Cours d'ANALYSE MATHEMATIQUE Chapitre 1. Etude des fonctions §4. fonctions continues et limites de fonctions

Michel CHARNAY et Gérard DUBOIS

Pôle de Mathématiques

Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

6 mai 2008 Révision 18 septembre 2009

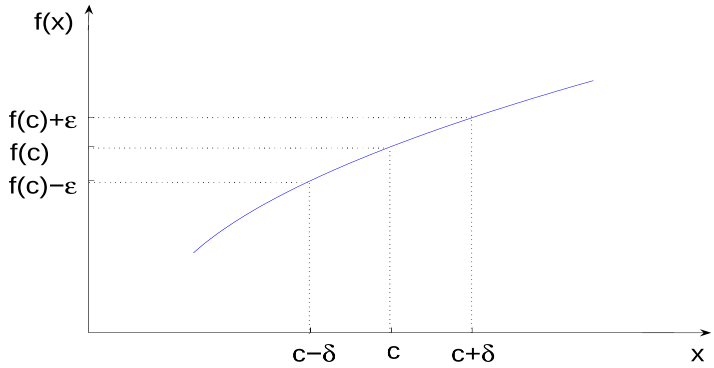
Table des matières

4 Fonctions continues et limites de fonctions

Dans cette section nous étudions des fonctions définies sur des parties de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On rappelle que l'ensemble sur lequel une fonction f est définie est appelé son domaine et est noté $Dom(f)$. La plupart du temps les fonctions avec lesquelles nous aurons à faire seront définies sur des intervalles ouverts, fermés, semi-ouverts ou des réunions d'intervalles de ce type. Par exemple la fonction $f(x) = (2 - x^2)^{-1}$ est définie sur la réunion des intervalles $(-\infty, -\sqrt{2}\,[,\ ]-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\,[,\ ]\sqrt{2}, +\infty)$ mais pas aux points $-\sqrt{2}$ et $+\sqrt{2}$.

Définition. Une fonction f est continue en un point $c \in Dom(f)$ si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists\, \delta(\varepsilon, c) > 0, \qquad \forall x \in Dom(f), \qquad |x - c| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| \leq \varepsilon \tag{1}$$



La fonction f est dite continue si elle est continue en tout point de $Dom(f)$.

Exemple 1. Considérons la fonction $x \in \mathbb{R} \to f(x) = x^2$ et prenons une valeur réelle c quelconque. Alors,

$$f(x) - f(c) = x^2 - c^2 = (x - c)(x + c)$$

et pour $|x - c| \leq \delta \Longleftrightarrow -\delta \leq x - c \leq \delta$ on a $|x + c| \leq |x| + |c| \leq 2|c| + \delta$. Il en résulte les inégalités

$$|(x - c)(x + c)| \leq \delta(2|c| + \delta) \leq \varepsilon$$

avec $\delta \overset{df}{=} \min(\sqrt{\varepsilon/2}, \varepsilon/(4|c|))$ si $c \neq 0$ ou $\delta \overset{df}{=} \sqrt{\varepsilon}$ si $c = 0$ et ceci pour un réel ε positif quelconque. Comme c est une valeur arbitraire, f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

■

Bien souvent il est utile d'avoir un critère de continuité impliquant des suites numériques. Ce critère est donné dans le théorème suivant.

Théorème 4.1. *Une fonction f est continue en un point $c \in Dom(f)$ si et seulement si pour chaque suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points appartenant à $Dom(f)$ qui converge vers c nous avons*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(c)$$

Preuve. Supposons d'abord que la fonction f est continue en c, c'est à dire que la propriété (1) tient. Supposons que $x_n \in Dom(f)$ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to c$. Soit $\varepsilon > 0$ donné et choisissons δ tel que la propriété (1) ait lieu. Puisque la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers c, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - c| \leq \delta$ pour $n \geq N$. La propriété (1) entraîne donc $|f(x_n) - f(c)| \leq \varepsilon$ ce qui traduit la convergence de $(f(x_n))_{n\geq 0}$ vers $f(c)$ puisque ε est un nombre réel positif quelconque.
Inversement montrons que la propriété "l'image par f de toute suite de $Dom(f)$ convergeant vers c est convergente vers $f(c)$" implique la continuité de f en c. Pour cela nous allons procéder par l'absurde. Supposons donc que f n'est pas continue en c, la négation de (1) s'écrit :

