PROBLÈMES D'ANALYSE I
Nombres réels, suites et séries

Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak
Traduction : Eric Kouris

Collection dirigée par Daniel Guin

EDP SCIENCES

17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

This work was originally published in Polish, as *Zadania z Analizy Matematycznej. Część Pierwsza. Liczby Rzeczywiste, Ciźgi i Szeregi Liczbowe*, © 1996 Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin. Published in English by the American Mathematical Society under the title "*Problems in Mathematical Analysis I: Real Numbers, Sequences and Series*", © 2000 American Mathematical Society. The present translation was created for EDP Sciences under authority of the American Mathematical Society and is published by permission.

Imprimé en France

ISBN : 978-2-7598-0058-2

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE DU TRADUCTEUR

Ce livre est le premier d'une série de trois recueils d'exercices corrigés traitant des bases de l'analyse réelle. Il s'adresse d'abord aux étudiants, principalement ceux des niveaux L1 et L2, qu'ils soient à l'université ou en CPGE. Il intéressera aussi les candidats aux concours du CAPES et de l'agrégation de mathématiques qui y trouveront autant les théorèmes qu'ils doivent connaître que des exercices pour les illustrer.

Ce premier volume traite des propriétés élémentaires des nombres réels, des inégalités élémentaires, des suites et des séries numériques. Chaque section, centrée sur un thème, commence par des exercices relativement simples et se poursuit par des problèmes plus difficiles, certains étant des théorèmes classiques. Souvent, différents aspects d'un même thème sont traités en une série d'exercices successifs pour permettre d'en approfondir la compréhension.

Tous les exercices sont corrigés, le plus souvent en détail, ce qui permettra aux étudiants de ne pas « sécher » sur un exercice difficile. Nous les invitons cependant à chercher par eux-mêmes les exercices avant de regarder les solutions pour ne pas se priver du plaisir de les résoudre. Nous insistons aussi sur le fait que les auteurs ne donnent pas nécessairement toutes les étapes d'un calcul lorsqu'ils considèrent que celui-ci ne pose pas de problèmes techniques. C'est bien sur aux étudiants de prendre le temps de rédiger entièrement leurs solutions.

Nous avons ajouté dans cette traduction quelques notes pour préciser certaines définitions et éviter ainsi d'avoir à chercher dans d'autres ouvrages. Nous avons aussi ajouter en note les noms de certaines propriétés et relations pour inviter les étudiants à engager des recherches par eux-mêmes. L'index à la fin de l'ouvrage permet de facilement retrouver une définition et la table des renvois permet de voir les liens entre les différents problèmes dans ce volume et dans les deux autres.

Je tiens à remercier Daniel Guin et Xavier Cottrell pour avoir pris le temps de relire cette traduction et pour les remarques qu'ils m'ont faites afin d'améliorer le

style et de corriger les erreurs. Je reste responsable de celles qui subsisteraient (le moins possible j'espère). Je souhaite aussi remercier pour sa disponibilité Patrick Fradin, l'auteur du logiciel TeXgraph avec lequel l'illustration de couverture a été réalisée.

É. Kouris

PRÉFACE À L'ÉDITION ANGLAISE

Ce livre est l'édition anglaise, revue et augmentée, d'une version polonaise publiée en 1996 par la maison d'édition de l'université Maria Curie-Skłodowska de Lublin, en Pologne. Il s'agit du premier volume d'une série de recueils d'exercices d'analyse. Celle-ci s'adresse principalement aux étudiants de premier cycle universitaire. Le choix et l'arrangement des thèmes et exercices étudiés permettent aux étudiants de travailler par eux-mêmes, mais les enseignants pourront le trouver utile pour organiser des travaux dirigés.

Ce volume couvre trois sujets : les nombres réels, les suites et les séries numériques. Il ne comporte pas de problèmes concernant les espaces métriques et topologiques qui seront présentés dans le second volume.

Chaque chapitre se divise en deux parties : énoncés de problèmes et solutions. Nous donnons une solution complète dans la plupart des cas. Lorsqu'aucune difficulté ne devrait se présenter ou lorsqu'un problème semblable a déjà été résolu, seul une indication ou la réponse est donnée. Très souvent, un problème admet plusieurs solutions ; nous n'en donnons qu'une en espérant que les étudiants en trouveront d'autres par eux-mêmes.

En gardant à l'esprit que cet ouvrage est destiné prioritairement aux étudiants, nous avons essayé de conserver l'exposé à un niveau élémentaire à chaque fois que c'était possible. Par exemple, nous présentons une démonstration élémentaire du théorème de Toeplitz sur les transformations régulières de suites qui, dans beaucoup d'ouvrages, est démontré par des méthodes d'analyse fonctionnelle. La preuve présentée ici est tirée de la publication originale de Toeplitz, parue en 1911 dans *Prace Matematyczno-Fizyczne*, Vol. 22. Nous espérons que notre présentation de cette partie de l'analyse réelle sera plus accessible aux lecteurs et permettra une meilleure compréhension.

Toutes les notations et définitions utilisées dans ce volume sont standards et d'un usage courant. Le lecteur peut les trouver, par exemple, dans les ouvrages [12] et [23], qui comportent tous les éléments théoriques nécessaires. Néanmoins, pour éviter toute ambiguïté et dans un souci de cohérence, une liste de notations et de définitions est incluse dans ce livre.

Nous avons emprunté librement dans plusieurs ouvrages, recueils de problèmes et sections de problèmes de journaux tels que *American Mathematical Monthly*, *Mathematics Today* (en russe) et *Delta* (en polonais). La liste complète des livres est donnée en bibliographie. Donner toutes les sources originales dépassait nos objectifs et nous avons pu oublier certaines contributions. Nous présentons nos excuses si cela s'est produit.

Nous avons une grande dette envers nos amis et collègues du département de mathématiques de l'université Maria Curie-Skłodowska qui nous ont fait des critiques constructives. Nous avons eu de nombreuses conversations stimulantes avec M. Koter-Mórgowska, T. Kuczumow, W. Rzymowski, S. Stachura et W. Zygmunt. Nous remercions aussi sincèrement le professeur Jan Krzyż pour son aide dans la préparation de la première version du manuscrit anglais. Nous sommes ravis d'exprimer notre gratitude au professeur Kazimierz Goebel pour ses encouragements et son intérêt actif dans ce projet. Nous sommes aussi heureux de remercier le professeur Richard J. Libera de l'université du Delaware pour son aide précieuse et généreuse dans la traduction anglaise et pour toutes ses suggestions et corrections qui ont grandement amélioré la version finale de ce livre.

W. J. Kaczor, M. T. Nowak

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des nombres réels strictement positifs.
- $\overline{\mathbb{R}}$ est la droite réelle achevée, autrement dit, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- $[a, b]$ est l'intervalle fermé d'extrémités a et b.
- $]a, b[$ est l'intervalle ouvert d'extrémités a et b.
- $[x]$ est la partie entière du nombre réel x (on a conservé la notation anglophone).
- Pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0, \\ -1 & \text{pour } x < 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$, on pose aussi $0! = 1$,
  $(2n)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n-2) \times 2n$,
  $(2n-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3) \times (2n-1)$.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est non vide et majoré, $\sup \mathbf{A}$ est alors le plus petit majorant de $\mathbf{A}$. Si l'ensemble non vide $\mathbf{A}$ n'est pas majoré, on pose alors $\sup \mathbf{A} = +\infty$.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est non vide et minoré, $\inf \mathbf{A}$ est alors le plus grand minorant de $\mathbf{A}$. Si l'ensemble non vide $\mathbf{A}$ n'est pas minoré, on pose alors $\inf \mathbf{A} = -\infty$.

- Une suite $\{a_n\}$ est dite croissante (resp. décroissante) si $a_{n+1} \geqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (resp. $a_{n+1} \leqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). La classe des suites monotones est formée des suites croissantes et des suites décroissantes.

- Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites réelles ($b_n \neq 0$ pour tout n). Si le quotient a_n/b_n tend vers 0 (resp. reste borné) lorsque n tend vers $+\infty$, on écrit alors $a_n = o(b_n)$ (resp. $a_n = O(b_n)$).

- Un réel c est une valeur d'adhérence de la suite $\{a_n\}$ s'il existe une sous-suite $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ qui converge vers c.

- Soit $\mathbf{S}$ l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de $\{a_n\}$. La limite inférieure, $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n$, et la limite supérieure, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$, sont définies comme suit :

$$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ n'est pas majorée,} \\ -\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ est majorée et } \mathbf{S} = \emptyset, \\ \sup \mathbf{S} & \text{si } \{a_n\} \text{ est majorée et } \mathbf{S} \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ n'est pas minorée,} \\ +\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ est minorée et } \mathbf{S} = \emptyset, \\ \inf \mathbf{S} & \text{si } \{a_n\} \text{ est minorée et } \mathbf{S} \neq \emptyset. \end{cases}$$

- Un produit infini $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ est dit convergent s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ pour $n \geqslant n_0$ et la suite $\{a_{n_0}a_{n_0+1}\ldots a_{n_0+n}\}$ converge, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une limite P_0 non nulle. Le nombre $P = a_1a_2\ldots a_{n_0-1} \cdot P_0$ est appelé la valeur du produit infini.

I

NOMBRES RÉELS

Énoncés

I.1. Borne supérieure et borne inférieure d'ensembles de nombres réels, fractions continues

I.1.1. Montrer que

$$\sup \left\{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\right\} = \sqrt{2}.$$

I.1.2. Soit $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. On pose $-\mathbf{A} = \{x : -x \in \mathbf{A}\}$. Montrer que

$$\sup(-\mathbf{A}) = -\inf \mathbf{A},$$
$$\inf(-\mathbf{A}) = -\sup \mathbf{A}.$$

I.1.3. Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides. On pose

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{z = x + y : x \in \mathbf{A}, y \in \mathbf{B}\},$$
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{z = x - y : x \in \mathbf{A}, y \in \mathbf{B}\}.$$

Prouver que

$$\sup(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} + \sup \mathbf{B},$$
$$\sup(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} - \inf \mathbf{B}.$$

Établir des formules semblables pour $\inf(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ et $\inf(\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

I.1.4. Étant donné $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux ensembles de réels strictement positifs, on définit

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\{z=x\times y : x\in\mathbf{A}, y\in\mathbf{B}\},$$
$$\frac{1}{\mathbf{A}}=\left\{z=\frac{1}{x} : x\in\mathbf{A}\right\}.$$

Montrer que

$$\sup\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)=\sup\mathbf{A}\times\sup\mathbf{B}.$$

Montrer aussi que si $\inf\mathbf{A}>0$, alors

$$\sup\left(\frac{1}{\mathbf{A}}\right)=\frac{1}{\inf\mathbf{A}}$$

et si $\inf\mathbf{A}=0$, alors $\sup\left(\frac{1}{\mathbf{A}}\right)=+\infty$. De plus, si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des ensembles bornés de réels, alors

$$\sup\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)=\max\left\{\sup\mathbf{A}\times\sup\mathbf{B},\sup\mathbf{A}\times\inf\mathbf{B},\inf\mathbf{A}\times\sup\mathbf{B},\inf\mathbf{A}\times\inf\mathbf{B}\right\}.$$

I.1.5. Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ des ensembles non vides de réels. Montrer que

$$\sup\left(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\right)=\max\left\{\sup\mathbf{A},\sup\mathbf{B}\right\}$$

et

$$\inf\left(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\right)=\min\left\{\inf\mathbf{A},\inf\mathbf{B}\right\}.$$

I.1.6. Trouver la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ définis par

$$\mathbf{A}_1=\left\{2\left(-1\right)^{n+1}+\left(-1\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(2+\frac{3}{n}\right) : n\in\mathbb{N}^*\right\},$$
$$\mathbf{A}_2=\left\{\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3} : n\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

I.1.7. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ où $\mathbf{A}=\{0{,}2\,;0{,}22\,;0{,}222\,;\ldots\}$ et $\mathbf{B}$ est l'ensemble des fractions décimales comprises entre 0 et 1 dont les seuls chiffres sont des 0 et des 1.

I.1.8. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble des nombres de la forme $\frac{(n+1)^2}{2^n}$, où $n\in\mathbb{N}^*$.

I.1.9. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble des nombres de la forme $\frac{(n+m)^2}{2^{nm}}$, où $n, m \in \mathbb{N}^*$.

I.1.10. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles suivants :

(a) $\mathbf{A} = \left\{\dfrac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}^*, m < 2n\right\}$,

(b) $\mathbf{B} = \{\sqrt{n} - [\sqrt{n}\,] : n \in \mathbb{N}^*\}$.

I.1.11. Trouver

(a) $\sup \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0\right\}$,

(b) $\inf \left\{z = x + x^{-1} : x > 0\right\}$,

(c) $\inf \left\{z = 2^x + 2^{\frac{1}{x}} : x > 0\right\}$.

I.1.12. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles suivants :

(a) $\mathbf{A} = \left\{\dfrac{m}{n} + \dfrac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$,

(b) $\mathbf{B} = \left\{\dfrac{mn}{4m^2 + n^2} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$,

(c) $\mathbf{C} = \left\{\dfrac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$,

(d) $\mathbf{D} = \left\{\dfrac{m}{|m| + n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$,

(e) $\mathbf{E} = \left\{\dfrac{mn}{1 + m + n} : m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

I.1.13. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On considère toutes les suites finies possibles $(a_1, \ldots, a_n)$ de réels strictement positifs. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble des nombres de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}},$$

où l'on pose $a_{n+1} = a_1$ et $a_{n+2} = a_2$.

I.1.14. Démontrer que, pour tout nombre irrationnel α et pour tout entier strictement positif n, il existe un entier strictement positif q_n et un entier p_n tels que

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{nq_n}\,.$$

Montrer aussi que l'on peut choisir $\{p_n\}$ et $\{q_n\}$ de telle sorte que l'on ait

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}\,.$$

I.1.15. Soit α un nombre irrationnel. Prouver que $\mathbf{A} = \{m + n\alpha : m, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$, autrement dit, que tout intervalle ouvert non-vide contient un élément de $\mathbf{A}$.

I.1.16. Montrer que $\{\cos n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1\,,1]$.

I.1.17. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On définit la suite $\{x_n\}$ en posant

$$x = [x] + \frac{1}{x_1}\,, \quad x_1 = [x_1] + \frac{1}{x_2}\,, \ldots, x_{n-1} = [x_{n-1}] + \frac{1}{x_n}\,.$$

On a alors

$$x = [x] + \cfrac{1}{[x_1] + \cfrac{1}{[x_2] + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{[x_{n-1}] + \cfrac{1}{x_n}}}}}\,.$$

Prouver que x est rationnel si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que x_n soit un entier.

Remarque. La représentation de x ci-dessus s'appelle une *fraction continue finie*. On écrira aussi l'expression

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

de façon plus pratique sous la forme

$$a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_n}.$$

I.1.18. Pour des réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on pose

$$\begin{aligned}
&p_0 = a_0, && q_0 = 1, \\
&p_1 = a_0 a_1 + 1, && q_1 = a_1, \\
&p_k = p_{k-1} a_k + p_{k-2}, && q_k = q_{k-1} a_k + q_{k-2}, \quad \text{avec} \quad k = 2, 3, \ldots, n
\end{aligned}$$

et on définit

$$R_0 = a_0, \quad R_k = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

La fraction R_k est appelée la k-ième *réduite* de $a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_n}$. Montrer que

$$R_k = \frac{p_k}{q_k} \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

I.1.19. Montrer que si p_k et q_k sont définis comme dans le problème précédent et si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers, alors

$$p_{k-1} q_k - q_{k-1} p_k = (-1)^k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Utiliser cette égalité pour conclure que p_k et q_k sont premiers entre eux.

I.1.20. Pour un nombre irrationnel x, on définit la suite $\{x_n\}$ par

$$x_1 = \frac{1}{x - [x]}, x_2 = \frac{1}{x_1 - [x_1]}, \ldots, x_n = \frac{1}{x_{n-1} - [x_{n-1}]}, \ldots$$

On pose de plus $a_0 = [x]$, $a_n = [x_n]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et

$$R_n = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_n}.$$

Prouver que la différence entre le nombre x et sa n-ième réduite est donnée par

$$x - R_n = \frac{(-1)^n}{(q_n x_{n+1} + q_{n-1})\, q_n},$$

où p_n, q_n sont définis en **I.1.18**. En déduire que x se trouve toujours entre deux réduites successives.

I.1.21. Prouver que l'ensemble $\{\sin n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1\,,1]$.

I.1.22. Appliquer le résultat de **I.1.20** pour prouver que, pour tout nombre irrationnel x, il existe une suite $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ de nombres rationnels, q_n étant impair, telle que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}\,.$$

(Comparer avec **I.1.14**.)

I.1.23. Démontrer la formule suivante donnant la différence entre deux réduites successives :

$$R_{n+1} - R_n = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}\,.$$

I.1.24. Soit x un nombre irrationnel. Prouver que ses réduites R_n définies en **I.1.20** sont de plus en plus proches de x, autrement dit,

$$|x - R_{n+1}| < |x - R_n|\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

I.1.25. Prouver que la réduite $R_n = p_n/q_n$ est la meilleure approximation de x par une fraction de dénominateur q_n ou moins. Autrement dit : si r/s est un rationnel de dénominateur strictement positif tel que $|x - r/s| < |x - R_n|$, alors $s > q_n$.

I.1.26. Développer chacun des nombres suivants en une fraction continue infinie : $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

I.1.27. Pour un entier k strictement positif, déterminer le développement de $\sqrt{k^2+k}$ en fraction continue infinie.

I.1.28. Trouver tous les $x \in \,]0\,,1[$ pour lesquels a_1 dans le développement en fractions continues (voir le **problème I.1.20**) est égal à un entier n strictement positif donné.

I.2. Quelques inégalités élémentaires

I.2.1. Prouver que si les $a_k > -1$ $(k = 1, \ldots, n)$ sont de même signe, on a alors

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Remarque. On note que si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, on obtient alors l'*inégalité* bien connue *de Bernoulli* : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$, $a > -1$.

I.2.2. Prouver le résultat suivant par récurrence : si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels strictement positifs tels que $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, alors $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$.

I.2.3. On note respectivement A_n, G_n et H_n les *moyennes arithmétique, géométrique* et *harmonique* des n nombres réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, soit

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \\ G_n &= \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n}, \\ H_n &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}. \end{aligned}$$

Démontrer que $A_n \geqslant G_n \geqslant H_n$.

I.2.4. Établir, en utilisant le résultat du problème précédent ($A_n \geqslant G_n$), l'inégalité de Bernoulli

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

I.2.5. Vérifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les propositions suivantes :

(a) $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{2}{3}$,

(b) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} > 1$,

(c) $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{3n+1} + \dfrac{1}{3n+2} + \ldots + \dfrac{1}{5n} + \dfrac{1}{5n+1} < \dfrac{2}{3}$,

(d) $n\left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right) < 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} < n\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \dfrac{1}{n+1}\right)$, $n > 1$.

I.2.6. Montrer que, pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2n}} \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$

I.2.7. Soit $\{a_n\}$ une suite arithmétique à termes strictement positifs. Prouver que

$$\sqrt{a_1 a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

I.2.8. Montrer que

$$\sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

I.2.9. Soit a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ des réels strictement positifs tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant 1$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geqslant n^2.$$

I.2.10. Soit $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ et $n > 1$, on pose $s = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Vérifier les propositions suivantes :

(a) $$n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s - a_k} \right)^{-1} \leqslant n - 1 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{s - a_k}{a_k},$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{s}{s - a_k} \geqslant \frac{n^2}{n-1},$$

(c) $$n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s + a_k} \right)^{-1} \geqslant n + 1.$$

I.2.11. Prouver que si $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, alors

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

I.2.12. Démontrer l'*inégalité de Cauchy* suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

I.2.13. Montrer que

$$\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

I.2.14. Prouver que si $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$, alors

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant 1.$$

I.2.15. Pour $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, vérifier les propositions suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geqslant n^2,$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1-a_k}{a_k} \geqslant n \sum_{k=1}^{n} (1-a_k),$

(c) $\displaystyle(\log_a a_1)^2 + (\log_a a_2)^2 + \ldots + (\log_a a_n)^2 \geqslant \frac{1}{n}$ si $a_1 a_2 \ldots a_n = a \neq 1$.

I.2.16. Pour $\alpha > 0$, démontrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{\alpha}{4} \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

I.2.17. Établir les inégalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

I.2.18. Montrer que

(a) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} k a_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{k},$

(b) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^3 a_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^5}.$

I.2.19. Prouver que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^{p+q} \sum_{k=1}^{n} a_k^{p-q},$$

pour tout couple de réels p, q et tous nombres strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

I.2.20. Trouver le minimum de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$ sous la contrainte $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$.

I.2.21. Soit $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des réels strictement positifs. Trouver le minimum de $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k^2$ sous la contrainte $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$.

I.2.22. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant (n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_1a_2\right).$$

I.2.23. Vérifier les propositions suivantes :

(a) $\displaystyle \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

(b) $\displaystyle \left|\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|$.

I.2.24. Soit $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des réels strictement positifs. Déterminer le minimum de

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \quad \text{sous la contrainte} \quad \sum_{k=1}^{n} p_k a_k = 1.$$

I.2.25. Démontrer l'*inégalité de Tchebychev* suivante : si $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ (ou $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leq b_n$), alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

I.2.26. En supposant que $a_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, démontrer que
$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^p.$$

I.2.27. Établir l'inégalité
$$(a+b)^2 \leqslant (1+c)a^2 + \left(1+\frac{1}{c}\right)b^2$$
pour c strictement positif, a et b étant des réels quelconques.

I.2.28. Prouver que $\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c|$.

I.2.29. Pour a, b et c strictement positifs, vérifier les propositions suivantes :

(a) $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b} + \dfrac{ab}{c} \geqslant a+b+c$,

(b) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{bc}} + \dfrac{1}{\sqrt{ca}} + \dfrac{1}{\sqrt{ab}}$,

(c) $\dfrac{2}{b+c} + \dfrac{2}{c+a} + \dfrac{2}{a+b} \geqslant \dfrac{9}{a+b+c}$,

(d) $\dfrac{b^2-a^2}{c+a} + \dfrac{c^2-b^2}{a+b} + \dfrac{a^2-c^2}{b+c} \geqslant 0$,

(e) $\dfrac{1}{8}\dfrac{(a-b)^2}{a} \leqslant \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{1}{8}\dfrac{(a-b)^2}{b}$ pour $b \leqslant a$.

I.2.30. Pour $a_k \in \mathbb{R}$ et $b_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, on pose
$$m = \min\left\{\frac{a_k}{b_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\} \quad \text{et} \quad M = \max\left\{\frac{a_k}{b_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$
Démontrer que
$$m \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leqslant M.$$

I.2.31. Démontrer que si $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$ $(n > 1)$, alors
$$\tan\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n} < \tan\alpha_n.$$

I.2.32. Pour $c_1, c_2, \dots, c_n$ des réels strictement positifs et $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S = \max\left\{ \sqrt[k_1]{c_1},\ \sqrt[k_2]{c_2}, \dots,\ \sqrt[k_n]{c_n} \right\}, \qquad s = \min\left\{ \sqrt[k_1]{c_1},\ \sqrt[k_2]{c_2}, \dots,\ \sqrt[k_n]{c_n} \right\}.$$

Prouver que

$$s \leqslant (c_1 c_2 \cdots c_n)^{\frac{1}{k_1+k_2+\ldots+k_n}} \leqslant S.$$

I.2.33. Pour $a_k > 0$ et $b_k > 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, on pose

$$M = \max\left\{ \frac{a_k}{b_k} : k = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Montrer que

$$\frac{a_1 + a_2^2 + \ldots + a_n^n}{b_1 + M b_2^2 + \ldots + M^{n-1} b_n^n} \leqslant M.$$

I.2.34. Prouver que si x est strictement supérieur à n'importe lequel des nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$, alors

$$\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \ldots + \frac{1}{x - a_n} \geqslant \frac{n}{x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}}.$$

I.2.35. On note $c_k = \binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, les coefficients du binôme de Newton. Établir l'inégalité

$$\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \ldots + \sqrt{c_n} \leqslant \sqrt{n\,(2^n - 1)}\,.$$

I.2.36. Pour $n \geqslant 2$, montrer que

$$\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{2^n - 2}{n - 1} \right)^{n-1}.$$

I.2.37. Soit $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ et A_n leur moyenne arithmétique. Prouver que, pour tout entier $p > 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^p \leqslant \frac{p}{p-1} \sum_{k=1}^{n} A_k^{p-1} a_k.$$

I.2.38. Pour $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, on pose $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Prouver que

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1} \leqslant \frac{a^2}{4}.$$

I.2.39. Montrer que, pour tout arrangement $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on a

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \geqslant n.$$

I.2.40. Prouver les *inégalités de Weierstrass* : si $0 < a_k < 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$, alors

(a) $$1 + \sum_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) < \frac{1}{1 - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k},$$

(b) $$1 - \sum_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) < \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k}.$$

I.2.41. On suppose que $0 < a_k < 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et on pose $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Prouver que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_k} \geqslant \frac{na}{n - a}.$$

I.2.42. Soit $0 < a_k \leqslant 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et $n \geqslant 2$. Vérifier l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + a_k} \leqslant \frac{n \sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k + n \prod\limits_{k=1}^{n} a_k}.$$

I.2.43. Pour des a_k positifs $(k = 1, 2, \ldots, n)$ tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, prouver que

(a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \geqslant (n + 1)^n \prod_{k=1}^{n} a_k,$

(b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) \geqslant (n - 1)^n \prod_{k=1}^{n} a_k.$

I.2.44. Prouver que si $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k} = n - 1$, alors

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geqslant (n-1)^n .$$

I.2.45. Montrer que, sous les hypothèses de **I.2.43**, on a

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 + a_k)}{(n+1)^n} \geqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - a_k)}{(n-1)^n} \qquad n > 1.$$

I.2.46. Montrer que

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geqslant \frac{n}{4}$$

pour $a_1, a_2, \ldots, a_n$ strictement positifs.

I.2.47. Soit t et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels. Établir l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{|a_k - t|}}{2^k} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{|a_k - a_1|}}{2^k} .$$

I.2.48. Prouver que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des réels strictement positifs, on a

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}.$$

I.2.49. On suppose que $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ et que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont positifs et tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. Établir l'inégalité[(1)]

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{1}{a_k}\right) \leqslant \frac{A^2}{G^2} ,$$

où $A = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)$ et $G = \sqrt{a_1 a_n}$.

I.2.50. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n et $\tau(n)$ le nombre de ces diviseurs. Prouver que $\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \geqslant \sqrt{n}$.

---

(1) *Inégalité de Kantorovich.* (N.d.T.)

Solutions

I.1. Borne supérieure et borne inférieure d'ensembles de nombres réels, fractions continues

I.1.1. Soit $\mathbf{A} = \left\{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\, x^2 < 2\right\}$ et $s = \sup \mathbf{A}$. On peut supposer que $s > 1$. On va prouver que, pour tout entier strictement positif n, on a

$$\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant 2 \leqslant \left(s + \frac{1}{n}\right)^2. \tag{1}$$

Puisque $s - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de $\mathbf{A}$, il existe $x^* \in \mathbf{A}$ tel que $s - \frac{1}{n} < x^*$. Donc,

$$\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 < (x^*)^2 < 2.$$

Supposons que $\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$. Si s est rationnel, alors $s + \frac{1}{n} \in \mathbf{A}$ et $s + \frac{1}{n} > s$, ce qui contredit le fait que $s = \sup \mathbf{A}$. Si s est irrationnel, alors $w = \frac{[(n+1)s]}{n+1} + \frac{1}{n+1}$ est un nombre rationnel tel que $s < w < s + \frac{1}{n}$. Donc, $w^2 < \left(s + \frac{1}{n}\right)^2$ et $w \in \mathbf{A}$, contradiction. On a ainsi prouvé que $\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 \geqslant 2$. L'inégalité de gauche de (1) implique $s^2 - \frac{2s}{n} < s^2 - \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant 2$, ce qui donne $\frac{s^2-2}{2s} < \frac{1}{n}$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $s^2 - 2 \leqslant 0$.

Comme ci-dessus, l'inégalité de droite de (1) donne $\frac{s^2-2}{3s} \geqslant -\frac{1}{n}$ ce qui implique $s^2 - 2 \geqslant 0$. Donc, $s^2 = 2$.

I.1.2. On suppose que $\mathbf{A}$ est minoré et on pose $a = \inf \mathbf{A}$. On a alors

$$x \geqslant a \text{ pour tout } x \in \mathbf{A}, \tag{1}$$
$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } x^* \in \mathbf{A} \text{ tel que } x^* < a + \varepsilon. \tag{2}$$

En multipliant les inégalités données en (1) et (2) par -1, on obtient

$$x \leqslant -a \text{ pour tout } x \in (-\mathbf{A}), \tag{1'}$$
$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } x^* \in (-\mathbf{A}) \text{ tel que } x^* > -a - \varepsilon. \tag{2'}$$

Donc, $-a = \sup(-\mathbf{A})$. Si $\mathbf{A}$ n'est pas minoré, alors $-\mathbf{A}$ n'est pas majoré et $\sup(-\mathbf{A}) = -\inf \mathbf{A} = +\infty$. L'autre égalité s'obtient de la même façon.

I.1.3. On suppose que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont majorés et on pose $a = \sup \mathbf{A}$, $b = \sup \mathbf{B}$; a est alors un majorant de $\mathbf{A}$, b un majorant de $\mathbf{B}$ et $a+b$ est un majorant de $\mathbf{A}+\mathbf{B}$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x^* \in \mathbf{A}$ et $y^* \in \mathbf{B}$ tels que $x^* > a - \frac{\varepsilon}{2}$ et $y^* > b - \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, $x^* + y^* > a + b - \varepsilon$. Puisque $z^* = x^* + y^* \in \mathbf{A} + \mathbf{B}$, l'égalité $a + b = \sup(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ est donc prouvée. Si $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{B}$ n'est pas majoré, alors $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est aussi non-majoré et, par définition de la borne supérieure, $\sup(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} + \sup \mathbf{B} = +\infty$.

La seconde égalité est une conséquence immédiate de la première et du problème précédent. En effet, on a

$$\sup(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \sup(\mathbf{A} + (-\mathbf{B})) = \sup \mathbf{A} + \sup(-\mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} - \inf \mathbf{B}.$$

On peut appliquer des arguments semblables pour prouver les égalités

$$\begin{aligned} \inf(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \inf \mathbf{A} + \inf \mathbf{B}, \\ \inf(\mathbf{A} - \mathbf{B}) &= \inf \mathbf{A} - \sup \mathbf{B}. \end{aligned}$$

I.1.4. On suppose que chacun des deux ensembles est majoré et on pose $a = \sup \mathbf{A}$ et $b = \sup \mathbf{B}$. Puisque les éléments de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$ sont des réels strictement positifs, $xy \leqslant ab$ pour tout $x \in \mathbf{A}$ et $y \in \mathbf{B}$. On va montrer que ab est la borne supérieure de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x^* \in \mathbf{A}$ et $y^* \in \mathbf{B}$ tels que $x^* > a - \varepsilon$ et $y^* > b - \varepsilon$. Donc $x^* y^* > ab - \varepsilon(a + b - \varepsilon)$. Puisque l'on peut rendre $\varepsilon(a + b - \varepsilon)$ arbitrairement petit si ε est suffisamment petit, on voit que tout nombre inférieur à ab n'est pas un majorant de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Ainsi, $ab = \sup(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$. Si $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{B}$ n'est pas majoré, alors $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ne l'est pas non plus et $\sup(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} \times \sup \mathbf{B} = +\infty$.

Nous devons maintenant montrer que $\sup\left(\frac{1}{\mathbf{A}}\right) = \frac{1}{\inf \mathbf{A}}$ si $a' = \inf \mathbf{A} > 0$. Pour tout $x \in \mathbf{A}$, l'inégalité $x \geqslant a'$ est équivalente à $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{a'}$. Donc $\frac{1}{a'}$ est un majorant de $\frac{1}{\mathbf{A}}$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x^* \in \mathbf{A}$ tel que $x^* < a' + \varepsilon$. D'où,

$$\frac{1}{x^*} > \frac{1}{a' + \varepsilon} = \frac{1}{a'} - \frac{\varepsilon}{a'(a' + \varepsilon)}.$$

Puisque l'on peut rendre $\frac{\varepsilon}{a'(a'+\varepsilon)}$ arbitrairement petit, $\frac{1}{a'}$ est la borne supérieure de $\frac{1}{\mathbf{A}}$. On considère maintenant le cas où $a' = 0$. L'ensemble $\frac{1}{\mathbf{A}}$ est alors non-borné (en effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x^* \in \frac{1}{\mathbf{A}}$ tel que $x^* > \frac{1}{\varepsilon}$) et $\sup \frac{1}{\mathbf{A}} = +\infty$.

Supposons maintenant que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des ensembles bornés de réels (positifs ou négatifs) et posons $a = \sup \mathbf{A}$, $b = \sup \mathbf{B}$ et $a' = \inf \mathbf{A}$, $b' = \inf \mathbf{B}$. Si a' et b' sont positifs, l'égalité demandée se déduit de ce qui précède. Si $a' < 0$ et $a, b' > 0$, alors $xy \leqslant ab$ pour tout $x \in \mathbf{A}$ et $y \in \mathbf{B}$. On prend $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $a - \varepsilon > 0$. Il existe alors un réel $x^* \in \mathbf{A}$ strictement positif tel que $x^* > a - \varepsilon$. Il existe aussi $y^* \in \mathbf{B}$ tel que $y^* > b - \varepsilon$. Donc,

$$x^* y^* > x^*(b - \varepsilon) > (a - \varepsilon)(b - \varepsilon) = ab - \varepsilon(a + b + -\varepsilon).$$

Dans ce cas, on a alors $\sup(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = ab$.

On considère maintenant le cas $a', b' < 0$ et $a, b > 0$. Pour tout $x \in \mathbf{A}$ et $y \in \mathbf{B}$, on a

$$xy \leqslant \max\left\{ab, a'b'\right\}.$$

Supposons d'abord que $\max\{ab, a'b'\} = a'b'$. Par définition de la borne supérieure, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe $x^* \in \mathbf{A}$ et $y^* \in \mathbf{B}$ tels que $x^* < a + \varepsilon < 0$ et $y^* < b + \varepsilon < 0$. Ceci donne

$$x^* y^* > x^*(b' + \varepsilon) > (a' + \varepsilon)(b' + \varepsilon) = a'b' + \varepsilon(a' + b' + \varepsilon).$$

On note que $a' + b' + \varepsilon$ est strictement négatif. Donc $a'b'$ est la borne supérieure de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Dans le cas où $\max\{ab, a'b'\} = ab$, un raisonnement semblable donne $\sup(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = ab$. Tous les autres cas se traitent de la même façon.

