24. Calcul vectoriel

Prérequis : trigonométrie ***Requis pour :*** géométrie analytique

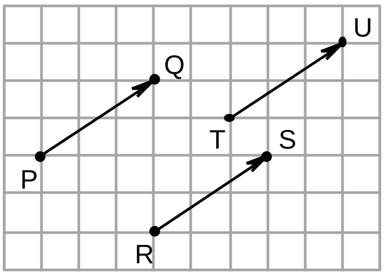
I. Les vecteurs

William Hamilton (1805-1865)

L'Irlandais Sir *William Hamilton* (1805-1865) fut l'un des premiers à utiliser les vecteurs et il est probablement l'inventeur du mot (mot venant du latin *vehere*, qui signifie « porter »). L'Allemand *Hermann Grassman* (1809-1877) introduisit la notation vectorielle à l'occasion de problèmes de physique. L'Américain *Gibbs* (1839-1903) et l'Anglais *Heaviside* (1850-1925), disciples de *Hamilton*, donnent au calcul vectoriel sa forme quasi définitive, mais ce type de « calcul » met assez de temps à s'introduire en France. *Michel Chasles* (1793-1880), avait déjà pressenti l'importance du sens sur un axe sans aller jusqu'à la notion de vecteur.

En termes simples, un **vecteur** est une grandeur qui a une **intensité**, une **direction** et un **sens**. Il est commode de le représenter par une flèche. Pour fixer les idées, on peut penser aux flèches indiquant la direction et la force du vent sur les cartes météorologiques. Les vecteurs sont particulièrement utilisés en physique, par exemple pour représenter la force, la vitesse, l'accélération, etc. Ils sont à différencier des **scalaires** (le temps, la température) qui ont une intensité mais pas de direction.

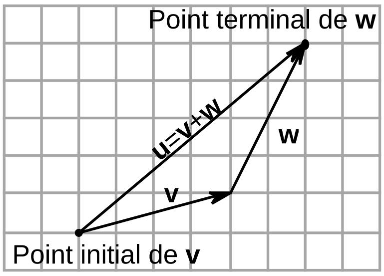
Notation
Les vecteurs seront écrits en gras (par exemple **v**).
Une autre notation usuelle est $\vec{v}$.



$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TU}$$

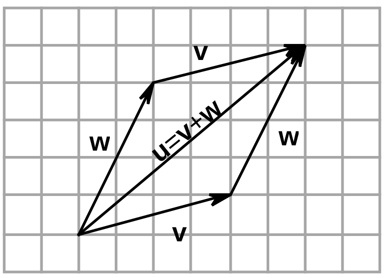
Deux vecteurs **v** et **w** sont égaux s'ils ont la **même intensité** (longueur), la **même direction** et le **même sens**. Par exemple, les trois vecteurs de la figure ci-contre sont égaux, même s'ils ont des points initiaux et terminaux différents. **Ces trois flèches représentent donc le même vecteur**. On peut ainsi penser à un vecteur en terme de flèche, en gardant à l'esprit que cette flèche « flotte » dans le plan, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de point fixe.
Le vecteur qui a une longueur de 0 est appelé **vecteur nul** et est noté **0**. Le vecteur nul n'a évidemment pas de direction, donc pas de sens.

Addition de vecteurs



La somme **v**+**w** de deux vecteurs est définie comme suit: on met les deux vecteurs bout à bout de sorte que le point terminal de **v** coïncide avec le point initial de **w**. Le vecteur **u**=**v**+**w** relie le point initial de **v** au point terminal de **w**.

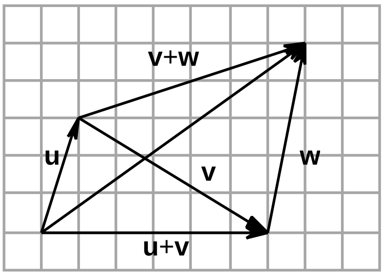
Les quatre propriétés de d'addition



i. L'addition de vecteurs est **commutative**. Cela signifie que, si **v** et **w** sont des vecteurs, alors

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

Remarquez que la propriété de commutativité est une autre façon de dire que les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux et parallèles.

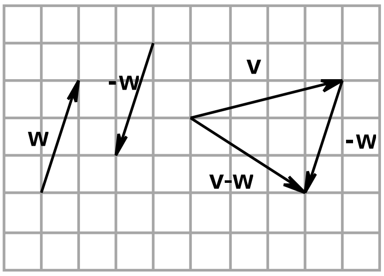


ii. L'addition de vecteurs est aussi **associative**. Cela veut dire que, si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont des vecteurs, alors

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

iii. L'addition **a un élément neutre** : le vecteur nul. En effet :

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$$



iv. Enfin, si $\mathbf{v}$ est un vecteur, alors $-\mathbf{v}$ est le vecteur ayant la même direction et la même intensité que $\mathbf{v}$, mais de sens opposé à $\mathbf{v}$. Donc