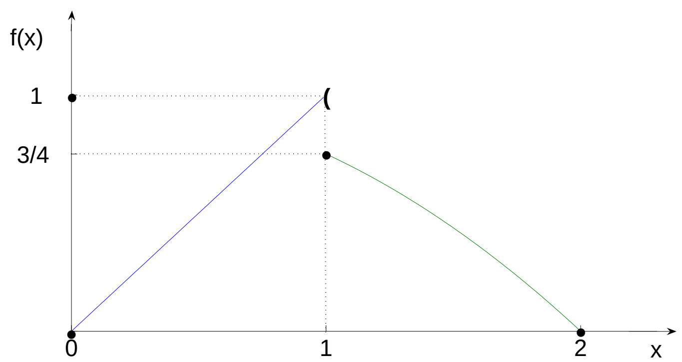
$$\exists\varepsilon > 0, \qquad \forall\delta > 0, \qquad \exists x(\delta) \in Dom(f), \qquad |x - c| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| > \varepsilon\,.$$

Posons $\delta_n \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors il existe $x_n \in Dom(f)$ vérifiant $|x_n - c| \leq \delta$ tel que $|f(x_n) - f(c)| > \varepsilon$. Des inégalités précédentes il découle que la suite $(x_n)_{n>0}$ ainsi créée tend vers c mais que $(f(x_n))_{n\geq 1}$ ne tend pas vers $f(c)$ puisque l'écart de $f(x_n)$ avec $f(c)$ est toujours supérieur à ε. Ainsi il existe donc une suite (x_n) de $Dom(f)$ convergeant vers c telle que la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(c)$: c'est contraire à la propriété précédente (d'où l'absurdité). L'hypothèse faite est donc incorrecte d'où la continuité de f en c.

Nous allons utiliser la caractérisation séquentielle du Théorème 4.1 pour montrer, dans l'exemple suivant, la non continuité en un point d'une fonction f.

Exemple 2. Soit la fonction suivante, polynômiale par morceaux, définie sur $[0, 2]$ comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 - x^2/4 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



Pour $x \in [0, 1[$ il est clair que la définition de la continuité est vérifiée avec $\delta = \varepsilon$. Pour $x \in]1, 2]$, une démarche comme dans l'Exemple 1 montre la continuité de f en ce point. Il reste le point $x = 1$. La figure du graphe de f nous suggère une non continuité en 1 car les valeurs de f, quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, approchent 1 alors que $f(1) = 3/4$. Pour voir que le critère de continuité donné par le Théorème 4.1 est violé, prenons $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors $(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ mais

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1 \neq f(1) = 3/4 \,.$$

Ainsi la fonction f est-elle continue sur $[0, 2]$ sauf au point 1. ■

Dans le théorème suivant nous donnons une liste de propriétés, démontrées en partie, concernant les fonctions continues.

Théorème 4.2. *Soit f et g des fonctions continues sur leur domaine. Soit $D = Dom(f) \cap Dom(g)$, alors :*
1°) $f + g$ est continue sur D
2°) $\forall k \in \mathbb{R}$, la fonction kf est continue sur $Dom(f)$
3°) fg est continue sur D
4°) f/g est continue en tout point $x \in D$ tel que $g(x) \neq 0$

Preuve. A titre d'exemple nous allons montrer 4°) de deux façon différentes.
Considérons un point c quelconque de D tel que $g(c) \neq 0$ et traduisons la continuité de g et f en ce point :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists \delta_1(\varepsilon) > 0, \qquad \forall x \in Dom(g), \qquad |x - c| \leq \delta_1 \Longrightarrow |g(x) - g(c)| \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists \delta_2(\varepsilon) > 0, \qquad \forall x \in Dom(f), \qquad |x - c| \leq \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$$