I.1.5. On suppose d'abord que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont majorés. On pose $a = \sup \mathbf{A}$ et $b = \sup \mathbf{B}$. On peut bien sûr supposer que $a \leqslant b$. On a alors, pour tout $x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, $x \leqslant b$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x^* \in \mathbf{B}$ tel que $x^* > b - \varepsilon$. Il est évident que x^* appartient à $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. La première égalité est donc vérifiée. Si $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{B}$ n'est pas majoré, alors $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ ne l'est pas non plus. Donc, $\sup(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = +\infty$ et $\max\{+\infty, c\} = \max\{+\infty, +\infty\} = +\infty$. La seconde égalité se démontre de la même manière.

I.1.6. On a

$$\mathbf{A}_1 = \left\{-3, -\frac{11}{2}, 5\right\} \cup \left\{\frac{3}{4k}, -\frac{3}{4k+1}, -4 - \frac{3}{4k+2}, 4 + \frac{3}{4k+3} : k \in \mathbb{N}^*\right\},$$

$$\mathbf{A}_2 = \left\{\frac{3k-1}{3k+1}, -\frac{3k-2}{6k}, -\frac{3k-3}{2(3k-1)} : k \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Donc, $\inf \mathbf{A}_1 = -\frac{11}{2}$, $\sup \mathbf{A}_1 = 5$ et $\inf \mathbf{A}_2 = -\frac{1}{2}$, $\sup \mathbf{A}_2 = 1$.

I.1.7. $\sup \mathbf{A} = \frac{2}{9}$, $\inf \mathbf{A} = 0{,}2$, $\sup \mathbf{B} = \frac{1}{9}$, $\inf \mathbf{B} = 0$.

I.1.8. On peut montrer par récurrence que pour $n \geqslant 11$, $2^n > (n+1)^3$. Donc,

$$0 < \frac{(n+1)^2}{2^n} < \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3} \quad \text{pour } n \geqslant 11.$$

La borne inférieure de notre ensemble est donc égale à 0.

On prouve aussi facilement que $2^n > (n+1)^2$ pour $n \geqslant 6$. Donc, $\frac{(n+1)^2}{2^n} < 1$ pour $n \geqslant 6$. Les nombres 2, $\frac{9}{4}$, $\frac{25}{16}$ et $\frac{36}{32}$ appartiennent aussi à notre ensemble. La borne supérieure est donc égale à $\frac{9}{4}$.

I.1.9. On déduit du problème précédent que la borne inférieure de cet ensemble est 0. D'après l'inégalité mentionnée dans la solution précédente, $2^{nm} > (nm+1)^2$ pour $nm \geqslant 6$. Puisque $nm + 1 \geqslant n + m$ pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{(n+m)^2}{2^{nm}} < \frac{(n+m)^2}{(nm+1)^2} \leqslant \frac{(n+m)^2}{(n+m)^2} = 1 \quad \text{si} \quad nm \geqslant 6.$$

Pour $nm < 6$, on obtient les éléments suivants de notre ensemble : 1, 2, $\frac{9}{4}$, $\frac{25}{16}$ et $\frac{36}{32}$. La borne supérieure est donc égale à $\frac{9}{4}$.

I.1.10.

(a) Il est évident que 2 est un majorant de l'ensemble **A**. On va prouver qu'il n'y a pas de majorant plus petit. En effet, si $\varepsilon > 0$ est fixé, alors pour tout entier strictement positif $n^* > \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$, on a $\frac{2(n^*-1)}{n^*} > 2 - \varepsilon$. La borne inférieure de **A** est égale à 0 car $\frac{m}{n} > 0$ pour $m, n \in \mathbb{N}^*$ et, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\widehat{n}$ tel que $\frac{1}{\widehat{n}} < \varepsilon$.

(b) Clairement, $0 \leqslant \sqrt{n} - [\sqrt{n}] < 1$. En prenant $n = k^2$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, on voit que $0 \in \mathbf{B}$ et $\inf \mathbf{B} = 0$. Pour prouver que $\sup \mathbf{B} = 1$, on remarque d'abord que $\left[\sqrt{n^2+2n}\right] = n$ pour tout entier n strictement positif. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Un simple calcul montre que l'inégalité

$$\sqrt{n^2+2n} - \left[\sqrt{n^2+2n}\right] = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} > 1 - \varepsilon$$

est vérifiée pour tout entier $n > \frac{(1-\varepsilon)^2}{2\varepsilon}$.

I.1.11.

(a) $\sup\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0\right\} = +\infty$,

(b) $\inf\left\{z = x + x^{-1} : x > 0\right\} = 2$,

(c) $\inf\left\{z = 2^x + 2^{\frac{1}{x}} : x > 0\right\} = 4$.

Les deux premières égalités se vérifient facilement. Pour prouver la troisième, on remarque que $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ pour $a, b > 0$. Donc,

$$\frac{2^x + 2^{\frac{1}{x}}}{2} \geqslant \sqrt{2^{\frac{1}{x}+x}} \geqslant \sqrt{2^2} = 2$$

avec égalité si et seulement si $x = 1$. La proposition (c) est donc démontrée.

I.1.12.

(a) On obtient, en utilisant l'inégalité $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ pour $a, b > 0$,

$$\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \geqslant 4$$

avec égalité si et seulement si $m = 2n$. Donc, $\inf \mathbf{A} = 4$. On voit, en prenant $m = 1$, que l'ensemble $\mathbf{A}$ n'est pas majoré. Ceci signifie que $\sup \mathbf{A} = +\infty$.

(b) De même, on a

$$-\frac{1}{4} \leqslant \frac{mn}{4m^2 + n^2} \leqslant \frac{1}{4},$$

avec égalité si et seulement si respectivement $m = -2n$ et $m = 2n$. Donc, $\inf \mathbf{B} = -\frac{1}{4}$ et $\sup \mathbf{B} = \frac{1}{4}$.

(c) On a $\inf \mathbf{C} = 0$ et $\sup \mathbf{C} = 1$. En effet, $0 < \frac{m}{m+n} < 1$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des entiers strictement positifs n_1 et m_1 tels que

$$\frac{1}{n_1 + 1} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{m_1}{m_1 + 1} > 1 - \varepsilon.$$

(d) $\inf \mathbf{D} = -1$ et $\sup \mathbf{D} = 1$.

(e) On peut prendre $m = n$ pour voir que l'ensemble n'est pas majoré. Donc, $\sup \mathbf{E} = +\infty$. D'autre part, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{mn}{1+m+n} \geqslant \frac{1}{3}$ avec égalité si et seulement si $m = n = 1$. Donc $\inf \mathbf{E} = \frac{1}{3}$.

I.1.13. On obtient, en posant $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$,

$$\frac{a_k}{s} \leqslant \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} \leqslant 1 - \frac{a_{k+1}}{s} - \frac{a_{k+2}}{s}.$$

On en déduit

$$1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} \leqslant n - 2.$$

Le but est maintenant de prouver que $\inf \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k+a_{k+1}+a_{k+2}} = 1$ et $\sup \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k+a_{k+1}+a_{k+2}} = n-2$. Pour cela, on prend $a_k = t^k$, $t > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} &= \frac{t}{t + t^2 + t^3} + \ldots + \frac{t^{n-2}}{t^{n-2} + t^{n-1} + t^n} \\ &\quad + \frac{t^{n-1}}{t^{n-1} + t^n + t} + \frac{t^n}{t^n + t + t^2} \\ &= (n-2)\frac{1}{1 + t + t^2} + \frac{t^{n-2}}{t^{n-1} + t^{n-2} + 1} + \frac{t^{n-1}}{t^{n-1} + t + 1}.\end{aligned}$$

En faisant tendre t vers 0^+, on voit que $\sup \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k+a_{k+1}+a_{k+2}} = n-2$, puis en faisant tendre t vers $+\infty$, on conclut que $\inf \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k+a_{k+1}+a_{k+2}} = 1$.

I.1.14. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère les $n+1$ nombres réels

$$0, \alpha - [\alpha], 2\alpha - [2\alpha], \ldots, n\alpha - [n\alpha].$$

Chacun appartient à l'intervalle $[0\,,1[$. Puisque les n intervalles $\left[\frac{j}{n}\,,\frac{j+1}{n}\right[$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, recouvrent l'intervalle $[0\,,1[$, il y en a donc un qui contient au moins deux de ces points, $n_1\alpha - [n_1\alpha]$ et $n_2\alpha - [n_2\alpha]$ avec $0 \leqslant n_1 < n_2 \leqslant n$. Ainsi,

$$|n_2\alpha - [n_2\alpha] - n_1\alpha + [n_1\alpha]| < \frac{1}{n}.$$

Il suffit alors de prendre $q_n = n_2 - n_1$ et $p_n = [n_2\alpha] - [n_1\alpha]$. On déduit de l'argument précédent que $q_n \leqslant n$ et la seconde inégalité est aussi vérifiée.

I.1.15. On va montrer que tout intervalle $]p\,,q[$ contient au moins un élément de $\mathbf{A}$. On pose $0 < \varepsilon = q - p$. On déduit du problème précédent qu'il existe p_n et q_n tels que

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Puisque α est irrationnel, $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$. Donc,

$$|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_n} < \varepsilon$$

pour presque tout n. On pose maintenant $a = |q_n\alpha - p_n|$. Au moins un des réels ma, $m \in \mathbb{Z}$, appartient alors à l'intervalle $]p\,,q[$, autrement dit, $mq_n\alpha - mp_n$ ou $-mq_n\alpha + mp_n$ se trouve dans cet intervalle.

I.1.16. Soit $t \in [-1\,,1]$. Il existe un x tel que $t = \cos x$. D'après le résultat du problème précédent, il existe des suites d'entiers $\{m_n\}$ et $\{k_n\}$ telles que $x = \lim\limits_{n\to+\infty}(k_n 2\pi + m_n)$. Ceci et la continuité de la fonction cosinus impliquent

$$t = \cos x = \cos\left(\lim_{n\to+\infty}(k_n 2\pi + m_n)\right) = \lim_{n\to+\infty}\cos m_n = \lim_{n\to+\infty}\cos|m_n|.$$

Chaque élément de $[-1\,,1]$ est donc une valeur d'adhérence de l'ensemble $\{\cos n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Le résultat demandé est ainsi prouvé.

I.1.17. Il est évident que s'il existe n tel que x_n est un entier, alors x est rationnel. Supposons maintenant que $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Si $x - [x] \neq 0$, alors $\frac{p}{q} - \left[\frac{p}{q}\right] = \frac{l}{q}$, où l est un entier strictement positif plus petit que q. Le dénominateur de $x_1 = \frac{q}{l}$ est donc plus petit que le dénominateur de x. Ceci signifie que les dénominateurs de $x_1, x_2, \ldots$ forment une suite strictement décroissante qui ne peut donc pas être infinie.

I.1.18. On procède par récurrence. On peut facilement vérifier que

$$R_k = \frac{p_k}{q_k} \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2.$$

Supposons que, pour $m \geqslant 2$ choisi arbitrairement, on ait

$$R_m = \frac{p_m}{q_m} = \frac{p_{m-1}a_m + p_{m-2}}{q_{m-1}a_m + q_{m-2}}.$$

On remarque que si on remplace a_m dans R_m par $a_m + \frac{1}{a_{m+1}}$, on obtient alors la réduite R_{m+1}. Donc,

$$R_{m+1} = \frac{p_{m-1}\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) + p_{m+2}}{q_{m-1}\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) + q_{m+2}} = \frac{(p_{m-1}a_m + p_{m-2})a_{m+1} + p_{m-1}}{(q_{m-1}a_m + q_{m-2})a_{m+1} + q_{m-1}} = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}.$$

I.1.19. On pose

$$\Delta_k = p_{k-1}q_k - q_{k-1}p_k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

On a alors, pour $k > 1$,

$$\begin{aligned}\Delta_k &= p_{k-1}(q_{k-1}a_k + q_{k-2}) - q_{k-1}(p_{k-1}a_k + p_{k-2}) \\ &= -(p_{k-2}q_{k-1} - q_{k-2}p_{k-1}) = -\Delta_{k-1}.\end{aligned}$$

Puisque $\Delta_1 = p_0q_1 - q_0p_1 = a_0a_1 - (a_0a_1 + 1) = -1$, on obtient $\Delta_k = (-1)^k$. Ceci implique que p_k et q_k sont premiers entre eux[(2)].

I.1.20. Comme dans la solution de **I.1.18**, on a, pour $n > 1$,

$$R_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_{n-1}a_n + q_{n-2}}.$$

De même,

$$x = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}} \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc,

$$\begin{aligned}x - R_n &= \frac{p_n a_{n+1} + p_{n-1}}{q_n a_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n}{(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n} = \frac{(-1)^n}{(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n},\end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant du résultat de **I.1.19**. D'où,

$$x - R_n \begin{cases} > 0 & \text{pour } n \text{ pair}, \\ < 0 & \text{pour } n \text{ impair}. \end{cases}$$

Le nombre x se trouve donc toujours entre deux réduites successives.

(2) D'après le théorème de Bézout. (N.d.T.)

I.1.21. On prouve d'abord que l'ensemble $\{n - m\alpha : n, m \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+^*$ si α est un nombre irrationnel strictement positif. On considère pour cela un intervalle $]a\,,b[$ $(0 < a < b)$ et on montre que cet intervalle contient au moins un élément de notre ensemble. On pose $\varepsilon = b - a > 0$. D'après le problème précédent, il existe une réduite R_n telle que

$$0 < R_n - \alpha < \frac{1}{q_n^2}\,. \tag{1}$$

En effet, on considère un entier n impair et on observe que

$$(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n > q_n^2.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$, on a $\frac{1}{q_n} < \varepsilon$ pour n suffisamment grand. Ceci et (1) impliquent $0 < p_n - \alpha q_n < \frac{1}{q_n} < \varepsilon$ pour n suffisamment grand. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0(p_n - \alpha q_n) \in\,]a\,,b[$. Soit maintenant $t \in [-1\,,1]$. Il existe x strictement positif tel que $t = \sin x$. On déduit des considérations précédentes qu'il existe des suites d'entiers strictement positifs $\{m_n\}$ et $\{k_n\}$ telles que $x = \lim\limits_{n\to+\infty}(m_n - 2\pi k_n)$. Par continuité de la fonction sinus, on a

$$t = \sin x = \sin\left(\lim_{n\to+\infty}(m_n - 2\pi k_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin m_n.$$

On a donc prouvé que tout élément de l'intervalle $[-1\,,1]$ est une valeur d'adhérence de l'ensemble $\{\sin n : n \in \mathbb{N}^*\}$.

I.1.22. Soit p_n et q_n les entiers définis en **I.1.20**. Puisque $x_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+2}} > a_{n+1}$, on obtient $(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n > (q_n a_{n+1} + q_{n-1})q_n = q_{n+1}q_n$. Donc, d'après **I.1.20**,

$$|x - R_n| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}\,.$$

Puisque $q_{n+1} = q_n a_{n+1} + q_{n-1} > q_n a_{n+1} > q_n$, l'inégalité demandée suit. On prouve alors que la suite $\{q_n\}$ contient une infinité de nombres impairs. En effet, il découle de **I.1.19** que q_n et q_{n+1} ne peuvent pas être tous les deux pairs.

I.1.23. Il suffit d'appliquer la formule donnée en **I.1.19**.

I.1.24. On observe d'abord que la suite $\{q_n\}$ est strictement croissante et $q_n \geqslant n$. De plus, d'après le **problème I.1.20**,

$$|x - R_n| = \frac{1}{(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n}\,.$$

Ceci et l'inégalité $x_{n+1} < a_{n+1} + 1$ impliquent

$$|x - R_n| > \frac{1}{(q_n(a_{n+1} + 1) + q_{n-1})q_n} = \frac{1}{(q_{n+1} + q_n)q_n}.$$

Puisque $a_{n+2} \geqslant 1$, on a

$$|x - R_{n+1}| < \frac{1}{(q_{n+1}a_{n+2} + q_n)q_{n+1}} < \frac{1}{(q_{n+1} + q_n)q_n}.$$

Ces inégalités donnent le résultat demandé.

I.1.25. Soit $\frac{r}{s}$ tel que $\left|x - \frac{r}{s}\right| < |x - R_n| < |x - R_{n-1}|$. Puisque x se trouve entre R_n et R_{n-1} (voir le **problème I.1.20**),

$$\left|\frac{r}{s} - R_{n-1}\right| < |R_{n-1} - R_n|.$$

Donc, d'après le résultat de **I.1.23**,

$$\frac{|rq_{n-1} - sp_{n-1}|}{sq_{n-1}} < \frac{1}{q_{n-1}q_n}.$$

De plus, on a $\frac{1}{sq_{n-1}} < \frac{1}{q_{n-1}q_n}$ car $|rq_{n-1} - sp_{n-1}| \geqslant 1$. Donc, $s > q_n$.

I.1.26. On obtient, en suivant l'algorithme donné en **I.1.20**,

$$a_0 = \left[\sqrt{2}\right] = 1, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Donc, $a_1 = [x_1] = 2$. De même,

$$x_2 = \frac{1}{\left(\sqrt{2} + 1\right) - 2} = x_1 \quad \text{et} \quad a_2 = a_1 = 2.$$

Par récurrence, on a

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \dots$$

De même,

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \dots$$

I.1.27. Puisque $k < \sqrt{k^2+k} < k+1$, $a_0 = \left[\sqrt{k^2+k}\right] = k$. D'où, $x_1 = \frac{\sqrt{k^2+k}+k}{k}$. En conséquence, $2 < x_1 < 2 + \frac{1}{k}$ et $a_1 = 2$. De plus,

$$x_2 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k^2+k}-k} - 2} = k + \sqrt{k^2+k}.$$

Donc, $2k < x_2 < 2k+1$ et $a_2 = 2k$. De la même façon, on obtient $a_3 = 2$. On a alors, par récurrence,

$$\sqrt{k^2+k} = k + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2k} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2k} + \ldots$$

I.1.28. Puisque $0 < x < 1$, on a $a_0 = 0$ et $x_1 = 1/x$. Donc $a_1 = n$ implique $[1/x] = n$ et $1/x - 1 < n \leqslant 1/x$, ce qui donne $1/(n+1) < x \leqslant 1/n$.

I.2. Quelques inégalités élémentaires

I.2.1. On fait un raisonnement par récurrence. Pour $n = 1$, l'inégalité est évidente. On considère un entier n strictement positif et on suppose que

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
&(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)(1+a_{n+1}) \\
&\qquad \geqslant (1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1+a_{n+1}) \\
&\qquad = 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_{n+1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\
&\qquad \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}.
\end{aligned}$$

La proposition est donc démontrée.

I.2.2. On fait un raisonnement par récurrence. Pour $n = 1$, la proposition est claire. On suppose maintenant qu'elle est vérifiée pour un certain n. On peut supposer, sans perte de généralité, que les nombres $a_1, \ldots, a_{n+1}$ vérifiant la condition $a_1 a_2 \ldots a_{n+1} = 1$ sont numérotés de sorte que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1}$. On a alors $a_1 \leqslant 1$ et $a_{n+1} \geqslant 1$. Puisque $a_2 a_3 \ldots a_n (a_{n+1} a_1) = 1$, on a, par hypothèse de récurrence, $a_2 + a_3 + \ldots + a_n + (a_{n+1}a_1) \geqslant n$. D'où,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} &\geqslant n + a_{n+1} + a_1 - a_{n+1}a_1 \\ &= n + a_{n+1}(1 - a_1) + a_1 - 1 + 1 \\ &= n + 1 + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1) \\ &\geqslant n + 1. \end{aligned}$$

I.2.3. Les inégalités se déduisent de la proposition prouvée en **I.2.2**. En effet, en remplaçant ici les a_j par $\frac{a_j}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$, on obtient $A_n \geqslant G_n$. L'inégalité $G_n \geqslant H_n$ se déduit de l'inégalité $A_n \geqslant G_n$ en remplaçant les a_j par leurs inverses $\frac{1}{a_j}$.

I.2.4. On a, en utilisant l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique,

$$\sqrt[n]{(1 + nx) \times 1 \times \ldots \times 1} \leqslant 1 + x \qquad (n \text{ facteurs}).$$

I.2.5.

(a) On applique l'inégalité entre les moyennes arithmétique et harmonique.

(b) On applique l'inégalité entre les moyennes arithmétique et harmonique.

(c) La première inégalité peut se prouver comme en (a) et (b). Pour démontrer la seconde inégalité, on observe que

$$\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \ldots + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n+1} < \frac{1}{3n+1} + \frac{2n}{3n+2} < \frac{2}{3}\,.$$

(d) D'après l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique,

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{n+1}{n} > n\sqrt[n]{n+1}.$$

D'où,

$$1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} + \ldots + 1 + \frac{1}{n} > n\sqrt[n]{n+1}$$

et

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > n\left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right).$$

Pour prouver l'autre inégalité, on utilise l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique pour obtenir

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} > \frac{n}{\sqrt[n]{n+1}}\,.$$

Ceci implique

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right).$$

I.2.6. On obtient, par l'inégalité $G_n \leqslant A_n$,

$$x^n = \sqrt[2n+1]{1\times x\times\ldots\times x^{2n}} \leqslant \frac{1+\ldots+x^{2n}}{2n+1}\,.$$

I.2.7. La seconde inégalité est une conséquence immédiate de l'inégalité $G_n \leqslant A_n$. On peut prouver l'autre inégalité par récurrence. L'inégalité est vérifiée pour $n=1$. On montre qu'elle est vérifiée à l'ordre $n+1$ si elle l'est à l'ordre n. Pour cela, on montre que $(a_1a_{n+1})^{n+1} \leqslant (a_1\cdots a_na_{n+1})^2$ dès que $(a_1a_n)^n \leqslant (a_1\cdots a_n)^2$. On a

$$(a_1a_{n+1})^{n+1} \leqslant a_1\cdot a_n(a_1\cdots a_n)^2\cdot\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{n+1}.$$

Il suffit donc de prouver que

$$a_1\frac{a_{n+1}^{n+1}}{a_n^n} \leqslant a_{n+1}^2.$$

On peut réécrire cette inégalité sous la forme

$$a_1\left(1+\frac{d}{a_1+(n-1)d}\right)^{n-1} \leqslant a_1+(n-1)d,$$

où $a_n = a_1+(n-1)d$, ce qui se démontre facilement par récurrence.

I.2.8. Il s'agit d'une conséquence immédiate du problème précédent.

I.2.9. On peut appliquer l'inégalité entre les moyennes arithmétique et harmonique.

I.2.10.

(a) Par l'inégalité entre moyenne arithmétique et harmonique, on a

$$n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^{-1} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

et, en conséquence,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \geqslant \frac{n^2}{s}\,.$$

De même, l'inégalité

$$n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-a_k}\right)^{-1} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(s-a_k)$$

implique

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-a_k} \geqslant \frac{n^2}{s(n-1)}\,.$$

Le résultat demandé découle de ce qui précède et des égalités

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s-a_k} = s\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-a_k} - n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{s-a_k}{a_k} = s\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} - n.$$

(b) Voir la solution de la partie (a).

(c) Ceci s'obtient par la même méthode qu'en (a).

I.2.11. On utilise l'inégalité $\frac{1+a_k}{2} \geqslant \sqrt{a_k}$.

I.2.12. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2 &= \sum_{k,j=1}^{n}a_k^2b_j^2 - \sum_{k,j=1}^{n}a_kb_ka_jb_j \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}(a_kb_j - b_ka_j)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

I.2.13. Cette inégalité est équivalente à l'inégalité suivante :

$$\sum_{k,j=1}^{n}(a_ka_j + b_kb_j) \leqslant \sum_{k,j=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a_j^2+b_j^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

qui est elle-même une conséquence immédiate de l'inégalité évidente

$$a_ka_j + b_kb_j \leqslant \left(a_k^2+b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a_j^2+b_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

I.2.14. La proposition se déduit de l'inégalité de Cauchy.

I.2.15.

(a) D'après l'inégalité de Cauchy,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k \frac{1}{a_k}} \right)^2 = n^2.$$

(b) D'après (a),

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1-a_k}{a_k} &= \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} - n \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\geqslant n^2 - n \sum_{k=1}^{n} a_k = n \sum_{k=1}^{n} (1 - a_k). \end{aligned}$$

(c) Par hypothèse, $\log_a a_1 + \log_a a_2 + \ldots + \log_a a_n = 1$. Ceci et l'inégalité de Cauchy (**problème I.2.12**) donnent le résultat cherché.

I.2.16. L'inégalité est équivalente à

$$0 \leqslant -4\alpha \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| + 4 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \alpha^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

qui est vérifiée pour tout réel α car

$$\Delta = 16 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 - 16 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant 0.$$

I.2.17. On obtient, en appliquant l'inégalité de Cauchy,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} 1\, |a_k| \leqslant \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \,.$$

I.2.18.

(a) D'après l'inégalité de Cauchy, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} a_k \frac{b_k}{\sqrt{k}} \right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} k a_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{k} \,.$$

(b) De même,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{\frac{3}{2}}a_k}{k^{\frac{5}{2}}}\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}k^3a_k^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^5}.$$

I.2.19. L'inégalité de Cauchy donne

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{\frac{p+q}{2}}a_k^{\frac{p-q}{2}}\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^{p+q}\sum_{k=1}^{n}a_k^{p-q}.$$

I.2.20. D'après l'inégalité de Cauchy, on a

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2\times n=\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}1\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=1.$$

Donc, $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\geqslant\frac{1}{n}$ avec égalité si seulement si $a_k=\frac{1}{n}$ pour tout k. Le minimum cherché est donc égal à $\frac{1}{n}$.

I.2.21. De la même façon que dans la solution du problème précédent, on obtient

$$1=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{p_k}a_k\frac{1}{\sqrt{p_k}}\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}p_ka_k^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}.$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{n}p_ka_k^2\geqslant\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}}$$

avec égalité pour $a_k=\frac{1}{p_k}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}\right)^{-1}$. Le minimum cherché est donc égal à $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}\right)^{-1}$.

I.2.22. On déduit de la solution du **problème I.2.20** que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\leqslant n\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 &= \left((a_1 + a_2) + \sum_{k=3}^{n} a_k\right)^2 \\
&\leqslant (n-1)\left((a_1 + a_2)^2 + \sum_{k=3}^{n} a_k^2\right) \\
&= (n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_1a_2\right).
\end{aligned}$$

I.2.23.

(a) D'après l'inégalité de Cauchy, on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + 2a_kb_k + b_k^2)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

(b) D'après (a),

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci et l'inégalité établie en **I.2.17** donnent

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|.$$

De même,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|$$

et le résultat demandé est prouvé.

I.2.24. Puisque $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k = 1$, on a $1 = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (p_k - \alpha) a_k + \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ pour tout réel α. D'où, d'après l'inégalité de Cauchy,

$$1 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (p_k - \alpha)^2 + \alpha^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 \right).$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (p_k - \alpha)^2 + \alpha^2 \right)^{-1}.$$

On obtient la borne inférieure en prenant $\alpha = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 \geqslant \frac{n+1}{(n+1) \sum\limits_{k=1}^{n} p_k^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k \right)^2},$$

l'égalité étant atteinte pour

$$a_k = \frac{(n+1) p_k - \sum\limits_{k=1}^{n} p_k}{(n+1) \sum\limits_{k=1}^{n} p_k^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k \right)^2}.$$

I.2.25. On procède par récurrence. Pour $n = 1$, on a l'égalité $a_1 b_1 = a_1 b_1$. De plus, si l'inégalité est vérifiée au rang n, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} a_k \sum_{k=1}^{n+1} b_k - (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k & \\
&\leqslant a_{n+1} \sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1} \sum_{k=1}^{n} a_k - n a_{n+1} b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (b_{n+1} - b_k)(a_k - a_{n+1}) \leqslant 0.
\end{aligned}$$

I.2.26. On procède par récurrence sur p. Pour $p = 1$, l'égalité $a_1^p = a_1^p$ est vérifiée. Supposons que l'inégalité est vérifiée au rang p et démontrons-la au rang $p + 1$. On peut évidemment supposer, sans perte de généralité, que les

a_k sont numérotés de sorte que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. D'après l'hypothèse de récurrence et le résultat du problème précédent, on a alors

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{p+1} \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^p \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+1}.$$

I.2.27. On a

$$(1+c)a^2 + \left(1+\frac{1}{c}\right)b^2 = a^2 + b^2 + \left(\sqrt{c}a - \frac{1}{\sqrt{c}}b\right)^2 + 2ab \geqslant (a+b)^2 .$$

I.2.28. Clairement, $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} \geqslant |b| + |c| \geqslant |b+c|$. Donc, $\left|b^2-c^2\right| \leqslant |b-c|\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}\right)$, ce qui est équivalent à l'inégalité demandée.

I.2.29.

(a) Pour tous réels a, b, c, on a $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$. Donc, $b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2 \geqslant abc(ab+bc+ca)$, ce qui est équivalent à la proposition à prouver.

(b) La proposition demandée se déduit de l'inégalité $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$ à peu près de la même façon qu'en (a).

(c) Il s'agit d'une conséquence de l'inégalité entre moyennes arithmétique et harmonique.

(d) On a

$$\frac{b^2-a^2}{c+a} = \frac{b+a}{c+a}(b-a) = \frac{b+a}{c+a}\left((b+c)-(c+a)\right).$$

En posant $u = a+b$, $v = b+c$ et $z = c+a$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{b^2-a^2}{c+a} + \frac{c^2-b^2}{a+b} + \frac{a^2-c^2}{b+c} \\
&\quad = \frac{u}{z}(v-z) + \frac{v}{u}(z-u) + \frac{z}{v}(u-v) \\
&\quad = \frac{u^2v^2+v^2z^2+z^2u^2-\left(u^2vz+v^2uz+z^2uv\right)}{uvz} \\
&\quad = \frac{u^2\left(v^2+z^2\right)+v^2\left(z^2+u^2\right)+z^2\left(u^2+v^2\right)-2\left(u^2vz+v^2uz+z^2uv\right)}{2uvz} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

(e) L'inégalité est claire pour $a = b$. On suppose maintenant que $0 < b < a$. On a alors

$$\frac{a-b}{2\sqrt{a}} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}} < \sqrt{a}-\sqrt{b} < \frac{a-b}{2\sqrt{b}}$$

et

$$\frac{(a-b)^2}{4a} < \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a+b-2\sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{4b}.$$

I.2.30. On pose $m = \frac{a_i}{b_i}$. On a alors

$$\begin{aligned} m(b_1+\ldots+b_n) &= \frac{a_i}{b_i}(b_1+b_2+\ldots+b_n) = \frac{a_i}{b_i}b_1 + \frac{a_i}{b_i}b_2 + \ldots + \frac{a_i}{b_i}b_n \\ &\leqslant \frac{a_1}{b_1}b_1 + \frac{a_2}{b_2}b_2 + \ldots + \frac{a_n}{b_n}b_n = a_1+\ldots+a_n \\ &\leqslant M(b_1+\ldots+b_n). \end{aligned}$$

I.2.31. Les inégalités se déduisent du résultat du problème précédent et de la monotonie de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

I.2.32. On applique l'inégalité donnée en **I.2.30** en prenant $a_i = \ln c_i$ et $b_i = k_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

I.2.33. On note que

$$\frac{a_1}{b_1} \leqslant M,\ \frac{a_2^2}{Mb_2^2} \leqslant M, \ldots, \frac{a_n^n}{M^{n-1}b_n^n} \leqslant M$$

et on utilise l'inégalité prouvée en **I.2.30**.

I.2.34. D'après l'inégalité entre moyennes arithmétique et harmonique (voir **I.2.3**), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\ldots+\frac{1}{x-a_n}} &\leqslant \frac{(x-a_1)+(x-a_2)+\ldots+(x-a_n)}{n} \\ &= \frac{nx-(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{n}. \end{aligned}$$

Le résultat demandé s'ensuit facilement.

I.2.35. On observe que

$$1 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n = (1+1)^n = 2^n$$

et on applique l'inégalité de Cauchy (voir **I.2.12**) en prenant $a_k = 1$ et $b_k = \sqrt{c_k}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

I.2.36. Puisque

$$\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \prod_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad 2^n - 2 = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k},$$

la proposition découle directement de l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique (**problème I.2.3**).

I.2.37. On obtient, d'après l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique (voir **I.2.3**),

$$A_k^{p-1} A_{k-1} \leqslant \frac{(p-1)A_k^p + A_{k-1}^p}{p} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

en posant $A_0 = 0$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} A_k^p - \frac{p}{p-1} A_k^{p-1} a_k &= A_k^p - \frac{p}{p-1} A_k^{p-1} (kA_k - (k-1)A_{k-1}) \\ &= A_k^p \left(1 - \frac{kp}{p-1}\right) + A_k^{p-1} A_{k-1} \frac{(k-1)p}{p-1} \\ &\leqslant A_k^p \left(1 - \frac{kp}{p-1}\right) + \frac{k-1}{p-1} \left((p-1)A_k^p + A_{k-1}^p\right) \\ &= \frac{1}{p-1} \left((k-1)A_{k-1}^p - kA_k^p\right). \end{aligned}$$

On obtient notre proposition en additionnant ces inégalités.

I.2.38. On suppose que $a_i = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1} &= \sum_{k=1}^{i-1} a_k a_{k+1} + \sum_{k=i}^{n-1} a_k a_{k+1} \\ &\leqslant a_i \sum_{k=1}^{i-1} a_k + a_i \sum_{k=i}^{n-1} a_{k+1} \\ &= a_i(a - a_i) = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - a_i\right)^2 \leqslant \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

I.2.39. On peut appliquer le résultat de **I.2.2**.

I.2.40. L'inégalité de gauche se déduit de **I.2.1**.

(a) On observe que

$$1+a_k=\frac{1-a_k^2}{1-a_k}<\frac{1}{1-a_k}.$$

Donc,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)<\left(\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)\right)^{-1}.$$

Puisque $a_1+a_2+\ldots+a_n<1$, en appliquant à nouveau le résultat de **I.2.1**, on obtient

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)<\left(1-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^{-1}.$$

(b) On utilise le même raisonnement qu'en (a).

I.2.41. On applique l'inégalité donnée en **I.2.15 (b)** en remplaçant les a_k par $1-a_k$.