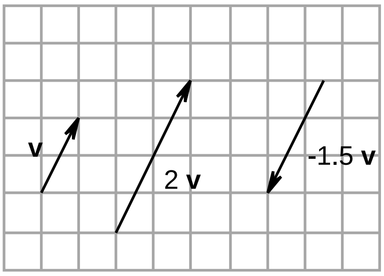
$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

La différence $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ de deux vecteurs est définie comme

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$$

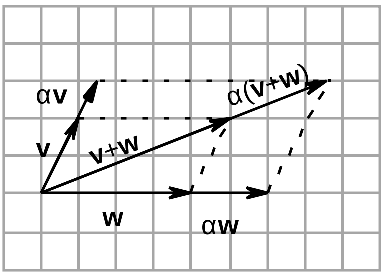
Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Quand on manipule des vecteurs, on utilise le mot « scalaire » à la place de « nombre réel ». Les scalaires sont souvent désignés par une lettre grecque.



Si α est un scalaire et $\mathbf{v}$ un vecteur, alors le produit $\alpha\mathbf{v}$ est défini comme suit :

1. Si $\alpha > 0$, alors le produit $\alpha\mathbf{v}$ est le vecteur dont l'intensité a α fois l'intensité de $\mathbf{v}$ et dont le sens est le même que $\mathbf{v}$.
2. Si $\alpha < 0$, alors le produit $\alpha\mathbf{v}$ est le vecteur dont l'intensité a α fois l'intensité de $\mathbf{v}$ et dont le sens est l'opposé de celui de $\mathbf{v}$.
3. Si $\alpha = 0$ ou si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, alors le produit $\alpha\mathbf{v}$ est le vecteur nul.



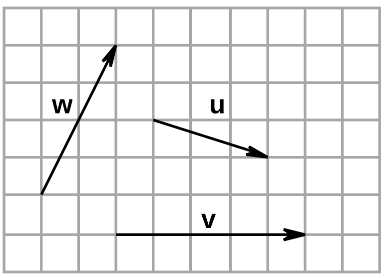
Propriétés du produit

$$0\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad 1\mathbf{v} = \mathbf{v} \qquad -1\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

$$(\alpha+\beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v} \qquad \alpha(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$$

$$\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$$

Exercice 1[@]

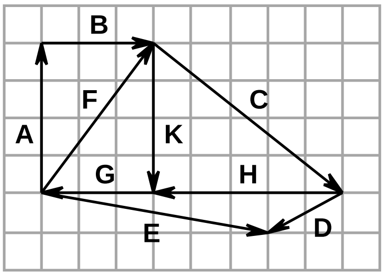


Utilisez les vecteurs de la figure ci-contre pour dessiner les vecteurs suivants :

a. $\mathbf{v} + \mathbf{w}$
b. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$
c. $3\mathbf{v}$
d. $4\mathbf{w}$
e. $\mathbf{v} - \mathbf{w}$
f. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$
g. $3(\mathbf{v} + \mathbf{u}) - 2\mathbf{w}$
h. $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w}$

www.jura.ch/lcp/madimu

Exercice 2



Utilisez la figure ci-contre pour répondre aux questions ci-dessous :

a. Que vaut **x**, sachant que **x**+**B** =**F** ?
b. Que vaut **x**, sachant que **x**+**D**=**E** ? Donnez trois possibilités.
c. Exprimez **C** par rapport à **E**, **D** et **F**.
d. Exprimez **G** par rapport à **C**, **D**, **E** et **K**.
e. Exprimez **E** par rapport à **G**, **H** et **D**.
f. Exprimez **E** par rapport à **A**, **B**, **C** et **D**.
g. Que vaut **x**, sachant que **x**=**A**+**B**+**K**+**G** ?
h. Que vaut **x**, sachant que **x**=**A**+**B**+**C**+**H** ?

Michel Chasles (1793-1880)

Quels que soient les points *A*, *B*, *C*, *O* du plan, on a les trois relations suivantes :

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles)
2. $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

La relation 3 se déduit des deux premières. Saurez-vous le faire ?

Exercice 3

Réponses : $\vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$
$\vec{b}=\overrightarrow{DC}$
$\vec{c}=\vec{0}$

Soient *A*, *B*, *C*, *D* et *E* cinq points quelconques du plan. Simplifiez au maximum les expressions suivantes (sans faire de dessin) :

$$\vec{a}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}$$
$$\vec{b}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}$$
$$\vec{c}=\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB}$$

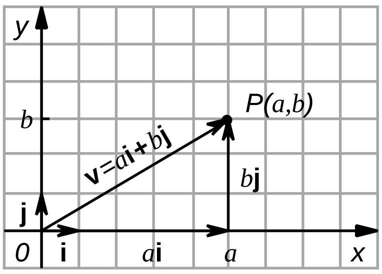
Exercice 4

Soient trois points *A*, *B* et *C* non alignés. Soit le point *G* défini par la relation $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Démontrez que pour tout point *M* du plan, on a la relation $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Représentation des vecteurs dans le plan