Pour $\varepsilon = |g(c)|/2 > 0$, la continuité de g en c fait qu'on a la propriété, pour $|x - c| \leq \delta_1$:

$$|\,|g(x)| - |g(c)|\,| \leq |g(x) - g(c)| \leq |g(c)|/2$$

d'où les inégalités

$$-|g(c)|/2 \leq |g(x)| - |g(c)| \leq |g(c)|/2$$

et la minoration

$$|g(c)|/2 \leq |g(x)| \,.$$

Considérons maintenant, pour $x \in D$, la différence $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(c)}{g(c)}\right|$ qui peut s'écrire :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)}\right| = \left|\frac{g(c)f(x) - f(c)g(x)}{g(x)g(c)}\right| = \frac{|g(c)(f(x) - f(c)) + f(c)(g(c) - g(x))|}{|g(x)||g(c)|}$$

Pour $|x - c| \leq \delta_1(|\,g(c)|/2)$ on a donc l'inégalité

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)}\right| \leq \frac{|g(c)||f(x) - f(c)| + |f(c)||g(c) - g(x)|}{|g(c)|^2/2} \,.$$

Pour $\varepsilon > 0$ quelconque maintenant, avec $|x - c| \leq \delta_1 \left(\dfrac{\varepsilon}{2}\,\dfrac{|g(c)|^2}{2|f(c)|}\right)$, on a

$$|g(c) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{|g(c)|^2}{2|f(c)|}$$

et pour $|x-c| \leq \delta_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{|g(c)|}{2}\right)$ on a

$$|f(x)-f(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{|g(c)|}{2}\,.$$

Tout naturellement on est amené à poser

$$\delta(\varepsilon) \stackrel{df}{=} \min\left(\delta_1\left(\frac{|g(c)|}{2}\right),\ \delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{|g(c)|^2}{2|f(c)|}\right),\ \delta_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{|g(c)|}{2}\right)\right)$$

et, pour $|x-c| \leq \delta(\varepsilon)$, $x \in D$, toutes les inégalités précédentes tiennent et on a finalement par majoration :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

ce qui prouve la continuié de f/g en c.
Une variante de cette démonstration peut se faire en utilisant la caractérisation du Théorème 4.1. Soit (x_n) une suite de D convergeant vers c ; elle vérifie donc la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - c| \leq \varepsilon\,.$$

La continuité de f en c fait que $(f(x_n))$ converge vers $f(c)$. De même la suite $(g(x_n))$ converge vers $g(c)$. Comme $g(c)$ est différent de 0, on peut montrer que la suite $(f(x_n)/g(x_n))$ est bien définie pour n assez grand et qu'elle converge vers $(f(c)/g(c))$ (cf §3. Suites numériques).

Les propriétés *1°)* et *2°)* du théorème précédent montrent que l'ensemble des fonctions définies et continues sur $D \subset \mathbb{R}$, noté $\mathcal{C}(D)$, est un espace vectoriel réel, c'est à dire que les combinaisons linéaires réelles de fonctions continues sur D sont encore des fonctions continues :

$$f, g \in \mathcal{C}(D) \Longrightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{C}(D) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Dans le théorème suivant on montre que la composition de fonctions continues est aussi continue

Théorème 4.3. *Soit f et g des fonctions continues et soit l'ensemble D tel que*

$$D \stackrel{\text{df}}{=} \{x \in \mathbb{R}\ /\ x \in Dom(g) \text{ et } g(x) \in Dom(f)\}$$

Alors $f \circ g$ est continue sur D.

Preuve. On sait que, par définition, $f \circ g(x) = f(g(x))$ pour tout x de D. Utilisons la caractérisation de la continuité du Théorème 4.1. Soit c un point de D et considérons une suite (x_n) d'éléments de D convergeant vers c. Par continuité de g la suite $(g(x_n))$ converge vers $g(c)$. Par définition de D, les valeurs $g(x_n)$ et $g(c)$ appartiennent à $Dom(f)$ et par continuité de f la suite $(f(g(x_n)))$ converge donc vers $f(g(c))$. Comme c est quelconque nous montrons ainsi que la fonction $f \circ g$ est continue sur son domaine de définition D.

