre part, si

$$-\infty < x_1 < -a/3 < x_2 < +\infty,$$

alors on a

$$P(x_1) < P(-a/3) < P(x_2),$$

ce qui complète la démonstration de l'affirmation.

5.3 Règle de l'Hôpital

La règle de l'Hôpital affirme que la limite du quotient de deux fonctions qui tendent toutes deux vers 0 ou toutes deux vers $\pm\infty$, qui est alors de forme indéterminée, est la limite du quotient des dérivées de ces fonctions.

Lorsque les deux fonctions, représentées par f et g satisfont $f(a) = g(a) = 0$ en un point $a \in \mathbb{R}$, où elles sont dérivables et $g'(a) \neq 0$, on a évidemment

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)} \to \frac{f'a)}{g'(a)},$$

lorsque $x \to a$.

Lorsque les deux fonctions ne sont pas dérivables en $a \in \mathbb{R}$ ou que $a = +\infty$ ou $-\infty$, la situation est plus délicate.

Proposition : Soient deux fonctions dérivables

$$f, g : (a, b) \to \mathbb{R},$$

où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, qui sont telles que $g'(x) \neq 0$, pour tout $x \in (a, b)$, et qui satisfont

$$f(a^+) = g(a^+) = 0 \text{ ou } \pm\infty.$$

Alors, on a

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in [-\infty, +\infty],$$

si

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in [-\infty, +\infty].$$

On obtient le même résultat si a^+ est remplacé par b^-.

Remarque. On peut répéter l'argument avec les dérivées des dérivées lorsque la limite des quotients des dérivées est de forme indéterminée, et ainsi de suite.

Démonstration : Par la définition et les propriétés de la limite, il suffit de montrer que si

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to l \in [-\infty, +\infty],$$

lorsque $x_n \to a^+$, alors $l = L$.

(a) Forme $0/0$ **:** Si $a \in \mathbb{R}$, alors on définit $f(a) = g(a) = 0$ de telle sorte que f et g sont continues sur $[a, x_n]$, en plus d'être dérivable sur (a, x_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème des accroissements finis généralisé, il existe $c_n \in (a, x_n)$ tel que

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \to L \in [-\infty, +\infty],$$

lorsque $ax_n \to a^+$, et donc lorsque $c_n \to a^+$ par le théorème des gendarmes. On conclut alors que $l = L$. Si $a = -\infty$, alors on considère sans perte de généralité que $b < 0$ et on définit

$$F(y) = f(-1/y), G(y) = g(-1/y),$$

pour $-1/y \in (-\infty, b)$, c'est-à-dire, $y \in (0, -1/b)$, ainsi que

$$F(0) = \lim_{y \to 0^+} F(y) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0,$$

$$G(0) = \lim_{y \to 0^+} G(y) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0.$$

Ces fonctions sont continues sur $[0, y_n]$ et dérivables sur $(0, y_n)$ pour

$$0 < y_n = -\frac{1}{x_n} < -\frac{1}{b},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème des accroissements finis généralisé et la règle de dérivation en chaîne garantissent alors l'existence de $d_n = -1/c_n \in (0, y_n)$, c'est-à-dire, $c_n = -1/d_n \in (-\infty, x_n)$, tel que

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{F(y_n) - F(0)}{G(y_n) - G(0)} = \frac{F'(d_n)}{G'(d_n)} = \frac{f'(c_n) \cdot (1/d_n^2)}{g'(c_n) \cdot (1/d_n^2)} \to L \in [-\infty, +\infty],$$

lorsque $x_n \to -\infty$, et donc lorsque $c_n \to -\infty$. On conclut encore que $l = L$.

(b) Forme $\pm\infty/\pm\infty$: Par la définition de limite, il existe une suite $\{z_k\} \subseteq (a,b)$ telle que $z_k \to a^+$ et

$$\begin{aligned} \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| \leq \frac{1}{k}, \text{ si } L \in \mathbb{R}, \\ \frac{f'(c)}{g'(c)} \geq k, \text{ si } L = +\infty, \\ \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq -k, \text{ si } L = -\infty, \end{aligned}$$

dès que $a < c < z_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé. D'autre part, si $x_n \to a^+$, alors il existe $N(k) \in \mathbb{N}$ tel que $a < x_n < z_k$, dès que $n \geq N(k)$. Par le théorème des accroissements finis généralisé, il existe alors $c_{n,k} \in (x_n, z_k)$ tel que

$$\frac{f(z_k) - f(x_n)}{g(z_k) - g(x_n)} = \frac{f'(c_{n,k})}{g'(c_{n,k})},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(z_k)}{g(x_n)} + \left(1 - \frac{g(z_k)}{g(x_n)}\right) \cdot \frac{f'(c_{n,k})}{g'(c_{n,k})}.$$