On utilise un système de coordonnées rectangulaires pour représenter les vecteurs dans le plan. Appelons **i** un vecteur unité dont la direction est celle de l'axe O*x* et **j** un vecteur unité dont la direction est celle de l'axe O*y*.
En deux dimensions, les deux vecteurs **i** et **j** forment ce que l'on appelle la **base canonique**. Elle est **orthonormée**, c'est-à-dire que les deux vecteurs sont orthogonaux et de norme 1.
Si **v** est un vecteur ayant son point initial à l'origine O et son point terminal en *P(a,b)*, alors on peut représenter **v** comme combinaison des vecteurs **i** et **j** :

$$\mathbf{v}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$



Pour abréger la notation, on écrit :

$\mathbf{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

Les scalaires *a* et *b* sont appelés les **composantes** du vecteur **v** = *a***i** + *b***j**, avec *a* étant la composante dans la direction **i** et *b* la composante dans la direction **j**.

En *n* dimensions, les vecteurs ont *n* composantes.

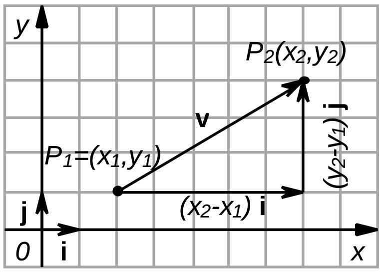
Exemple

$$\mathbf{v}=5\mathbf{i}+3\mathbf{j}=5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

Théorème 1 Supposons qu'un vecteur **v** a pour point initial $P_1(x_1,y_1)$ et comme point terminal $P_2(x_2,y_2)$. On a alors :

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2-x_1)\mathbf{i} + (y_2-y_1)\mathbf{j} = \begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}$$

o



Pour s'en convaincre, on peut comparer les deux figures ci-contre. Les deux triangles sont égaux ; on a simplement translaté le second vers la droite et en haut. Comme la base utilisée est la même, on a clairement $a = x_2 - x_1$ et $b = y_2 - y_1$ (voir l'exemple en bas à gauche).

Théorème 2 Deux vecteurs **v** et **w** sont égaux si et seulement si leurs composantes correspondantes sont égales.

Exercice 5

Soit le vecteur **v** ayant comme point initial P et comme point terminal Q. Écrivez **v** sous la forme $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ et sous la forme $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

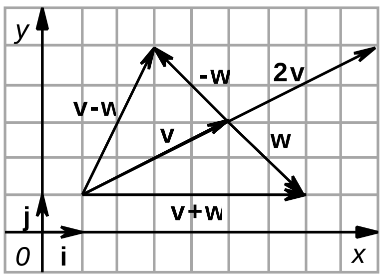
a.	$P(0; 0)$;	$Q(3; 4)$
b.	$P(3; 2)$;	$Q(5; 6)$
c.	$P(-2; -1)$;	$Q(6; -2)$
d.	$P(-3; 7)$;	$Q(0;0)$

Réponses

a. $\mathbf{v}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b.** $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

c. $\mathbf{v}=8\mathbf{i}-\mathbf{j}=\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ **d.** $\mathbf{v}=3\mathbf{i}-7\mathbf{j}=\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

Exemple



$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$2\mathbf{v} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\|2\mathbf{v}\| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 2\sqrt{4^2 + 2^2} = 4\sqrt{5}$

$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Nous pouvons à présent définir l'addition, la soustraction et le produit en utilisant les composantes d'un vecteur.
Soient $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$ et $\mathbf{w} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ deux vecteurs et λ un scalaire. Alors :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (a_1 + a_2)\mathbf{i} + (b_1 + b_2)\mathbf{j} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v} - \mathbf{w} &= (a_1 - a_2)\mathbf{i} + (b_1 - b_2)\mathbf{j} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ b_1 - b_2 \end{pmatrix} \\ \lambda\mathbf{v} &= (\lambda a_1)\mathbf{i} + (\lambda b_1)\mathbf{j} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

Norme d'un vecteur

Si **v** est un vecteur, on utilise le symbole $\|\mathbf{v}\|$ pour représenter la norme de **v**. Puisque $\|\mathbf{v}\|$ est égale à la longueur du vecteur, il suit que $\|\mathbf{v}\|$ a les propriétés suivantes :
Soit **v** un vecteur et λ un scalaire, alors

(a) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$
(b) $\|\mathbf{v}\| = 0$ si et seulement si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
(c) $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$
(d) $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\ \|\mathbf{v}\|$
(e) $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (inégalité du triangle)

Un vecteur **v** pour lequel la norme $\|\mathbf{v}\| = 1$ est appelé un **vecteur unité** (ou **unitaire**).

Dans le plan muni d'un système orthonormé, on a :

$$\boxed{\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

Les quatre termes suivants sont synonymes :

norme, **intensité**, **longueur**, **module**.