Exemple 3. On sait que les fonctions $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^{ax} (avec a réel) et les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$, leur domaine de définition. Alors toutes compositions de ces fonctions telles que

$$\sin(x^3 - 2x), \qquad e^{2\cos(x)}, \qquad \cos(\sin(x)),$$

sont aussi des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$\blacksquare$

Exemple 4. Soit la fonction $\tan(x) \overset{df}{=} \sin(x)/\cos(x)$ définie et continue pour tout x n'annulant pas $\cos(x)$ c'est à dire pour $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ avec n entier relatif. Soit maintenant la fonction logarithme népérien $\ln(x)$ qui est définie et continue pour $x > 0$. Considérons la fonction composée $\tan(\ln(x))$; il est clair que, pour une telle fonction, nous devons éviter les $x > 0$ tels que $\ln(x) = \pi(2n+1)/2$ avec n entier, c'est à dire les x de la forme $e^{\pi(2n+1)/2}$, $n \in \mathbb{N}$. En effet pour ces x nous avons $\cos(\ln(x)) = 0$ et la fonction tangente n'est pas définie. Le domaine de définition D de la fonction $\tan(\ln(x))$ s'écrit donc :

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \;\; / \;\; x > 0 \text{ et } x \neq e^{\pi(2n+1)/2} \;,\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

La continuité des fonctions tangente et logarithme implique donc, par le Théorème 4.3, la continuité de $\tan(\ln(x))$ sur D.

$\blacksquare$

Revenons à la propriété (1) définissant la continuité de f en c qu'on convient de noter

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in Dom(f)}} f(x) = f(c) \overset{df}{=} L$$

ou encore de façon équivalente, grâce au Théorème 4.1

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n)) = f(c) \overset{df}{=} L$$

pour toute suite (x_n) d'éléments de $Dom(f)$ convergeant vers c. On dit alors que L est la limite de f en c.
On peut généraliser cette notion de limite d'une fonction en prenant pour c une valeur appartenant à l'adhérence de $Dom(f)$, ensemble qui comprend $Dom(f)$ et qu'on définit maintenant.

Définition. Soit S une partie de $\mathbb{R}$. On dit que la valeur réelle c appartient à l'***adhérence*** de S, et on note $c \in \overline{S}$, si on a la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \cap S \neq \varnothing \;,$$

c'est à dire si tout intervalle fermé centré en c coupe l'ensemble S. Il est clair que tout élément de S appartient à l'adhérence de S. On a donc en général l'inclusion $S \subset \overline{S}$ avec l'égalité $S = \overline{S}$ si et seulement si S est un ensemble ***fermé*** (cf §3 pour la définition). Par exemple si $S =]0,1]$ on peut montrer que $c = 0$ appartient à $\overline{S}$ et que c'est le seul point n'appartenant pas à S dans ce cas. Comme tout point de S appartient à son adhérence on a donc $\overline{S} = [0,1]$. Si maintenant S est l'intervalle fermé $[0,1]$, on montre facilement qu'aucun point extérieur à S n'appartient à son adhérence ; on a donc ici l'égalité ensembliste $S = \overline{S}$ et l'intervalle fermé $[0,1]$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}$.

Limite d'une fonction. Soit f une fonction et c un point de $\overline{Dom(f)}$; on dit que $L \in \mathbb{R}$ est la ***limite*** de la fonction f lorsque x tend vers c, x appartenant à $Dom(f)$, si on a la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists \delta > 0, \qquad \forall x \in Dom(f), \qquad |x - c| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon \tag{2}$$

Dans ce cas on note

$$L = \lim_{\substack{x \to c \\ x \in Dom(f)}} f(x)\,.$$

On peut montrer, comme dans le Théorème 4.1, que cette propriété (2) est équivalente à la propriété séquentielle suivante :

$$\forall (x_n) \text{ suite d'éléments de } Dom(f) \text{ convergeant vers } c, \text{ on a } L = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \tag{3}$$

Par ailleurs la limite L, quand elle existe, est unique ; nous admettrons ce résultat dont la démonstration est basée sur l'unicité de la limite d'une suite convergente.