Lorsque $n \to +\infty$, on a

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to l \text{ et } \frac{f(z_k)}{g(x_n)}, \frac{g(z_k)}{g(x_n)} \to 0,$$

d'où

$$\frac{f'(c_{n,k})}{g'(c_{n,k})} \to l.$$

On conclut donc que

$$\begin{aligned} |l - L| \leq \frac{1}{k}, \text{ si } L \in \mathbb{R}, \\ l \geq k, \text{ si } L = +\infty, \\ l \leq -k, \text{ si } L = -\infty, \end{aligned}$$

et ce pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé. Cela signifie que $l = L$.

5.4 Formule de Taylor

Soit

$$f = f^{(0)} : (a,b) \to \mathbb{R},$$

une fonction dérivable jusqu'à l'ordre $n+1$, c'est-à-dire dérivable $n+1$ fois, avec

$$f^{(1)}(x) = \frac{df^{(0)}}{dx}(x),$$

comme ***dérivée première*** (c'est-à-dire d'ordre 1),

$$f^{(2)}(x) = \frac{df^{(1)}}{dx}(x),$$

comme ***dérivée seconde*** (c'est-à-dire d'ordre 2), jusqu'à

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{df^{(n)}}{dx}(x),$$

comme ***dérivée*** $(n+1)$***-ième*** (c'est-à-dire d'ordre $n+1$), pour un entier $n \geq 1$. Alors le ***développement limité de Taylor d'ordre*** n de la fonction f en $x_0 \in (a,b)$ avec ***reste de Lagrange*** R_n est donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x),$$

pour tout $x \in (a,b)$, où

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

pour un certain nombre réel c compris strictement entre x_0 et x.

Démonstration : Considérons $x_0 < x$ et posons

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \\ G(t) &= (x-t)^{n+1}, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [x_0, x]$. On a alors $F(x) = f(x)$, $G(x) = 0$ et $G(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$. De plus, les hypothèses du théorème des accroissements finis généralisé étant vérifiées, il existe $c \in (x_0, x)$ tel que

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)},$$

où

$$\begin{aligned} F'(c) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(x-c)^{k-1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n, \end{aligned}$$

alors que

$$G'(c) = -(n+1)(x-c)^n.$$

Par conséquent, on obtient que

$$f(x) - F(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Fonction petit ordre

Le reste $R_n(x)$ est une ***fonction petit ordre*** de $(x-x_0)^n$, et on écrit $R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$, si

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \to 0,$$

lorsque $x \to x_0$, c'est-à-dire, lorsque $(x-x_0)^n \to 0$. Cela est le cas s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq M$ pour tout $c \in (a,b)$, car alors

$$\left|\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!} \cdot |x-x_0| \leq \frac{M}{(n+1)!} \cdot |x-x_0| \to 0,$$

lorsque $x \to x_0$. Dans ce cas, le reste $R_n(x)$ est une ***fonction grand ordre*** de $(x-x_0)^{n+1}$, et on écrit $R_n(x) = O\left((x-x_0)^{n+1}\right)$, car

$$\left|\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}\right| \leq \frac{M}{(n+1)!} < +\infty,$$

pour tout $x \in (a,b)$.

Fonction exponentielle

La fonction f qui satisfait

$$f'(x) = f(x) > 0,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, est ***indéfiniment dérivable***, car elle est dérivable de tout ordre des entiers naturels. Par induction, on a en fait

$$f^{(n)}(x) = f(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avec la condition supplémentaire $f(0) = 1$, le développement de Taylor d'ordre n de f en 0 est donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, où

$$R_n(x) = \frac{f(c)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

pour un certain nombre réel c compris strictement entre 0 et x. La fonction f étant continue, car dérivable, sur tout l'intervalle $[-|x|, |x|]$, la propriété des bornes atteintes garantit l'existence d'un nombre $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(c)| \leq M$. On a donc

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1} \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$. Par conséquent, le ***développement en série de Taylor*** de f en 0 est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela signifie que

$$f(x) = \exp\{x\}.$$

En particulier,

$$e = \exp\{1\} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n(1),$$

où

$$R_n(1) = \frac{f(c)}{(n+1)!},$$

pour $c \in (0,1)$. Or, $f(c) \leq f(1) = e < 3$, car f est de dérivée strictement positive, donc nécessairement croissante. Pour $n = 8$, et avec une erreur qui satisfait les inégalités

$$0 \leq R_8(1) \leq \frac{3}{9!} \leq 10^{-5},$$

on obtient ainsi l'approximation $e \approx 2,71828$ pour la constante d'Euler.