Exercice 6[@]

Réponses

a. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} -15 \\ 25 \end{pmatrix}$

d. $\sqrt{34}$ **e.** $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **f.** $\begin{pmatrix} 13 \\ -21 \end{pmatrix}$

g. $\sqrt{89}$ **h.** 2.2254 **i.** $\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

Faites les calculs ci-dessous en utilisant $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a. $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ **b.** $\mathbf{w} - \mathbf{v}$
c. $-5\,\mathbf{v}$ **d.** $\|\mathbf{v}\|$
e. $2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ **f.** $3\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$
g. $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ **h.** $\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{w}\|$
i. le vecteur unité de direction **v**

Théorème 3 Pour tout vecteur non nul, le vecteur

$$\boxed{\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\,\mathbf{v}}$$

est un **vecteur unité** qui a la même direction et le même sens que **v**.

Preuve Soit $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Alors $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{a\mathbf{i} + b\mathbf{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,\mathbf{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,\mathbf{j}.$$

Le vecteur **u** a la même direction et le même sens que **v**, puisque $\|\mathbf{v}\| > 0$ et que a et b sont divisés par le même nombre. De plus

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}} = 1$$

Donc **u** est bien un vecteur unité de direction **v**.

o

On peut rendre unitaire n'importe quel vecteur (non nul) en le multipliant par l'inverse de sa norme.

Exercice 7

Rép. $\mathbf{v} = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Trouvez un vecteur **v** dont la norme est égale à 4 et dont la composante dans la direction **i** est deux fois plus grande que la composante dans la direction **j**.

Exercice 8*

Rép. $\mathbf{v} \begin{pmatrix} 5.936 \\ 3.709 \end{pmatrix}$ $\mathbf{w} = \frac{8}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a. Trouvez un vecteur **v** incliné de 32° par rapport à l'horizontale et dont la norme est égale à 7.
b. Trouvez un vecteur **w** de direction $-\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ et dont la norme est égale à 8.

Applications

Les forces fournissent un exemple de quantités physiques qui peuvent être représentées avantageusement par des vecteurs ; en effet deux forces se combinent comme deux vecteurs s'additionnent. Comment savons-nous cela ? Ce sont des expériences de laboratoire qui ont corroboré cette hypothèse. Ainsi, si deux forces (ou vitesses) $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F_2}$ agissent simultanément sur un objet, le vecteur somme $\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}$ produit le même effet.
La force $\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}$ est parfois appelée la **résultante** de $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F_2}$.

Exercice 9

Rép. 459.54 km/h

D'après ses instruments de bord, un avion se déplace à 500 km/h dans la direction est. Si le vent souffle à une vitesse de 60 km/h dans la direction du nord-ouest, déterminez la vitesse de l'avion par rapport au sol.

Exercice 10

Rép. 217.54 mph

Vu du sol, un avion se déplace vers le nord-ouest à une vitesse constante de 250 miles par heure, poussé par un vent d'est de 50 miles par heure. Quelle serait la vitesse de l'avion s'il n'y avait plus de vent ?

II. Le produit scalaire

La définition du **produit scalaire** est quelque peu inattendue. En effet, le **résultat de ce produit de deux vecteurs sera un scalaire** (d'où son nom)! Cependant, le produit scalaire a une signification dans de nombreuses applications géométriques et physiques.

Définition du produit scalaire

Si $\mathbf{v}=a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$ et $\mathbf{w}=a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ sont deux vecteurs, alors le produit scalaire $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ est défini ainsi :

$$\boxed{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = a_1 a_2 + b_1 b_2} \qquad (1)$$

Exemples

Soient $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ et $\mathbf{w} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ deux vecteurs. Trouvez :

a. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ **b.** $\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$ **c.** $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$
d. $\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}$ **e.** $\|\mathbf{v}\|$ **f.** $\|\mathbf{w}\|$

Solutions

a. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 2\cdot5 + (-3)\cdot3 = 1$ **b.** $\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = 5\cdot2 + 3\cdot(-3) = 1$
c. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 2\cdot2 + (-3)\cdot(-3) = 13$ **d.** $\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = 5\cdot5 + 3\cdot3 = 34$
e. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ **f.** $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

Que remarquez-vous ?

Propriétés du produit scalaire

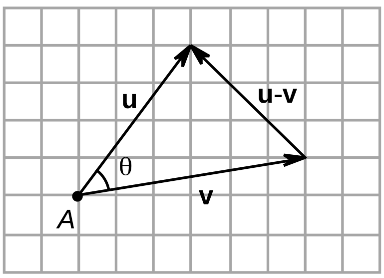
Les résultats obtenus dans l'exemple ci-dessus suggèrent quelques propriétés générales.

Théorème 4 Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont des vecteurs, alors

Commutativité $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ (2)
Distributivité $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ (3)
$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ (4)
$\mathbf{0}\cdot\mathbf{v} = 0$ (5)
$(\lambda\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \lambda\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$ (6)

La démonstration de ces propriétés est laissée en exercice.