I.2.42. Puisque $0<a_k\leqslant 1$ pour $k=1,2,\ldots,n$, l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\geqslant\prod_{k=1}^{n}a_k\times\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\tag{1}$$

est vérifiée pour $n\geqslant 2$. On applique maintenant l'inégalité donnée en **I.2.15 (b)** en remplaçant a_k par $\frac{a_k}{1+a_k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ pour obtenir

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}\right)\geqslant n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}.$$

En multipliant chaque membre de cette inégalité par $\prod\limits_{k=1}^{n}a_k$ et en utilisant (1), on obtient le résultat demandé.

I.2.43.

(a) On a, d'après l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique (**problème I.2.3**),

$$\frac{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)}{(n+1)^n} = \frac{2a_1+a_2+\ldots+a_n}{n+1} \times \frac{a_1+2a_2+a_3+\ldots+a_n}{n+1}$$
$$\times \ldots \times \frac{a_1+a_2+\ldots+2a_n}{n+1} \geqslant \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

(b) La démonstration de cette inégalité se mène comme en (a).

I.2.44. On remarque d'abord que $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+a_k} = 1$ si $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k} = n-1$. Il suffit, pour obtenir le résultat demandé, d'appliquer l'inégalité donnée en **I.2.43 (b)** en remplaçant les a_k par $\frac{a_k}{1+a_k}$.

I.2.45. [M.S. Klamkin, Amer. Math. Monthly 82(1975), 741-742]. On peut supposer que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont numérotés de sorte que $a_1 = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et $a_2 = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et on note $A_n = 1/n$ la moyenne arithmétique de $a_1, \ldots, a_n$. On définit une nouvelle suite $\{a'_k\}$ en posant $a'_1 = A_n$, $a'_2 = a_1 + a_2 - A_n$, $a'_i = a_i$ pour $3 \leqslant i \leqslant n$. On va prouver que

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1+a_k}{1-a_k} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{1+a'_k}{1-a'_k}. \tag{1}$$

La définition de la suite $\{a'_k\}$ implique que l'inégalité (1) est équivalente à

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)}{(1-a_1)(1-a_2)} \geqslant \frac{(1+A_n)(1+a_1+a_2-A_n)}{(1-A_n)(1-a_1-a_2+A_n)},$$

qui à son tour est équivalente à

$$(A_n - a_1)(A_n - a_2) \leqslant 0.$$

Cette dernière inégalité est une conséquence immédiate de nos hypothèses. On répète alors la procédure ci-dessus à la suite $\{a'_k\}$ pour obtenir la suite $\{a''_k\}$. Au moins deux termes de la suite $\{a''_k\}$ sont égaux à A_n. De plus, la suite vérifie une inégalité du type (1). Si on répète cette procédure au plus $n-1$ fois, on obtient une suite constante dont tous les termes sont égaux à A_n. L'inégalité (1) implique alors

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1+a_k}{1-a_k} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{1+A_n}{1-A_n} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n .$$

I.2.46. On pose $a_{k_1} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Il existe une fraction dans le membre de gauche de l'inégalité dont le numérateur est égal à a_{k_1}. Le dénominateur de cette fraction a deux termes. On note le plus grand a_{k_2}. On considère alors la fraction de numérateur a_{k_2} et on appelle a_{k_3} le plus grand des termes de son dénominateur, etc. On remarque que

$$\frac{a_{k_i}}{a_{k_{i+1}} + a_{k_{i+2}}} \geqslant \frac{a_{k_i}}{2a_{k_{i+1}}}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

La construction précédente implique qu'il existe un l tel que $a_{k_{l+1}} = a_{k_1}$. On observe ensuite que les nombres a_{k_i} et $a_{k_{i+1}}$ apparaissent dans notre inégalité comme numérateurs soit de deux fractions consécutives, soit de deux fractions séparées par un seul terme (on considère ici que la première et la dernière fractions sont voisines). De plus, $a_{k_{i+1}}$ apparaît comme numérateur d'une fraction se trouvant à droite de celle ayant a_{k_i} pour numérateur. Pour passer de la fraction de numérateur a_{k_1} à la fraction de numérateur $a_{k_{l+1}}$, il faut l étapes et $l \geqslant \frac{n}{2}$. Donc, d'après (1) et l'inégalité en les moyennes arithmétique et géométrique, on a

$$\frac{a_{k_1}}{2a_{k_2}} + \frac{a_{k_2}}{2a_{k_3}} + \ldots + \frac{a_{k_l}}{2a_{k_1}} \geqslant l \sqrt[l]{\frac{1}{2^l}} \geqslant \frac{n}{4} .$$

I.2.47. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{|a_k - t|}}{2^k} &\geqslant \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)\sqrt{|a_1 - t|} + \frac{\sqrt{|a_2 - t|}}{2^2} \\
&\quad + \ldots + \frac{\sqrt{|a_n - t|}}{2^n} \\
&\geqslant \frac{1}{2^2}\left(\sqrt{|a_1 - t|} + \sqrt{|a_2 - t|}\right) + \frac{1}{2^3}\left(\sqrt{|a_1 - t|} + \sqrt{|a_3 - t|}\right) \\
&\quad + \ldots + \frac{1}{2^n}\left(\sqrt{|a_1 - t|} + \sqrt{|a_n - t|}\right),
\end{aligned}$$

ce qui implique l'inégalité demandée.

I.2.48. D'après l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique, on a

$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1}\cdot\frac{a_2}{a_2+b_2}\cdots\frac{a_n}{a_n+b_n}}+\sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1}\cdot\frac{b_2}{a_2+b_2}\cdots\frac{b_n}{a_n+b_n}}$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\ldots+\frac{a_n}{a_n+b_n}+\frac{b_1}{a_1+b_1}+\ldots+\frac{b_n}{a_n+b_n}\right)=1.$$

I.2.49. [V. Ptak, Amer. Math. Monthly 102(1995), 820-821]. On observe d'abord que si on remplace chaque a_k par ca_k avec $c>0$, ni le premier membre, ni le second membre de l'inégalité ne sont changés. On peut donc supposer que $G=1$, d'où $a_n=\frac{1}{a_1}$. On observe ensuite que si $a_1\leqslant x\leqslant\frac{1}{a_1}$, alors $x+\frac{1}{x}\leqslant a_1+\frac{1}{a_1}$. Donc,

$$\sum_{k=1}^{n}p_ka_k+\sum_{k=1}^{n}p_k\frac{1}{a_k}\leqslant a_1+\frac{1}{a_1}=2A.$$

Pour obtenir la proposition, on applique maintenant l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique.

I.2.50. On arrange tous les diviseurs positifs de n par paires (k,l) de telle sorte que $kl=n$. L'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique donne $\frac{k+l}{2}\geqslant\sqrt{kl}$. En additionnant ces inégalités, on obtient

$$\frac{\sigma(n)}{2}\geqslant\frac{\tau(n)}{2}\sqrt{n}.$$

This page intentionally left blank

II

SUITES DE NOMBRES RÉELS

Énoncés

II.1. Suites monotones

II.1.1. Prouver que

(a) si la suite $\{a_n\}$ est croissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$;

(b) si la suite $\{a_n\}$ est décroissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

II.1.2. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des réels strictement positifs. On considère les suites

$$s_n = \frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n}{p} \quad \text{et} \quad x_n = \sqrt[n]{s_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Prouver que la suite $\{x_n\}$ est croissante.

Indication : établir d'abord la monotonie de la suite $\left\{\frac{s_n}{s_{n-1}}\right\}$, $n \geqslant 2$.

II.1.3. Prouver que la suite $\{a_n\}$ définie par $a_n = \frac{n}{2^n}$ $(n > 1)$ est strictement décroissante et trouver sa limite.

II.1.4. Soit $\{a_n\}$ une suite bornée vérifiant la condition $a_{n+1} \geqslant a_n - \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $\{a_n\}$ est convergente.

Indication : considérer la suite $\{a_n - \frac{1}{2^{n-1}}\}$.

II.1.5. Prouver la convergence des suites :

(a) $a_n = -2\sqrt{n} + \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

(b) $b_n = -2\sqrt{n+1} + \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Indication : établir d'abord les inégalités

$$2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

II.1.6. Prouver que la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 2$$

converge et trouver sa limite.

II.1.7. Pour $c > 2$, on définit la suite $\{a_n\}$ comme suit :

$$a_1 = c^2, \quad a_{n+1} = (a_n - c)^2, \quad n \geqslant 1.$$

Montrer que la suite $\{a_n\}$ est strictement croissante.

II.1.8. On suppose que la suite $\{a_n\}$ vérifie les conditions

$$0 < a_n < 1, \quad a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4} \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Établir la convergence de la suite et trouver sa limite.

II.1.9. Établir la convergence et trouver la limite de la suite définie par

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1.$$

II.1.10. Montrer que la suite définie par

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(1 + a_n + a_{n-1}^3\right) \quad \text{pour} \quad n > 1$$

converge et déterminer sa limite.

II.1.11. Étudier la monotonie de la suite

$$a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}, \qquad n \geqslant 1,$$

et déterminer sa limite.

II.1.12. Déterminer la convergence ou la divergence de la suite

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \qquad n \geqslant 1.$$

II.1.13. Prouver la convergence des suites

(a) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

(b) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1.14. Prouver la convergence de la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)2n}}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

II.1.15. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$ et $a_1 > 0$, on définit la suite $\{a_n\}$ en posant

$$a_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)a_n + \frac{a}{a_n^{p-1}}\right), \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

II.1.16. On définit $\{a_n\}$ par

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{a_n}} \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

Établir la convergence de la suite $\{a_n\}$ et trouver sa limite.

II.1.17. On définit la suite $\{a_n\}$ comme suit :

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2(2a_n+1)}{a_n+3} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Établir la convergence de la suite $\{a_n\}$ et trouver sa limite.

II.1.18. Déterminer les valeurs de $c > 0$ pour lesquelles la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_1 = \frac{c}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(c + a_n^2\right) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

converge. Dans les cas où la suite converge, trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

II.1.19. Soit $a > 0$ un réel donné. On définit la suite $\{a_n\}$ en posant

$$a_1 > 0 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = a_n \frac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Déterminer toutes les valeurs de a_1 pour lesquelles la suite converge et trouver dans ce cas sa limite.

II.1.20. Soit $\{a_n\}$ la suite définie par

$$a_{n+1} = \frac{1}{4 - 3a_n} \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

Déterminer pour quelles valeurs de a_1 la suite converge et trouver dans ce cas sa limite.

II.1.21. Soit a un réel donné. On définit la suite $\{a_n\}$ comme suit :

$$a_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = a_n^2 + (1 - 2a)a_n + a^2 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Déterminer toutes les valeurs de a_1 pour lesquelles la suite converge et trouver dans ce cas sa limite.

II.1.22. Pour $c > 0$ et $b > a > 0$, on définit la suite récurrente $\{a_n\}$ par

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + ab}{a + b} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Déterminer pour quelles valeurs de a, b et c la suite converge et trouver sa limite.

II.1.23. Prouver la convergence et déterminer la limite de la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = 6\frac{1 + a_n}{7 + a_n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

II.1.24. Pour $c \geqslant 0$, on définit la suite $\{a_n\}$ comme suit :

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Prouver la convergence de la suite et trouver sa limite.

II.1.25. Étudier la convergence de la suite définie par

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

II.1.26. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence de la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_1 = \sqrt[k]{5}, \quad a_{n+1} = \sqrt[k]{5a_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

II.1.27. Étudier la convergence de la suite $\{a_n\}$ définie par

$$1 \leqslant a_n \leqslant 2, \quad a_{n+1}^2 = 3a_n - 2, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

II.1.28. Pour $c > 1$, on définit les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ comme suit :

(a) $a_1 = \sqrt{c(c-1)}, \quad a_{n+1} = \sqrt{c(c-1) + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$

(b) $b_1 = \sqrt{c}, \quad b_{n+1} = \sqrt{cb_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

Prouver que chacune des deux suites converge vers c.

II.1.29. Étant donné $a > 0$ et $b > 0$, on définit la suite $\{a_n\}$ par

$$0 < a_1 < b, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + a_n^2}{a+1}} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

II.1.30. Prouver la convergence de $\{a_n\}$ définie par

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{a_n}} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

et trouver sa limite.

II.1.31. La suite récurrente $\{a_n\}$ est définie par

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n} \quad \text{pour } n \geqslant 2.$$

Prouver que la suite est bornée et strictement croissante. Trouver sa limite.

II.1.32. La suite récurrente $\{a_n\}$ est définie par

$$a_1 = 9, \quad a_2 = 6, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n} \quad \text{pour } n \geqslant 2.$$

Prouver que la suite est bornée et strictement décroissante. Trouver sa limite.

II.1.33. On définit les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ comme suit :

$$0 < b_1 < a_1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Démontrer que $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ convergent vers la même limite. (Cette limite est appelée la *moyenne arithmético-géométrique* de a_1 et b_1.)

II.1.34. Prouver que les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ définies par

$$0 < b_1 < a_1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

sont toutes deux monotones et convergent vers la même limite.

II.1.35. On considère les suites récurrentes $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ définies par

$$0 < b_1 < a_1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Prouver la monotonie de ces deux suites et montrer qu'elles convergent vers la moyenne géométrique de a_1 et b_1.

II.1.36. Prouver la convergence et trouver la limite de la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n} \right) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

II.1.37. La suite $\{a_n\}$ est bornée et vérifie

$$a_{n+2} \leqslant \frac{1}{3} a_{n+1} + \frac{2}{3} a_n \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

Prouver la convergence de la suite $\{a_n\}$.

II.1.38. Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ les suites définies par

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

En utilisant les inégalités entre moyennes arithmétique, géométrique et harmonique (voir **I.2.3**), prouver que

(a) $a_n < b_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$,

(b) la suite $\{a_n\}$ est strictement croissante,

(c) la suite $\{b_n\}$ est strictement décroissante.

Prouver aussi que $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ ont la même limite, que l'on définit comme étant le *nombre (d'Euler) e*.

II.1.39. On pose

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Prouver que la suite $\{a_n\}$ est bornée et strictement croissante si $x > 0$.

(b) Soit x un réel quelconque. Prouver que la suite $\{a_n\}$ est bornée et strictement croissante pour $n > -x$.

On définit le nombre e^x comme étant la limite de cette suite.

II.1.40. On suppose que $x > 0$, $l \in \mathbb{N}^*$ et $l > x$. Prouver que la suite $\{b_n\}$, où

$$b_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{l+n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*,$$

est strictement décroissante.

II.1.41. Établir la monotonie des suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ définies par

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*,$$
$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Prouver que ces deux suites tendent vers la même limite γ, appelée *constante d'Euler*[(1)].

Indication : appliquer l'inégalité $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *qui découle de II.1.38.*

[(1)] Ou encore constante d'Euler-Mascheroni. (N.d.T.)

II.1.42. Soit $x > 0$. On pose $a_n = \sqrt[2^n]{x}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $\{a_n\}$ est bornée. Montrer aussi qu'elle est strictement croissante si $x < 1$ et strictement décroissante si $x > 1$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

On pose de plus

$$c_n = 2^n(a_n - 1) \quad \text{et} \quad d_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{a_n}\right) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que $\{c_n\}$ est décroissante, $\{d_n\}$ est croissante et que ces deux suites ont la même limite.

II.2. Limites. Propriétés des suites convergentes

II.2.1. Calculer :

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$,

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n + \sin n^2}{n + \cos n}$,

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-2n)}{\sqrt{n^2+1}}$,

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}\right)\cdots\left(\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2}\right)$,

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^{\sqrt{n}}}$,

(f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{2^{n^2}}$,

(g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$,

(h) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}\right)$,

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n^3+1} + \dfrac{2n}{n^3+2} + \cdots + \dfrac{n \cdot n}{n^3+n}\right)$.

II.2.2. Soit $s > 0$ et $p > 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^s}{(1+p)^n} = 0.$$

II.2.3. Pour $\alpha \in]0\,,1[$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} ((n+1)^\alpha - n^\alpha)$.

II.2.4. Pour $\alpha \in \mathbb{Q}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n!\alpha\pi)$.

II.2.5. Prouver que la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n$ n'existe pas.

II.2.6. Prouver que, pour tout α irrationnel, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n\alpha\pi$ n'existe pas.

II.2.7. Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\left(a+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(a+\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right).$$

II.2.8. On suppose que $a_n \neq 1$ pour tout n et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$. L'entier strictement positif k étant donné, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^k - k}{a_n - 1}.$$

II.2.9. Trouver

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{2\times 3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right).$$

II.2.10. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}.$$

II.2.11. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{j}{n^3}.$$

II.2.12. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{2}{2\times 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\times 4}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right).$$

II.2.13. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}.$$

II.2.14. Trouver, pour $x\neq-1$ et $x\neq1$,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}.$$

II.2.15. Déterminer pour quelles valeurs de $x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)$$

existe et trouver sa valeur.

II.2.16. Déterminer toutes les valeurs de $x\in\mathbb{R}$ pour lesquelles la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{2}{x^{2^k}+x^{-2^k}}\right)$$

existe et trouver sa valeur.

II.2.17. Établir pour quelles valeurs de $x\in\mathbb{R}$ la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{3^k}+x^{2\times3^k}\right)$$

existe et trouver sa valeur.

II.2.18. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1\times1!+2\times2!+\cdots+n\times n!}{(n+1)!}.$$

II.2.19. Pour quelles valeurs de $x\in\mathbb{R}$ l'égalité

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{1999}}{n^x-(n-1)^x}=\frac{1}{2\,000}$$

est-elle vérifiée ?

II.2.20. Étant donné a et b tels que $a \geqslant b > 0$, on définit la suite $\{a_n\}$ en posant

$$a_1 = a + b, \quad a_n = a_1 - \frac{ab}{a_{n-1}}, \quad n \geqslant 2.$$

Déterminer le n-ième terme de la suite et calculer $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

II.2.21. On définit la suite $\{a_n\}$ par

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad \text{et} \quad a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 2 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 2.$$

Déterminer son n-ième terme et calculer $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

II.2.22. Pour $a > 0$ et $b > 0$, on considère la suite $\{a_n\}$ définie par

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \\ a_n &= \frac{aa_{n-1}}{\sqrt{a^2+a_{n-1}^2}}, \quad n \geqslant 2. \end{aligned}$$

Déterminer son n-ième terme et calculer $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

II.2.23. Soit $\{a_n\}$ la suite récurrente définie comme suit :

$$a_1 = 0, \quad a_n = \frac{a_{n-1}+3}{4}, \quad n \geqslant 2.$$

Expliciter le n-ième terme de la suite et calculer $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

II.2.24. Étudier la convergence de la suite définie par

$$a_1 = a, \quad a_n = 1 + ba_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

II.2.25. La *suite de Fibonacci* $\{a_n\}$ est définie comme suit :

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \geqslant 1.$$

Montrer que[(2)]

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

où α et β sont les racines de $x^2 = x + 1$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

[(2)] *Formule de Binet.* (N.d.T.).

II.2.26. On définit les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ par

$$a_1 = a, \qquad b_1 = b,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2}.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

II.2.27. On se donne $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a + aa + \cdots + \overbrace{aa\ldots a}^{n \text{ chiffres}}}{10^n}.$$

II.2.28. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n.$$

II.2.29. On suppose que la suite $\{a_n\}$ converge vers 0. Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n$.

II.2.30. Étant donné des réels strictement positifs $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et $a_1, a_2, \ldots, a_k$, trouver

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_1 a_1^{n+1} + p_2 a_2^{n+1} + \cdots + p_k a_k^{n+1}}{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + \cdots + p_k a_k^n}.$$

II.2.31. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$. Prouver que

(a) si $q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$,

(b) si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

II.2.32. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$. Prouver que

(a) si $q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$,

(b) si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

II.2.33. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in]0\,, 1[$, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha x^n.$$

II.2.34. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\, x^n \quad \text{pour } m \in \mathbb{N}^* \text{ et } |x| < 1.$$

II.2.35. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et que $\{b_n\}$ est une suite bornée. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$.

II.2.36. Prouver que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}.$$

II.2.37. Soit $a_n \geqslant -1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Déterminer, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[p]{1+a_n}.$$

II.2.38. On suppose que la suite $\{a_n\}$ est strictement positive et converge vers 0. Déterminer, pour l'entier $p \geqslant 2$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[p]{1+a_n}-1}{a_n}.$$

II.2.39. Pour des réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_p$, trouver

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_p)} - n \right).$$

II.2.40. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right).$$

II.2.41. Pour $a_1, a_2, \ldots, a_p$ strictement positifs, trouver

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n}{p}}.$$

II.2.42. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2\sin^2 \frac{n^{1999}}{n+1} + \cos^2 \frac{n^{1999}}{n+1}}.$$

II.2.43. Trouver

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1+n\cos n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}}.$$

II.2.44. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1 \right).$$

II.2.45. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}} - 1 \right).$$

II.2.46. Pour $a_1, a_2, \ldots, a_p$ strictement positifs, trouver

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \sqrt[n]{a_k} \right)^{p}.$$

II.2.47. Soit $\alpha \in]0\,,1[$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha + \frac{1}{n} \right)^{k}.$$

II.2.48. Soit $x \geqslant 1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(2\sqrt[n]{x} - 1\right)^{n} = x^2.$$

II.2.49. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2\sqrt[n]{n} - 1\right)^{n}}{n^2} = 1.$$

II.2.50. Parmi les suites suivantes, lesquelles sont des suites de Cauchy ?

(a) $a_n = \dfrac{\operatorname{Arctan} 1}{2} + \dfrac{\operatorname{Arctan} 2}{2^2} + \cdots + \dfrac{\operatorname{Arctan} n}{2^n}$,

(b) $a_n = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{2^2}{4^2} + \cdots + \dfrac{n^2}{4^n}$,

(c) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$,

(d) $a_n = \dfrac{1}{1\times 2} - \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n(n+1)}$,

(e) $a_n = \alpha_1 q^1 + \alpha_2 q^2 + \cdots + \alpha_n q^n$ pour $|q| < 1$ et $|\alpha_k| \leqslant M$ $(k \in \mathbb{N}^*)$,

(f) $a_n = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{2}{3^2} + \cdots + \dfrac{n}{(n+1)^2}$.

II.2.51. On suppose que la suite $\{a_n\}$ vérifie la condition

$$|a_{n+1} - a_{n+2}| < \lambda\, |a_n - a_{n+1}|$$

avec $\lambda \in\,]0\,,1[$. Prouver que $\{a_n\}$ converge.

II.2.52. Étant donné une suite $\{a_n\}$ d'entiers strictement positifs, on définit

$$S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

et

$$\sigma_n = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

Prouver que si $\{S_n\}$ converge, alors $\{\ln \sigma_n\}$ converge aussi.

II.2.53. Prouver que la suite $\{R_n\}$ des réduites d'un nombre irrationnel x (définies au **problème I.1.20**) est une suite de Cauchy.

II.2.54. La suite $\{a_n\}$ étant une suite arithmétique dont les termes sont non nuls, calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}}\right).$$

II.2.55. La suite $\{a_n\}$ étant une suite arithmétique dont les termes sont strictement positifs, calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right).$$

II.2.56. Trouver

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right)$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}}}{n}$.

II.2.57. Soit $\{a_n\}$ la suite définie comme suit :

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_{n+1} = pa_{n-1} + (1-p)a_n, \quad n = 2, 3\dots$$

Déterminer pour quelles valeurs de a, b et p la suite converge.

II.2.58. Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ les suites définies par

$$a_1 = 3, \quad b_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad \text{et} \quad b_{n+1} = a_n + b_n.$$

On pose de plus

$$c_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Prouver que $\left|c_{n+1} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}\left|c_n - \sqrt{2}\right|$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.

II.3. La transformation de Toeplitz, le théorème de Stolz et leurs applications

II.3.1. Démontrer le *théorème de Toeplitz de transformation régulière*[3] *de suites en suites* :

Soit $\{c_{n,k} : 1 \leqslant k \leqslant n, n \geqslant 1\}$ un tableau de nombres réels vérifiant :

(i) $c_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$,

(iii) il existe $C > 0$ tel que, pour tout entier n strictement positif,

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{n,k}| \leqslant C.$$

Pour toute suite convergente $\{a_n\}$, la suite transformée $\{b_n\}$ définie par $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k}a_k$ $(n \geqslant 1)$ est alors aussi convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

[3] Une *transformation* de suite est *régulière* si elle transforme toute suite convergente en une suite convergente de même limite. (N.d.T.)

II.3.2. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

II.3.3.

(a) Prouver que l'on peut omettre l'hypothèse (iii) du théorème de Toeplitz (**problème II.3.1**) si tous les $c_{n,k}$ sont positifs.

(b) Soit $\{b_n\}$ la suite transformée définie dans le théorème de Toeplitz avec $c_{n,k} > 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $n \geqslant 1$. Prouver que si $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

II.3.4. Prouver que si $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = +\infty.$$

II.3.5. Prouver que si $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 1 \times a_n}{n^2} = \frac{a}{2}\,.$$

II.3.6. Montrer que si la suite strictement positive $\{a_n\}$ converge vers a, alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = a$.

II.3.7. Pour une suite $\{a_n\}$ strictement positive, montrer que si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

II.3.8. Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

II.3.9. Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites telles que

(i) $b_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = +\infty$,

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$.

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = g.$$

II.3.10. Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites telles que

(i) $b_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = +\infty$,

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = a.$$

II.3.11. En utilisant le résultat du problème précédent, démontrer le *théorème de Stolz*. Soit $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ deux suites vérifiant les conditions :

(i) $\{y_n\}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$,

(ii)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = g.$$

On a alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = g.$$

II.3.12. Calculer

(a) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

(b) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^{n+1}}\left(a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n}\right)$, $a > 1$,

(c) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{k+1}}\left(k! + \frac{(k+1)!}{1!} + \cdots + \frac{(k+n)!}{n!}\right)$, $k \in \mathbb{N}^*$,

(d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$,

(e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$, $k\in\mathbb{N}^*$,

(f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1+1\times a+2\times a^2+\cdots+n\times a^n}{n\times a^{n+1}}$, $a>1$,

(g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^k}\left(1^k+2^k+\cdots+n^k\right)-\frac{n}{k+1}\right)$, $k\in\mathbb{N}^*$.

II.3.13. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Trouver

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(a_1+\frac{a_2}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right).$$

II.3.14. Prouver que si $\{a_n\}$ est une suite telle que

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=a,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=a.$$

II.3.15. Soit $\{a_n\}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{1}+\frac{a_{n-1}}{2}+\cdots+\frac{a_1}{2^{n-1}}\right).$$

II.3.16. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Trouver

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{1\times 2}+\frac{a_{n-1}}{2\times 3}+\cdots+\frac{a_1}{n(n+1)}\right)$,

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{1}-\frac{a_{n-1}}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_1}{2^{n-1}}\right)$.

II.3.17. Soit k un entier strictement plus grand que 1. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\binom{nk}{n}}.$$

II.3.18. Pour une suite arithmétique $\{a_n\}$ strictement positive, déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}}{a_1+\cdots+a_n}.$$

II.3.19. Soit $\{a_n\}$ une suite telle que la suite $\{b_n\}$ définie par $b_n = 2a_n + a_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$ converge vers b. Étudier la convergence de $\{a_n\}$.

II.3.20. Soit $\{a_n\}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^x a_n = a$ pour un certain réel x. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} n^x\,(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = ae^x.$$

II.3.21. Calculer

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}}{\ln n}$,

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}{\ln n}$.

II.3.22. On suppose que $\{a_n\}$ converge vers a. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n}\left(\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right) = a.$$

II.3.23. Trouver

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!}{n^ne^{-n}}\right)^{\frac{1}{n}}$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n!)^3}{n^{3n}e^{-n}}\right)^{\frac{1}{n}}$,

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n!)^2}{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}$, (d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{3n}}{(n!)^3}\right)^{\frac{1}{n}}$,

(e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[k]{n}}{\sqrt[n]{n!}}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

II.3.24. Prouver que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k} = a.$$

II.3.25. Étant donné une suite $\{a_n\}$, on considère la suite des moyennes arithmétiques $\{A_n\}$, soit $A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. Prouver que si $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$, on a alors aussi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = A.$$

II.3.26. Prouver la réciproque du théorème de Toeplitz énoncé en **II.3.1** :

Soit $\{c_{n,k} : 1 \leqslant k \leqslant n, n \geqslant 1\}$ un tableau de nombres réels. Si pour toute suite convergente $\{a_n\}$, la suite transformée $\{b_n\}$ définie par

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} a_k$$

converge vers la même limite, alors

(i) $c_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$,

(iii) il existe $C > 0$ tel que, pour tout entier n strictement positif,

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{n,k}| \leqslant C.$$

II.4. Valeurs d'adhérence, limite supérieure et limite inférieure

II.4.1. Soit $\{a_n\}$ une suite dont les sous-suites $\{a_{2k}\}$, $\{a_{2k+1}\}$ et $\{a_{3k}\}$ convergent.

(a) Prouver la convergence de la suite $\{a_n\}$.

(b) La convergence de deux de ces sous-suites implique-t-elle la convergence de la suite $\{a_n\}$?

II.4.2. La convergence de toute sous-suite de $\{a_n\}$ de la forme $\{a_{s\times n}\}$, $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$, implique-t-elle la convergence de la suite $\{a_n\}$?

II.4.3. Soit $\{a_{p_n}\}$, $\{a_{q_n}\}$, ..., $\{a_{s_n}\}$ des sous-suites de $\{a_n\}$ telles que les suites $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, ..., $\{s_n\}$ soient deux à deux disjointes et que leur union forme la suite $\{n\}$. Montrer que si $\mathbf{S}$, $\mathbf{S_p}$, $\mathbf{S_q}$, ..., $\mathbf{S_s}$ sont les ensembles des valeurs d'adhérence respectives des suites $\{a_n\}$, $\{a_{p_n}\}$, $\{a_{q_n}\}$, ..., $\{a_{s_n}\}$, alors

$$\mathbf{S} = \mathbf{S_p} \cup \mathbf{S_q} \cup \cdots \cup \mathbf{S_s}.$$

En conclure que si toutes les sous-suites $\{a_{p_n}\}$, $\{a_{q_n}\}$, ..., $\{a_{s_n}\}$ convergent vers a, la suite $\{a_n\}$ converge alors aussi vers a.

II.4.4. Le théorème précédent (**problème II.4.3**) est-il vrai dans le cas d'une infinité de sous-suites ?

II.4.5. Prouver que si toute sous-suite $\{a_{n_k}\}$ d'une suite $\{a_n\}$ contient une sous-suite $\{a_{n_{k_i}}\}$ convergente vers a, la suite $\{a_n\}$ converge alors aussi vers a.

II.4.6. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\{a_n\}$ dans le cas où :

(a) $a_n = \sqrt[n]{4^{(-1)^n} + 2}$,

(b) $a_n = \dfrac{1}{2}\left(n - 2 - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right]\right)\left(n - 3 - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right]\right)$,

(c) $a_n = \dfrac{(1 - (-1)^n)\, 2^n + 1}{2^n + 3}$,

(d) $a_n = \dfrac{(1 + \cos n\pi) \ln 3n + \ln n}{\ln 2n}$,

(e) $a_n = \left(\cos \dfrac{n\pi}{3}\right)^n$,

(f) $a_n = \dfrac{2n^2}{7} - \left[\dfrac{2n^2}{7}\right]$.

II.4.7. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\{a_n\}$ définie par

(a) $a_n = n\alpha - [n\alpha]$, $\alpha \in \mathbb{Q}$,

(b) $a_n = n\alpha - [n\alpha]$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$,

(c) $a_n = \sin \pi n\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q}$,

(d) $a_n = \sin \pi n\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

II.4.8. Soit $\{a_k\}$ une suite produite par une énumération (bijective) des éléments de la matrice $\{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m}\}$, $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tout réel est valeur d'adhérence de cette suite.

II.4.9. Soit $\{a_n\}$ une suite bornée. Prouver que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est fermé et borné.

II.4.10. Déterminer $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n$ et $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n$ dans le cas où :

(a) $a_n = \dfrac{2n^2}{7} - \left[\dfrac{2n^2}{7}\right]$,

(b) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{3}$,

(c) $a_n = (-1)^n\, n$,

(d) $a_n = n^{(-1)^n n}$,

(e) $a_n = 1 + n \sin \dfrac{n\pi}{2}$,

(f) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin \dfrac{n\pi}{4}$,

(g) $a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$,

(h) $a_n = \left(2 \cos \dfrac{2n\pi}{3}\right)^n$,

(i) $a_n = \dfrac{\ln n - (1 + \cos n\pi)n}{\ln 2n}$.

II.4.11. Déterminer la limite supérieure et la limite inférieure des suites suivantes :

(a) $a_n = n\alpha - [n\alpha]$, $\alpha \in \mathbb{Q}$,

(b) $a_n = n\alpha - [n\alpha]$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$,

(c) $a_n = \sin \pi n\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q}$,

(d) $a_n = \sin \pi n\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

II.4.12. Pour une suite $\{a_n\}$ quelconque, montrer que

(a) s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que l'inégalité $a_n \leqslant A$ est vérifiée pour tout entier $n > k$, alors $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n \leqslant A$,

(b) si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_k > k$ tel que $a_{n_k} \leqslant A$, alors $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n \leqslant A$,

(c) s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que l'inégalité $a_n \geqslant a$ est vérifiée pour tout $n > k$, alors $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n \geqslant a$,

(d) si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_k > k$ tel que $a_{n_k} \geqslant a$, alors $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n \geqslant a$.

II.4.13. On suppose que les limites inférieure et supérieure de la suite $\{a_n\}$ sont finies. Prouver que

(a) $L = \varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ si et seulement si

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } a_n < L + \varepsilon \text{ si } n > k \tag{i}$$

et

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe } n_k > k \text{ tel que } L - \varepsilon < a_{n_k}. \tag{ii}$$

(b) $l = \varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ si et seulement si

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } l - \varepsilon < a_n \text{ si } n > k \tag{i}$$

et

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe } n_k > k \text{ tel que } a_{n_k} < l + \varepsilon. \tag{ii}$$

Formuler les propositions correspondantes pour des limites inférieure et supérieure infinies.

II.4.14. On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que $a_n \leqslant b_n$ pour tout $n \geqslant n_0$. Prouver que

(a)
$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} b_n,$$

(b)
$$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

II.4.15. Prouver (à l'exclusion des formes indéterminées des types $+\infty - \infty$ et $-\infty + \infty$) les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varliminf_{n\to+\infty} b_n \leqslant \varliminf_{n\to+\infty}(a_n+b_n) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n \\ \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty}(a_n+b_n) \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.\end{aligned}$$

Donner des exemples de suites pour lesquelles les « $\leqslant$ » sont remplacés par des « $<$ » dans les inégalités précédentes.