Exemple 5. Soit la fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, définie pour tout $x \neq 0$, appelée ***fonction sinus cardinal***. Ici $Dom(f) = \mathbb{R}^\star$ et il est clair que 0 appartient à l'adhérence de $Dom(f)$. On peut donc se poser la question de l'existence de la limite de f lorsque x tend vers 0 avec des valeurs non nulles. On verra plus loin que $\sin(x) = x + o(x^2)$, $o(x^2)$ désignant une fonction, définie sur $\mathbb{R}$, négligeable devant x^2 au voisinage de 0, c'est à dire telle que :

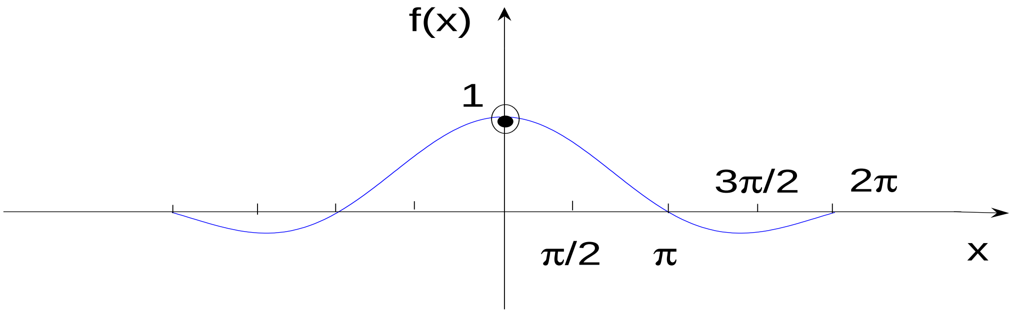
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists \delta(\varepsilon) > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x| \leq \delta \Longrightarrow |o(x^2)| \leq \varepsilon x^2.$$

On en déduit les inégalités :

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| = \left| \frac{o(x^2)}{x} \right| \leq \varepsilon |x| \leq \varepsilon\ ,$$

pour tout $x \neq 0$ tel que $|x| \leq \delta_1(\varepsilon)$ avec $\delta_1(\varepsilon) \overset{df}{=} \min(\delta(\varepsilon), 1)$. Aussi vient-on de montrer que la limite de f lorsque x tend vers 0 est 1 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



■

Cas particuliers de limite infinie. Envisageons maintenant le cas particulier d'une limite infinie pour lequel la limite, au sens donné précédemment, n'existe pas. On dira que la limite de f au voisinage de $c \in \overline{Dom(f)}$ est égale à $+\infty$ si, au voisinage de c, la fonction f est aussi grande qu'on veut ; plus précisément si :

$$\forall A > 0, \qquad \exists \delta > 0, \qquad \forall x \in Dom(f), \qquad |x - c| \leq \delta \Longrightarrow A \leq f(x)\,.$$

Dans ce cas on note $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$. Par exemple pour $f : x \in \mathbb{R}^{\star +} =]0, +\infty) \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ car pour $0 < x \leq \delta \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{A}$ on a $f(x) = \frac{1}{x} \geq A$ et ceci pour tout réel A positif.
De la même façon on dit que la limite de f, au voisinage de c, est égale à $-\infty$ si dans la propriété précédente on remplace la dernière inégalité par $f(x) \leq -A$.
Dans le cas d'une fonction f avec $S \overset{\text{df}}{=} Dom(f)$ non majoré on peut envisager le cas particulier suivant lorsque x tend vers l'infini. Par définition on dit que la limite de f, lorsque x tend vers l'infini, est égale à $+\infty$ si on a la propriété suivante :

$$\forall A > 0, \quad \exists x(A) > 0, \quad x \in S \cap [x(A), +\infty) \Longrightarrow f(x) \geq A$$

et dans ce cas on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
De la même façon on dit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si dans la propriété précédente on remplace $f(x) \geq A$ par $f(x) \leq -A$.
Pour une fonction f telle que $Dom(f)$ est non minorée, on imaginera des propriétés semblables correspondant à $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$.