Angle entre deux vecteurs



Le produit scalaire permet entre autres de mesurer l'angle compris entre deux vecteurs.
Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs ayant le même point initial A. Les vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ forment un triangle. C'est l'angle θ au point A que l'on appelle l'angle compris entre les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (voir dessin ci-contre).
Les côtés du triangle ont pour longueurs $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ et $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$. Le *théorème du cosinus* nous dit :

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

Nous pouvons utiliser la propriété (4) pour réécrire cette formule en termes de produit scalaire :

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta \qquad (7)$$

Le côté gauche de l'équation peut se réécrire ainsi, grâce à la propriété (3) :

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) &= \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \qquad (8)\end{aligned}$$

En combinant les équations (7) et (8), nous obtenons :

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,\cos\theta$$

ce qui donne, après simplification :

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,\cos\theta$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème 5
Angle entre deux vecteurs

Si **u** et **v** sont deux vecteurs non nuls, l'angle θ, $0 \le \theta \le \pi$, compris entre les vecteurs **u** et **v** est déterminé par la formule :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}} \qquad (9)$$

Remarque

$\boxed{\cos\theta = \dfrac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}}$ donne l'angle **aigu**

Exercice 11

Réponses

a. 0 ; 90°	**b.** 0 ; 90°
c. 4 ; 36.87°	**d.** 6 ; 18.43°
e. 24 ; 16.26°	**f.** –1 ; 81.87°
g. 7 ; 8.13°	**h.** 0 ; 90°

Calculez le produit scalaire $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ et l'angle aigu entre **v** et **w**.

a. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j},\ \mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ **b.** $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **d.** $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

e. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j},\ \mathbf{w} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ **f.** $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j},\ \mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

g. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ **h.** $\mathbf{v} = \mathbf{i},\ \mathbf{w} = -3\mathbf{j}$

Vecteurs parallèles et vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs **v** et **w** sont parallèles (on dit aussi colinéaires) s'il existe un scalaire non nul λ tel que $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$.

Exemple Les vecteurs $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ et $\mathbf{w} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ sont parallèles, puisqu'on peut écrire $\mathbf{v} = -0.5\,\mathbf{w}$. On aurait aussi pu voir que

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} = \frac{-18-2}{\sqrt{10}\sqrt{40}} = \frac{-20}{\sqrt{400}} = -1$$

ce qui implique que l'angle est θ entre **v** et **w** est de π.

Terminologie
Orthogonal, *perpendiculaire* et *normal* sont trois termes pour dire « se croisent selon un angle droit ». Il est coutumier de dire que deux vecteurs sont orthogonaux, deux droites sont perpendiculaires et qu'une droite ou un vecteur et un plan sont normaux.

Si l'angle entre deux vecteurs non nuls **v** et **w** vaut $\pi/2$, les vecteurs sont dits orthogonaux. Il suit de la formule (9) que si **v** et **w** sont orthogonaux, alors $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$, puisque $\cos(\pi/2)=0$.
À l'inverse, si $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$, cela signifie que soit $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, soit $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, soit enfin $\cos(\theta) = 0$. Dans le dernier cas, $\theta = \pi/2$ et donc **v** et **w** sont orthogonaux.

Puisque le vecteur nul n'a pas de direction, on utilise comme convention que le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.

Théorème 6 $\boxed{\text{Deux vecteurs } \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{w} \text{ sont orthogonaux si et seulement si } \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0.}$

Exercice 12

Rép. $a = 3/2$

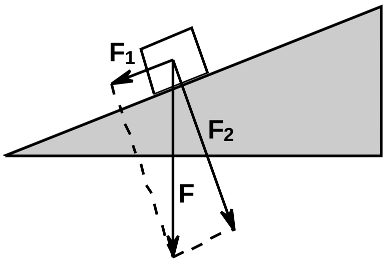
Trouvez a tel que l'angle entre $\mathbf{v} = a\mathbf{i} - \mathbf{j}$ et $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ soit $\pi/2$.

Exercice 13

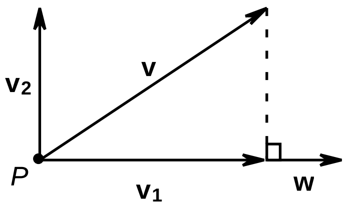
Rép. env. 83.5°

Généralisez à trois dimensions les formules (1) et (9) et calculez l'angle aigu entre les vecteurs $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

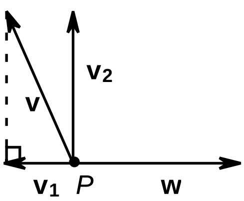
Projection d'un vecteur sur un autre vecteur



Dans beaucoup d'applications physiques, il est nécessaire de savoir « quelle fraction » d'un vecteur est appliquée dans une direction donnée. Regardez la figure ci-contre. La force $\mathbf{F}$ due à la gravité attire le bloc vers le centre de la Terre. Pour étudier l'effet de la gravité sur le bloc, il faut décomposer la force $\mathbf{F}$ en deux forces $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_1}$ étant une force dont la direction est parallèle au plan incliné et qui fait glisser le bloc (si le frottement n'est pas trop fort), $\mathbf{F_2}$ étant une force normale au plan incliné qui plaque le bloc contre la surface.