II.4.16. Les inégalités

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varliminf_{n\to+\infty} b_n \leqslant \varliminf_{n\to+\infty}(a_n+b_n),$$
$$\varlimsup_{n\to+\infty}(a_n+b_n) \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n$$

restent-elles valides dans le cas d'un nombre infini de suites ?

II.4.17. Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ des suites à termes positifs. Prouver (à l'exclusion des formes indéterminées des types $0\times(+\infty)$ et $+\infty\times 0$) les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to+\infty} a_n \times \varliminf_{n\to+\infty} b_n \leqslant \varliminf_{n\to+\infty}(a_n\times b_n) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} a_n \times \varlimsup_{n\to+\infty} b_n \\ \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty}(a_n\times b_n) \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} a_n \times \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.\end{aligned}$$

Donner des exemples de suites pour lesquelles les « $\leqslant$ » sont remplacés par des « $<$ » dans les inégalités précédentes.

II.4.18. Prouver que la suite $\{a_n\}$ converge si et seulement si la limite inférieure et la limite supérieure sont finies et

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n.$$

Prouver qu'un théorème semblable est aussi correct dans le cas d'une suite divergeant proprement vers $+\infty$ ou $-\infty$.

II.4.19. Prouver que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ $(a\in\mathbb{R})$, alors

$$\varliminf_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = a + \varliminf_{n\to+\infty} b_n,$$
$$\varlimsup_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = a + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

II.4.20. Prouver que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$) et s'il existe un entier naturel n_0 tel que $b_n \geqslant 0$ pour $n \geqslant n_0$, alors

$$\varliminf_{n\to+\infty} (a_n \times b_n) = a \times \varliminf_{n\to+\infty} b_n,$$
$$\varlimsup_{n\to+\infty} (a_n \times b_n) = a \times \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

II.4.21. Prouver que

$$\varliminf_{n\to+\infty} (-a_n) = -\varlimsup_{n\to+\infty} a_n, \qquad \varlimsup_{n\to+\infty} (-a_n) = -\varliminf_{n\to+\infty} a_n.$$

II.4.22. Prouver que

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n},$$
$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n}$$

pour toute suite $\{a_n\}$ strictement positive. (Ici, $\frac{1}{+\infty} = 0$, $\frac{1}{0^+} = +\infty$.)

II.4.23. Prouver que si $\{a_n\}$ est une suite strictement positive telle que

$$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 1,$$

alors elle converge.

II.4.24. Prouver que si $\{a_n\}$ est une suite telle que, pour toute suite $\{b_n\}$,

$$\varliminf_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varliminf_{n\to+\infty} b_n$$

ou

$$\varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n,$$

alors cette suite est convergente.

II.4.25. Prouver que si $\{a_n\}$ est une suite strictement positive telle que, pour toute suite strictement positive $\{b_n\}$,

$$\varliminf_{n\to+\infty} (a_n \times b_n) = \varliminf_{n\to+\infty} a_n \times \varliminf_{n\to+\infty} b_n$$

ou

$$\varlimsup_{n\to+\infty} (a_n \times b_n) = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n \times \varlimsup_{n\to+\infty} b_n,$$

alors cette suite est convergente.

II.4.26. Prouver que, pour toute suite strictement positive $\{a_n\}$, on a

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

II.4.27. Pour une suite $\{a_n\}$ donnée, on définit la suite $\{b_n\}$ en posant

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Prouver que

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} b_n \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} b_n \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} a_n .$$

II.4.28. Prouver que

(a) $$\varlimsup_{n\to+\infty} (\max\{a_n, b_n\}) = \max\left\{\varlimsup_{n\to+\infty} a_n, \varlimsup_{n\to+\infty} b_n\right\}$$

(b) $$\varliminf_{n\to+\infty} (\min\{a_n, b_n\}) = \min\left\{\varliminf_{n\to+\infty} a_n, \varliminf_{n\to+\infty} b_n\right\}$$

Les égalités

(a) $$\varlimsup_{n\to+\infty} (\min\{a_n, b_n\}) = \min\left\{\varlimsup_{n\to+\infty} a_n, \varlimsup_{n\to+\infty} b_n\right\}$$

(b) $$\varliminf_{n\to+\infty} (\max\{a_n, b_n\}) = \max\left\{\varliminf_{n\to+\infty} a_n, \varliminf_{n\to+\infty} b_n\right\}$$

sont-elles aussi correctes ?

II.4.29. Prouver que toute suite réelle contient une sous-suite monotone.

II.4.30. Utiliser le résultat de l'exercice précédent pour déduire le *théorème de Bolzano-Weierstrass* :

Toute suite réelle bornée contient une sous-suite convergente.

II.4.31. Prouver que

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{a_n} \geqslant 4$$

pour toute suite $\{a_n\}$ strictement positive. Montrer que 4 est le meilleur minorant.

II.5. Problèmes divers

II.5.1. Prouver que si $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

II.5.2. Pour $x \in \mathbb{R}$, prouver que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^x.$$

II.5.3. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, établir l'inégalité

$$\frac{x}{x+2} < \ln(x+1) < x.$$

Prouver aussi (en utilisant la dérivation) que l'on peut améliorer la première inégalité comme suit :

$$\frac{x}{x+1} < \frac{2x}{x+2} < \ln(x+1), \quad x > 0.$$

II.5.4. Prouver que

(a) $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \ln a$, $a > 0$,

(b) $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{n}-1\right) = +\infty$.

II.5.5. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive dont les termes sont différents de 1. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln a_n}{a_n-1} = 1.$$

II.5.6. On pose

$$a_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = e \qquad \text{et} \qquad 0 < e - a_n < \frac{1}{nn!}\,.$$

II.5.7. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x.$$

II.5.8.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2,$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}\right)=\ln 2.$

II.5.9. Trouver la limite de la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right),\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

II.5.10. Soit $\{a_n\}$ la suite récurrente définie par

$$a_1=1,\quad a_n=n(a_{n-1}+1)\quad\text{pour}\quad n=2,3,\ldots$$

Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right).$$

II.5.11. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n!e-[n!e])=0.$

II.5.12. Étant donné a et b strictement positifs, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}.$$

II.5.13. Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites strictement positives telles que

$$\lim_{n\to+\infty}a_n^n=a,\qquad\lim_{n\to+\infty}b_n^n=b,\qquad\text{où } a,b>0.$$

Soit p et q deux réels strictement positifs vérifiant $p+q=1$. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty}(pa_n+qb_n)^n=a^pb^q.$$

II.5.14. Étant donné deux réels a et b, on définit la suite récurrente $\{a_n\}$ comme suit :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = b, \quad a_{n+1} = \frac{n-1}{n}\, a_n + \frac{1}{n}\, a_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

II.5.15. On note $\{a_n\}$ la suite récurrente définie par

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1}), \quad n \geqslant 2.$$

Trouver une formule explicite donnant le terme général de la suite.

II.5.16. Étant donné deux réels a et b, on définit la suite récurrente $\{a_n\}$ par

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2n}\, a_{n-1} + \frac{2n-1}{2n}\, a_n, \quad n \geqslant 2.$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

II.5.17. On pose

$$a_n = 3 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e$.

(b) Prouver aussi que $0 < a_n - e < \frac{1}{(n+1)(n+1)!}$.

II.5.18. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n \sin(2\pi n! e)$.

II.5.19. Soit $\{a_n\}$ une suite vérifiant $a_n < n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Étudier la convergence de la suite

$$\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

II.5.20. Soit $\{b_n\}$ une suite strictement positive divergeant vers $+\infty$. Étudier la convergence de la suite

$$\left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

II.5.21. On définit la suite récurrente $\{a_n\}$ en posant

$$0 < a_1 < 1, \quad a_{n+1} = a_n(1 - a_n), \quad n \geqslant 1.$$

Prouver que

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 1$,

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(1-na_n)}{\ln n} = 1$.

II.5.22. La suite récurrente $\{a_n\}$ est définie par

$$0 < a_1 < \pi, \quad a_{n+1} = \sin a_n, \quad n \geqslant 1.$$

Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}a_n = \sqrt{3}$.

II.5.23. On pose

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}, \quad n \geqslant 1.$$

Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2\ln n}} = 1.$$

II.5.24. Soit $\{a_n\}$ la suite récurrente définie par

$$a_1 > 0, \qquad a_{n+1} = \operatorname{Arctan} a_n, \quad n \geqslant 1.$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

II.5.25. Prouver que la suite récurrente définie par

$$0 < a_1 < 1, \qquad a_{n+1} = \cos a_n, \quad n \geqslant 1,$$

converge vers l'unique racine de l'équation $x = \cos x$.

II.5.26. On définit la suite récurrente $\{a_n\}$ comme suit :

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = 1 - \sin(a_n - 1), \quad n \geqslant 1.$$

Trouver

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

II.5.27. Soit $\{a_n\}$ la suite des racines successives de l'équation $\tan x = x$, $x > 0$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n)$.

II.5.28. Pour $|a| \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $a_1 \in \mathbb{R}$, on considère la suite définie par

$$a_{n+1} = a \sin a_n, \quad n \geqslant 1.$$

Étudier la convergence de cette suite.

II.5.29. Étant donné $a_1 > 0$, on considère la suite $\{a_n\}$ définie en posant

$$a_{n+1} = \ln(1 + a_n), \quad n \geqslant 1.$$

Prouver que

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 2$,

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(na_n - 2)}{\ln n} = \dfrac{2}{3}$.

II.5.30. On définit la suite récurrente $\{a_n\}$ par

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{a_n}, \quad n \geqslant 1.$$

Étudier la convergence de cette suite.

II.5.31. Étant donné $a_1 > 0$, on définit la suite $\{a_n\}$ comme suit :

$$a_{n+1} = 2^{1-a_n}, \qquad n \geqslant 1.$$

Étudier la convergence de cette suite.

II.5.32. Trouver la limite de la suite définie par

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = 2^{\frac{a_n}{2}}, \quad n \geqslant 1.$$

II.5.33. Prouver que si $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - a_{n-2}) = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0.$$

II.5.34. Prouver que si, pour une suite strictement positive $\{a_n\}$, la limite

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

existe (finie ou infinie), alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}$$

existe aussi et les deux limites sont égales.

II.5.35. Étant donné $a_1, b_1 \in \,]0\,,1[$, prouver que les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ définies par

$$a_{n+1} = a_1(1-a_n-b_n)+a_n, \quad b_{n+1} = b_1(1-a_n-b_n)+b_n, \quad n \geqslant 1,$$

convergent et trouver leur limite respective.

II.5.36. On considère, pour a et a_1 strictement positifs, la suite définie par

$$a_{n+1} = a_n(2-aa_n), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Étudier la convergence de cette suite.

II.5.37. Montrer que si a_1 et a_2 sont strictement positifs et

$$a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

alors la suite $\{a_n\}$ converge. Trouver sa limite.

II.5.38. Soit $f\colon \left(\mathbb{R}_+^*\right)^k \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante en chacune de ses variables telle qu'il existe $a > 0$ vérifiant

$$\begin{aligned} f(x,x,\ldots,x) &> x \quad \text{pour } 0 < x < a,\\ f(x,x,\ldots,x) &< x \quad \text{pour } x > a. \end{aligned}$$

Étant donné $a_1, a_2, \ldots, a_k$, on définit la suite récurrente $\{a_n\}$ par

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}) \quad \text{pour } n > k.$$

Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

II.5.39. Soit a_1 et a_2 deux réels strictement positifs. Étudier la convergence de la suite $\{a_n\}$ définie par la relation

$$a_{n+1} = a_n e^{a_n - a_{n-1}} \quad \text{pour } n > 1.$$

II.5.40. Étant donné $a > 1$ et $x > 0$, on définit $\{a_n\}$ en posant $a_1 = a^x$ et $a_{n+1} = a^{a_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence de cette suite.

II.5.41. Montrer que

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ racines}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Utiliser cette relation pour trouver la limite de la suite récurrente définie par

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \quad n \geqslant 1.$$

II.5.42. Soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite dont les termes prennent leur valeur dans l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$. Établir la relation

$$\varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\cdots+\varepsilon_n\sqrt{2}}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k}{2^{k-1}}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

et montrer que la suite

$$a_n = \varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\cdots+\varepsilon_n\sqrt{2}}}$$

converge.

II.5.43. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{2\cdot 2^2} + \cdots + \operatorname{Arctan}\frac{1}{2n^2}\right).$$

II.5.44. Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

II.5.45. Étudier la convergence de la suite récurrente définie comme suit :

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{2+\sqrt{3}}, \quad a_{n+2} = \sqrt{2+\sqrt{3+a_n}} \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

II.5.46. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}=3.$$

II.5.47. Étant donné $a>0$, on définit la suite récurrente $\{a_n\}$ en posant

$$a_1<0,\qquad a_{n+1}=\frac{a}{a_n}-1\quad\text{pour } n\in\mathbb{N}^*.$$

Prouver que la suite converge vers la racine négative de l'équation $x^2+x=a$.

II.5.48. Étant donné $a>0$, on définit la suite récurrente $\{a_n\}$ par

$$a_1>0,\qquad a_{n+1}=\frac{a}{a_n+1}\quad\text{pour } n\in\mathbb{N}^*.$$

Prouver que la suite converge vers la racine positive de l'équation $x^2+x=a$.

II.5.49. Soit $\{a_n\}$ la suite définie par la relation

$$a_1=1,\qquad a_{n+1}=\frac{2+a_n}{1+a_n}\quad\text{pour } n\in\mathbb{N}^*.$$

Prouver que cette suite est une suite de Cauchy et trouver sa limite.

II.5.50. Soit $\{a_n\}$ la suite définie par

$$a_1>0,\qquad a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n}\quad\text{pour } n\in\mathbb{N}^*.$$

Prouver que cette suite est une suite de Cauchy et trouver sa limite.

II.5.51. Étant donné $a>0$, on définit la suite $\{a_n\}$ par

$$a_1=0,\qquad a_{n+1}=\frac{a}{2+a_n}\quad\text{pour } n\in\mathbb{N}^*.$$

Étudier la convergence de la suite.

II.5.52. On suppose que

$$a_1\in\mathbb{R}\quad\text{et}\quad a_{n+1}=\left|a_n-2^{1-n}\right|\quad\text{pour } n\in\mathbb{N}^*.$$

Étudier la convergence de cette suite et, si elle converge, trouver sa limite.

II.5.53. Prouver que

(a) si $0 < a < 1$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{ja^j}{n-j} = 0,$$

(b) si $0 < a < 1$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} na^n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{ja^j} = \frac{1}{1-a},$$

(c) si $b > 1$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{b^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{b^{j-1}}{j} = \frac{1}{b-1}.$$

II.5.54. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sin\frac{\pi}{n+1} + \sin\frac{\pi}{n+2} + \cdots + \sin\frac{\pi}{2n} \right).$$

II.5.55. Trouver

(a) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{cn^3}\right), \quad$ où $c > 0$,

(b) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k^2}{cn^3}\right), \quad$ où $c > 1$.

II.5.56. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n\sqrt{n}}.$$

II.5.57. On définit la suite $\{a_n\}$ par

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Montrer que $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} a_n = 2$.

II.5.58. Déterminer pour quelles valeurs de α la suite

$$a_n = \left(1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\right)\left(1 - \left(\frac{2}{n}\right)^{\alpha}\right)\cdots\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\alpha}\right), \quad n \geqslant 2,$$

converge.

II.5.59. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\{x\} = x - [x]$. Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\}$.

II.5.60. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive, on pose $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ $(n \geqslant 1)$. On suppose que

$$a_{n+1} \leqslant \frac{1}{S_{n+1}}\left((S_n - 1)a_n + a_{n-1}\right), \quad n \geqslant 1.$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

II.5.61. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} < +\infty.$$

Trouver

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n^2}.$$

II.5.62. On considère deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ strictement positives telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = 0.$$

On définit la suite $\{c_n\}$ en posant

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} = 0.$$

II.5.63. Trouver

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}.$$

II.5.64. On suppose que la suite majorée $\{a_n\}$ vérifie la condition

$$a_{n+1} - a_n > -\frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Établir la convergence de $\{a_n\}$.

II.5.65. On suppose que la suite bornée $\{a_n\}$ vérifie la condition

$$a_{n+1} \sqrt[2^n]{2} \geqslant a_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Établir la convergence de $\{a_n\}$.

II.5.66. On note respectivement l et L les limites inférieure et supérieure de la suite $\{a_n\}$. Prouver que si $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$, alors tout élément de l'intervalle ouvert $]l\,, L[$ est une valeur d'adhérence de $\{a_n\}$.

II.5.67. On note respectivement l et L les limites inférieure et supérieure de la suite $\{a_n\}$. On suppose que pour tout n, $a_{n+1} - a_n > -\alpha_n$ avec $\alpha_n > 0$ et $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$. Prouver que tout élément de l'intervalle ouvert $]l\,, L[$ est une valeur d'adhérence de $\{a_n\}$.

II.5.68. Soit $\{a_n\}$ une suite croissante et strictement positive. Prouver que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite

$$\frac{a_n}{n + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

est un intervalle (réduit à un singleton en cas de convergence).

II.5.69. Étant donné $a_1 \in \mathbb{R}$, on considère la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & \text{pour } n \text{ pair,} \\[2mm] \dfrac{1 + a_n}{2} & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Trouver les valeurs d'adhérence de cette suite.

II.5.70. Zéro est-il valeur d'adhérence de la suite $\{\sqrt{n} \sin n\}$?

II.5.71. Prouver que pour toute suite strictement positive $\{a_n\}$,

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geqslant e.$$

II.5.72. Prouver la généralisation suivante du résultat précédent : pour tout entier $p>0$ et pour toute suite strictement positive $\{a_n\}$, on a

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left(\frac{a_1+a_{n+p}}{a_n}\right)^n \geqslant e^p.$$

II.5.73. Prouver que pour toute suite strictement positive $\{a_n\}$, on a

$$\varlimsup_{n\to+\infty} n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right) \geqslant 1.$$

Prouver que le minorant 1 est optimal.

II.5.74. On pose

$$a_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}_{n \text{ racines}}.$$

Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

II.5.75. Soit $\{a_n\}$ une suite dont les termes sont strictement plus grands que 1 et telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\ln a_n}{n} = \alpha.$$

On considère la suite $\{b_n\}$ définie par

$$b_n = \sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_n}}}, \quad n\in\mathbb{N}^*.$$

Prouver que la suite $\{b_n\}$ converge si $\alpha<\ln 2$ et qu'elle diverge vers $+\infty$ si $\alpha>\ln 2$.

II.5.76. On suppose que les termes de la suite $\{a_n\}$ vérifient la condition

$$0\leqslant a_{m+n}\leqslant a_m+a_n \quad \text{pour} \quad m,n\in\mathbb{N}^*.$$

Prouver que la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}$ existe.

II.5.77. On suppose que les termes de la suite $\{a_n\}$ vérifient la condition

$$0 \leqslant a_{m+n} \leqslant a_m \cdot a_n \quad \text{pour} \quad m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Prouver que la limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existe.

II.5.78. On suppose que les termes de la suite $\{a_n\}$ vérifient les conditions

$$|a_n| \leqslant 1,$$
$$a_m + a_n - 1 \leqslant a_{m+n} \leqslant a_m + a_n + 1$$

pour $m, n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Prouver que la limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}$ existe.

(b) Prouver que si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = g$, alors

$$ng - 1 \leqslant a_n \leqslant ng + 1 \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

II.5.79. On suppose que $\{a_n\}$ est une suite croissante et strictement positive vérifiant la condition

$$a_{n\cdot m} \geqslant n a_m \quad \text{pour} \quad m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Prouver que si $\sup\left\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\} < +\infty$, alors la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ converge.

II.5.80. Étant donné deux réels strictement positifs a_1 et a_2, prouver que la suite récurrente $\{a_n\}$ définie par

$$a_{n+2} = \frac{2}{a_{n+1} + a_n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

converge.

II.5.81. Pour $b_1 \geqslant a_1 > 0$, on considère les deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ définies par

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n+1} b_n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Démontrer que les deux suites convergent vers la même limite.

II.5.82. Soit $a_{k,n}$, $b_{k,n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $k = 1, 2, \ldots, n$) deux tableaux triangulaires de réels, $b_{k,n} \neq 0$. On suppose que $\frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ uniformément par rapport à k, autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que

$$\left| \frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} - 1 \right| < \varepsilon$$

pour tout $n > n_0$ et $k = 1, 2, \ldots, n$. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,n}$ existe, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} b_{k,n}.$$

II.5.83. Étant donné $a \neq 0$, trouver

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{(2k-1)a}{n^2} .$$

II.5.84. Pour $a > 0$, déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(a^{\frac{k}{n^2}} - 1 \right) .$$

II.5.85. Trouver

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) .$$

II.5.86. Pour $p \neq 0$ et $q > 0$, déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(1 + \frac{k^{q-1}}{n^q} \right)^{\frac{1}{p}} - 1 \right) .$$

II.5.87. Étant donné des réels strictement positifs a, b et d tels que $b > a$, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a(a+d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)\cdots(b+nd)} .$$

Solutions

II.1. Suites monotones

II.1.1.

(a) Soit $\{a_n\}$ une suite croissante majorée. On a $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = A < +\infty$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant A$. Puisque pour tout $\varepsilon > 0$, $A - \varepsilon$ n'est pas un majorant de l'ensemble $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, il existe a_{n_0} tel que $a_{n_0} > A - \varepsilon$. La suite étant monotone, $A \geqslant a_n > A - \varepsilon$ pour tout $n > n_0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$.

On suppose maintenant que $\{a_n\}$ n'est pas majorée. Pour tout M, il existe a_{n_0} tel que $a_{n_0} > M$. La suite étant monotone, $a_n > M$ pour tout $n > n_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(b) Voir la solution de (a).

II.1.2. On a
$$\frac{s_n}{s_{n-1}} \leqslant \frac{s_{n+1}}{s_n} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 2.$$
En effet, d'après **I.2.19**, on a
$$s_n^2 \leqslant s_{n+1}s_{n-1}. \tag{1}$$
On va prouver que $\{x_n\}$ est une suite croissante. L'inégalité $x_1 \leqslant x_2$ se déduit de $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant p \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$ (voir la solution de **I.2.20**). Supposons maintenant que $x_{n-1} \leqslant x_n$. On a alors
$$s_{n-1} \leqslant s_n^{\frac{n-1}{n}}. \tag{2}$$
Donc, d'après (1) et (2),
$$x_{n+1} = \sqrt[n+1]{s_{n+1}} \geqslant \sqrt[n+1]{\frac{s_n^2}{s_{n-1}}} \geqslant \sqrt[n+1]{\frac{s_n^2}{s_n^{\frac{n-1}{n}}}} = x_n.$$

II.1.3. On a $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n}\, a_n < a_n$ $(n > 1)$. La suite $\{a_n\}$ est donc strictement décroissante. Puisqu'elle est minorée (par exemple par 0), $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g$ existe. Le réel g est solution de l'équation $g = \frac{1}{2}\, g$, donc $g = 0$.

II.1.4. On pose $b_n = a_n - \frac{1}{2^{n-1}}$. On a alors $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + \frac{1}{2^n} \geqslant 0$. Donc la suite $\{b_n\}$ converge et il en est de même de la suite $\{a_n\}$.

II.1.5.

(a) On montre que la suite $\{a_n\}$ est décroissante et minorée. En effet,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2} < 0.$$

De plus, d'après l'inégalité donnée en indication (qui peut se prouver par récurrence), on a $a_n > 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) > -2$.

(b) La démonstration suit la même méthode qu'en (a).

II.1.6. On montre d'abord par récurrence que $\frac{3}{2} \leqslant a_n \leqslant 2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et que la suite $\{a_n\}$ est strictement croissante. Ces deux faits impliquent la convergence de $\{a_n\}$. Soit $g = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Puisque $a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}$, on a $g = \sqrt{3g-2}$ et $g = 2$.

II.1.7. On peut montrer par récurrence que $a_n > 2c$. Bien sûr, $a_1 < a_2$. De plus, si $a_n > a_{n-1}$, alors

$$a_{n+1} = (a_n - c)^2 > (a_{n-1} - c)^2 = a_n,$$

l'inégalité se déduisant de la monotonie de la fonction $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

II.1.8. D'après l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique et les hypothèses, on a

$$\frac{a_n + (1 - a_{n+1})}{2} \geqslant \sqrt{a_n(1 - a_{n+1})} > \frac{1}{2},$$

d'où $a_n - a_{n+1} > 0$. La suite $\{a_n\}$ converge donc vers une limite g. Puisque $a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}$, on a $g(1-g) \geqslant \frac{1}{4}$. Cette dernière inégalité est équivalente à $(2g-1)^2 \leqslant 0$, ce qui donne $g = \frac{1}{2}$.

II.1.9. Clairement, $0 \leqslant a_n < 3$ pour $n \geqslant 1$. De plus, $a_{n+1}^2 - a_n^2 = -a_n^2 + a_n + 6 > 0$ pour $0 \leqslant a_n < 3$. La suite est donc croissante et majorée, d'où convergente. La définition de la suite donne $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3$.

II.1.10. On voit immédiatement que $0 \leqslant a_n < 1$ pour $n \geqslant 1$. Pour prouver la monotonie de la suite, on va avoir besoin de la forme suivante du principe de récurrence :

$W(n)$ est vraie pour tout entier naturel n si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $W(0)$ est vérifiée.

(ii) Le fait que $W(k)$ soit vraie pour $0 \leqslant k \leqslant n$ implique que $W(n+1)$ est aussi vraie.

On suppose que $a_{n-1} \geqslant a_{n-2}$ et $a_n \geqslant a_{n-1}$. On a alors

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}\left(a_n - a_{n-1} + a_{n-1}^3 - a_{n-2}^3\right) \geqslant 0.$$

La suite est donc convergente. On note g sa limite. On a $g = \frac{1}{3}\left(1 + g + g^3\right)$. En conséquence,

$$g = 1 \quad \text{ou} \quad g = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad g = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

On remarque que tous les termes de la suite sont positifs et inférieurs à $g = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

II.1.11. On a $a_{n+1} = a_n \frac{n+1}{2n+3} < a_n$ $(n \geqslant 1)$. On obtient donc (voir la solution du **problème II.1.3**) $g = 0$.

II.1.12. Puisque $a_{n+1} = a_n \frac{2n+2}{2n+3} < a_n$ pour $n \geqslant 1$, la suite est décroissante. Elle est minorée par 0 donc elle converge.

II.1.13.

(a) Clairement, $\{a_n\}$ est croissante. On montre qu'elle est majorée. En effet,

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&< 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\
&= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{n} < 2.
\end{aligned}$$

(b) De façon évidente, $\{a_n\}$ est croissante. De plus,

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\,.$$

La suite est donc majorée comme conséquence de (a).

II.1.14. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} < 0.$$

La suite est donc convergente puisque décroissante et minorée.

II.1.15. On obtient, avec l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique,

$$a_{n+1} \geqslant \sqrt[p]{a_n^{p-1}\frac{a}{a_n^{p-1}}} = \sqrt[p]{a}, \quad n \geqslant 1.$$

Donc,

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{a_n}{p} + \frac{a}{pa_n^{p-1}} = -\frac{a_n^p - a}{pa_n^{p-1}} \leqslant 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 2,$$

ce qui montre que la suite converge et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[p]{a}$.

II.1.16. Clairement, $0 < a_n < 2$ pour $n \geqslant 1$. De plus,

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}} > 0 \quad \text{si } a_n > a_{n-1}.$$

La suite converge donc vers une limite g vérifiant l'égalité $g = \sqrt{2+\sqrt{g}}$.

Remarque. On montre, en utilisant la formule de Cardan pour les racines réelles d'un polynôme de degré 3, que

$$g = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(79+3\sqrt{249}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(79-3\sqrt{249}\right)} - 1\right).$$

II.1.17. On remarque que $a_{n+1} = 2\left(2 - \frac{5}{a_n+3}\right)$, $n \geqslant 1$. On peut alors établir, par récurrence, que $0 < a_n < 2$ pour $n \geqslant 1$. De plus,

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{(a_n+1)(a_n-2)}{a_n+3} \geqslant 0.$$

La suite converge donc et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$.

II.1.18. On peut montrer, par récurrence, que la suite $\{a_n\}$ est strictement croissante. Si elle était majorée, il existerait un réel g tel que $g = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. On aurait aussi $g^2 - 2g + c = 0$. Cette équation a une racine réelle si $c \leqslant 1$. On suppose donc que $0 < c \leqslant 1$. La suite $\{a_n\}$ est alors majorée par $1 - \sqrt{1-c}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1 - \sqrt{1-c}$.

Pour $c > 1$, la suite est strictement croissante et ne converge pas, donc diverge vers $+\infty$.

II.1.19. Puisque

$$a_{n+1} = a_n\left(1 - 2\frac{a_n^2 - a}{3a_n^2 + a}\right) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
&\text{si } a_n > \sqrt{a}, \quad \text{alors} \quad a_{n+1} < a_n,\\
&\text{si } a_n < \sqrt{a}, \quad \text{alors} \quad a_{n+1} > a_n,\\
&\text{si } a_n = \sqrt{a}, \quad \text{alors} \quad a_{n+1} = \sqrt{a}.
\end{aligned}$$

On observe alors que

$$a_n\frac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a} > \sqrt{a} \quad \text{si et seulement si} \quad \left(a_n - \sqrt{a}\right)^3 > 0,$$

ce qui est équivalent à $a_n > \sqrt{a}$. Enfin,

si $0 < a_1 < \sqrt{a}$, alors $\{a_n\}$ est croissante et majorée par $\sqrt{a}$,
si $a_1 > \sqrt{a}$, alors $\{a_n\}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$,
si $a_1 = \sqrt{a}$, alors $\{a_n\}$ est une suite constante.

Dans chacun des cas précédents, la suite converge vers $\sqrt{a}$.

II.1.20. On peut prouver par récurrence que

$$a_n = \frac{(3^{n-1} - 1) - (3^{n-1} - 3)a_1}{(3^n - 1) - (3^n - 3)a_1} \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

La suite n'est donc pas définie pour $a_1 = \frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}-3}$, $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, si $a_1 = 1$, alors $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute autre valeur de a_1, la suite converge vers $1/3$.

II.1.21. On a $a_{n+1} = (a_n - a)^2 + a_n \geqslant a_n$ pour $n \geqslant 1$. La suite est donc croissante. De plus, si elle converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Donc, si $a_1 > a$, la suite diverge. Dans le cas où $a - 1 \leqslant a_1 \leqslant a$, on a aussi $a - 1 \leqslant a_n \leqslant a$ pour $n > 1$ et la suite converge dans ce cas. Enfin, si $a_1 < a - 1$, alors $a_2 > a$ et la suite diverge.

II.1.22. Il est évident que la suite peut converger vers a ou b. On considère les cas suivants :

1) $c > b$.

   On a alors $a_2 = \frac{c^2+ab}{a+b} > c = a_1$ et, par récurrence, $a_{n+1} > a_n$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

2) $c = b$.

   Évidemment, $a_n = b$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) $a < c < b$.

   On peut montrer, par récurrence, que la suite $\{a_n\}$ est décroissante et minorée par a. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

4) $c = a$.

   Clairement, $a_n = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5) $0 < c < a$.

   On utilise à nouveau la récurrence pour prouver que $\{a_n\}$ est croissante et majorée par a. Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

II.1.23. On remarque que $a_{n+1} = 6\left(1 - \frac{6}{a_n+7}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'où, par récurrence,

$$\text{si } a_1 < 2, \text{ alors } a_n < 2,\ n \in \mathbb{N}^* ;$$
$$\text{si } a_1 > 2, \text{ alors } a_n > 2,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

De plus,

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{(a_n+3)(a_n-2)}{a_n+7}.$$

D'où,

1) si $0 < a_1 < 2$, alors la suite est croissante et majorée par 2 et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$,

2) si $a_1 > 2$, alors la suite est décroissante et minorée par 2 et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$,

3) si $a_1 = 2$, alors $a_n = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1.24. Puisque $0 = a_1 \leqslant a_2$ et $a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n - a_{n-1}$, on voit, par récurrence, que $a_{n+1} \geqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite est majorée, par exemple par $\sqrt{1+4c}$. On peut facilement prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

II.1.25. Puisque $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$ et $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2(a_n - a_{n-1})$, on peut montrer par récurrence que $a_{n+1} \geqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite est majorée par 2 et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$.

II.1.26. Pour $k = 1$, on obtient $a_n = 5^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $\{a_n\}$ diverge donc vers $+\infty$.

Pour $k > 1$,

$$a_2 = \sqrt[k]{5\sqrt[k]{5}} > \sqrt[k]{5} = a_1 \quad \text{et} \quad a_{n+1}^k - a_n^k = 5\left(a_n - a_{n-1}\right).$$

Il s'ensuit (par récurrence) que $\{a_n\}$ est strictement croissante. De plus, $a_n < \sqrt[k-1]{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut facilement vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt[k-1]{5}$.

II.1.27. On voit (par récurrence) que $1 \leqslant a_n \leqslant 2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La monotonie de la suite se déduit de l'égalité $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 3(a_n - a_{n-1})$. Donc, pour $1 < a_1 < 2$, la suite est croissante et sa limite est 2. D'autre part, si $a_1 = 1$ ou $a_1 = 2$, la suite est alors constante.

II.1.28.

(a) On a $a_1 < a_2$ et $a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n - a_{n-1}$. Il s'ensuit, par récurrence, que la suite est croissante et majorée par c. Clairement, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c$.

(b) Puisque $b_2 = \sqrt{c\sqrt{c}} > \sqrt{c} = b_1$ et $b_{n+1}^2 - b_n^2 = c(b_n - b_{n-1})$, on conclut, en utilisant une récurrence, que la suite est croissante et majorée par c qui est sa limite.

II.1.29. On peut montrer par récurrence que $0 < a_n < b$, puis prouver que la suite est strictement croissante. Sa limite est égale à b.

II.1.30. La suite est strictement croissante et majorée, par exemple par 3. Sa limite est $\frac{3+\sqrt{15}}{3}$.