Concernant les limites de fonctions en un point appartenant à l'adhérence de leur domaine de définition, on a le résultat suivant, comparable au Théorème 4.2 pour la continuité, et qu'on donne sans démonstration.

Théorème 4.4. *Soit f et g deux fonctions et $D \overset{\text{df}}{=} Dom(f) \cap Dom(g)$ l'intersection de leur domaine de définition. Soit $c \in \overline{D}$ un point de l'adhérence de D. On suppose que les limites de f et g en c existent : $\lim_{x \to c} f(x) = \alpha$ et $\lim_{x \to c} g(x) = \beta$.*
On a alors :
1°) $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$
2°) $\lim_{x \to c} kf(x) = k\alpha$ *pour tout* $k \in \mathbb{R}$
3°) $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = \alpha\beta$
4°) $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = \alpha/\beta$ *si* $\beta \neq 0$

Uniforme continuité. Revenons sur la définition (1) de la continuié de f en un point pour remarquer que la taille du nombre positif δ intervenant dans cette définition dépend à la fois du nombre ε et du point c envisagé comme le montre l'Exemple 1. Une fonction pour laquelle la propriété (1) est vérifiée avec δ ne dépendant que de $\varepsilon > 0$ est dite uniformément continue.

Définition. Une fonction (continue) f définie sur $Dom(f)$ est dite ***uniformément continue*** si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tels que pour tout $x \in Dom(f)$ et pour tout $c \in Dom(f)$ on ait la propriété

$$|x - c| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$$

Exemple 6. Soit la fonction continue $f(x) = x^2$ pour $x \in [-A, +A]$ avec $A > 0$. En suivant la démarche de l'Exemple 1 et en prenant $\delta \overset{df}{=} \min\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \frac{\varepsilon}{4A}\right\}$ on a pour tout x et pour tout c de $Dom(f) = [-A, +A]$:

$$|x - c| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$$

Ainsi $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[-A, +A]$ mais ne l'est pas sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ici l'expression de $\delta(\varepsilon)$ est indépendante de x et est reliée à la fonction f par l'intermédiaire du radical et de la valeur A.

■

Ce que nous avons montré dans l'Exemple 6 peut être étendu au cas d'une fonction f continue, avec $Dom(f) = [a, b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. Ce résultat d'uniforme continuité de f sera démontré dans le paragraphe 6 consacré aux théorèmes de base.

Critères de Cauchy d'existence d'une limite. Soit une fonction $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une valeur réelle c appartenant à l'adhérence de S ($= Dom(f)$) notée $\overline{S}$. On suppose que la propriété (2) est vérifiée c'est à dire que la limite de f existe quand x approche c et qu'elle vaut L :

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in S}} f(x) = L$$

Quand elle existe, on sait que la limite d'une fonction est unique. Par ailleurs lorsque c appartient à S, la limite, quand elle existe, est $f(c)$ et on dit que f est continue en c. C'est ce que nous avons vu précédemment.

Envisageons maintenant le *cas particulier* de la limite en $+\infty$ pour une fonction f définie sur une partie S de $\mathbb{R}$ non majorée ($\forall M \in \mathbb{R}^+$, $\exists x \in S$ pour lequel $M < x$). Par définition, nous dirons que la limite de $f(x)$, lorsque $x \in S$ tend vers l'infini, est égale à L si on a la propriété suivante :