D'autre part, on peut montrer que e est un nombre irrationnel. Supposons au contraire que $e = p/q$, pour $p, q \in \mathbb{N}$, et considérons $n \geq \max\{4, q+1\}$. On a alors

$$e = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{f(c)}{n!},$$

c'est-à-dire,

$$0 < (n-1)!e - (n-1)! \cdot \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right) = \frac{f(c)}{n} < \frac{3}{4}.$$

Cela est une contradiction, puisque le terme au centre est nécessairement un entier et il n'existe aucun entier strictement compris entre 0 et 1.

Fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle étant continue et strictement croissante sur tout intervalle, car de dérivée strictement positive, elle possède une fonction réciproque, appelée ***logarithme népérien*** et représentée par ln. Cette fonction est définie par

$$\exp\{\ln(y)\} = y,$$

pour tout nombre réel $y > 0$, avec $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = \ln(\exp\{1\}) = 1$. Elle est continue et dérivable. De plus, en posant $x = \ln(y)$, la dérivée est donnée par

$$\frac{d}{dy}\ln(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}\exp\{x\}} = \frac{1}{\exp\{x\}} = \frac{1}{y},$$

pour tout nombre réel $y > 0$.

Fonction puissance réelle

Pour tout nombre réel $a > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la ***puissance de*** a ***d'exposant*** x est définie par

$$a^x = \exp\{x \ln(a)\}.$$

En particulier
$$e^x = \exp\{x\ln(e)\} = \exp\{x\}.$$
Par la règle de dérivation en chaîne, on a
$$\frac{d}{da}a^x = \frac{x}{a}\cdot\exp\{x\ln(a)\} = xa^{x-1},$$
pour la dérivée par rapport à $a > 0$, et
$$\frac{d}{dx}a^x = \ln(a)\cdot\exp\{x\ln(a)\} = \ln(a)\cdot a^x,$$
pour la dérivée par rapport à $x \in \mathbb{R}$. On note que
$$\ln(a^x) = \ln(\exp\{x\ln(a)\}) = x\ln(a).$$
Finalement, on a
$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x \to e^a,$$
lorsque $x \to +\infty$. En effet, la règle de l'Hôpital donne
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{1/x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+a/x}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-1/x^2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{a+x} = a.\end{aligned}$$
On a alors
$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \exp\left\{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\} \to \exp\{a\},$$
par la continuité de la fonction exponentielle.

5.5 Extrema locaux

Une fonction
$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$
atteint un ***maximum local*** en $x_0 \in (a,b)$ s'il existe $\delta > 0$ tel que
$$f(x) \le f(x_0) \text{ dès que } |x - x_0| < \delta.$$
Dans le cas où
$$f(x) \ge f(x_0) \text{ dès que } |x - x_0| < \delta,$$

il s'agit d'un ***minimum local***. Dans les deux cas, on a un ***extremum local***. Si l'égalité a lieu seulement lorsque $x = x_0$, alors il s'agit d'un ***extremum local strict***. À noter que x_0 est un point de minimum local de f si et seulement si x_0 est un point de maximum local de $-f$. D'autre part, x_0 est un ***point critique*** de f si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$.

Proposition 1 : Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ est dérivable en un point de maximum local $x_0 \in (a, b)$, alors x_0 est un point critique.

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\leq 0 \text{ dès que } x_0 < x < x_0 + \delta, \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\geq 0 \text{ dès que } x_0 - \delta < x < x_0, \end{aligned}$$

pour un certain $\delta > 0$, d'où

$$0 \leq f'_g(x_0) = f'(x_0) = f'_d(x_0) \leq 0,$$

ce qui permet de conclure.

Proposition 2 : Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable jusqu'à l'ordre $n + 1$ sur (a, b) telle que les n premières dérivées en $x_0 \in (a, b)$ sont nulles, c'est-à-dire, $f^{(1)}(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$, et que la dérivée d'ordre $n+1$ est continue en x_0 et satisfait $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Alors x_0 est un point de maximum local strict de f si $n+1$ est pair et $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, par exemple, si $n+1 = 2$ et $f^{(2)}(x_0) < 0$.