II.1.31. On a $a_1 < a_2 < a_3$. On voit de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{si} \quad a_n < a_{n+1} < a_{n+2}, \quad \text{alors} \quad a_{n+2} < a_{n+3}.$$

Le principe de récurrence énoncé dans la solution du **problème II.1.10** implique que la suite $\{a_n\}$ est strictement croissante. Elle est aussi majorée par 4 et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 4$.

II.1.32. Comme dans la solution du problème précédent, on peut prouver que la suite $\{a_n\}$ est décroissante, minorée par 4 et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 4$.

II.1.33. D'après l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique (voir **I.2.3**), $a_n \geqslant b_n$. Donc,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant a_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Ceci signifie que la suite $\{a_n\}$ est décroissante. D'autre part, la suite $\{b_n\}$ est croissante car

$$b_{n+1} = \sqrt{b_n a_n} \geqslant \sqrt{b_n^2} = b_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

De plus, $b_1 < a_n$ et $b_n < a_1$. Les deux suites convergent donc. On note $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\beta = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Un passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ donne $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$, d'où $\alpha = \beta$.

II.1.34. Puisque $2\left(a_n^2 + b_n^2\right) \geqslant (a_n + b_n)^2$, on a $a_n \geqslant b_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. D'où,

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} \leqslant \frac{a_n^2 + a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

et la suite $\{a_n\}$ est décroissante.

On peut prouver de la même façon que $\{b_n\}$ est croissante. De plus, on voit que $b_1 < a_n$, $b_n < a_1$ et les deux suites convergent donc.

On note $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\beta = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, on obtient $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2}$, d'où $\alpha = \beta$.

II.1.35. D'après l'inégalité entre les moyennes arithmétique et harmonique (voir **I.2.3**), $a_n \geqslant b_n$. Donc,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant a_n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

ce qui signifie que la suite $\{a_n\}$ est décroissante. D'autre part, $\{b_n\}$ est croissante car

$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \geqslant b_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

De plus, $b_1 < a_n$, $b_n < a_1$ et les deux suites convergent donc. On note $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\beta = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Un passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ donne $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$, d'où $\alpha = \beta$.

On remarque de plus que $a_{n+1}b_{n+1} = a_n b_n$, ce qui implique que tous les termes de $\{a_n b_n\}$ sont égaux à $a_1 b_1$. Il s'ensuit que $\alpha = \beta = \sqrt{a_1 b_1}$.

II.1.36. On a $a_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}\,(a_n + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Donc,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-na_n + (n+2)}{2(n+1)}.$$

En appliquant alors l'inégalité $na_n > n + 2$ pour $n \geqslant 4$ (qui peut se prouver par récurrence), on voit que la suite est décroissante et donc convergente. On pose $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Un passage à la limite dans l'égalité $a_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}\,(a_n + 1)$ donne $\alpha = 1$.

II.1.37. L'inégalité $a_{n+2} \leqslant \frac{1}{3}\,a_{n+1} + \frac{2}{3}\,a_n$ implique

$$a_{n+2} + \frac{2}{3}\,a_{n+1} \leqslant a_{n+1} + \frac{2}{3}\,a_n.$$

La suite $b_n = a_{n+1} + \frac{2}{3}\,a_n$ est décroissante et bornée donc convergente. Soit b sa limite. On montre que $\{a_n\}$ converge vers $a = \frac{3}{5}\,b$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{\varepsilon}{6} > |b_n - b|$ pour $n \geqslant n_0$. D'où,

$$\frac{\varepsilon}{6} > \left| a_{n+1} + \frac{2}{3}\,a_n - \frac{5}{3}\,a \right| \geqslant |a_{n+1} - a| - \frac{2}{3}\,|a_n - a| \quad \text{pour } n \geqslant n_0.$$

Donc, $|a_{n+1} - a| < \frac{2}{3}\,|a_n - a| + \frac{\varepsilon}{6}$. On peut montrer par récurrence que

$$\begin{aligned}
|a_{n_0+k} - a| &\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k |a_{n_0} - a| + \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \cdots + \frac{2}{3} + 1\right)\frac{\varepsilon}{6} \\
&\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k |a_{n_0} - a| + \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k}{1 - \frac{2}{3}}\,\frac{\varepsilon}{6} < \left(\frac{2}{3}\right)^k |a_{n_0} - a| + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Puisque $\left(\frac{2}{3}\right)^k |a_{n_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour k suffisamment grand, $|a_n - a| < \varepsilon$ pour n suffisamment grand.

II.1.38.

(a) $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right) a_n > a_n$.

(b) On applique l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique $G_{n+1} < A_{n+1}$ (voir le **problème I.2.3**) en prenant $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$, pour obtenir

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n+1}\,.$$

D'où,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \qquad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(c) On applique l'inégalité entre les moyennes harmonique et géométrique $H_{n+1} < G_{n+1}$ en prenant $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n-1}$, pour obtenir

$$1 + \frac{1}{n} < \sqrt[n+1]{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n},$$

ce qui donne $b_n < b_{n-1}$ pour $n > 1$. Pour prouver que les deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ convergent, il suffit d'observer que $a_1 \leqslant a_n < b_n \leqslant b_1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

II.1.39.

(a) On applique l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique $G_{n+1} < A_{n+1}$ (voir le **problème I.2.3**) en prenant $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+1} = 1 + \frac{x}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, pour montrer que la suite est strictement croissante.

Si $0 < x \leqslant 1$, d'après le problème précédent, on a

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Si $x > 1$, il existe alors un entier positif n_0 tel que $x \leqslant n_0$. La monotonie de la suite $\left\{\left(1+\frac{n_0}{n}\right)^n\right\}$ et le résultat du problème précédent impliquent alors

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{n_0}{n}\right)^n < \left(1+\frac{n_0}{n_0 n}\right)^{n_0 n} < e^{n_0}.$$

(b) Il suffit d'appliquer le même raisonnement qu'en (a) et d'observer que, pour $x \leqslant 0$, la suite est majorée, par exemple par 1.

II.1.40. On applique l'inégalité entre moyennes harmonique et géométrique $H_{n+l+1} < G_{n+l+1}$ (voir le **problème I.2.3**) en prenant $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+l+1} = 1 + \frac{x}{n}$, pour obtenir

$$\sqrt[n+l+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+l}} > 1 + \frac{x(n+l)}{n^2+nl+x+n} > 1 + \frac{x(n+l)}{(n+1)(n+l)}\,.$$

Ceci montre que $b_n > b_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1.41. On a, avec l'inégalité donnée en indication,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} > 0\,, \\ b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n} < 0. \end{aligned}$$

Clairement, $a_1 \leqslant a_n < b_n \leqslant b_1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et les deux suites convergent donc (vers la même limite).

II.1.42. On vérifie facilement que la suite $\{a_n\}$ est monotone et bornée. L'égalité $a_{n+1}^2 = a_n$ implique que sa limite est égale à 1. On prouve maintenant la monotonie de $\{c_n\}$. On suppose d'abord que $x > 1$. On a alors

$$\begin{aligned} c_n = 2^n(a_n - 1) &= 2^n(a_{n+1}^2 - 1) = 2^n(a_{n+1} - 1)(a_{n+1} + 1) \\ &= 2^{n+1}(a_{n+1} - 1)\frac{a_{n+1}+1}{2} > c_{n+1}. \end{aligned}$$

Ceci signifie que la suite $\{c_n\}$ est strictement décroissante pour $x > 1$. Le même raisonnement s'applique au cas $0 < x < 1$. Pour $x = 1$, la suite est constante. La monotonie de $\{d_n\}$ peut se prouver de la même manière.

Pour $x > 1$, la suite $\{c_n\}$ converge (car elle est décroissante et minorée par 0). D'autre part, pour $0 < x < 1$, la suite $\{d_n\}$ est croissante et majorée par 0. Il découle alors de l'égalité

$$d_n = \frac{c_n}{a_n}$$

que les deux suites tendent vers la même limite pour tout x strictement positif et différent de 1. Si $x = 1$, $c_n = d_n = 0$.

II.2. Limites. Propriétés des suites convergentes

II.2.1.

(a) 1.

(b) 1.

(c) -1.

(d) On a

$$0 < \left(2 - \sqrt[3]{2}\right)\left(2 - \sqrt[5]{2}\right) \cdots \left(2 - \sqrt[2n+1]{2}\right) < \left(\sqrt{2} - 1\right)^n .$$

La limite de la suite est donc égale à 0.

(e) On prouve d'abord que la suite $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ converge vers 0. Pour $n \geqslant 3$, on a $a_{n+1} = \frac{1}{2}\, a_n \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} < a_n$. La suite est donc décroissante. Elle est clairement minorée par 0. Elle converge donc et sa limite g vérifie l'égalité $g = \frac{1}{2}\, g$, d'où $g = 0$. On détermine alors la limite de notre suite. On pose pour cela $k_n = [\sqrt{n}]$. On a $k_n \leqslant \sqrt{n} < k_n + 1$, ce qui donne

$$0 < \frac{n}{2^{\sqrt{n}}} < 2\frac{(k_n + 1)^2}{2^{k_n+1}} .$$

La limite de la suite donnée est donc égale à 0.

(f) On pose $a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$. On a $a_{n+1} = \frac{1}{2}\, a_n \cdot \frac{n+1}{2^{2n}} < a_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, ce qui implique (voir la solution du **problème II.1.3**) $g = 0$.

(g) On pose

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}}\right).$$

On a $a_n = \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2\sqrt{n}}$ qui est une conséquence de l'égalité $\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}} = \frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{-2}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(h) L'inégalité

$$(1 + 2 + \cdots + n)\frac{1}{n^2 + n} \leqslant \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n}$$
$$\leqslant (1 + 2 + \cdots + n)\frac{1}{n^2 + 1}$$

et le théorème des gendarmes impliquent que la limite est égale à $\frac{1}{2}$.

(i) Comme en (h), on montre que la limite est aussi égale à $\frac{1}{2}$.

II.2.2. On pose $a_n = \frac{n^s}{(1+p)^n}$. On a alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \frac{1}{p+1}$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p+1}$. La suite $\{a_n\}$ est donc décroissante à partir d'un certain rang n_0. Elle est aussi minorée, par exemple par 0. Sa limite g vérifie l'égalité $g = \frac{1}{p+1}\, g$, donc $g = 0$.

II.2.3. On a

$$\begin{aligned} 0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right) \\ < n^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right) = \frac{1}{n^{1-\alpha}} \,. \end{aligned}$$

La limite de la suite est donc égale à 0.

II.2.4. Soit $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Pour $n > q$, le nombre $n!\alpha\pi$ est un multiple de π, ce qui signifie que les termes de la suite sont tous nuls à partir d'une certaine valeur n_0 de l'indice n.

II.2.5. Si la limite existait, on aurait alors

$$0 = \lim_{n\to+\infty} (\sin(n+2) - \sin n) = 2\sin 1 \lim_{n\to+\infty} \cos(n+1)$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos n = 0$. De même,

$$0 = \lim_{n\to+\infty} (\cos(n+2) - \cos n) = -2\sin 1 \lim_{n\to+\infty} \sin(n+1),$$

ce qui est impossible car $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n$ n'existe donc pas.

II.2.6. Voir la solution du problème précédent.

II.2.7. On a

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \left(\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(a + \frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(a + \frac{n-1}{n}\right)^2 \right) \\ &\quad = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n} a^2 + \frac{n(n-1)}{n^2} a + \frac{1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} \right) \\ &\quad = a^2 + a + \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

La dernière égalité se déduit du fait que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

II.2.8. On a

$$a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^k - k = (a_n - 1) + \left(a_n^2 - 1\right) + \cdots + \left(a_n^k - 1\right).$$

De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^l - 1}{a_n - 1} = l \quad \text{pour} \quad l = 1, 2, \ldots, k.$$

La limite est donc égale à $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

II.2.9. On peut prouver, en utilisant l'égalité

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+2} \quad (k \in \mathbb{N}^*),$$

que la limite est égale à $\frac{1}{4}$.

II.2.10. Puisque

$$\frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{(k-1)\left((k+1)^2 - (k+1) + 1\right)}{(k+1)(k^2 - k + 1)},$$

on obtient

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3}.$$

II.2.11. $\frac{1}{6}$.

II.2.12. Puisque $1 - \frac{2}{k(k+1)} = \frac{(k+2)(k-1)}{k(k+1)}$, on a

$$\left(1 - \frac{2}{2 \times 3}\right)\left(1 - \frac{2}{3 \times 4}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+3}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}.$$

II.2.13. On a

$$k^3 + 6k^2 + 11k + 5 = (k+1)(k+2)(k+3) - 1.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3 + 6k^2 + 11k + 5}{(k+3)!} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!}\right) = \frac{5}{3}.$$

II.2.14. On observe que

$$\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \frac{1}{1-x^{2^{k-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^k}} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{pour } |x| < 1, \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{pour } |x| > 1. \end{cases}$$

II.2.15. Pour $x \neq 1$,

$$\frac{(1-x)(1+x)\left(1+x^2\right)\cdots\left(1+x^{2^k}\right)}{1-x} = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

et, en conséquence,

$$a_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right) = \begin{cases} \dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} & \text{pour } n \in \mathbb{N},\ x \neq 1, \\ 2^{n+1} & \text{pour } n \in \mathbb{N},\ x = 1. \end{cases}$$

Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{pour } x < -1, \\ 0 & \text{pour } x = -1, \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{pour } |x| < 1, \\ +\infty & \text{pour } x \geqslant 1. \end{cases}$$

II.2.16. Pour $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{2}{x^{2^k}+x^{-2^k}}\right) = \prod_{k=0}^{n}\frac{\left(x^{2^k}+1\right)^2}{x^{2^{k+1}}+1} \\ &= \frac{(x+1)(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\cdots\left(x^{2^n}+1\right)}{(x-1)\left(x^{2^{n+1}}+1\right)} \\ &= \frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x^{2^{n+1}}-1}{x^{2^{n+1}}+1}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} -\dfrac{x+1}{x-1} & \text{pour } |x|<1,\\ \dfrac{x+1}{x-1} & \text{pour } |x|>1,\\ 0 & \text{pour } x=-1,\\ +\infty & \text{pour } x=1. \end{cases}$$

II.2.17. Soit $x \neq 1$. On a

$$1 + x^{3^k} + x^{2\times 3^k} = \frac{\left(1 + x^{3^k} + x^{2\times 3^k}\right)\left(x^{3^k}-1\right)}{x^{3^k}-1} = \frac{x^{3^{k+1}}-1}{x^{3^k}-1}.$$

Donc,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 + x^{3^k} + x^{2\times 3^k}\right) = \frac{x^{3^{n+1}}-1}{x^3-1}.$$

Notons g la limite de la suite. On a alors

$$g = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x^3} & \text{pour } |x|<1,\\ +\infty & \text{pour } |x|>1,\\ 1 & \text{pour } x=-1,\\ +\infty & \text{pour } x=1. \end{cases}$$

II.2.18. Clairement, $k \times k! = (k+1)! - k!$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} = 1.$$

II.2.19. On note d'abord que le problème a un sens pour $x \neq 0$. D'après **II.2.3**, le dénominateur $n^x - (n-1)^x$ tend vers zéro si $0 < x < 1$. De plus, si $x < 0$, le dénominateur tend aussi vers zéro. Pour $x = 1$, il est égal à 1. La suite diverge donc vers l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) pour $x \leqslant 1$, $x \neq 0$. Soit $x > 1$. On pose $k = [x]$. On a alors $k \geqslant 1$ et

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \leqslant 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^x < 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k+1}.$$

Ces inégalités impliquent qu'il existe α et β tels que

$$\alpha < n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^x\right) < \beta,$$

ce qui donne

$$\alpha n^{x-1} < n^x \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^x\right) < \beta n^{x-1}.$$

Donc, si $x-1 < 1\,999$, la suite diverge alors vers $+\infty$. Si $x-1 > 1\,999$, la suite converge vers 0. On prend alors $x = 2\,000$. D'après la formule du binôme, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1\,999}}{n^{2\,000} - (n-1)^{2\,000}} = \frac{1}{2\,000}\,.$$

II.2.20. On a

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n} & \text{si } a > b, \\ \dfrac{n+1}{n}\, a & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

II.2.21. On peut prouver par récurrence que $a_n = (n-1)^2$. En conséquence, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

II.2.22. On prouve par récurrence que $a_n = \frac{ab}{\sqrt{a^2+nb^2}}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

II.2.23. On peut prouver que $a_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

II.2.24. On vérifie facilement que $a_{n+1} = 1 + b + \cdots + b^{n-1} + b^n a$. D'où,

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-b} + \left(a - \dfrac{1}{1-b}\right) b^n & \text{pour } b \neq 1, \\ n + a & \text{pour } b = 1. \end{cases}$$

Donc, si $b = 1$ et $a \in \mathbb{R}$, la suite diverge vers $+\infty$. Si $b \neq 1$ et $a = \frac{1}{1-b}$, la suite converge vers $\frac{1}{1-b}$. Dans le cas où $a \neq \frac{1}{1-b}$ et $|b| < 1$, elle converge aussi vers $\frac{1}{1-b}$. Dans les cas restants, la suite diverge. Plus précisément, si $b \leqslant -1$ et $a \neq \frac{1}{1-b}$, la suite n'a pas de limite, ni finie, ni infinie. Si $b > 1$ et $a > \frac{1}{1-b}$, la suite diverge proprement vers $+\infty$. Finalement, si $b > 1$ et $a < \frac{1}{1-b}$, la suite diverge proprement vers $-\infty$.

II.2.25. On peut prouver la formule donnant le n-ième terme de la suite de Fibonacci par récurrence. On peut supposer que $\alpha > \beta$. On a alors $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. De plus,

$$\alpha\sqrt[n]{1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^n} \leqslant \sqrt[n]{\alpha^n-\beta^n} \leqslant \alpha\sqrt[n]{1+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \alpha$.

II.2.26. On remarque d'abord que $b_{n+1} = \frac{a_n+3b_n}{4}$. On en déduit que $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - b_n)$, ce qui implique que la suite $\{a_n - b_n\}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. Cette suite converge donc vers 0. Il suffit maintenant de montrer que la suite $\{a_n\}$ converge. Supposons d'abord que $a \leqslant b$. La suite $\{a_n\}$ est alors croissante et $a_n \leqslant b_n \leqslant b$. Elle converge donc. Il découle de ce qui précède que $\{b_n\}$ converge aussi et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Le même raisonnement s'applique au cas $a > b$.

II.2.27. On a

$$\begin{aligned}
a + aa + \cdots + \overbrace{aa\ldots a}^{n \text{ chiffres}} &= a(1 + 11 + \cdots + \overbrace{11\ldots 1}^{n \text{ chiffres}})\\
&= a(10^{n-1} + 2\times 10^{n-2} + \cdots + n\times 10^0)\\
&= a((1 + 10 + \cdots + 10^{n-1}) + (1 + 10 + \cdots + 10^{n-2})\\
&\quad + \cdots + (1+10) + 1)\\
&= a\left(\frac{10^n-1}{9} + \frac{10^{n-1}-1}{9} + \cdots + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10-1}{9}\right)\\
&= a\frac{10(10^n-1)-9n}{81}.
\end{aligned}$$

La limite est donc égale à $\frac{10a}{81}$.

II.2.28. On note que la suite de terme général $\sqrt[n]{n}$ $(n \geqslant 3)$ est décroissante et que sa limite est égale à 1. On vérifie alors facilement que

$$\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n = 0$.

II.2.29. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, à partir d'une certaine valeur n_0 de l'indice n, $|a_n|^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$. En conséquence, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = 0$.

II.2.30. On pose $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = a_l$. On montre, en divisant le numérateur et le dénominateur par a_l^n, que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_1a_1^{n+1} + p_2a_2^{n+1} + \cdots + p_ka_k^{n+1}}{p_1a_1^n + p_2a_2^n + \cdots + p_ka_k^n} = a_l.$$

II.2.31.

(a) Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour avoir $q+\varepsilon < 1$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q+\varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_0.$$

Donc,

$$|a_n| < (q+\varepsilon)^{n-n_0} |a_{n_0}|, \quad n \geqslant n_0.$$

Ceci implique $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour avoir $q - \varepsilon > 1$. On a alors, à partir d'un certain rang n_1, $|a_n| > (q-\varepsilon)^{n-n_1} |a_{n_1}|$. On obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} (q-\varepsilon)^{n-n_1} = +\infty$.

II.2.32.

(a) On prend $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour avoir $q+\varepsilon < 1$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|a_n| < (q+\varepsilon)^n$, $n \geqslant n_0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

(b) On a $|a_n| > (q-\varepsilon)^n$ pour $n > n_1$. Si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, alors $q - \varepsilon > 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (q-\varepsilon)^n = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

II.2.33. En posant $a_n = n^\alpha x^n$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha x = x, \quad \text{où} \quad 0 < x < 1.$$

Donc, d'après le **problème II.2.31**, la suite tend vers 0.

II.2.34. On note a_n le n-ième terme de la suite. On a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{m-n}{n+1}\,x\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|\,.$$

D'après le **problème II.2.31**, la suite tend vers 0.

II.2.35. On suppose que $|b_n| < M$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ pour $n > n_0$. D'où,

$$|a_n b_n| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n > n_0.$$

Ceci signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$.

II.2.36. On peut supposer, sans perte de généralité, que $a \leqslant b$. Supposons d'abord que $a < b$. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $a + \varepsilon < b - \varepsilon$. Par définition de la limite d'une suite, $a_n < a+\varepsilon < b-\varepsilon < b_n$ pour n suffisamment grand. Donc, $\max\{a_n, b_n\} = b_n$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \max\{a_n, b_n\} = \lim_{n\to+\infty} b_n = b = \max\{a, b\}\,.$$

Si $a = b$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que les inégalités $|a_n - a| < \varepsilon$ et $|b_n - a| < \varepsilon$ soient vérifiées pour $n > n_0$. Ceci implique

$$|\max\{a_n, b_n\} - a| < \varepsilon.$$

On a ainsi prouvé que

$$\lim_{n\to+\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}\,.$$

II.2.37. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, on a pour tout $\varepsilon \in \,]0\,,1[$,

$$\sqrt[p]{1-\varepsilon} < \sqrt[p]{1+a_n} < \sqrt[p]{1+\varepsilon} \quad \text{pour } n \text{ suffisamment grand.}$$

Ceci implique $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[p]{1+a_n} = 1$.

II.2.38. On pose $x_n = \sqrt[p]{1+a_n}$. D'après le problème précédent, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. En conséquence,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[p]{1+a_n}-1}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - 1}{x_n^p - 1}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - 1}{(x_n - 1)(x_n^{p-1} + \cdots + 1)} = \frac{1}{p}\,.\end{aligned}$$

II.2.39. D'après le **problème I.2.1**,

$$n\left(\sqrt[p]{1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_p}{n}}-1\right) \leqslant n\left(\sqrt[p]{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\left(1+\frac{a_2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{a_p}{n}\right)}-1\right) = \sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_p)}-n. \tag{1}$$

De plus, avec **I.2.4**, on obtient

$$n\left(\sqrt[p]{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\left(1+\frac{a_2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{a_p}{n}\right)}-1\right) = n\left(\sqrt[p]{1+\frac{a_1+\cdots+a_p}{n}+\frac{\sum\limits_{i<j}a_ia_j}{n^2}+\cdots+\frac{a_1\cdots a_p}{n^p}}-1\right) \leqslant \frac{a_1+\cdots+a_p}{p}+\frac{\sum\limits_{i<j}a_ia_j}{np}+\cdots+\frac{a_1\cdots a_p}{pn^{p-1}}. \tag{2}$$

En combinant (1) et (2) avec le résultat du problème précédent, on montre que la limite est égale à $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_p}{p}$.

II.2.40. On remarque que

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \leqslant \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

D'après le théorème des gendarmes, la limite est égale à 1.

II.2.41. Soit a le plus grand des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$. On a

$$\frac{a}{\sqrt[n]{p}} \leqslant \sqrt[n]{\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n}{p}} \leqslant a.$$

Le théorème des gendarmes implique

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n}{p}} = a = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}.$$

II.2.42. Puisque

$$1 \leqslant \sqrt[n]{2\sin^2\frac{n^{1999}}{n+1}+\cos^2\frac{n^{1999}}{n+1}} \leqslant \sqrt[n]{2},$$

il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2\sin^2\frac{n^{1999}}{n+1}+\cos^2\frac{n^{1999}}{n+1}} = 1.$$

II.2.43. On applique le théorème des gendarmes. On a

$$1 < (1+n(1+\cos n))^{\frac{1}{2n+n\sin n}} < (1+2n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}}.$$

On montre que

$$\lim_{n\to+\infty} (1+2n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}} = 1. \tag{1}$$

En effet,

$$1 < (1+2n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}} < (1+2n)^{\frac{1}{n}}.$$

L'égalité (1) découle donc du théorème des gendarmes. La limite cherchée est égale à 1.

II.2.44. D'après l'inégalité entre moyennes harmonique, géométrique et arithmétique (voir **I.2.3**), pour $x > -1$, on a

$$1+\frac{x}{2+x} = \frac{2}{\frac{1}{1+x}+1} \leqslant \sqrt{(1+x)\times 1} = \sqrt{1+x} \leqslant \frac{1+x+1}{2} = 1+\frac{x}{2}.$$

En prenant alors $x = \frac{k}{n^2}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et en additionnant les inégalités obtenues, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}. \tag{1}$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2} = \frac{n(n+1)}{4n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+n} \geqslant \frac{1}{2n^2+n}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2(2n^2+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}.$$

On conclut donc avec (1) et le théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right) = \frac{1}{4}.$$

II.2.45. On peut appliquer un raisonnement semblable à celui utilisé dans le problème précédent. Soit $x > -1$. D'après l'inégalité entre moyennes harmonique, géométrique et arithmétique (voir **I.2.3**), pour $x > -1$, on a

$$1 + \frac{x}{3+2x} = \frac{3}{\frac{1}{1+x} + 1 + 1} \leqslant \sqrt[3]{(1+x) \times 1 \times 1} \leqslant \frac{1+x+1+1}{3} = 1 + \frac{x}{3}.$$

On obtient, en substituant $x = \frac{k^2}{n^3}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k^2}{n^3}}{3 + 2\frac{k^2}{n^3}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k^2}{n^3}} - 1 \right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3n^3}. \tag{1}$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{18n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{9}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k^2}{n^3}}{3 + 2\frac{k^2}{n^3}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3n^3 + 2k^2} \\ &\geqslant \frac{1}{3n^3 + 2n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(3n^3+2n^2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

De ce qui précède, de (1) et du théorème des gendarmes, on déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k^2}{n^3}} - 1 \right) = \frac{1}{9}.$$

II.2.46. Clairement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_k} = 1$ pour $k = 1, 2, \ldots, p$. On trouve donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \sqrt[n]{a_k} \right)^p = 1.$$

II.2.47. On a $0 < \alpha + \frac{1}{n} < \alpha + \frac{1}{n_0} < 1$ pour n_0 suffisamment grand et pour $n > n_0$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha + \frac{1}{n} \right)^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^n}{1 - \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

II.2.48. L'égalité est évidente pour $x = 1$. On suppose maintenant que $x > 1$. On applique le théorème des gendarmes pour calculer la limite. On a

$$0 < \left(\sqrt[n]{x} - 1\right)^2 = \sqrt[n]{x^2} - 2\sqrt[n]{x} + 1,$$

d'où

$$\left(2\sqrt[n]{x} - 1\right)^n < \left(\sqrt[n]{x^2}\right)^n = x^2. \tag{1}$$

De plus,

$$\left(2\sqrt[n]{x} - 1\right)^n = x^2\left(\frac{2}{\sqrt[n]{x}} - \frac{1}{\sqrt[n]{x^2}}\right)^n = \left(1 + \left(\frac{2}{\sqrt[n]{x}} - \frac{1}{\sqrt[n]{x^2}} - 1\right)\right)^n.$$

On a alors, d'après l'inégalité de Bernoulli,

$$\left(2\sqrt[n]{x} - 1\right)^n \geqslant x^2\left(1 + n\left(\frac{2}{\sqrt[n]{x}} - \frac{1}{\sqrt[n]{x^2}} - 1\right)\right) = x^2\left(1 - n\frac{\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)^2}{\sqrt[n]{x^2}}\right). \tag{2}$$

Toujours avec l'inégalité de Bernoulli, on a

$$x = \left(\sqrt[n]{x} - 1 + 1\right)^n \geqslant 1 + n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) > n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right).$$

Donc,

$$\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)^2 < \frac{x^2}{n^2}.$$

D'où, d'après (2),

$$\left(2\sqrt[n]{x} - 1\right)^n > x^2\left(1 - \frac{x^2}{n\sqrt[n]{x^2}}\right). \tag{3}$$

En combinant (1) et (3) au théorème des gendarmes, on voit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2\sqrt[n]{x} - 1\right)^n = x^2.$$

II.2.49. Comme dans le problème précédent, on peut établir les inégalités

$$1 \geqslant \frac{\left(2\sqrt[n]{n} - 1\right)^n}{n^2} \geqslant 1 - n\frac{\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2}{\sqrt[n]{n^2}}.$$

Il suffit maintenant de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} n\frac{\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2}{\sqrt[n]{n^2}} = 0.$$

Pour cela, on remarque que pour $n \geqslant 3$,

$$n = \left(\sqrt[n]{n} - 1 + 1\right)^n > \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^3.$$

Donc,

$$0 \leqslant n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 \leqslant n\left(\frac{3!}{(n-1)(n-2)}\right)^{\frac{2}{3}}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 = 0$.

II.2.50.

(a) On a

$$\begin{aligned}|a_{n+k} - a_n| &= \frac{\operatorname{Arctan}(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\operatorname{Arctan}(n+k)}{2^{n+k}} \\ &< \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+k}}\right) < \frac{\pi}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on prend $n_0 = \left[\log_2 \frac{\pi}{\varepsilon} - 1\right]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n > n_0$, on a alors $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$. Donc, $\{a_n\}$ est une suite de Cauchy.

(b) On peut montrer par récurrence que $4^n > n^4$ pour tout $n \geqslant 5$. Donc,

$$|a_{n+k} - a_n| < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+k)^2}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}|a_{n+k} - a_n| &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n} < \varepsilon\end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

(c) On note que

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n+1} \geqslant n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ceci implique que $\{a_n\}$ n'est pas une suite de Cauchy.

(d) On a

$$
\begin{aligned}
&|a_{n+k} - a_n| \\
&\quad = \left| \frac{(-1)^{n+k-1}}{(n+k)(n+k+1)} + \frac{(-1)^{n+k-2}}{(n+k-1)(n+k)} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} \right| \\
&\quad \leqslant \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\quad = \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} + \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\
&\quad = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+k+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n > \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$.

(e) On a

$$
\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &\leqslant M \left(|q|^{n+k} + |q|^{n+k-1} + \cdots + |q|^{n+1} \right) \\
&= M \left(\frac{|q|^{n+1} \left(1 - |q|^k\right)}{1 - |q|} \right) \leqslant \frac{M}{1 - |q|} |q|^{n+1} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n > n_0 = \left[\frac{\ln \frac{(1-|q|)\varepsilon}{M}}{\ln |q|} - 1 \right]$.

(f) On a

$$
\begin{aligned}
a_{2n} - a_n &= \frac{2n}{(2n+1)^2} + \frac{2n-1}{(2n)^2} + \cdots + \frac{n+1}{(n+2)^2} \\
&\geqslant n \frac{2n}{(2n+1)^2} \geqslant \frac{2n^2}{(3n)^2} = \frac{2}{9}\,.
\end{aligned}
$$

Donc, $\{a_n\}$ n'est pas une suite de Cauchy.

II.2.51. D'après les hypothèses,

$$
\begin{aligned}
&|a_{n+k} - a_n| \\
&\quad = |a_{n+k} - a_{n+k-1} + a_{n+k-1} - a_{n+k-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n| \\
&\quad < \lambda\left(|a_{n+k-1} - a_{n+k-2}| + |a_{n+k-2} - a_{n+k-3}| + \cdots + |a_n - a_{n-1}|\right) \\
&\quad < \left(\lambda^k + \lambda^{k-1} + \cdots + \lambda^2 + \lambda\right)|a_n - a_{n-1}| \\
&\quad \leqslant \left(\lambda^k + \lambda^{k-1} + \cdots + \lambda^2 + \lambda\right)\lambda^{n-2}|a_2 - a_1| \\
&\quad = \frac{\lambda^{n-1}\left(1-\lambda^k\right)}{1-\lambda}|a_2 - a_1| < \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}|a_2 - a_1|\,.
\end{aligned}
$$

D'où, pour un $\varepsilon > 0$ fixé, pour $n > \left[1 + \frac{\ln\frac{\varepsilon(1-\lambda)}{|a_2-a_1|}}{\ln\lambda}\right]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$.

II.2.52. Puisque $\{S_n\}$ est convergente, c'est une suite de Cauchy. On prouve que $\{\ln\sigma_n\}$ est aussi une suite de Cauchy. D'après l'inégalité donnée en **II.1.41**,

$$
\begin{aligned}
\ln\sigma_{n+k} - \ln\sigma_n &= \ln\left(1 + \frac{1}{a_{n+k}}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \\
&< \frac{1}{a_{n+k}} + \cdots + \frac{1}{a_{n+1}} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour n suffisamment grand.

II.2.53. D'après le résultat de **I.1.23**, on a

$$
\begin{aligned}
&R_{n+k} - R_n \\
&\quad = (R_{n+k} - R_{n+k-1}) + (R_{n+k-1} - R_{n+k-2}) + \cdots + (R_{n+1} - R_n) \\
&\quad = (-1)^n\left(\frac{(-1)^{k-1}}{q_{n+k-1}q_{n+k}} + \frac{(-1)^{k-2}}{q_{n+k-2}q_{n+k-1}} + \cdots - \frac{1}{q_{n+1}q_{n+2}} + \frac{1}{q_nq_{n+1}}\right).
\end{aligned}
$$

D'où, par la monotonie de la suite $\{q_n\}$ et le fait que $q_n \geqslant n$ (voir la solution de **I.1.24**),

$$
|R_{n+k} - R_n| \leqslant \frac{1}{q_nq_{n+1}} \leqslant \frac{1}{n^2}\,.
$$

II.2.54. Soit d la raison de la suite. On suppose d'abord que $d \neq 0$. On a

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)\frac{1}{d}.$$

D'où,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}}\right) = \frac{1}{a_1 d}.$$

Pour $d = 0$, la suite arithmétique est constante et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}}\right) = +\infty.$$

II.2.55. Soit d la raison de la suite. On suppose d'abord que $d \neq 0$. Puisque

$$\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{d},$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{d}}.$$

Pour $d = 0$, la suite arithmétique est constante et la limite est donc égale à $+\infty$.