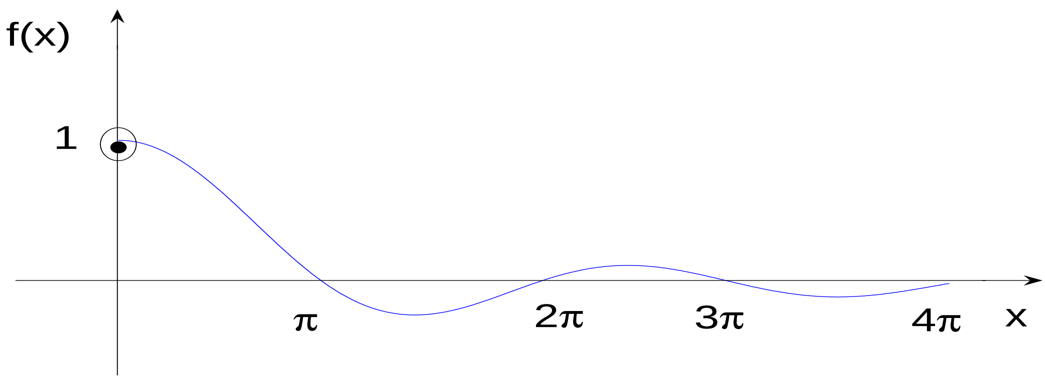
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists A(\varepsilon) > 0, \qquad x \in S \cap [A, +\infty) \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon \tag{4}$$

Dans ce cas on note :

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S}} f(x) = L$$

De la même façon la limite en $-\infty$ pour une fonction f définie sur une partie S de $\mathbb{R}$ non minorée ($\forall M \in \mathbb{R}^+$, $\exists x \in S$ pour lequel $x < -M$) est égale à L si dans la propriété (4) on impose à x d'appartenir à $S \cap (-\infty, -A]$.

Exemple 7. Reprenons la fonction sinus cardinal $f(x) = \dfrac{sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^\star$. Il est clair que $\mathbb{R}^\star$ n'est pas une partie majorée et qu'on peut se poser la question de l'existence d'une limite en $+\infty$ pour f. Comme $|f(x)| = \left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right| \leq \dfrac{1}{|x|}$ pour tout x de $\mathbb{R}^\star$, la propriété (4) est vérifiée avec $A(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}$ et $L = 0$: pour $x \geq A(\varepsilon)$ on a bien $|f(x) - 0| = \left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{A(\varepsilon)} = \varepsilon$ et ceci $\forall \varepsilon > 0$.



■

Les propriétés précédentes impliquent la connaissance *a priori* d'une valeur possible pour L si on veut vérifier leur véracité. Dans les critères de Cauchy d'existence d'une limite qu'on donne ci-après, il n'est pas fait référence à la limite éventuelle, d'où leur intérêt plutôt théorique.

Théorème 4.5 (critères de Cauchy).
1°) pour $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *avec* $c \in \overline{S}$ *on a l'équivalence suivante :*

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in S}} f(x) \text{ existe} \iff \text{propriété } ①$$

avec ① : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta(\varepsilon) > 0,\ \forall x, y \in [c - \eta, c + \eta] \cap S \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$
2°) pour $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *avec* S *partie non majorée de* $\mathbb{R}$, *on a l'équivalence suivante :*

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S}} f(x) \text{ existe} \iff \text{propriété } ②$$

avec ② : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists R(\varepsilon) > 0,\ \forall x, y \in S \cap [R, +\infty) \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$
3°) pour $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *avec* S *partie non minorée de* $\mathbb{R}$, *on a l'équivalence suivante :*

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ x \in S}} f(x) \text{ existe} \iff \text{propriété } ③$$

avec ③ : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists R(\varepsilon) > 0,\ \forall x, y \in S \cap (-\infty, -R] \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

La démonstration d'un tel résultat s'appuie sur le fait qu'il y a équivalence dans $\mathbb{R}$ entre suite convergente et suite de Cauchy (cf §3. Suites numériques). Nous ne la ferons pas ici. On peut cependant (afin de se rassurer éventuellement) vérifier le critère ② dans le cas de la fonction f de l'Exemple 7. En effet pour $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ on a pour x et y positifs

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{\sin(x)}{x} - \frac{\sin(y)}{y} \right| \leq \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| + \left| \frac{\sin(y)}{y} \right| \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

avec $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \leq \varepsilon$ dès que x et y sont supérieurs à $R(\varepsilon) = \dfrac{2}{\varepsilon}$. Ainsi $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S}} f(x)$ existe bien selon le critère ②.