Soient $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ deux vecteurs non nuls ayant la même origine P. Nous cherchons à décomposer $\mathbf{v}$ en deux vecteurs : $\mathbf{v_1}$ qui sera parallèle à $\mathbf{w}$ et $\mathbf{v_2}$ qui sera orthogonal à $\mathbf{w}$. Le vecteur $\mathbf{v_1}$ est appelé le vecteur projection de $\mathbf{v}$ sur $\mathbf{w}$ et est noté $\text{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$.
Le vecteur $\mathbf{v_1}$ est obtenu comme suit : du point terminal de $\mathbf{v}$, tirer une perpendiculaire à la droite contenant $\mathbf{w}$. Le vecteur $\mathbf{v_1}$ a pour point initial P et pour point terminal le pied de la perpendiculaire. Le vecteur $\mathbf{v_2}$ est donné par $\mathbf{v_2}=\mathbf{v}-\mathbf{v_1}$.
Maintenant nous cherchons une formule pour $\mathbf{v_1}$ basée sur $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$. Comme $\mathbf{v}=\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}$, nous avons :



$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = (\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v_1}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v_2}\cdot\mathbf{w} \tag{10}$$

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$

Puisque $\mathbf{v_2}$ est orthogonal à $\mathbf{w}$, nous avons $\mathbf{v_2}\cdot\mathbf{w} = 0$. De plus, comme $\mathbf{v_1}$ est parallèle à $\mathbf{w}$, nous avons $\mathbf{v_1} = \lambda\mathbf{w}$, λ étant un scalaire dont nous allons chercher la valeur. Ainsi, l'équation (10) peut se réécrire :

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = \lambda\|\mathbf{w}\|^2$$

$$\lambda = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}$$

Donc

$$\mathbf{v_1} = \lambda\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}$$

o

Théorème 7 Soient $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ deux vecteurs non nuls, le vecteur projection de $\mathbf{v}$ sur $\mathbf{w}$ est :

$$\boxed{(\mathbf{v}_1 =)\quad \text{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}} \tag{11}$$

Exercice 14

Décomposez $\mathbf{v}$ en deux vecteurs $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$, où $\mathbf{v_1}$ est parallèle à $\mathbf{w}$ et $\mathbf{v_2}$ orthogonal à $\mathbf{w}$.

a. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\quad \mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
b. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\quad \mathbf{w} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$
c. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\quad \mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
d. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\quad \mathbf{w} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

Que remarquez-vous en comparant les composantes de $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$?

Réponses

a. $\mathbf{v}_1 = \frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_2 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

b. $\mathbf{v}_1 = -\frac{4}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_2 = \frac{7}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

c. $\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_2 = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

d. $\mathbf{v}_1 = \frac{4}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_2 = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Exercice 15

Réponses

8.63 degrés
1.52 minutes

Un bateau à moteur veut atteindre le point de la rive opposée situé exactement en face de lui. La vitesse du courant est de 3 km/h. Le bateau est capable de maintenir une vitesse constante de 20 km/h. Selon quel angle par rapport à la ligne directe doit être dirigé le bateau pour qu'il atteigne son objectif ? Si la rivière a une largeur de 0.5 km, combien de temps durera la traversée ?

Exercice 16

Réponses

a. $\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} -4.854 \\ -2.473 \end{pmatrix}$ $\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 4.854 \\ -9.527 \end{pmatrix}$

b. 5.44 N

Soit un plan incliné à 27°. On pose sur ce plan une voiture miniature qui est attirée avec une force de 12 N vers le centre de la Terre.

a. Décomposez ce vecteur-force $\mathbf{F}$ en un vecteur-force $\mathbf{F_1}$ parallèle au plan incliné et en un vecteur-force $\mathbf{F_2}$ perpendiculaire au plan incliné.

b. On attache une ficelle à l'arrière de la voiture. En supposant qu'il n'y ait pas de frottement, quelle force (en N) faut-il exercer pour retenir le jouet ?

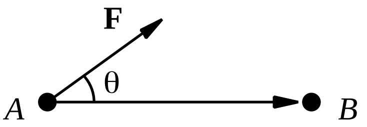
Travail d'une force

Première définition du travail

Considérons un mobile décrivant une trajectoire **rectiligne** d'un point *A* à un point *B*. Soit $\mathbf{F}$ une force constante s'exerçant sur ce mobile.
En physique élémentaire, le **travail** *W* d'une force $\mathbf{F}$ sur le chemin *AB* est le produit de l'intensité de la force par la longueur du chemin :

$$\boxed{W = \|\mathbf{F}\|\, d} \quad \text{où } d \text{ est la } \textbf{distance} \text{ de } A \text{ à } B. \qquad (12)$$

L'unité de travail est le **joule** (1 J = 1 N · 1 m).