II.2.56.

(a) D'après le **problème II.1.38**,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Donc,

$$1 < n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) < n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} - 1\right). \tag{1}$$

En utilisant maintenant l'inégalité de Bernoulli (voir **I.2.4**), on montre que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 1 + \frac{1}{n^2}.$$

D'où,

$$n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}-1\right)\leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

Donc, d'après (1) et le théorème des gendarmes, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)=1.$$

(b) Pour n fixé, on a

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}}{n}=\frac{(e-1)e^{\frac{1}{n}}}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}.$$

En utilisant alors le résultat trouvé en (a), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}}{n}=e-1.$$

II.2.57. On a $a_{n+1}-a_n=-p(a_n-a_{n-1})$. Donc,

$$\begin{aligned}a_n&=a+(b-a)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})\\&=a+(b-a)\left(1-p+p^2+\cdots+(-1)^n p^{n-2}\right).\end{aligned}$$

Si $b=a$, la suite $\{a_n\}$ est alors constante et donc convergente vers a. Si $a\neq b$, la suite est alors convergente si $|p|<1$ et sa limite est égale à $a+\frac{b-a}{1+p}$.

II.2.58. On observe que

$$c_{n+1}=\frac{a_n+2b_n}{a_n+b_n}=\frac{c_n+2}{c_n+1}.$$

Donc,

$$\left|c_{n+1}-\sqrt{2}\right|=\frac{\sqrt{2}-1}{c_n+1}\left|c_n-\sqrt{2}\right|<\left(\sqrt{2}-1\right)\left|c_n-\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2}\left|c_n-\sqrt{2}\right|.$$

D'où, par récurrence,

$$\left|c_{n+1}-\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2^n}\left|c_1-\sqrt{2}\right|,$$

ce qui implique que la limite de $\{c_n\}$ est égale à $\sqrt{2}$.

II.3. La transformation de Toeplitz, le théorème de Stolz et leurs applications

II.3.1. Si tous les termes de la suite $\{a_n\}$ sont égaux à a, alors d'après (ii), $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k} = a$. Il suffit donc de considérer le cas où la suite converge vers 0. On a alors, pour tout $m > 1$ et $n \geqslant m$,

$$|b_n - 0| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_{n,k}a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m-1} |c_{n,k}|\,|a_k| + \sum_{k=m}^{n} |c_{n,k}|\,|a_k|\,. \tag{1}$$

La convergence vers 0 de $\{a_n\}$ implique que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_1 tel que

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_1.$$

Bien sûr, la suite $\{|a_n|\}$ est bornée, par exemple par $D > 0$. Il découle de (i) qu'il existe n_2 tel que, pour $n \geqslant n_2$,

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} |c_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{2D}\,.$$

En prenant $m = n_1$ dans (1), on obtient

$$|b_n| \leqslant D\sum_{k=1}^{n_1-1} |c_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2C}\sum_{k=n_1}^{n} |c_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pour $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

II.3.2. On applique le théorème de Toeplitz en prenant $c_{n,k} = \frac{1}{n}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

II.3.3.

(a) Si les $c_{n,k}$ sont positifs, alors (iii) se déduit de (ii).

(b) D'après (ii) dans le **problème II.3.1**, $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k} > \frac{1}{2}$ pour n suffisamment grand, par exemple $n > n_0$. La divergence de $\{a_n\}$ vers $+\infty$ implique que, étant donné $M > 0$, il existe n_1 tel que $a_n \geqslant 2M$ si $n > n_1$.

On peut supposer, sans perte de généralité, que tous les termes a_n sont strictement positifs. On pose $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n} c_{n,k}a_k = \sum_{k=1}^{n_2} c_{n,k}a_k + \sum_{k=n_2}^{n} c_{n,k}a_k \geqslant \sum_{k=1}^{n_2} c_{n,k}a_k + M \geqslant M$$

et $\{b_n\}$ diverge vers $+\infty$.

II.3.4. Il s'agit d'un cas particulier de **II.3.3**. On prend $c_{n,k} = \frac{1}{n}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

II.3.5. On applique le théorème de Toeplitz (voir **II.3.1**) en prenant $c_{n,k} = \frac{2(n-k+1)}{n^2}$.

II.3.6. On utilise l'inégalité entre les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique (voir **I.2.3**), le théorème des gendarmes et le résultat de **II.3.2**.

II.3.7. On applique le problème précédent à la suite $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$.

II.3.8. Si $b \neq 0$, on prend $c_{n,k} = \frac{b_{n-k+1}}{nb}$ et on voit que la condition (i) de **II.3.1** est vérifiée. D'après **II.3.2**, la condition (ii) est aussi satisfaite. Le résultat se déduit alors du théorème de Toeplitz. Dans le cas $b = 0$, on pose $c_{n,k} = \frac{1+b_{n-k+1}}{n}$ pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1(1+b_n) + a_2(1+b_{n-1}) + \cdots + a_n(1+b_1)}{n} = a.$$

Donc, d'après **II.3.2**,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = 0.$$

II.3.9. On applique le théorème de Toeplitz à la suite $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ en prenant $c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1+\cdots+b_n}$.

II.3.10. On peut appliquer le théorème de Toeplitz en prenant $c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1+\cdots+b_n}$.

II.3.11. Pour $n > 1$, on pose

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \quad b_n = y_n - y_{n-1}$$

et on applique le résultat du problème précédent.

II.3.12.

(a) On prend dans **II.3.10** $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $y_n = \sqrt{n}$ et on montre que la limite est égale à 2.

(b) On pose

$$x_n = a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n}, \quad y_n = \frac{a^{n+1}}{n}.$$

À partir d'une certaine valeur de l'indice n, la suite $\{y_n\}$ est strictement croissante. Avec **II.2.31** (b), on voit que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^{n+1}}\left(a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n}\right) = \frac{1}{a-1}.$$

(c) On peut appliquer le théorème de Stolz (voir **II.3.11**) aux suites

$$x_n = k! + \frac{(k+1)!}{1!} + \cdots + \frac{(k+n)!}{n!}, \quad y_n = n^{k+1}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n}\right)}{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1-\frac{k}{n}\right)^k} \\
&= \frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

(d) On pose $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$, $y_n = \sqrt{n}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{n}{2n-1}} - \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right. \\
&\qquad \left. + \sqrt{\frac{n-1}{2n}} + \sqrt{\frac{n-1}{2n-1}} - 1\right) \\
&= 2\left(\sqrt{2} - 1\right).
\end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de Stolz, la limite est égale à $2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

(e) On voit, en prenant $x_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ et $y_n = n^{k+1}$, que

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{k+1}.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Stolz.

(f) D'après le théorème de Stolz, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + 1\times a + 2\times a^2 + \cdots + n\times a^n}{n\times a^{n+1}} = \frac{1}{a-1}.$$

(g) On applique le théorème de Stolz à

$$x_n = (k+1)\left(1^k + 2^k + \cdots + n^k\right) - n^{k+1} \quad \text{et} \quad y_n = (k+1)n^k.$$

On a alors

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{(k+1)n^k - n^{k+1} + (n-1)^{k+1}}{(k+1)\left(n^k - (n-1)^k\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

II.3.13. On voit, en appliquant le théorème de Stolz à

$$x_n = a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad y_n = \sqrt{n},$$

que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{n}}\right) = 2a.$$

II.3.14. On prend $x_n = a_{n+1}$ et $y_n = n$ dans le théorème de Stolz.

II.3.15. On voit, en appliquant le théorème de Toeplitz à la suite $\{a_n\}$ avec $c_{n,k} = \frac{1}{2^{n-k+1}}$, que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{2} + \cdots + \frac{a_1}{2^{n-1}} \right) = 2a.$$

II.3.16.

(a) On voit, en appliquant le théorème de Toeplitz à $\{a_n\}$ avec

$$c_{n,k} = \frac{1}{(n+1-k)(n+2-k)},$$

que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{1\times 2} + \frac{a_{n-1}}{2\times 3} + \cdots + \frac{a_1}{n(n+1)} \right) = a.$$

(b) Comme dans la démonstration de (a), on peut appliquer le théorème de Toeplitz à $\{a_n\}$ en prenant $c_{n,k} = \frac{3}{2}\frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k}}$ et montrer que la limite est égale à $\frac{2}{3}\,a$.

II.3.17. On pose $a_n = \binom{nk}{n}$. D'après **II.3.7**, il suffit de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. On a

$$\frac{\binom{(n+1)k}{n+1}}{\binom{nk}{n}} = \frac{(nk+1)(nk+2)\cdots(nk+k)}{(n+1)(nk-n+1)(nk-n+2)\cdots(nk-n+k-1)}.$$

La limite est donc égale à $\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$.

II.3.18. Soit $\{a_n\}$ une suite arithmétique de raison $d > 0$. On pose

$$c_n = \frac{n^n(a_1\cdots a_n)}{(a_1+\cdots+a_n)^n}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{(n+1)a_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}} \left(\frac{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}{\frac{a_1+\cdots+a_{n+1}}{n+1}} \right)^n \\
&= \frac{2a_{n+1}}{a_1+a_{n+1}} \left(\frac{2a_1+(n-1)d}{2a_1+nd} \right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2e^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc, d'après **II.3.7**, la limite est égale à $2e^{-1}$. Si $d = 0$, la limite est égale à 1.

II.3.19. Puisque $b_n = 2a_n + a_{n-1}$, $a_n = \frac{b_n - a_{n-1}}{2}$ et $a_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-2}}{2}$. Donc, $a_n = \frac{2b_n - b_{n-1} + a_{n-2}}{2^2}$. Une application répétée de cette procédure $n-1$ fois donne

$$a_n = \frac{2^{n-1}b_n - 2^{n-2}b_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-2}2^1 b_2 + (-1)^{n-1}a_1}{2^n}.$$

Donc, d'après **II.3.16** (b), $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}b$.

II.3.20. On pose $c_n = (a_1 \cdots a_n)n^{nx}$. On a alors

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} (n+1)^x a_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x a.$$

Donc, d'après **II.3.7**, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^x (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = e^x a$.

II.3.21.

(a) On applique le théorème de Stolz à $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ et $y_n = \ln n$. Cela donne

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$, ce qui se déduit des inégalités $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ (voir **II.1.41**).

(b) La limite est $\frac{1}{2}$ (voir la solution de (a)).

II.3.22. On applique le théorème de Stolz à

$$x_n = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \quad \text{et} \quad y_n = \ln n.$$

On a

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{a_n}{\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a.$$

II.3.23.

(a) 1,

(b) e^{-2},

(c) e^{-2},

(d) e^3.

(e) On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[k]{n}}{\sqrt[n]{n!}} = \begin{cases} e & \text{pour } k = 1, \\ 0 & \text{pour } k > 1. \end{cases}$$

II.3.24. D'après le théorème de Stolz (voir **II.3.11**),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = a.$$

II.3.25. On vérifie facilement que

$$a_1 = A_1, \quad a_2 = 2A_2 - A_1, \quad a_n = nA_n - (n-1)A_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{3}A_2 + \cdots + \frac{1}{n}A_{n-1} + A_n}{\ln n} = A,$$

la dernière égalité se déduisant du problème précédent.

II.3.26. [O. Toeplitz, Prace Matematyczno-Fizyczne, 22(1911), 113-119]. Soit $\{a_n\}$ la suite constante dont tous les termes sont égaux à 1. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ et $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k}a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k}$. Donc $1 = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k}$. La condition (ii) est ainsi vérifiée. On considère maintenant une suite $\left\{a_n^{(k)}\right\}$ dont le k-ième terme est égal à 1, les autres étant nuls. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{(k)} = 0$ et $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_{n,k}$. La condition (i) est donc aussi vérifiée. Supposons alors que la condition (iii) n'est pas vérifiée. Pour tout $C > 0$, il existe n_C tel que $\sum\limits_{k=1}^{n_C} |c_{n_C,k}| \geqslant C$. En fait, étant donné $C > 0$, il existe une infinité de tels indices n_C. Soit n_1 le plus petit entier strictement positif tel que $\sum\limits_{k=1}^{n_1} |c_{n_1,k}| > 10^2$. On définit les n_1 premiers termes de $\{a_n\}$ en posant

$$\operatorname{sgn} c_{n_1,k} = \operatorname{sgn} a_k \quad \text{et} \quad |a_k| = \frac{1}{10}\,.$$

On a alors

$$b_{n_1} = \sum_{k=1}^{n_1} c_{n_1,k} a_k = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{10} |c_{n_1,k}| > 10.$$

D'après (i), il existe n_0 tel que

$$\sum_{k=1}^{n_1} |c_{n,k}| < 1 \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_0.$$

En conséquence,

$$\left| \sum_{k=1}^{n_1} c_{n,k} a_k \right| < \frac{1}{10} \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_0.$$

On prend maintenant le plus petit entier n_2 tel que $n_2 \geqslant \max\{n_0, n_1\}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n_2} |c_{n_2,k}| > 10^4 + 1 + 10$. On définit les termes de $\{a_n\}$ en posant

$$\operatorname{sgn} c_{n_2,k} = \operatorname{sgn} a_k \quad \text{et} \quad |a_k| = \frac{1}{10^2} \quad \text{pour} \quad n_1 + 1 \leqslant k \leqslant n_2.$$

On a

$$\begin{aligned} b_{n_2} &= \sum_{k=1}^{n_2} c_{n_2,k} a_k = \sum_{k=1}^{n_1} c_{n_2,k} a_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} c_{n_2,k} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n_1} c_{n_2,k} a_k + \frac{1}{10^2} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} |c_{n_2,k}|\,. \end{aligned}$$

On déduit de ce qui précède que

$$b_{n_2} > -\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\left(10^4 + 1 + 10 - 1\right) = 10^2.$$

On peut construire de façon récursive la suite $\{a_n\}$ dont les termes d'indices compris entre $n_{k-1} + 1$ et n_k sont égaux soit à $+\frac{1}{10^k}$, soit à $-\frac{1}{10^k}$. La suite transformée $\{b_n\}$ vérifie alors

$$b_{n_k} > 10^k \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

La suite $\{a_n\}$ converge donc vers 0 alors que la suite transformée $\{b_n\}$ admet une sous-suite $\{b_{n_k}\}$ divergente. On obtient une contradiction et la condition (iii) est aussi vérifiée.

II.4. Valeurs d'adhérence, limite supérieure et limite inférieure

II.4.1.

(a) On montre d'abord que les sous-suites données ont une limite commune. On pose $\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = a$, $\lim_{k\to+\infty} a_{2k+1} = b$ et $\lim_{k\to+\infty} a_{3k} = c$. On a alors $\lim_{k\to+\infty} a_{6k} = a = c$ et $\lim_{k\to+\infty} a_{6k+3} = b = c$. Donc $a = b = c$. On prouve alors que la suite $\{a_n\}$ converge aussi vers a. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe des entiers positifs k_1 et k_2 tels que

$$\begin{aligned} k > k_1 \quad &\text{implique} \quad |a_{2k} - a| < \varepsilon, \\ k > k_2 \quad &\text{implique} \quad |a_{2k+1} - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc,

$$n > n_0 = \max\{2k_1, 2k_2 + 1\} \quad \text{implique} \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

(b) Non. On considère la suite $\{a_n\}$ définie par $a_n = (-1)^n$. On a alors $\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = 1$, $\lim_{k\to+\infty} a_{2k+1} = -1$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n$ n'existe pas.

On considère maintenant la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $\lim_{k\to+\infty} a_{3k} = 1$, $\lim_{k\to+\infty} a_{2k+1} = 1$ mais $\lim_{k\to+\infty} a_{2k}$ n'existe pas et bien sûr la suite $\{a_n\}$ diverge.

On considère enfin une troisième suite :

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est un nombre premier}, \\ 1 & \text{si } n \text{ est un nombre composé.} \end{cases}$$

Pour cette suite, on a $\lim_{k\to+\infty} a_{3k} = 1$ et $\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = 1$ mais $\lim_{k\to+\infty} a_{2k+1}$ n'existe pas car la suite $\{a_{2k+1}\}$ contient une sous-suite d'indices des nombres premiers et une sous-suite d'indices des nombres composés. (Notez qu'il existe une infinité de nombres premiers. En effet, si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont premiers, $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ et s'il n'y a pas de nombre premier plus grand que p_n, alors $p_1 p_2 \cdots p_n + 1 > p_n$ est aussi premier car il n'admet pas de diviseurs, exceptés lui-même et 1. Contradiction.)

II.4.2. Non. On définit la suite $\{a_n\}$ en posant

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est un nombre premier,} \\ 1 & \text{si } n \text{ est un nombre composé.} \end{cases}$$

Toute sous-suite $\{a_{sn}\}$, $s > 1$, $n \geqslant 2$, est une suite constante et donc convergente. Pour autant, la suite $\{a_n\}$ est divergente (voir la solution du **problème II.4.1 (b)**).

II.4.3. Évidemment, on a $\mathbf{S_p} \cup \mathbf{S_q} \cup \cdots \cup \mathbf{S_s} \subset \mathbf{S}$. Pour obtenir l'inclusion réciproque, on suppose que $x \notin \mathbf{S_p} \cup \mathbf{S_q} \cup \cdots \cup \mathbf{S_s}$. Il existe alors des réels strictement positifs ε_p, ε_q, ..., ε_s et des entiers positifs n_p, n_q, ..., n_s tels que

$$\begin{aligned} n > n_p \quad &\text{implique} \quad |x - a_{p_n}| > \varepsilon_p, \\ n > n_q \quad &\text{implique} \quad |x - a_{q_n}| > \varepsilon_q, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ n > n_s \quad &\text{implique} \quad |x - a_{s_n}| > \varepsilon_s. \end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon = \min\{\varepsilon_p, \varepsilon_q, \ldots, \varepsilon_s\}$ et $m = \max\left\{p_{n_p}, q_{n_q}, \ldots, s_{n_s}\right\}$, on obtient $|x - a_n| > \varepsilon$ pour $n > m$. Ceci implique que x n'est pas une valeur d'adhérence de la suite $\{a_n\}$. Donc,

$$\mathbf{S} \subset \mathbf{S_p} \cup \mathbf{S_q} \cup \cdots \cup \mathbf{S_s}.$$

L'égalité $\mathbf{S} = \mathbf{S_p} \cup \mathbf{S_q} \cup \cdots \cup \mathbf{S_s}$ implique que si toutes les sous-suites $\{a_{n_p}\}$, $\{a_{n_q}\}$, ..., $\{a_{n_s}\}$ convergent vers a, la suite $\{a_n\}$ converge alors aussi vers a.

II.4.4. Non. On définit la suite $\{a_n\}$ en posant

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chaque sous-suite

$$\{a_{2k-1}\}, \{a_{2(2k-1)}\}, \{a_{2^2(2k-1)}\}, \ldots, \{a_{2^m(2k-1)}\}, \ldots$$

converge vers 1, mais la suite $\{a_n\}$ diverge.

II.4.5. On suppose que la suite $\{a_n\}$ ne converge pas vers a. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout entier k strictement positif, il existe $n_k > k$ vérifiant $|a_{n_k} - a| \geqslant \varepsilon$. Si l'on suppose que n_k est le minimum de ces nombres, la suite $\{n_k\}$ est alors croissante. De plus, $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$. Une telle suite $\{a_{n_k}\}$ ne contient aucune sous-suite convergente vers a, ce qui contredit l'hypothèse. La suite $\{a_n\}$ converge donc vers a.

II.4.6.

(a) Il est évident que 1 est la seule valeur d'adhérence. $\mathbf{S}$ est donc réduit à un singleton, $\mathbf{S} = \{1\}$.

(b) On a $a_{3k} = 0$, $a_{3k+1} = 1$ et $a_{3k+2} = 0$. Donc, d'après le **problème II.4.3**, l'ensemble $\mathbf{S}$ des valeurs d'adhérence de cette suite est l'ensemble $\{0, 1\}$.

(c) On a

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k} + 3} \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = \frac{2^{2k+2} + 1}{2^{2k+1} + 3}.$$

Donc, $\mathbf{S} = \{0, 2\}$.

(d) On a

$$a_{2k} = \frac{2\ln(6k) + \ln(2k)}{\ln(4k)} \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = \frac{\ln(2k+1)}{\ln(2(2k+1))}.$$

Donc, $\mathbf{S} = \{1, 3\}$.

(e) On a

$$\begin{aligned} &a_{6k} = 1, && a_{6k+1} = (0{,}5)^{6k+1}, && a_{6k+2} = (-0{,}5)^{6k+2}, \\ &a_{6k+3} = -1, && a_{6k+4} = (-0{,}5)^{6k+4}, && a_{6k+5} = (0{,}5)^{6k+5}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathbf{S} = \{-1, 0, 1\}$.

(f) On a

$$\begin{aligned} &a_{7k} = 0, && a_{7k+1} = \frac{2}{7}, && a_{7k+2} = \frac{1}{7}, && a_{7k+3} = \frac{4}{7}, \\ &a_{7k+4} = \frac{4}{7}, && a_{7k+5} = \frac{1}{7}, && a_{7k+6} = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathbf{S} = \{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\}$.

II.4.7.

(a) Soit $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, p et q étant premiers entre eux. On a alors

$$a_{kq} = 0 \quad \text{et} \quad a_{kq+l} = kp + \frac{lp}{q} - \left[kp + \left[\frac{lp}{q}\right] + r\right] = \frac{lp}{q} - \left[\frac{lp}{q}\right],$$

où $l = 1, 2, \ldots, q-1$ et $r = \frac{lp}{q} - \left[\frac{lp}{q}\right]$. Donc

$$\mathbf{S} = \left\{0, \frac{p}{q} - \left[\frac{p}{q}\right], \frac{2p}{q} - \left[\frac{2p}{q}\right], \ldots, \frac{(q-1)p}{q} - \left[\frac{(q-1)p}{q}\right]\right\}.$$

(b) On montre que tout réel $x \in [0\,,1]$ est valeur d'adhérence de la suite $\{n\alpha - [n\alpha]\}$. D'après le **problème I.1.20**, il existe $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $0 < \alpha - \frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{q_n^2}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha q_n - p_n) = 0$. Soit $x \in \,]0\,,1[$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $0 < x-\varepsilon < x+\varepsilon < 1$. On suppose que n_1 est suffisamment grand pour que

$$0 < \alpha q_{n_1} - p_{n_1} < \frac{1}{q_{n_1}} < \varepsilon.$$

Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n_0(\alpha q_{n_1} - p_{n_1}) \in \,]x - \varepsilon\,, x + \varepsilon[\,, \tag{1}$$

(voir la solution du **problème I.1.21**).

La relation (1) implique $[n_0\alpha q_{n_1} - n_0 p_{n_1}] = 0$, ce qui est équivalent à $n_0 p_{n_1} = [n_0 \alpha q_{n_1}]$. Le terme $n_0\alpha q_{n_1} - [n_0\alpha q_{n_1}]$ qui appartient à notre suite appartient donc à l'intervalle $]x-\varepsilon\,, x+\varepsilon[$, ce qui signifie que x est une valeur d'adhérence de la suite considérée. On peut prouver de façon semblable que 0 et 1 sont aussi des valeurs d'adhérence.

(c) On suppose d'abord que α est un nombre rationnel de l'intervalle $]0\,,1[$. Soit $\alpha = \frac{p}{q}$, p et q étant premiers entre eux, $p < q$. On a alors $a_{2kq} = a_{2kq+q} = 0$ et

$$a_{2kq+l} = \sin\frac{lp\pi}{q} \quad \text{pour} \quad l = 1, 2, \ldots, q-1, q+1, \ldots, 2q-1.$$

D'où,

$$\mathbf{S} = \left\{0, \sin\frac{p\pi}{q}, \sin\frac{2p\pi}{q}, \ldots, \sin\frac{(q-1)p\pi}{q}\right\}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, la suite est alors constante. En prenant $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, on peut écrire

$$\alpha = [\alpha] + (\alpha - [\alpha]) \quad \text{et} \quad \alpha - [\alpha] \in \left]0\,,1\right[.$$

Donc, $\sin n\pi\alpha = (-1)^{[\alpha]} \sin(\alpha - [\alpha])n\pi$ et ce cas peut se ramener au cas particulier traité précédemment.

(d) Soit $t \in [-1\,,1]$. Il existe alors $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $\sin x = -t$. On peut réduire nos considérations au cas $\alpha > 0$ car la fonction sinus est une fonction impaire. Puisque α est irrationnel, il existe deux suites d'entiers strictement positifs $\{p_n\}$ et $\{q_n\}$ telles que

$$\frac{x}{2\pi} = \lim_{n\to+\infty} \left(p_n - q_n\frac{\alpha}{2}\right),$$

(voir la solution du **problème I.1.21**). Donc, $x = \lim\limits_{n\to+\infty} (2\pi p_n - \alpha\pi q_n)$. On obtient par continuité et périodicité de la fonction sinus

$$-t = \sin x = \lim_{n\to+\infty} \sin(2\pi p_n - \alpha\pi q_n) = -\lim_{n\to+\infty} \sin \alpha\pi q_n.$$

Il découle de ce qui précède que tout nombre dans l'intervalle $[-1\,,1]$ est une valeur d'adhérence de la suite.

II.4.8. On montre que dans tout intervalle $]a\,,b[$ se trouve au moins un terme de notre suite. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} < b - a \quad \text{pour } n > n_0.$$

Soit m_0 un entier tel que $\sqrt[3]{m_0} > \sqrt[3]{n_0} - a$ et $\mathbf{A} = \left\{n \in \mathbb{N}^* : \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m_0} \leqslant a\right\}$. L'ensemble $\mathbf{A}$ est non vide (par exemple, $n_0 \in \mathbf{A}$) et majoré. En posant $n_1 = \max \mathbf{A}$ et $n_2 = n_1 + 1$, on obtient $\sqrt[3]{n_2} - \sqrt[3]{m_0} > a$ et $\sqrt[3]{n_2} > a + \sqrt[3]{m_0} > \sqrt[3]{n_0}$. Donc, $n_2 > n_0$ et $\sqrt[3]{n_2} < \sqrt[3]{n_1} + b - a \leqslant \sqrt[3]{m_0} + a + b - a$ ou, de façon équivalente, $a < \sqrt[3]{n_2} - \sqrt[3]{m_0} < b$.

II.4.9. Le fait que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée soit borné est évident. On note $\mathbf{S}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\{a_n\}$. Si $\mathbf{S}$ est fini, alors il est fermé. On suppose donc que $\mathbf{S}$ est infini et on appelle s une de ses valeurs d'adhérence. On définit la suite $\{s_k\}$ d'éléments de $\mathbf{S}$ de la façon suivante : on prend pour s_1 n'importe quel élément de $\mathbf{S}$ différent de s. On choisit pour s_2 n'importe quel élément de $\mathbf{S}$ différent de s tel que $|s_2 - s| \leqslant \frac{1}{2}|s_1 - s|$ et, par récurrence, $|s_{k+1} - s| \leqslant \frac{1}{2}|s_k - s|$, $s_{k+1} \neq s$. Une telle suite $\{s_k\}$ vérifie la condition suivante :

$$|s_k - s| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}|s_1 - s|, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Puisque s_k est une valeur d'adhérence de la suite $\{a_n\}$, il existe a_{n_k} tel que $|a_{n_k} - s_k| < \frac{1}{2^{k-1}} |s_1 - s|$. Donc,

$$|a_{n_k} - s| \leqslant |a_{n_k} - s_k| + |s_k - s| < \frac{1}{2^{k-2}} |s_1 - s|,$$

ce qui implique que s est une valeur d'adhérence de la sous-suite $\{a_{n_k}\}$ et que $s \in \mathbf{S}$.

II.4.10. Soit $\mathbf{S}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\{a_n\}$.

(a) La suite $\{a_n\}$ est bornée. D'après **II.4.6**, $\mathbf{S} = \{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\}$. Donc, $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{4}{7}$.

(b) On a $\mathbf{S} = \{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$ ce qui donne $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$ et $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, la suite étant bornée.

(c) La suite n'est pas bornée et l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est vide, donc

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = -\infty \quad \text{et} \quad \varlimsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

(d) La suite n'est pas majorée car la sous-suite $a_{2k} = (2k)^{2k}$ tend vers $+\infty$. La sous-suite d'indices impairs tend vers 0. Ceci montre que

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \text{et} \quad \varlimsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

(e) La suite n'est pas bornée car

$$a_{4k+1} = 4k + 2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$$

et

$$a_{4k+3} = -4k - 2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} -\infty.$$

En conséquence, $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ et $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(f) Il est clair que la suite est bornée. De plus,

$$\mathbf{S} = \left\{-e - \frac{\sqrt{2}}{2}, -e + \frac{\sqrt{2}}{2}, e - 1, e, e + 1\right\}.$$

Il s'ensuit que

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = -e - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \varlimsup_{n\to+\infty} a_n = e + 1.$$

(g) $\varliminf_{n\to+\infty} a_n = 1$ et $\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = 2$.

(h) La suite n'est pas majorée puisque $a_{3k} = 2^{3k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$. De plus, $\mathbf{S} = \{-1, 1\}$. Donc, $\varliminf_{n\to+\infty} a_n = -1$ et $\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(i) On montre que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty$. En effet, en appliquant le théorème de Stolz (voir **II.3.11**), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n - \ln(n-1)}{n-n+1} = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = 0.$$

Ceci montre que

$$\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(2k) - 4k}{\ln 2 + \ln(2k)} = -\infty.$$

La suite $\{a_n\}$ n'est donc pas minorée. De plus,

$$\lim_{k\to+\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(2k+1)}{\ln 2 + \ln(2k+1)} = 1.$$

Ceci donne $\varliminf_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ et $\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = 1$.

II.4.11. Il suffit d'appliquer le **problème II.4.7**.

(a) $\varliminf_{n\to+\infty} a_n = \min \mathbf{S} = 0$ et $\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = \max \mathbf{S}$, où

$$\mathbf{S} = \left\{0, \frac{p}{q} - \left[\frac{p}{q}\right], \frac{2p}{q} - \left[\frac{2p}{q}\right], \ldots, \frac{(q-1)p}{q} - \left[\frac{(q-1)p}{q}\right]\right\}.$$

(b) $\varliminf_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = 1$.

(c) $\varliminf_{n\to+\infty} a_n = \min \mathbf{S}$ et $\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = \max \mathbf{S}$, où $\mathbf{S}$ est l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de la suite décrite en **II.4.7 (c)**.

(d) $\varliminf_{n\to+\infty} a_n = -1$ et $\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = 1$.

II.4.12.

(a) Si l'ensemble $\mathbf{S}$ des valeurs d'adhérence de $\{a_n\}$ est vide, alors $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n = -\infty \leqslant A$. On suppose donc que $\mathbf{S}$ n'est pas vide. Puisque $\mathbf{S}$ est fermé (voir le **problème II.4.9**), $\sup \mathbf{S} = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n = L \in \mathbf{S}$. La définition d'une valeur d'adhérence implique qu'il existe une sous-suite $\{a_{n_k}\}$ convergente vers L. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$L - \varepsilon < a_{n_k} \leqslant A \qquad \text{pour} \quad k > k_0.$$

Puisque ε peut être choisi arbitrairement, on obtient $L \leqslant A$.

(b) Si la suite $\{a_n\}$ n'est pas minorée, alors $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n = -\infty \leqslant A$. On suppose donc que la suite $\{a_n\}$ est minorée, autrement dit, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \geqslant B$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, par hypothèse, il existe une suite n_k, $n_k > k$, telle que $a_{n_k} \leqslant A$. Donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir **II.4.30**), la suite $\{a_{n_k}\}$ contient une sous-suite convergente. On note g sa limite et on a alors $B \leqslant g \leqslant A$. L'ensemble $\mathbf{S}$ des valeurs d'adhérence de $\{a_n\}$ n'est donc pas vide et $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n = \inf \mathbf{S} \leqslant g \leqslant A$.

(c) Il suffit d'appliquer l'argument présenté dans la démonstration de (a).

(d) Il suffit d'utiliser la même idée que dans la démonstration de (b).

II.4.13.

(a) Soit $L = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n$. On suppose que (i) n'est pas vérifiée, contrairement à ce qui doit être prouvé. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n > k$ pour lequel $a_n \geqslant L + \varepsilon$. Donc, d'après le **problème II.4.12 (d)**, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n \geqslant L + \varepsilon$, ce qui contredit notre hypothèse. On suppose maintenant que (ii) n'est pas vérifiée. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $a_n \leqslant L - \varepsilon$ pour tout $n > k$. Avec **II.4.12 (a)**, on obtient $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n \leqslant L - \varepsilon$, ce qui contredit à nouveau notre hypothèse. On a donc prouvé que $L = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n$ implique les conditions (i) et (ii).

On prouve maintenant que les conditions (i) et (ii) impliquent $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n = L$. La condition (i) implique que la suite $\{a_n\}$ est majorée. D'autre part, la condition (ii) implique que la suite contient une sous-suite minorée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir **II.4.30**), la suite contient au moins une sous-suite convergente. L'ensemble $\mathbf{S}$ des valeurs d'adhérence de $\{a_n\}$ n'est donc pas vide. On va montrer que $L = \sup \mathbf{S}$. En effet, si s est un élément de $\mathbf{S}$, alors d'après (i), $s \leqslant L+\varepsilon$ et, ε pouvant être choisi arbitrairement, on obtient $s \leqslant L$. De plus, on voit avec la condition (ii) que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite de la suite $\{a_n\}$ convergente vers $\tilde{s}$ et vérifiant l'inégalité $L-\varepsilon \leqslant \tilde{s}$. Bien sûr, $\tilde{s} \in \mathbf{S}$. La seconde implication est donc ainsi prouvée et la démonstration est complète.

(b) On suit la même méthode qu'en (a).

