AUTOUR DE LA SUITE DE THUE-MORSE

La suite de Thue-Morse est une suite composée de 0 et de 1. Elle peut-être construite de deux façons distinctes :
Première façon : le premier terme est 0; supposons construit les 2^n premiers termes de la suite $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{2^n}$ alors les 2^{n+1} premiers termes sont $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{2^n}\ \overline{\varepsilon_1}\ \overline{\varepsilon_2} \ldots \overline{\varepsilon_{2^n}}$ où $\overline{\varepsilon_k} = 1$ si $\varepsilon_k = 0$ et $\overline{\varepsilon_k} = 0$ si $\varepsilon_k = 1$. On obtient ainsi successivement : [0] , [0 1] , [0 1 1 0] , [0 1 1 0 1 0 0 1] …
Deuxième façon : avec les mêmes notations, les 2^{n+1} premiers termes sont obtenus en remplaçant ε_k par 01 si $\varepsilon_k = 0$ et par 10 si $\varepsilon_k = 1$. Ce qui donne successivement, [0] , [01] , [01 10] , [01 10 10 01] …
Cette suite a la particularité de ne contenir aucun cube, c'est à dire aucune séquence qui se répèterait trois fois de suite comme 111 ou bien 01 01 01 ou bien 011 011 011 etc …

1) La fonction suivante calcule les 2^n premiers termes de la suite de Thue en utilisant la première méthode. Comprendre son fonctionnement.
Thue1:= n –> if n = 0 then [0] else [op(Thue1($n-1$)),op(map(x –>$1-x$,Thue1($n-1$)))] fi:
Ecrire de même une fonction Thue2 qui à tout entier $n \geq 0$ associe les 2^n premiers termes de la suite de Thue en utilisant la seconde méthode (utiliser également une fonction définie récursivement).

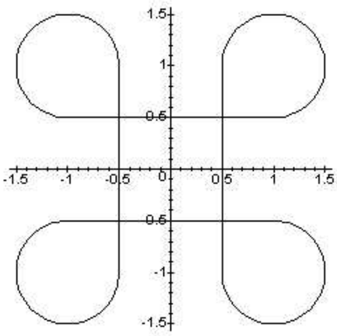
2) Soit $[\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{2^n}]$ la suite des 2^n premiers termes de la suite de Thue-Morse. On définit $T_0(n) := \{i \in [\![1\ ,\ 2^n]\!]\ /\ \varepsilon_i = 0\}$ et $T_1(n) := \{i \in [\![1\ ,\ 2^n]\!] /\ \varepsilon_i = 1\}$. Par construction $T_0(n) \cup T_1(n) = [\![1\ ,\ 2^n]\!]$ (rappel $[\![1\ ,\ 2^n]\!] = \{1\ ,2\ , \ldots ,\ 2^n\}$).
Par exemple, $T_0(3) = \{1,4,6,7\}$ et $T_1(3) = \{2,3,5,8\}$.
Construire pour un entier n donné, les ensembles $T_0(n)$ et $T_1(n)$. Vérifier alors sur différents exemples, la propriété :

$$\forall\ k \in [\![0\ ,\ n-1]\!]\ ,\ \sum_{i \in T_0} i^k = \sum_{i \in T_1} i^k$$

Par exemple pour $n = 3$: $1^0 + 4^0 + 6^0 + 7^0 = 4 = 2^0 + 3^0 + 5^0 + 8^0$, $1^1 + 4^1 + 6^1 + 7^1 = 18 = 2^1 + 3^1 + 5^1 + 8^1$, $1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 102 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$.

La suite est nettement plus difficile et demande d'y passer pas mal de temps

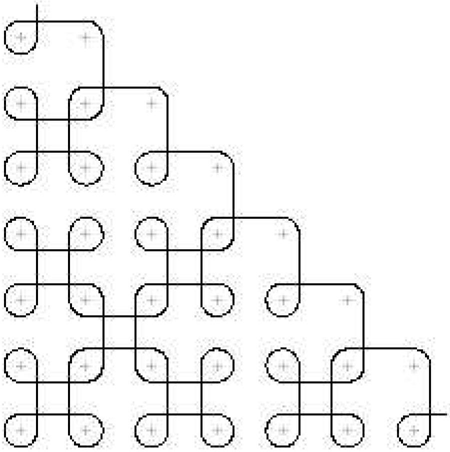
3) Lorsqu'on parcourt la suite de Thue, on aimerait associer à chaque ε_k une action bien définie. En l'occurrence, on va s'intéresser à l'action suivante :
Si $\varepsilon_k = 0$, on tourne, en provenance du point A_{k-1}, autour du point A_k d'un angle de $\pi/2$ dans le sens des aiguilles d'une montre.
Si $\varepsilon_k = 1$, on tourne, en provenance du point A_{k-1}, autour du point A_k d'un angle de $3\pi/2$ dans le sens des aiguilles d'une montre.
On prendra des points A_k disposés sur un réseau de maille carrée, de côté *pas*, et on tournera selon des arcs de cercle de rayon *rayon* , de centre le point A_k et d'angle *angle* . Une direction *dir* choisie parmi {N, E, S, O} indiquera où commence l'arc de cercle. Un point du plan sera toujours implémenté sous forme d'une liste de deux réels; ainsi pt[1] et pt[2] désigneront respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point.
Etudier la procédure Thue_arc téléchargeable et les exemples proposés.
Utiliser la procédure pour réaliser le graphique ci-contre :



4) Dans le même fichier, vous trouverez les procédures pt_suivant et dir_suivant donnant le point A_{k+1} en fonction du point A_k et de la direction *dir* et la nouvelle direction *dir* pour tourner autour de A_{k+1}.
Vous avez maintenant tous les ingrédients pour écrire une procédure Kolam(n, pt_ini, pas, rayon, dir_ini) qui étant donné un entier n, un point initial A_1 , un pas pour le réseau contenant les points A_k , un rayon pour les arcs de cercle et une direction initiale dir_ini, réalise les actions suivantes :

- Calculer les 2^n premiers termes de la suite de Thue
- Construit la suite des points A_k et des arcs de cercle autour des points A_k l'angle autour de A_k étant de 90° si $\varepsilon_k = 0$ et 270° si $\varepsilon_k = 1$.
- Trace sur un même graphique l'ensemble des arcs de cercle

Cette étude est inspirée de “ Pour la science septembre 2006 , J.P Delahaye, p.90-95 “ où vous trouverez la raison du nom “Kolam“ pour la procédure.
On doit pouvoir obtenir des graphiques du type ci-dessous,



5) Eventuellement en adaptant la procédure et en l'appelant plusieurs fois, réaliser les figures ci-dessous :