Dans définition ci-dessus, on a supposé que la force est appliquée le long de la ligne de déplacement. Si la force forme un angle θ avec la direction du mouvement, alors le travail est défini à l'aide du produit scalaire de deux vecteurs :

Deuxième définition du travail

$$\boxed{W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}} \quad \text{où } \mathbf{d} \text{ est le } \textbf{vecteur } \overrightarrow{AB}. \qquad (13)$$

Cette deuxième définition est bien compatible avec la première définition *travail = force × longueur*, puisque

$$W = \|\mathrm{proj}_{\mathbf{d}}\mathbf{F}\|\,\|\mathbf{d}\| = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|^2}\|\mathbf{d}\|\,\|\mathbf{d}\| = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} \qquad (14)$$

Attention ! Remarquez bien que dans la deuxième définition, on a affaire à un produit scalaire de deux vecteurs alors que dans la première définition, on avait simplement un produit de deux nombres.

Exercice 17

Rép. 1732 kg·m = 16991 J

On tire un wagonnet sur un terrain plat en exerçant sur lui une force de 20 kilos selon un angle de 30° avec l'horizontale. Quel est le travail effectué si l'on déplace ce wagonnet sur une distance de 100 mètres ?

Exercice 18

Rép. 2.68 J

Trouvez le travail effectué par une force de trois Newton agissant selon la direction $2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ et déplaçant un objet de deux mètres de (0, 0) à (0, 2).

Exercice 19

Rép. 60°

Trouvez l'angle aigu qu'un vecteur-force unité fait avec la partie positive de l'axe des *x* si le travail effectué par cette force (constante) pour déplacer un objet de (0, 0) à (4, 0) est de 2.

III. Combinaison linéaire de vecteurs

Définition Soit $S = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n})$ un ensemble de n vecteurs.
On appelle **combinaison linéaire** des n vecteurs tout vecteur $\mathbf{v}$ tel que:

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + ... + \lambda_n\mathbf{v_n}$$

avec les λ_i IR.

Les λ_i sont appelées les **composantes scalaires**.

Indépendance linéaire Les vecteurs $\mathbf{v}_i$ sont **linéairement indépendants** si le **seul** moyen d'obtenir le vecteur nul par une combinaison linéaire des $\mathbf{v}_i$ est de poser $\lambda_i = 0$ i .

Exemples $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ sont linéairement dépendants puisque $2\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

$\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

Exercice 20

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ?

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{c} = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$$

Réponse
non, car $\mathbf{a}+2\mathbf{b}-\mathbf{c}=\mathbf{0}$

Exercice 21

Montrez comment utiliser les déterminants 2x2 (resp. 3x3) pour montrer que 2 vecteurs du plan (resp. 3 vecteurs l'espace) sont linéairement indépendants. Testez votre méthode sur l'exercice 20.

IV. Base vectorielle

Définition Une **base** vectorielle B est une famille de **vecteurs linéairement indépendants** qui permet l'écriture de tout vecteur de l'espace de manière **unique** comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.
Les coefficients de cette combinaison linéaire sont appelés **composantes scalaires** de $\mathbf{u}$ dans la base B.

Attention ! L'ordre des vecteurs de la base est important.

Propriétés

- Pour un espace donné, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé **dimension** de l'espace. Dans le plan, une base est un ensemble de deux vecteurs non colinéaires ; dans l'espace à 3 dimensions, une base est un triplet de vecteurs non coplanaires.

- Le vecteur nul ne fait jamais partie d'une base. En effet, le vecteur nul est linéairement dépendant de tous les autres, puisque $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

www.jura.ch/lcp/madimu

Exercice 22

Dans IR^2, on donne les vecteurs $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.

a. L'ensemble $S = (\mathbf{a})$ est-il une base de IR^2 ?
b. L'ensemble $T = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est-il une base de IR^2 ?
c. L'ensemble $U = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ est-il une base de IR^2 ?

Réponses
a. non, il faut deux vecteurs
b. oui, car $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont lin. indépendants
c. non, il y a un vecteur de trop

Exercice 23

Note

$\mathbf{v}_{(\mathbf{i},\mathbf{j})}$ signifie que le vecteur **v** est exprimé dans la base (**i**, **j**).

Soient les vecteurs $\mathbf{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

Dessinez les quatre premiers vecteurs sur un quadrillage, puis dessinez (sans calculs préalables) les vecteurs $\mathbf{v}_{(\mathbf{i},\mathbf{j})}$, $\mathbf{v}_{(\mathbf{j},\mathbf{i})}$, $\mathbf{v}_{(\mathbf{a},\mathbf{b})}$, $\mathbf{v}_{(\mathbf{i},\mathbf{b})}$, $\mathbf{v}_{(\mathbf{j},\mathbf{a})}$.