On énonce maintenant des conditions nécessaires et suffisantes pour les limites inférieure et supérieure infinies. La limite supérieure de $\{a_n\}$ est égale à $+\infty$ si et seulement si la suite n'est pas majorée. Donc,

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n = +\infty \quad &\text{si et seulement si pour tout } M \in \mathbb{R} \text{ et} \\ &\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe } n_k > k \text{ tel que } a_{n_k} > M.\end{aligned} \tag{1}$$

La limite supérieure de $\{a_n\}$ est égale à $-\infty$ si et seulement si la suite est majorée, par exemple par L, et l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est vide. Il existe donc un nombre fini de termes de $\{a_n\}$ dans chaque segment $[M, L]$. D'où, $a_n < M$ pour tout n suffisamment grand. Ceci implique

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n = -\infty \quad &\text{si et seulement si pour tout } M \in \mathbb{R}, \\ &\text{il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } a_n < M \text{ pour tout } n > k.\end{aligned} \tag{2}$$

Des arguments semblables donnent

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n = -\infty \quad &\text{si et seulement si pour tout } M \in \mathbb{R} \text{ et} \\ &\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe } n_k > k \text{ tel que } a_{n_k} < M,\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n = +\infty \quad &\text{si et seulement si pour tout } M \in \mathbb{R}, \\ &\text{il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } a_n > M \text{ pour tout } n > k.\end{aligned} \tag{4}$$

II.4.14. On ne prouve que l'inégalité (a), la démonstration de l'inégalité (b) étant semblable. L'inégalité (a) est évidente dans le cas où $\underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ ou $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = -\infty$. Si $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, en combinant alors la condition (4) donnée dans la solution de **II.4.13** avec l'inégalité $a_n \leqslant b_n$, on obtient

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. De même, si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, en combinant alors la condition (3) donnée dans la solution de **II.4.13** avec l'inégalité $a_n \leqslant b_n$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

On suppose maintenant que chacune des limites est finie et on pose

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = l_1 \quad \text{et} \quad \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n = l_2.$$

On veut prouver que $l_1 \leqslant l_2$. Supposons au contraire que $l_2 < l_1$. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $l_2 + \varepsilon < c < l_1 - \varepsilon$. D'après (ii) du **problème II.4.13 (b)**, on a $b_{n_k} < l_2 + \varepsilon < c$. D'autre part, d'après (i), on a $c < l_1 - \varepsilon < a_n$, d'où, en particulier, $c < a_{n_k}$ et l'inégalité $b_{n_k} < a_{n_k}$ est donc vérifiée pour une infinité d'indices n_k, ce qui contredit nos hypothèses.

II.4.15. On pose

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = l_1, \qquad \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n = l_2, \qquad \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = L_1, \qquad \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n = L_2.$$

On montre d'abord que

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \geqslant \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n. \tag{1}$$

Supposons que l_1 et l_2 soient finies. D'après le **problème II.4.13**, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_1 tel que $a_n > l_1 - \varepsilon$ pour $n > k_1$ et il existe k_2 tel que $b_n > l_2 - \varepsilon$ pour $n > k_2$. Il en résulte que

$$a_n + b_n > l_1 + l_2 - 2\varepsilon \quad \text{pour} \quad n > \max\{k_1, k_2\}.$$

On obtient $\underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \geqslant l_1 + l_2 - 2\varepsilon$, en combinant ce qui précède avec le **problème II.4.12 (c)**, et on obtient (1) en faisant tendre ε vers 0^+.

Si l_1 ou l_2 sont égales à $-\infty$, l'inégalité (1) est alors évidente. Montrons que $\underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = +\infty$ si une des limites l_1 ou l_2 est égale à $+\infty$. Supposons, par exemple, que $l_1 = +\infty$. Ceci est équivalent à la condition (4) donnée dans la solution du **problème II.4.13** :

$$\text{pour tout } M \in \mathbb{R}, \text{ il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } a_n > M \text{ si } n > k. \tag{$*$}$$

Puisque $l_2 \neq -\infty$, la suite $\{b_n\}$ est minorée. La condition $(*)$ est donc vérifiée par $\{a_n + b_n\}$. Dit autrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = +\infty$ et on a prouvé l'inégalité (1).

La démonstration des inégalités restantes se conduit de la même façon et nous ne la donnons que dans le cas de limites finies. Selon le **problème II.4.13**, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite $\{a_{n_k}\}$ telle que $a_{n_k} < l_1 + \varepsilon$ et il existe

n_0 tel que $b_n < L_2 + \varepsilon$ pour $n > n_0$. Ceci implique $a_{n_k} + b_{n_k} < l_1 + L_2 + 2\varepsilon$ pour k suffisamment grand. D'après le **problème II.4.12 (b)**, on obtient donc $\varliminf\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \leqslant l_1 + L_2 + 2\varepsilon$ et, ε pouvant être choisi arbitrairement,

$$\varliminf_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n. \tag{2}$$

De même, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite $\{b_{n_k}\}$ telle que $b_{n_k} > L_2 - \varepsilon$ et il existe n_0 tel que $a_n > l_1 - \varepsilon$ pour $n > n_0$. D'où, $a_{n_k} + b_{n_k} > l_1 + L_2 - 2\varepsilon$ pour k suffisamment grand. D'après le **problème II.4.12 (c)**, on a $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \geqslant l_1 + L_2 - 2\varepsilon$ et, ε pouvant être choisi arbitrairement, on conclut que

$$\varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \geqslant \varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n. \tag{3}$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_1 tel que $a_n < L_1 + \varepsilon$ pour $n > k_1$ et il existe k_2 tel que $b_n < L_2 + \varepsilon$ pour $n > k_2$. Donc,

$$a_n + b_n < L_1 + L_2 + 2\varepsilon \quad \text{pour} \quad n > \max\{k_1, k_2\}.$$

On obtient $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \leqslant L_1 + L_2 + 2\varepsilon$, en combinant ce qui précède au **problème II.4.12 (a)** et, ε pouvant être choisi arbitrairement,

$$\varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n. \tag{4}$$

On donne maintenant des exemples de suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ pour lesquelles les inégalités (1)-(4) sont strictes. On pose

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 4k, \\ 1 & \text{si } n = 4k+1, \\ 2 & \text{si } n = 4k+2, \\ 1 & \text{si } n = 4k+3, \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 4k, \\ 1 & \text{si } n = 4k+1, \\ 1 & \text{si } n = 4k+2, \\ 0 & \text{si } n = 4k+3. \end{cases}$$

Les inégalités données dans le problème sont alors dans ce cas de la forme $0 < 1 < 2 < 3 < 4$.

II.4.16. Non. Il suffit de considérer les suites $\{a_n^m\}$, $m \in \mathbb{N}^*$, définies par

$$a_n^m = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = m, \\ 0 & \text{pour } n \neq m. \end{cases}$$

On a alors

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left(a_n^1+a_n^2+\ldots\right)=1>0=\varlimsup_{n\to+\infty}a_n^1+\varlimsup_{n\to+\infty}a_n^2+\ldots$$

On pose maintenant

$$a_n^m=\begin{cases}-1 & \text{pour } n=m,\\ 0 & \text{pour } n\neq m.\end{cases}$$

On a dans ce cas

$$\varliminf_{n\to+\infty}\left(a_n^1+a_n^2+\ldots\right)=-1<0=\varliminf_{n\to+\infty}a_n^1+\varliminf_{n\to+\infty}a_n^2+\ldots.$$

II.4.17. On note

$$\varliminf_{n\to+\infty}a_n=l_1,\qquad \varliminf_{n\to+\infty}b_n=l_2,\qquad \varlimsup_{n\to+\infty}a_n=L_1,\qquad \varlimsup_{n\to+\infty}b_n=L_2.$$

On ne va prouver que l'inégalité

$$l_1l_2\leqslant \varliminf_{n\to+\infty}(a_nb_n)\leqslant l_1L_2. \tag{1}$$

Le même raisonnement s'applique aux autres cas.

On suppose d'abord que l_1 et l_2 sont strictement positifs. D'après le **problème II.4.13 (b)**, pour tout $\varepsilon>0$, il existe n_0 tel que

$$a_n>l_1-\varepsilon,\quad b_n>l_2-\varepsilon\quad \text{pour } n>n_0.$$

En conséquence, $a_nb_n>l_1l_2-\varepsilon(l_1+l_2)+\varepsilon^2$ pour ε suffisamment petit pour que $l_1-\varepsilon>0$ et $l_2-\varepsilon>0$. Donc, d'après le **problème II.4.12 (c)**, $\varliminf\limits_{n\to+\infty}(a_nb_n)\geqslant l_1l_2-\varepsilon(l_1+l_2)+\varepsilon^2$. On obtient, en faisant tendre ε vers 0^+,

$$l_1l_2\leqslant \varliminf_{n\to+\infty}(a_nb_n). \tag{i}$$

Si $l_1=0$ ou $l_2=0$, l'inégalité (i) est alors évidente. Si $l_1=+\infty$ et $l_2=+\infty$, alors (d'après la condition (4) dans la solution du **problème II.4.13**), pour tout réel strictement positif M donné, on peut trouver n_0 tel que

$$a_n>\sqrt{M},\quad b_n>\sqrt{M}\quad \text{pour } n>n_0.$$

Donc, $a_nb_n>M$ ce qui implique $\varliminf\limits_{n\to+\infty}(a_nb_n)=+\infty$.

On suppose maintenant qu'une des limites, mettons l_1, est infinie et l'autre est finie et strictement positive. Pour tout $0<\varepsilon<l_2$ et tout $M>0$, il existe alors un entier positif n_0 tel que, pour $n>n_0$, on ait

$$b_n>l_2-\varepsilon,\quad a_n>\frac{M}{l_2-\varepsilon}.$$

Donc, $a_n b_n > M$ pour $n > n_0$. On a alors $\underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n b_n) = +\infty$ et l'inégalité (i) est prouvée.

Notre but est maintenant de prouver que

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n b_n) \leqslant l_1 L_2. \tag{ii}$$

Si l_1 et L_2 sont finies, on trouve alors, en suivant le **problème II.4.13**, une sous-suite $\{n_k\}$ telle que $a_{n_k} < l_1 + \varepsilon$ et $b_{n_k} < L_2 + \varepsilon$. Ceci donne

$$a_{n_k} b_{n_k} < l_1 L_2 + \varepsilon(l_1 + L_2) + \varepsilon^2.$$

Donc, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n b_n) \leqslant l_1 L_2 + \varepsilon(l_1 + L_2) + \varepsilon^2$. On obtient (ii) en faisant tendre ε vers 0^+. Si $l_1 = +\infty$ ou $L_2 = +\infty$, l'inégalité (ii) est alors évidente.

On donne maintenant des exemples de suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ pour lesquelles les inégalités sont strictes. Soit

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 4k, \\ 2 & \text{pour } n = 4k+1, \\ 3 & \text{pour } n = 4k+2, \\ 2 & \text{pour } n = 4k+3, \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 3 & \text{pour } n = 4k, \\ 2 & \text{pour } n = 4k+1, \\ 2 & \text{pour } n = 4k+2, \\ 1 & \text{pour } n = 4k+3. \end{cases}$$

Dans ce cas, nos inégalités sont de la forme $1 < 2 < 3 < 6 < 9$.

II.4.18. Supposons que $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = g$. Alors, d'après **II.4.13**,

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } a_n < g + \varepsilon \text{ si } n > k \tag{i}$$

et

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } g - \varepsilon < a_n \text{ si } n > k. \tag{i'}$$

g est donc la limite de la suite $\{a_n\}$.

D'autre part, si $\lim_{n\to+\infty} a_n = g$, les conditions (i) et (ii) du **problème II.4.13 (a)** et (b) sont alors vérifiées avec $L = g$ et $l = g$. Donc, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = g$.

Supposons maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Les propositions (1) et (4) de la solution du **problème II.4.13** sont évidentes. Si $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, la condition (4) signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Des arguments semblables s'appliquent au cas $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

II.4.19. D'après le **problème II.4.15**,

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varliminf_{n\to+\infty} b_n \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} a_n + \varliminf_{n\to+\infty} b_n.$$

D'autre part, d'après le problème précédent, $a = \varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$. Donc, $\varliminf\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + \varliminf\limits_{n\to+\infty} b_n$. La démonstration de la seconde inégalité se déroule de la même façon.

II.4.20. On peut appliquer la même méthode que celle utilisée dans la solution du problème précédent en utilisant l'inégalité donnée au **problème II.4.17**.

II.4.21. On va appliquer le **problème II.4.13**. On note $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = L$. Les conditions (i) et (ii) du **problème II.4.13 (a)** sont vérifiées. En multipliant chaque membre des inégalités de (i) et (ii) par -1, on obtient :

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que pour tout } n > k,\ -L - \varepsilon < -a_n \quad \text{(i)}$$

et

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe } n_k > k \text{ tel que } -a_{n_k} < -L + \varepsilon. \quad \text{(ii)}$$

On obtient avec **II.4.13 (b)**

$$\varliminf_{n\to+\infty} (-a_n) = -L = -\varlimsup_{n\to+\infty} a_n.$$

La démonstration de la seconde égalité se fait comme ci-dessus. Dans le cas de limites infinies, il suffit d'appliquer les propositions (1)-(4) données dans la solution du **problème II.4.13**.

II.4.22. On applique le **problème II.4.13**. On pose $\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = L$. On a alors, avec les conditions (i) et (ii) donnée en **II.4.13 (a)** :

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } a_n < L + \varepsilon L^2 \text{ pour tout } n > k \quad \text{(i)}$$

et

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe } n_k > k \text{ tel que } L - \varepsilon\frac{L^2}{2} < a_{n_k}. \qquad \text{(ii)}$$

On suppose d'abord que $L \neq 0$. On a alors, d'après (i),

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{L+\varepsilon L^2} = \frac{1}{L} - \frac{\varepsilon L^2}{L(L+\varepsilon L^2)} > \frac{1}{L} - \varepsilon.$$

On suppose maintenant que $0 < \varepsilon < \frac{1}{L}$. D'après (ii),

$$\frac{1}{a_{n_k}} < \frac{1}{L - \frac{\varepsilon L^2}{2}} = \frac{1}{L} + \frac{\varepsilon\frac{L^2}{2}}{L\left(L - \frac{\varepsilon L^2}{2}\right)} < \frac{1}{L} + \varepsilon.$$

Les conditions précédentes impliquent (d'après **II.4.13 (b)**)

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n}.$$

On suppose maintenant que $\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = 0$. Étant donné $M > 0$, d'après (i) dans le **problème II.4.13 (a)**, il existe un entier k tel que $a_n < \frac{1}{M}$ pour $n > k$. Donc, $\frac{1}{a_n} > M$ pour $n > k$, ce qui, d'après la proposition (4) donnée dans la solution du **problème II.4.13**, signifie que $\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$. Finalement, on suppose que $\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, il existe alors $n_k > k$ tel que $a_{n_k} > \frac{1}{\varepsilon}$ (voir la proposition (1) dans la solution du **problème II.4.13 (a)**). L'inégalité précédente est équivalente à $\frac{1}{a_{n_k}} < \varepsilon$. Bien sûr, $-\varepsilon < \frac{1}{a_{n_k}}$. Les deux conditions données en **II.4.13 (b)** sont donc vérifiées par la suite $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ pour $l = 0$, ce qui signifie que $\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. La démonstration de la première égalité est donc complète. La démonstration de la seconde se fait de la même façon.

II.4.23. Il découle des hypothèses que $0 < \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n < +\infty$. L'égalité $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{1}{a_n} = 1$ combinée au problème précédent donne

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n} = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n.$$

Donc, d'après le **problème II.4.18**, la suite $\{a_n\}$ est convergente.

II.4.24. Supposons que $\{a_n\}$ soit une suite telle que la première égalité soit vérifiée pour toute suite $\{b_n\}$. On prend $b_n = -a_n$. Il s'ensuit, d'après le **problème II.4.21**, que

$$0 = \underline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n + (-a_n)) = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n + \underline{\lim_{n\to+\infty}} (-a_n) = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n - \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n.$$

On en conclut, avec le **problème II.4.18**, que la suite $\{a_n\}$ est convergente.

II.4.25. Supposons que $\{a_n\}$ soit une suite strictement positive telle que la première égalité soit vérifiée pour toute suite $\{b_n\}$ strictement positive. On prend $b_n = \frac{1}{a_n}$. D'après le **problème II.4.22**, on a alors

$$1 = \underline{\lim_{n\to+\infty}} \left(a_n \cdot \frac{1}{a_n}\right) = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \cdot \underline{\lim_{n\to+\infty}} \left(\frac{1}{a_n}\right) = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \cdot \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n}.$$

Il s'ensuit que la limite supérieure et la limite inférieure de $\{a_n\}$ sont strictement positives et $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n$. La suite $\{a_n\}$ est donc convergente (voir le **problème II.4.18**).

II.4.26. Évidemment, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n}$. On montre que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Si $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$, l'inégalité est alors évidente. On suppose donc que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < +\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k tel que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqslant k.$$

Donc,

$$\frac{a_n}{a_k} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{k+1}}{a_k} < (L+\varepsilon)^{n-k}.$$

D'où,

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_k}\,(L+\varepsilon)^{\frac{-k}{n}}\,(L+\varepsilon).$$

Puisque $\sqrt[n]{a_k}\,(L+\varepsilon)^{\frac{-k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on a

$$\sqrt[n]{a_k}\,(L+\varepsilon)^{\frac{-k}{n}} < 1+\varepsilon$$

pour n suffisamment grand. On déduit donc de ce qui précède que

$$\sqrt[n]{a_n} < (1+\varepsilon)(L+\varepsilon) = L + (L+1)\varepsilon + \varepsilon^2$$

pour n suffisamment grand. En combinant ceci au **problème II.4.12 (a)**, on obtient $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n} \leqslant L + (L+1)\varepsilon + \varepsilon^2$. Puisque ε peut être choisi arbitrairement proche de 0, on a $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n} \leqslant L = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Pour montrer que $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}$, il suffit d'appliquer le **problème II.4.22** et l'inégalité juste prouvée à la suite $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$.

II.4.27. On prouve que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, b_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n$. Pour cela, on suppose que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n = L < +\infty$ (pour $L=+\infty$, l'inégalité précédente est claire). Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_n < L+\varepsilon$ pour $n > k$. Donc,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n}{n} \\ &< \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{n} - \frac{k(L+\varepsilon)}{n} + L + \varepsilon. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{n} - \frac{k(L+\varepsilon)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{n} - \frac{k(L+\varepsilon)}{n} < \varepsilon$ pour n suffisamment grand. Il s'ensuit que $b_n < \varepsilon + L + \varepsilon$ pour n suffisamment grand. Selon le **problème II.4.12 (a)**, ε pouvant être choisi arbitrairement petit, on a $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, b_n \leqslant L = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n$. La démonstration de l'inégalité $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, b_n$ est identique.

II.4.28.

(a), (b) Il suffit d'appliquer le **problème II.4.13**.

(c) L'inégalité est fausse. Pour le voir, il suffit de considérer les suites définies par

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n = 2k, \\ 1 & \text{pour } n = 2k+1, \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 2k, \\ 0 & \text{pour } n = 2k+1. \end{cases}$$

On a alors

$$0 = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \min\{a_n, b_n\} \neq \min\left\{\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n, \overline{\lim_{n\to+\infty}} b_n\right\} = 1.$$

(d) De même, cette égalité est fausse comme on peut le voir en considérant les suites définies en (c).

II.4.29. On suppose que la suite $\{a_n\}$ vérifie la propriété qu'il existe une infinité d'entiers n tels que

$$a_k \leqslant a_n \text{ pour tout } k \geqslant n. \tag{$*$}$$

Soit n_1 le premier de ces n, n_2 le second, etc. La suite $\{a_{n_k}\}$ est une sous-suite décroissante de $\{a_n\}$. D'un autre côté, si la suite $\{a_n\}$ ne vérifie pas la propriété précédente, autrement dit, s'il n'existe qu'un nombre fini de n vérifiant $(*)$, on choisit un entier m_1 tel que la suite $\{a_{m_1+n}\}$ ne vérifie pas $(*)$. Soit m_2 le premier entier plus grand que m_1 tel que $a_{m_2} > a_{m_1}$. En poursuivant le procédé, on extrait de $\{a_n\}$ la sous-suite croissante $\{a_{m_n}\}$.

II.4.30. D'après le problème précédent, une telle suite contient une sous-suite monotone et bornée donc convergente.

II.4.31. On suppose d'abord que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$. Alors, d'après **II.4.14 (b)**,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$$

On suppose maintenant que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha < +\infty.$$

Alors, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe k tel que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqslant k. \tag{1}$$

Dit autrement,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{1}{\alpha + \varepsilon} \quad \text{pour} \quad n \geqslant k. \tag{2}$$

On a donc, pour n suffisamment grand,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{a_n} \\
&\geqslant \frac{a_k + \ldots + a_n + a_{n+1}}{a_n} \\
&= \frac{a_k}{a_{k+1}} \cdots \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}} \cdots \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} \\
&\quad + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} + 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&\geqslant \left(\frac{1}{\alpha + \varepsilon}\right)^{n-k} + \left(\frac{1}{\alpha + \varepsilon}\right)^{n-k-1} + \ldots + \frac{1}{\alpha + \varepsilon} + 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n}.
\end{aligned}$$

Si $0 < \alpha < 1$, l'inégalité précédente et le **problème II.4.14 (b)** donnent $\varlimsup_{n \to +\infty} b_n = +\infty$.

D'autre part, si $\alpha \geqslant 1$, on conclut avec les **problèmes II.4.14 (b)** et **II.4.19** que

$$\varlimsup_{n \to +\infty} b_n \geqslant \alpha + \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{\alpha+\varepsilon}\right)^{n-k+1}}{1 - \frac{1}{\alpha+\varepsilon}} = \alpha + \frac{\alpha + \varepsilon}{\alpha + \varepsilon - 1}. \qquad (3)$$

Dans le cas $\alpha = 1$, $\varepsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement et on obtient $\varlimsup_{n \to +\infty} b_n = +\infty$. Si $\alpha > 1$, alors (3) implique

$$\varlimsup_{n \to +\infty} b_n \geqslant 1 + \alpha + \frac{1}{\alpha - 1} = 2 + (\alpha - 1) + \frac{1}{\alpha - 1} \geqslant 4.$$

Le nombre 4 est le meilleur minorant car il est atteint pour la suite $a_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

II.5. Problèmes divers

II.5.1. Supposons d'abord que $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$. On pose $b_n = [a_n]$. On a alors $b_n \leqslant a_n < b_n + 1$. D'où,

$$\left(1 + \frac{1}{b_n + 1}\right)^{b_n} < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n + 1}.$$

Le résultat de **II.1.38** et le théorème des gendarmes impliquent donc

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

De plus,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e^{-1}$$

car

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a_n-1}\right)^{a_n}}=e^{-1}.$$

Ceci implique

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e \quad \text{si } \{a_n\} \text{ diverge vers } -\infty.$$

II.5.2. On peut appliquer le problème précédent en prenant $a_n=\frac{n}{x}$, $x\neq 0$.

II.5.3. D'après **II.1.39**, **II.1.40** et **II.5.2**, $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n<e^x<\left(1+\frac{x}{n}\right)^{l+n}$ pour $l>x>0$, $l\in\mathbb{N}^*$. Donc, pour tout réel $x\in\mathbb{R}_+^*$ et tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{x}{n+l}<\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)<\frac{x}{n}$ si $l>x$. En prenant $n=1$, on obtient $\ln(1+x)<x$ pour $x>0$. On pose maintenant $l=[x]+1$ et on obtient

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)>\frac{\frac{x}{n}}{2+\frac{x}{n}}.$$

Donc, $\ln(1+x)>\frac{x}{2+x}$ pour $x>0$.

On considère maintenant la fonction $f(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{2+x}$, $x>0$. On a

$$f'(x)=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}>0 \qquad \text{pour } x>0.$$

D'où,

$$f(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{x+2}>f(0)=0 \qquad \text{pour } x>0.$$

II.5.4.

(a) On suppose d'abord que $a>1$. On pose $a_n=\sqrt[n]{a}-1$. L'inégalité donnée en **II.5.3** donne

$$\frac{2a_n}{a_n+2}<\frac{1}{n}\ln a=\ln(a_n+1)<a_n.$$

Le théorème des gendarmes implique donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\ln a$ pour $a>1$. On voit aussi que la proposition reste correcte pour $a=1$. Pour la prouver dans le cas $0<a<1$, il suffit d'appliquer ce qui précède avec $\frac{1}{a}>1$.

(b) On pose $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$, d'où $(a_n + 1)^n = n$. Donc, d'après **II.5.3**, $\ln n = n \ln(a_n + 1) < n a_n$. En conséquence, $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n = +\infty$.

II.5.5. On peut prouver, en utilisant la dérivation, que $\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ pour $x > -1$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, $a_n > 0$ à partir d'un certain rang n. Il s'ensuit que $\frac{a_n-1}{1+a_n-1} \leqslant \ln a_n = \ln(1 + (a_n - 1)) \leqslant a_n - 1$. On obtient le résultat cherché en divisant les membres des inégalités par $a_n - 1$ et en utilisant le théorème des gendarmes.

II.5.6. Par définition (voir **II.1.38**), $e = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. De plus,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\ &\quad + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Donc,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < a_n. \tag{i}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 &+ \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\\ &+ \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Un passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ donne

$$e \geqslant a_k. \tag{ii}$$

D'après (i) et (ii), la limite de la suite $\{a_n\}$ est égale à e. De plus,

$$\begin{aligned}a_{n+m} - a_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+m)!}\\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right)\\ &< \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1}.\end{aligned}$$

En gardant n fixé et en faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient

$$e - a_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1}\,.$$

Ceci et (ii) impliquent $0 < e - a_n < \frac{1}{nn!}$.

II.5.7. On sait (voir **II.5.2**) que $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, on pose $a_n = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$. On a alors

$$\begin{aligned}\left|a_n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| &= \left|\sum_{k=2}^{n}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)\frac{x^k}{k!}\right|\\ &\leqslant \sum_{k=2}^{n}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)\frac{|x|^k}{k!}\,.\end{aligned}$$

D'après **I.2.1**, on a, pour $2 \leqslant k \leqslant n$,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \geqslant 1 - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{j}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n}\,.$$

Donc,

$$\left|a_n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)\,|x|^k}{2nk!} = \frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{|x|^k}{(k-2)!}\,.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{|x|^k}{(k-2)!} = 0$ (ce qui se déduit facilement du théorème de Stolz, voir **II.3.11**), on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

II.5.8.

(a) D'après **II.1.38**, $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$. On obtient donc, pour $n > 1$,

$$\ln\frac{2n+1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} < \ln\frac{2n}{n-1}.$$

Le résultat cherché se déduit alors de la continuité du logarithme et du théorème des gendarmes.

(b) On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n+1} &< \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}\\ &< \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\,.\end{aligned}$$

La proposition se déduit donc de (a).

II.5.9. Une analyse semblable à celle menée dans la démonstration de **II.5.3** donne

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x \quad \text{pour } x>0. \tag{$*$}$$

On pose $b_n=\ln a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$. D'après $(*)$,

$$\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}<\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\frac{k}{n^2}\,.$$

Ceci et les égalités

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\,, \qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

impliquent $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\frac{1}{2}$. La continuité du logarithme donne $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\sqrt{e}$.

II.5.10. On peut montrer par récurrence que

$$\begin{aligned}a_n &= n+n(n-1)+\ldots+n(n-1)\times\cdots\times 2+\ldots+n(n-1)\times\cdots\times 2\times 1\\ &= \frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-2)!}+\ldots+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{0!}\,.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_1+1}{a_1}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n+1}{a_n}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n+1}{n!}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e,\end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de **II.5.6**.

II.5.11. D'après **II.5.6**, on a

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{nn!}, \quad \text{où} \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Donc, $0 < n!e - [n!e] = \frac{\theta_n}{n} < \frac{1}{n}$, ce qui prouve la proposition.

II.5.12. D'après l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique, la monotonie de la fonction logarithme et l'inégalité prouvée en **II.5.3**, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\ln\sqrt{ab} \leqslant \ln\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right) &= \ln\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{b} - 1\right) + 1\right) \\ &< \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) + \left(\sqrt[n]{b} - 1\right)\right).\end{aligned}$$

Pour obtenir le résultat demandé, il suffit de multiplier ces inégalités par n et d'appliquer le résultat donné en **II.5.4 (a)**.

II.5.13. On note d'abord que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = a > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$. On suppose maintenant que $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont deux suites dont les termes sont différents de 1. D'après **II.5.5**,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\ln a_n}{n(a_n - 1)} = 1. \qquad (*)$$

L'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = a > 0$ et la continuité de la fonction logarithme impliquent $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln a_n = \ln a$. Donc, d'après $(*)$,

$$\lim_{n\to+\infty} n(a_n - 1) = \lim_{n\to+\infty} n\ln a_n = \ln a.$$

On remarque que ces égalités restent correctes si $a_n = 1$. Enfin,

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(pa_n + qb_n) = \lim_{n\to+\infty} n\left(p(a_n - 1) + q(b_n - 1)\right) = \ln a^p b^q.$$

II.5.14. On a $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n}(a_n - a_{n-1})$. En conséquence,

$$\begin{aligned}a_n &= a + (b - a) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a + (b - a)\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)!}\right).\end{aligned}$$

Donc, d'après **II.5.7**, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = b - (b - a)e^{-1}$.

II.5.15. On considère la suite $\{b_n\}$ définie par $b_n = \frac{a_n}{n!}$ et on applique la même méthode que dans la solution du problème précédent pour conclure que $a_n = n!$.

II.5.16. Comme dans la solution de **II.5.14**, $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2n}(a_n - a_{n-1})$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2b - a - 2(b-a)e^{-1/2}$.

II.5.17.

(a) On a

$$\begin{aligned} a_n &= 3 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \frac{1}{(k+1)!} \\ &= 3 \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-k}{k(k+1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+1)!} \\ &= 3 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kk!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!}. \end{aligned}$$

Donc, d'après **II.5.6**, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e$.

(b) D'après (a) et **II.5.6**, on a

$$0 < a_n - e < \frac{1}{(n+1)(n+1)!}.$$

Remarque. On notera ici que cette suite converge plus vite vers e que la suite considérée au **problème II.5.6**.

II.5.18. Il découle de **II.5.6** que $e = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} + r_n$, où $\lim\limits_{n\to+\infty} n!r_n = 0$. De plus,

$$\frac{1}{n+1} < n!r_n < \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} n\sin(2\pi n!e) &= \lim_{n\to+\infty} n\sin(2\pi n!r_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} n2\pi n!r_n \frac{\sin(2\pi n!r_n)}{2\pi n!r_n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} n2\pi n!r_n = 2\pi, \end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de (1).

II.5.19. On va montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n = 0$. Par hypothèse, pour $M > 0$ choisi arbitrairement, on a $a_n > M$ si n est suffisamment grand. Donc,

$$0 < 1 - \frac{a_n}{n} < 1 - \frac{M}{n}$$

et

$$0 < \left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n < \left(1-\frac{M}{n}\right)^n .$$

On obtient donc, d'après **II.4.12**, **II.4.14** et **II.5.2**,

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to+\infty}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n \leqslant e^{-M}.$$

En faisant tendre M vers $+\infty$, on a

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to+\infty}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n \leqslant 0$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n = 0$, comme annoncé.

II.5.20. On va prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{b_n}{n}\right)^n = +\infty$. Étant donné $M > 0$, on a $b_n > M$ pour n suffisamment grand. On obtient donc, comme dans la solution du problème précédent,

$$\varliminf_{n\to+\infty}\left(1+\frac{b_n}{n}\right)^n \geqslant \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{M}{n}\right)^n = e^M$$

et, M pouvant être choisi arbitrairement grand, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{b_n}{n}\right)^n = +\infty$.

II.5.21. On voit facilement que la suite $\{a_n\}$ est décroissante et tend vers 0.

(a) On a $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1-a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Donc, d'après **II.3.14**, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{na_n} = 1$.

(b) D'après (a),

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n(1-na_n)}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(\frac{1}{na_n}-1\right)na_n}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{a_n}-n}{\ln n} .$$

En utilisant le théorème de Stolz (voir **II.3.11**), on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{n(1-na_n)}{\ln n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}-1\right)}{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(\frac{1}{1-a_n}-1\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{na_n}{1-a_n}=1.
\end{aligned}$$

II.5.22. On voit facilement que la suite $\{a_n\}$ est décroissante et tend vers 0. De plus, une application de la règle de l'Hospital donne

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\frac{1}{3}\,.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}\right)=\frac{1}{3}\,.$$

On a alors, d'après le résultat du **problème II.3.14**, $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n^2=3$.

II.5.23. Clairement, la suite est croissante. On va montrer qu'elle diverge vers $+\infty$. On a

$$a_{n+1}^2=\left(a_n+\frac{1}{a_1+\ldots+a_n}\right)^2>\left(a_n+\frac{1}{na_n}\right)^2>a_n^2+\frac{2}{n}$$

et

$$a_{2n}^2-a_n^2>\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n-2}+\ldots+\frac{2}{n}>\frac{2n}{2n-1}>1.$$

La suite $\{a_n^2\}$ n'est donc pas une suite de Cauchy et, étant croissante, elle diverge vers $+\infty$. De plus,

$$1\leqslant\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1+\frac{1}{na_n}\,. \tag{$*$}$$

D'après le théorème de Stolz (voir **II.3.11**), on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^2}{2\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(a_{n+1}^2-a_n^2\right)}{2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\left(a_{n+1}^2-a_n^2\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}+\frac{1}{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}\right)=1,
\end{aligned}$$

car

$$0<\frac{n}{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}<\frac{1}{n}$$

et, de nouveau avec le théorème de Stolz,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{na_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n}{a_{n+1}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(n+1-n\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=1\end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de $(*)$. On a en effet

$$1\leqslant n+1-n\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant\frac{1+\frac{n+1}{na_n}}{1+\frac{1}{na_n}}$$

et, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{n+1}{na_n}}{1+\frac{1}{na_n}}=1.$$

II.5.24. On a l'inégalité $\operatorname{Arctan} x<x$ pour $x>0$ et la suite est donc décroissante. Elle est de plus minorée par 0, donc convergente vers une limite g vérifiant l'équation $g=\operatorname{Arctan} g$. D'où, $g=0$.

II.5.25. On remarque que tous les termes de la suite $\{a_n\}$ appartiennent à l'intervalle $]0\,,1[$. On note x_0 l'unique racine de l'équation $x=\cos x$. Si $x\geqslant x_0$, alors $\cos(\cos x)<x$. La fonction $f(x)=\cos(\cos x)-x$ est décroissante car $f'(x)=\sin x\sin(\cos x)-1<0$ pour $x\in\mathbb{R}$. Donc, pour $x>x_0$, $\cos(\cos x)-x<f(x_0)=0$. De même, si $x<x_0$, alors $\cos(\cos x)>x$.

Supposons d'abord que $a_1>x_0$. Ce qui précède implique $a_3=\cos(\cos a_1)<a_1$. Puisque la fonction $y=\cos(\cos x)$ est croissante sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $a_5<a_3$ et on montre par récurrence que la suite $\{a_{2n-1}\}$ est décroissante. D'autre part, $a_2=\cos a_1<\cos x_0=x_0$, ce qui implique $a_4=\cos(\cos a_2)>a_2$ et donc que $\{a_{2n}\}$ est croissante.