Démonstration : Le développement limité de Taylor d'ordre n de f en x_0 donne

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

où $|c - x_0| < |x - x_0|$. Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $f^{(n+1)}(c) < 0$ dès que $|c - x_0| < \delta$. Pour $|x - x_0| < \delta$, on a alors

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \leq 0,$$

avec égalité seulement si $x = x_0$.

5.6 Fonctions convexes

Une fonction

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

est dite ***convexe*** si

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2),$$

pour tous $x_1, x_2 \in (a, b)$ et pour tout $t \in [0, 1]$. Il suffit en fait de vérifier la condition pour $x_1 < x_2$ et $t \in (0, 1)$, ll'inégalité étant trivialement satisfaite dans les autres situations.

Lemme 1 : Une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

lorsque $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$.

Démonstration : L'inégalité énoncée est satisfaite si et seulement si

$$(x_3 - x_2)(f(x_2) - f(x_1)) \leq (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_2)),$$

c'est-à-dire,

$$(x_3 - x_2 + x_2 - x_1)f(x_2 \leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3).$$

Cette équation est équivalente à

$$f(x_2) \leq \left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) f(x_1) + \left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right) f(x_3),$$

où

$$x_2 = \left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) x_1 + \left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right) x_3,$$

avec

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} = 1 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in (0, 1).$$

Lemme 2 : Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

lorsque $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$.

Démonstration : On a

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \cdot \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Le lemme 1 permet alors d'obtenir les inégalités

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right) \cdot \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \geq \left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right) \cdot \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Proposition 1 : Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors f est continue.

Démonstration : Par les lemmes 1 et 2, on a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{f(x_4) - f(x_2)}{x_4 - x_2},$$

c'est-à-dire,

$$(x_3 - x_2) \cdot \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right) \leq f(x_3) - f(x_2) \leq (x_3 - x_2) \cdot \left(\frac{f(x_4) - f(x_2)}{x_4 - x_2}\right),$$

lorsque $a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < b$. On obtient alors que $f(x_3) - f(x_2) \to 0$, c'est-à-dire, $f(x_3) \to f(x_2)$, lorsque $x_3 \to x_2^+$, ce qui confirme la continuité à droite en tout point $x_2 \in (a, b)$. La continuité à gauche en tout point

$x_3 \in (a, b)$ est obtenue de la même façon faisant $x_2 \to x_3^-$.

Proposition 2 : Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Démonstration : Soit $a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < b$. Si la fonction f est convexe, alors par le lemme 1, on a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}.$$

En faisant $x_2 \to x_1^+$ et $x_4 \to x_3^+$, on obtient que

$$f'(x_1) = f'_d(x_1) \leq f'_d(x_3) = f'(x_3),$$

ce qui signifie que f' est croissante. Inversement, si f' est croissante, alors par le théorème des accroissements finis, il existe $c_1 \in (x_1, x_2)$ et $c_2 \in (x_2, x_3)$, donc satisfaisant $c_1 < c_2$, tels que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1) \leq f'(c_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Par le lemme 1, cela signifie que f est convexe.

Corollaire : Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable deux fois, alors f est convexe si et seulement si $f^{(2)}(x) \geq 0$, pour tout $x \in (a, b)$.

Démonstration : C'est une conséquence directe de la proposition 2 et du fait qu'une fonction dérivable est croissante si et seulement si sa dérivée est positive.

Références

[1] Couty, R., Ezra, J. Analyse, Tome 1, Troisième édition, Armand Colin, Paris, 1967, 474 pages.

[2] Giroux, A. Analyse 1, Notes de cours, 2009, 110 pages. http ://www.dms.umontreal.ca/ giroux/documents/analyse100-09.pdf

[3] Rudin, W. Principles of Mathematical Analysis, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1964, 270 pages.

[4] Labelle, J., Mercier, A. Introduction à l'analyse réelle, Modulo, Mont-Royal (Québec), 1993, 414 pages.

[5] Royden, H. L. Real Analysis, MacMillan, Second Edition, New York, 1968, 349 pages.

[6] Spivak, M. Calculus, Third Edition, Publish or Perish, Houston, 1994, 670 pages.

[7] Wade, W. R. An Introduction to Analysis, Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2000, 611 pages.

[8] Zorich, V. A. Mathematical Analysis, Springer, Berlin, 2004, 574 pages.