Exercice 24

Réponses

a. (-22/7, -23/7) **b.** (-7/23, -22/23)
c. (-23/22, -7/22) **d.** (-7/22, -23/22)
e. (1, 0) **f.** (-7/23, 3/23)
g. (23/3, -2/3)

Soit (**i**, **j**) une base du plan, ainsi que les vecteurs

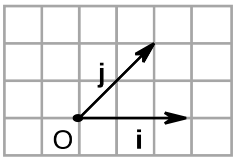
$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ $\quad$ $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ $\quad$ $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

Calculez les composantes scalaires de

a. **a** dans la base (**c**, **b**)
b. **b** dans la base (**a**, **c**)
c. **c** dans la base (**b**, **a**)
d. **c** dans la base (**a**, **b**)
e. **a** dans la base (**a**, **b**)
f. **i** dans la base (**c**, **a**)
g. **c** dans la base (**j**, **a**)

V. Coordonnées d'un point dans un repère

Définition On appelle **repère** du plan tout ensemble constitué d'un point arbitraire fixe (**origine**) et d'une base. On notera ce repère {*O*, (**i**, **j**)}, où *O* est l'origine et **i** et **j** sont les vecteurs de la base.



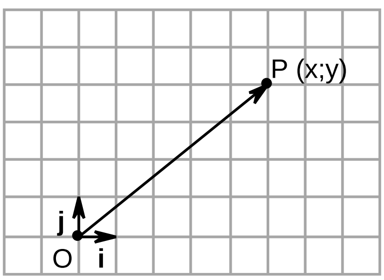
Si **i** et **j** ont une norme de 1 et qu'ils sont orthogonaux, on dit que le repère est **orthonormé**.

Sauf indication contraire, nous travaillerons toujours dans un repère orthonormé.

On a défini un certain nombre d'opérations pour travailler avec des vecteurs et on aimerait en faire de même avec des points. La solution consiste à trouver une **correspondance** entre un point et un vecteur. On aura ainsi :

$$\boxed{P(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}$$

Définition On appelle **coordonnées** d'un point *P* dans un repère {*O*, (**i**, **j**)} les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$ dans la base (**i**, **j**).



Dans le plan, les coordonnées du point *P* dans le repère {*O*, (**i**, **j**)} sont les nombres réels *x* et *y* tels que

$\overrightarrow{OP} = x\cdot\mathbf{i} + y\cdot\mathbf{j}$, la plupart du temps avec $\mathbf{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\mathbf{j} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

On écrit *P(x ; y)*.

Dans l'espace, les coordonnées du point *P* dans le repère {*O*, (**i**, **j**, **k**)} sont les nombres réels *x*, *y* et *z* tels que

$\overrightarrow{OP} = x\cdot\mathbf{i} + y\cdot\mathbf{j} + z\cdot\mathbf{k}$, très souvent avec $\mathbf{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\mathbf{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

On écrit *P(x ; y ; z)*.

Terminologie La première coordonnée x est appelée **abscisse** du point P.
La deuxième coordonnée y est appelée **ordonnée** du point P.
Dans l'espace, la troisième coordonnée z est appelée **cote** du point P.

Exercice 25

On donne les points $A(1 ; 1)$, $B(-2 ; 1)$, $C(-2 ; -1)$ et $D(1 ; -1)$. Dessinez ces quatre points sur une feuille quadrillée si…

a. $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b. $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c. $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Coordonnées du milieu d'un segment

Définition On appelle **milieu** d'un segment AB le point M tel que:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

Les coordonnées du milieu M de AB sont les moyennes arithmétiques des coordonnées des extrémités du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. En résolvant l'équation ci-dessus, on trouve que le milieu de AB est le point

$$\boxed{M\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

Coordonnées du centre de gravité d'un triangle

Soient les points $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$. Le **centre de gravité** G du triangle ABC a pour coordonnées

$$\boxed{G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)}$$

La formule ci-contre est obtenue en résolvant l'équation :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Exercice 26

a. Construire les points A, B, C et D définis par

$$\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j},\ \overrightarrow{OB} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j},\ \overrightarrow{OC} = -4\mathbf{j},\ \overrightarrow{OD} = 2\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j}$$

b. Calculez les coordonnées du milieu de AC et du milieu de BD.

c. Calculez le centre de gravité du triangle ABC.

d. Calculez les coordonnées du point N tel que

$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$$

Réponses

b. milieu de AC : $E(1 ; -0.5)$,
milieu de BD : $F(-1 ; -2.37)$.

c. $(-2/3 ; -4/3)$

d. $N(0 ; -1.43)$

Exercice 27

On donne les points $A(2 ; 3)$, $B(-3 ; 1)$ et $C(8 ; -1)$.

a. Calculez les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Calculez les coordonnées du centre I du parallélogramme $ABCD$.

b. Déterminez le(s) point(s) E de l'axe des ordonnées tel(s) que $ABEC$ soit un trapèze.

Réponses

a. $D(13 ; 1)$, $I(5 ; 1)$

b. $E_1(0 ; -1)$, $E_2(0 ; -21/5)$