On peut appliquer des arguments semblables dans le cas où $0<a_1<x_0$. Si $a_1=x_0$, tous les termes de la suite $\{a_n\}$ sont alors égaux à x_0. Dans tous les cas, les suites $\{a_{2n-1}\}$ et $\{a_{2n}\}$ tendent toutes les deux vers l'unique racine de l'équation $\cos(\cos x)=x$ et on voit facilement que cette racine est x_0.

II.5.26. On obtient, par récurrence,

$$a_n=1-(-1)^{n-1}\underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin 1)\ldots)}_{(n-1)\text{ fois}},\qquad n>1.$$

Donc,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n-1-\sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin 1)\ldots)}_{(k-1)\text{ fois}}}{n}.$$

On montre maintenant que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin 1)\ldots)}_{(k-1)\text{ fois}}}{n} = 0. \qquad (*)$$

Si $n-1$ est pair, alors

$$\frac{-\sin 1+\underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin 1)\ldots)}_{(n-1)\text{ fois}}}{n} < \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin 1)\ldots)}_{(k-1)\text{ fois}}}{n} < 0.$$

Évidemment, $(*)$ est aussi vérifiée si $n-1$ est impair. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$.

II.5.27. Clairement, $a_n \in \left]n\pi\,, n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty}\tan\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-a_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\tan a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n} = 0.$$

Par continuité de la fonction Arctan, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-a_n\right) = 0$. D'où,

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n-\pi) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-a_n-\left(\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi-a_{n+1}\right)\right) = 0.$$

En conséquence, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n) = \pi$.

II.5.28. On remarque que l'on peut supposer, sans perte de généralité, que $|a_1| \leqslant \frac{\pi}{2}$. En effet, si ce n'est pas le cas, alors par hypothèse, $|a_2| \leqslant \frac{\pi}{2}$. On considère d'abord le cas où $0 < a \leqslant 1$ et $0 < a_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$. On a alors $a_{n+1} = a\sin a_n < a_n$. Ceci implique que $\{a_n\}$ est décroissante et elle converge car elle est bornée. Sa limite est égale à 0 qui est l'unique racine de l'équation $x = a\sin x$, $0 < a \leqslant 1$. On suppose maintenant que $1 < a \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $0 < a_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$. L'équation $x = a\sin x$ admet alors deux racines positives, 0 et $x_0 > 0$. Si $a_1 < x_0$, $\{a_n\}$ est alors croissante et majorée par x_0. En effet, $a_2 = a\sin a_1 > a_1$. De plus, $a_2 = a\sin a_1 < a\sin x_0 = x_0$ et, par récurrence, $a_n < a_{n+1} < x_0$. De même, $x_0 < a_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$ implique $a_n > a_{n+1} > x_0$.

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$ pour $1 < a \leqslant \frac{\pi}{2}$. Si $-\frac{\pi}{2} \leqslant a < 0$, $a_1 > 0$, on considère alors la suite $\{b_n\}$ définie par $b_1 = a_1$ et $b_{n+1} = -a \sin b_n$. Évidemment, $b_n = (-1)^{n-1} a_n$. Il s'ensuit que, dans le cas où $0 < a_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 && \text{si } |a| \leqslant 1,\\
&\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0 && \text{si } 1 < a \leqslant \frac{\pi}{2},\\
&\lim_{n\to+\infty} a_n \text{ n'existe pas} && \text{si } -\frac{\pi}{2} \leqslant a < -1.
\end{aligned}$$

Si $-\frac{\pi}{2} \leqslant a_1 < 0$, on peut alors considérer la suite définie par $b_1 = -a_1$ et $b_{n+1} = a \sin b_n$ et appliquer ce qui précède. Si $a_1 = 0$, tous les termes de la suite sont égaux à 0.

II.5.29.

(a) On note que $a_n > 0$ et $a_{n+1} = \ln(1 + a_n) < a_n$. La suite converge donc vers une limite g vérifiant $g = \ln(1 + g)$, d'où $g = 0$. On montre maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n = 2$. On peut prouver en dérivant que (voir aussi **II.5.3**)

$$\frac{2x}{2+x} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \text{pour } x > 0.$$

Ceci implique

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n\left(1 - \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}a_n^2\right)} < \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}. \tag{$*$}$$

On voit, en posant

$$b_n = -\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n\left(1 - \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}a_n^2\right)},$$

que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{2}$. On obtient en sommant chaque membre de $(*)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} + b_1 + b_2 + \ldots + b_n &< \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\\
&< \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{1}{(n+1)a_1} + \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n+1} < \frac{1}{(n+1)a_{n+1}} < \frac{1}{(n+1)a_1} + \frac{n}{2(n+1)}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)a_{n+1}} = \frac{1}{2}$.

(b) On a

$$\lim_{n\to+\infty}(na_n-2)\frac{n}{\ln n}=\lim_{n\to+\infty}na_n\frac{n-\frac{2}{a_n}}{\ln n}. \tag{1}$$

On va utiliser le théorème de Stolz (voir **II.3.11**) pour prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-\frac{2}{a_n}}{\ln n}$ existe. On a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-\frac{2}{a_n}}{\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{a_{n+1}}+\frac{2}{a_n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, on voit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-\frac{2}{a_n}}{\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(2a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1})}{a_n^2}. \tag{2}$$

Il suffit maintenant de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1}}{a_n^3}$ existe. Pour cela, on utilise l'inégalité (qui peut être prouvée par dérivation)

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},\quad x>0.$$

On a donc

$$\frac{1}{6}a_n^3-\frac{1}{6}a_n^4-\frac{1}{4}a_n^5<2a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1}<\frac{1}{6}a_n^3-\frac{1}{3}a_n^4.$$

Ceci donne

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1}}{a_n^3}=\frac{1}{6}.$$

En combinant ce résultat à (1) et (2), on voit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(na_n-2)}{\ln n}=\frac{2}{3}$.

II.5.30. On pose $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ et $F(x)=f(f(x))-x$. On montre d'abord que $F'(x)<0$ pour $x>0$. On a

$$F'(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^x+x}\ln^2 4-1.$$

Donc,

$$F'(x)<0\quad\text{si et seulement si}\quad\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^x+x}<\frac{1}{\ln^2 4}.$$

On vérifie simplement que la fonction dans le premier membre de la dernière inégalité atteint sa valeur maximale de $\frac{1}{e\ln 4}$ en $x=\frac{\ln\ln 4}{\ln 4}$. Ceci implique

$F'(x) < 0$ et F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Donc, $F(x) > 0$ pour $0 < x < \frac{1}{2}$ et $F(x) < 0$ pour $x > \frac{1}{2}$. En conséquence,

$$f(f(x)) < x \quad \text{pour} \quad x > \frac{1}{2}.$$

Puisque $a_2 = 1 > \frac{1}{2}$, il s'ensuit que $a_4 = f(f(a_2)) < a_2$ et on trouve par récurrence que $\{a_{2n}\}$ est strictement décroissante. Elle tend donc vers une limite g_1 vérifiant $f(f(g_1)) = g_1$. La convergence de $\{a_{2n-1}\}$ vers une limite g_2 vérifiant $f(f(g_2)) = g_2$ peut se prouver de la même façon. Clairement, $g_1 = g_2 = \frac{1}{2}$.

II.5.31. On remarque d'abord que $0 < a_n < 2$ pour $n \geqslant 2$. Si $a_n > 1$, alors $a_{n+1} < 1$. On pose $f(x) = 2^{1-x}$ et $F(x) = f(f(x)) - x$. On peut montrer que $F'(x) < 0$ pour $0 < x < 2$. Donc,

$$\begin{aligned} F(x) < F(1) = 0 \quad &\text{pour} \quad 1 < x < 2, \\ F(x) > F(1) = 0 \quad &\text{pour} \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Ensuite, comme dans la solution du problème précédent, on montre que si $a_1 < 1$, la suite $\{a_{2n}\}$ est alors décroissante et la suite $\{a_{2n-1}\}$ croissante et toutes les deux tendent vers la même limite 1. Des considérations semblables s'appliquent au cas $a_1 > 1$.

II.5.32. On observe d'abord que tous les termes de la suite se trouvent dans l'intervalle $]1\,,2[$. Puisque la fonction $F(x) = 2^{\frac{x}{2}} - x$ est décroissante sur cet intervalle, $F(x) > F(2) = 0$ pour $x \in\,]1\,,2[$. La suite est donc croissante et sa limite g vérifie $g = 2^{\frac{g}{2}}$, d'où $g = 2$.

II.5.33. On applique **II.3.14** à la suite $\{a_n + a_{n-1}\}$ pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n+a_{n-1}}{n} = 0$. On considère alors la suite $b_n = (-1)^n a_n$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - b_{n-2}) = 0$, on voit que

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n + b_{n-1}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n}.$$

II.5.34. D'après le théorème de Stolz (voir **II.3.11**), on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_{n+1}} - \ln \frac{1}{a_n}}{\ln(n+1) - \ln n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{-n \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}}{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\
&= - \lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}\,.
\end{aligned}$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = g$ est finie, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = 0$. Le résultat demandé découle alors des inégalités

$$n \frac{\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1}{1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1} \leqslant n \ln \left(1 + \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)\right) \leqslant n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right).$$

Si $g = +\infty$, l'inégalité de droite montre alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = +\infty$. Enfin, si $g = -\infty$, pour tout $M > 0$, il existe alors n_0 tel que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{M}{n} + 1$ pour $n > n_0$. Donc,

$$n \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} > \ln \left(1 + \frac{M}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$$

et, M pouvant être choisi arbitrairement grand, on voit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = -\infty$.

II.5.35. Par définition des deux suites, on a

$$a_{n+1} + b_{n+1} = (a_1 + b_1)(1 - (a_n + b_n)) + (a_n + b_n).$$

On pose $d_n = a_n + b_n$. On a alors $d_{n+1} = d_1(1 - d_n) + d_n$ et on montre par récurrence que $d_n = 1 - (1 - d_1)^n$. De même,

$$a_n = \frac{a_1}{d_1} (1 - (1 - d_1)^n) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{b_1}{d_1} (1 - (1 - d_1)^n)\,.$$

Puisque $|1 - d_1| < 1$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{a_1}{a_1 + b_1} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{b_1}{a_1 + b_1}\,.$$

II.5.36. On définit la suite $\{b_n\}$ en posant $b_n = aa_n$. On a alors

$$b_{n+1} = b_n(2 - b_n) = -(b_n - 1)^2 + 1.$$

Donc, $b_{n+1} - 1 = -(b_n - 1)^2$. Clairement, la suite $\{a_n\}$ converge si et seulement si $\{b_n - 1\}$ converge aussi ou, dit autrement, lorsque $|b_1 - 1| = |aa_1 - 1| \leqslant 1$. De plus, si $a_1 = \frac{2}{a}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et si $0 < aa_1 < 2$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{a}$.

II.5.37. Le résultat s'obtient comme cas particulier du **problème II.5.38**.

II.5.38. On peut montrer que la fonction f est continue en $(a, a, \dots, a)$ et $f(a, a, \dots, a) = a$. On définit la suite $\{b_n\}$ en posant

$$\begin{aligned} &b_1 = b_2 = \ldots = b_k = \min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}, \\ &b_n = f(b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_{n-k}) \quad \text{pour } n > k. \end{aligned}$$

On note que $\{b_n\}$ est strictement croissante et majorée par a si $\min\{a_1, a_2, \dots, a_k\} < a$. De même, si $\min\{a_1, a_2, \dots, a_k\} > a$, alors $\{b_n\}$ est strictement décroissante et minorée par a. Dans les deux cas, la suite est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$. De plus, la monotonie de f par rapport à chacune de ses variables implique $a_n \leqslant b_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On définit alors la suite $\{c_n\}$ en posant

$$\begin{aligned} &c_1 = c_2 = \ldots = c_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}, \\ &c_n = f(c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_{n-k}) \quad \text{pour } n > k. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = a$ et $c_n \leqslant a_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Finalement, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

II.5.39. On a $a_3 = a_2 e^{a_2 - a_1}$, $a_4 = a_3 e^{a_3 - a_2} = a_2 e^{a_3 - a_1}$ et, par récurrence, $a_{n+1} = a_2 e^{a_n - a_1}$ pour $n \geqslant 2$. Supposons que g soit la limite de la suite. On a alors

$$\frac{e^{a_1}}{a_2} g = e^g \tag{$*$}$$

Si $\frac{e^{a_1}}{a_2} = e$, l'équation $(*)$ admet alors une unique solution $g = 1$. Si $\frac{e^{a_1}}{a_2} > e$, cette équation admet deux solutions et si $0 < \frac{e^{a_1}}{a_2} < e$, elle n'a pas de solution. On considère d'abord le cas où $0 < \frac{e^{a_1}}{a_2} < e$. La suite $\{a_n\}$ diverge car dans ce cas, $(*)$ n'a pas de solution. On montre de plus que la suite $\{a_n\}$ est croissante et diverge donc vers $+\infty$.

On considère maintenant le cas où $\frac{e^{a_1}}{a_2} = e$. On a alors $a_2 = e^{a_1 - 1} \geqslant a_1$ et, par récurrence, $a_{n+1} \geqslant a_n$. De plus, si $a_1 \leqslant 1$, on peut aussi montrer par récurrence que $a_n \leqslant 1$. Donc, dans un tel cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$. Si $a_1 > 1$, $\{a_n\}$ est alors croissante et diverge vers $+\infty$.

On considère enfin le cas où $\frac{e^{a_1}}{a_2} > e$. L'équation $(*)$ admet deux solutions que l'on note g_1 et g_2, en prenant $g_1 < g_2$. Supposons que $a_1 < g_1$. On a alors

$$e^{a_1} - \frac{e^{a_1}}{a_2}\, a_1 > 0$$

ou, dit autrement, $a_2 > a_1$. Il s'ensuit, par récurrence, que $\{a_n\}$ est croissante et majorée par g_1 qui est sa limite. Si $g_1 < a_1 < g_2$, alors $\{a_n\}$ est décroissante et minorée par g_1 qui est aussi sa limite. Si $a_1 = g_1$ ou $a_1 = g_2$, la suite est alors constante. Finalement, si $a_1 > g_2$, la suite croît vers $+\infty$.

II.5.40. (Ce problème et sa solution sont dus à L. Euler dans un cas plus général. Voir aussi [13].) On montre, en dérivant, que $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$ pour $x > 0$. Donc, $\frac{a_n}{e} \geqslant \ln a_n = a_{n-1} \ln a$ $(n > 1)$ et, en conséquence, $a_n \geqslant a_{n-1} \ln a^e$. Si $a > e^{\frac{1}{e}}$, la suite $\{a_n\}$ est donc croissante. On montre que, dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. On a $a_{n+1} - a_n = a^{a_n} - a_n$. On considère donc, pour $a > e^{\frac{1}{e}}$, la fonction $g(x) = a^x - x$. Cette fonction atteint son minimum en $x_0 = -\frac{\ln(\ln a)}{\ln a} < e$. Il s'ensuit que $a^x - x > \frac{1+\ln(\ln a)}{\ln a} > 0$ et, en conséquence, $a_{n+1} - a_n > \frac{1+\ln(\ln a)}{\ln a} > 0$. La différence entre deux termes consécutifs étant supérieure à un nombre strictement positif donné, la suite diverge vers $+\infty$.

On considère maintenant le cas où $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$. On montre d'abord que, dans ce cas, l'équation $a^x - x = 0$ admet deux solutions positives. La dérivée de la fonction $g(x) = a^x - x$ s'annule au point $x_0 > 0$ tel que $a^{x_0} = \frac{1}{\ln a}$. La fonction g atteint sa valeur minimale en x_0 et $g(x_0) = a^{x_0} - x_0 = \frac{1}{\ln a} - x_0 = \frac{1 - x_0 \ln a}{\ln a} < 0$ car, si $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, alors $\frac{1}{\ln a} > e$. La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}$, elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. L'équation $a^x = x$ admet donc une racine dans l'intervalle $]0\,, x_0[$ et une autre racine dans l'intervalle $]x_0\,, +\infty[$. On note ces racines respectivement α et β et on remarque que $g(e) = a^e - e < \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e - e = 0$ ce qui implique que le nombre e se trouve entre α et β.

Si $x > \beta$, alors $a^x > a^\beta = \beta$ et $g(x) > 0$. Dans ce cas, la suite $\{a_n\}$ est croissante et minorée par β donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Si $\alpha < x < \beta$, alors $1 < a^x < \beta$ et $g(x) < 0$. La suite $\{a_n\}$ est donc bornée et décroissante. Elle converge vers α.

Si $x = \alpha$ ou $x = \beta$, la suite est constante.

Si maintenant $0 < x < \alpha$, alors $1 < a^x < \alpha$ et $g(x) > 0$. La suite croît donc vers α.

Finalement, si $a = e^{\frac{1}{e}}$, le nombre e est alors l'unique solution de l'équation $a^x = x$ et la fonction g atteint sa valeur minimale de 0 en e. Ainsi, pour $0 < x \leqslant e$, on obtient $0 < a^x \leqslant e$ et $g(x) \geqslant g(e) = 0$. Ceci implique que la suite $\{a_n\}$ est croissante et que sa limite est égale à e. Si $x > e$, la suite croît vers $+\infty$.

On résume les résultats comme suit :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > e^{\frac{1}{e}} \text{ et } x > 0, \\ +\infty & \text{si } 1 < a < e^{\frac{1}{e}} \text{ et } x > \beta, \\ \beta & \text{si } 1 < a < e^{\frac{1}{e}} \text{ et } x = \beta, \\ \alpha & \text{si } 1 < a < e^{\frac{1}{e}} \text{ et } 0 < x < \beta, \\ +\infty & \text{si } a = e^{\frac{1}{e}} \text{ et } x > e, \\ e & \text{si } a = e^{\frac{1}{e}} \text{ et } 0 < x \leqslant e. \end{cases}$$

II.5.41. On peut prouver l'égalité par récurrence. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$ (on comparera avec la solution de **II.1.16**).

II.5.42. [20]. On note d'abord que

$$a_n \leqslant \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ racines}} < 2.$$

On voit que si $\varepsilon_1 = 0$, tous les termes de la suite $\{a_n\}$ sont alors égaux à 0. On suppose maintenant que $\varepsilon_1 \neq 0$ et on montre par récurrence que l'égalité donnée est bien vérifiée. Elle est évidente pour $n = 1$. On suppose donc que

$$a_n = \varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\ldots+\varepsilon_n\sqrt{2}}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k}{2^{k-1}}\right).$$

On a alors

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k}{2^{k-2}}\right) &= -2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k}{2^{k-1}}\right) \\ = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k}{2^{k-1}}\right) &= 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k}{2^{k-1}}\right) - 2, \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration de l'égalité. On a alors, par continuité de la fonction sinus,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k}{2^{k-1}}\right).$$

II.5.43. On montre par récurrence que

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \ldots + \operatorname{Arctan}\frac{1}{2n^2} = \operatorname{Arctan}\frac{n}{n+1}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \ldots + \operatorname{Arctan}\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

II.5.44. On a

$$\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) = \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n} - \pi n\right) = \sin^2\frac{\pi}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

II.5.45. On montre par récurrence que la suite est croissante et majorée, par exemple par 3. Il s'agit donc d'une suite convergente dont la limite g vérifie $g = \sqrt{2+\sqrt{3+g}}$ et $g \in \,]2\,,3[$.

II.5.46. [13]. On a

$$\begin{aligned}3 = \sqrt{1+2\times 4} = \sqrt{1+2\sqrt{16}} &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}}\\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}},\end{aligned}$$

et, par récurrence,

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}} = 3. \tag{1}$$

Donc,

$$3 \geqslant \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n+1}}}}}. \tag{2}$$

On va utiliser l'inégalité suivante (facile à prouver) :

$$\sqrt{1+x\alpha} \leqslant \sqrt{\alpha}\sqrt{1+x}, \quad x \geqslant 0,\ \alpha > 1. \tag{3}$$

D'après (3), avec $x = n$ et $\alpha = n+2$,

$$\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}} < \sqrt{n+2}\sqrt{1+n}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}} &< \sqrt{1+\sqrt{n+2}\,(n-1)\,\sqrt{1+n}}\\ &< (n+2)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n+1}},\end{aligned}$$

la dernière inégalité se déduisant de (3) en prenant $\alpha = \sqrt{n+2}$. En répétant n fois cet argument dans (1), on obtient

$$3 \leqslant (n+2)^{2^{-n}}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n+1}}}}}. \tag{4}$$

La combinaison de (2) et (4) donne

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n+1}}}}} = 3.$$

II.5.47. L'équation $x^2 + x - a = 0$, $a > 0$, admet deux racines α et β avec $\alpha > 0 > \beta$. On a de plus

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n = \frac{a}{a_n} - 1 - \alpha = \frac{a - a_n - \alpha a_n}{a_n}\\ &= \frac{a - (1+\alpha)(a_n - \alpha) - \alpha(1+\alpha)}{a_n}\\ &= \frac{-(1+\alpha)(a_n-\alpha)}{a_n}.\end{aligned}$$

On a $a_{n+1} - \alpha = \beta\frac{a_n-\alpha}{a_n}$ car $\alpha + \beta = -1$. De même, $a_{n+1} - \beta = \alpha\frac{a_n-\beta}{a_n}$. Donc,

$$\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$$

et, par récurrence,

$$\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}\frac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}.$$

Puisque $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{\alpha}{1+\alpha} < 1$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \beta$.

II.5.48. Soit α et β les racines de l'équation $x^2+x-a=0$, $a>0$, $\alpha>0>\beta$. De la même façon que dans la solution du problème précédent, on obtient

$$\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\alpha$.

II.5.49. Pour tout entier k strictement positif, on a

$$|a_{n+1+k}-a_{n+1}|=\left|\frac{1}{1+a_{n+k}}-\frac{1}{1+a_n}\right|=\frac{|a_{n+k}-a_n|}{(1+a_{n+k})(1+a_n)}\leqslant\frac{1}{4}\left|a_{n+k}-a_n\right|.$$

On obtient alors, par récurrence,

$$|a_{n+1+k}-a_{n+1}|\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^n|a_{k+1}-a_1|.$$

De plus,

$$\begin{aligned}|a_{k+1}-a_1|&\leqslant|a_{k+1}-a_k|+|a_k-a_{k-1}|+\ldots+|a_2-a_1|\\&\leqslant\frac{1}{1-\frac{1}{4}}|a_2-a_1|=\frac{4}{3}|a_2-a_1|.\end{aligned}$$

La suite $\{a_n\}$ est donc une suite de Cauchy. Sa limite est égale à $\sqrt{2}$.

II.5.50. On peut procéder comme dans la solution du problème précédent et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1+\sqrt{2}$.

II.5.51. On pose $f(x)=\frac{a}{2+x}$ pour $x>0$ et $F(x)=f(f(x))$. On a $F'(x)>0$ pour $x>0$. On vérifie facilement que $a_1<a_3$ et $a_4<a_2$. De plus, puisque F est strictement croissante, on voit que la suite $\{a_{2n}\}$ est strictement décroissante et la suite $\{a_{2n+1}\}$ est strictement croissante. La suite $\{a_n\}$ est bornée et les suites $\{a_{2n}\}$ et $\{a_{2n+1}\}$ convergent. On peut vérifier qu'elles ont la même limite $\sqrt{1+a}-1$.

II.5.52. Si $a_1\leqslant 0$, alors $a_2=1-a_1>1$ et $a_3=a_2-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$. Par récurrence, $a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2^{n-1}}$ pour $n\geqslant 2$. En conséquence,

$$a_{n+1}=-\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}+\ldots+\frac{1}{2}\right)+a_2$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -a_1$ si $a_1 \leqslant 0$. Si maintenant $a_1 \in \,]0\,,2[$, alors $a_2 \in [0\,,1[$ et on voit par récurrence que $a_{n+1} \in \left[0\,,\frac{1}{2^{n-1}}\right]$, ce qui implique dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Enfin, si $a_1 \geqslant 2$, alors $a_2 = a_1 - 1 \geqslant 1$. On a par récurrence $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2^{n-1}}$ et, en conséquence, comme dans le premier cas, on montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a_1 - 2$.

II.5.53.

(a) On a

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{ja^j}{n-j} &= \frac{a}{n-1}+\frac{2a^2}{n-2}+\frac{3a^3}{n-3}+\ldots+\frac{(n-1)a^{n-1}}{1}\\ &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{a}{1}+\frac{2(n-1)a^2}{n-2}+\frac{3(n-1)a^3}{n-3}+\ldots+\frac{(n-1)^2a^{n-1}}{1}\right).\end{aligned}$$

Puisque

$$j\frac{n-1}{n-j} = j\left(\frac{n-j}{n-j}+\frac{j-1}{n-j}\right) \leqslant j(1+j-1) = j^2,$$

on obtient

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{ja^j}{n-j} \leqslant \frac{a+2^2a^2+3^2a^3+\ldots+(n-1)^2a^{n-1}}{n-1}.$$

Il suffit alors de voir que, d'après le résultat du **problème II.3.2**,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a+2^2a^2+3^2a^3+\ldots+(n-1)^2a^{n-1}}{n-1} = 0.$$

(b) On observe que

$$na^n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ja^j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{n}{j}\,a^{n-j} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n-k}\,a^k = \sum_{k=0}^{n-1}a^k+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{ka^k}{n-k}$$

et on applique (a).

(c) On applique (b) avec $a = \frac{1}{b}$.

II.5.54. Puisque l'on a $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ pour $x > 0$, on voit que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^3}{6(n+k)^3} < \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{\pi}{n+k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n+k}\,.$$

On vérifie facilement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\pi^3}{6(n+k)^3} = 0$. De plus, d'après **II.5.8 (a)**, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n+k} = \pi \ln 2$. La limite est donc égale à $\pi \ln 2$.

II.5.55.

(a) Soit $a_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{cn^3}\right)$. On obtient, avec l'inégalité $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ (voir **II.5.3**),

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{cn^3 + k^2} < \ln a_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{cn^3}\,.$$

On a donc, avec l'égalité $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\left(cn^3 + n^2\right)} < \ln a_n < \frac{n(n+1)(2n+1)}{6cn^3}\,.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e^{\frac{1}{3c}}$.

(b) On peut montrer que l'inégalité $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ est aussi vérifiée si $-1 < x < 0$. On obtient donc, comme dans la démonstration de (a),

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k^2}{cn^3}\right) = e^{-\frac{1}{3c}}.$$

II.5.56. Puisque l'on a $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}$ pour $x > 0$, on voit que

$$\frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!} \frac{n!}{(n\sqrt{n})^n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k^2}{6n^3}\right) < \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n\sqrt{n}} \tag{1}$$

et

$$\frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!} \frac{n!}{(n\sqrt{n})^n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k^2}{6n^3} + \frac{k^4}{5!n^6}\right). \tag{2}$$

Il découle de (1) et du résultat du problème précédent que la limite est supérieure ou égale à $e^{-\frac{1}{18}}$. On montre maintenant que

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{6n^3}+\frac{k^4}{5!n^6}\right)\leqslant e^{-\frac{1}{18}}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{6n^3}+\frac{k^4}{5!n^6}\right)&<\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k^2}{6n^3}+\frac{k^4}{5!n^6}\right)\\&=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{36n^3}+\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30\times 5!n^6}.\end{aligned}$$

Finalement, d'après (2) et le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!}\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n\sqrt{n}}=e^{-\frac{1}{18}}.$$

II.5.57. On prouve d'abord que $a_n=\frac{n+1}{2n}\,a_{n-1}+1$, $n\geqslant 2$. On a

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-1-k)!(n-k)}{(n-1)!n}+1\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\,\frac{(n-1-k)!k!}{(n-1)!}+1\\&=a_{n-1}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\,\frac{1}{\binom{n-1}{k}}+1.\end{aligned}\tag{$*$}$$

De plus,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\,\frac{1}{\binom{n-1}{k}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-1-k}{n}\,\frac{1}{\binom{n-1}{k}}=\frac{n-1}{n}\,a_{n-1}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\,\frac{1}{\binom{n-1}{k}}.$$

On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\,\frac{1}{\binom{n-1}{k}}=\frac{n-1}{2n}\,a_{n-1}.$$

Finalement, d'après $(*)$, $a_n=a_{n-1}-\frac{n-1}{2n}\,a_{n-1}+1=\frac{n+1}{2n}\,a_{n-1}+1$, ce qui démontre notre première proposition. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=2$.

II.5.58. Si $\alpha = 0$, alors évidemment $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Si $\alpha > 0$, alors $0 < a_n < 1 - \frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha}$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. On suppose maintenant que $\alpha < 0$. On a alors

$$a_n = (-1)^{n-1}\left(n^{-\alpha} - 1\right)\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{-\alpha} - 1\right)\cdots\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-\alpha} - 1\right).$$

On obtient donc, si on prend $\alpha = -1$, la suite divergente $a_n = (-1)^{n-1}$. Si on prend $\alpha < -1$, on a

$$\left(\left(\frac{n}{p}\right)^{-\alpha} - 1\right)\left(\left(\frac{n}{n-p}\right)^{-\alpha} - 1\right) > \left(\frac{n}{p} - 1\right)\left(\frac{n}{n-p} - 1\right) = 1$$

pour $1 \leqslant p \leqslant n$. De plus, $\left(\frac{n}{\frac{n}{2}}\right)^{-\alpha} - 1 > 2 - 1 = 1$. Donc,

$$|a_n| \geqslant \left(n^{-\alpha} - 1\right)\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-\alpha} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

De même, on peut voir que si $-1 < \alpha < 0$, alors

$$|a_n| \leqslant \left(n^{-\alpha} - 1\right)\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-\alpha} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

II.5.59. On a $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\sqrt{3}\right)^k 2^{n-k}$. Si on regroupe les termes respectivement d'indices pairs et d'indices impairs, on peut écrire

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = A_n + \sqrt{3}B_n \quad \text{et} \quad \left(2-\sqrt{3}\right)^n = A_n - \sqrt{3}B_n.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty}\left(A_n + \sqrt{3}B_n\right) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(A_n - \sqrt{3}B_n\right) = 0$. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{3}B_n}{A_n} = 1.$$

Puisque que les A_n sont entiers et $\frac{\sqrt{3}B_n}{A_n} < 1$, il s'ensuit que $\left[\sqrt{3}B_n\right] = A_n - 1$ pour n suffisamment grand. En conséquence,

$$\left\{\sqrt{3}B_n\right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \left\{A_n + \sqrt{3}B_n\right\} = \left\{\sqrt{3}B_n\right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

II.5.60. La suite $\{S_n\}$ est croissante. Si elle est majorée, elle converge et on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0.$$

On suppose maintenant que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Par hypothèse,

$$S_{n+1}a_{n+1} + a_n \leqslant S_n a_n + a_{n-1},$$

d'où $S_n a_n + a_{n-1} \leqslant S_2 a_2 + a_1$. Donc,

$$a_n \leqslant a_n + \frac{a_{n-1}}{S_n} \leqslant \frac{S_2 a_2 + a_1}{S_n}.$$

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

II.5.61. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 strictement positif tel que $a_n < \varepsilon n$ pour $n > n_0$. Donc,

$$\begin{aligned}\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n^2} &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n_0}^2}{n^2} + \frac{a_{n_0+1}^2 + \ldots + a_n^2}{n^2} \\ &\leqslant \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n_0}^2}{n^2} + \frac{n\varepsilon(a_{n_0+1} + \ldots + a_n)}{n^2}.\end{aligned}$$

D'après **II.4.14** et **II.4.19**,

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n^2} \leqslant \varepsilon \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Ceci implique évidemment $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n^2} = 0$.

II.5.62. On applique le théorème de Toeplitz (voir **II.3.1**). On pose

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n, \quad C_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$$

et

$$d_{n,k} = \frac{a_{n-k+1}B_k}{a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \ldots + a_n B_1}.$$

On montre que les nombres strictement positifs $d_{n,k}$ vérifient les conditions (i) et (ii) de **II.3.1** (voir aussi **II.3.3 (a)**). Pour un k fixé, on a

$$d_{n,k} \leqslant \frac{a_{n-k+1}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-k+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Clairement, $\sum\limits_{k=1}^{n} d_{n,k} = 1$. On remarque aussi que

$$\frac{c_n}{C_n} = \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \ldots + a_n B_1} = d_{n,1}\frac{b_1}{B_1} + d_{n,2}\frac{b_2}{B_2} + \ldots + d_{n,n}\frac{b_n}{B_n}.$$

Finalement, d'après le théorème de Toeplitz, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c_n}{C_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{B_n} = 0$.

II.5.63. On sait que $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ pour $x > 0$. On pose $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}$. On a alors $-\frac{1}{2} < \ln a_n < -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}$, ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln a_n = -\frac{1}{2}$. La limite de la suite est donc égale à $e^{-\frac{1}{2}}$.

II.5.64. On a $a_{n+1} - a_n > -\frac{1}{n^2} > -\frac{1}{n(n-1)} = -\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$ pour $n > 1$. On pose $b_n = a_n - \frac{1}{n-1}$. La suite $\{b_n\}$ est alors croissante et majorée donc convergente. La suite $\{a_n\}$ converge donc aussi.

II.5.65. Avec l'hypothèse $a_{n+1}\sqrt[2^n]{2} \geqslant a_n$, on voit que

$$a_{n+1}2^{-\frac{1}{2^n}} \geqslant a_n 2^{-\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

La suite $b_n = a_n 2^{-\frac{1}{2^{n-1}}}$ est donc croissante et bornée. Elle converge. Clairement, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

II.5.66. Soit $a \in \left]l\,,L\right[$. Supposons, contrairement à l'énoncé, que a ne soit pas une valeur d'adhérence de $\{a_n\}$. Il existe alors un voisinage de a ne contenant qu'un nombre fini de termes de la suite. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$l < a - \varepsilon < a < a + \varepsilon < L \quad \text{et} \quad a_n \notin [a-\varepsilon\,,a+\varepsilon] \text{ pour } n > n_1. \qquad (*)$$

Par hypothèse, $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ pour $n > n_2$. D'après **II.4.13 (b)**, on sait qu'il existe a_{n_k} tel que $a_{n_k} < l + \varepsilon < a$ pour $n_k > \max\{n_1, n_2\}$. Donc, $a_{n_k+1} \leqslant a_{n_k} + |a_{n_k+1} - a_{n_k}| < a + \varepsilon$. D'où, d'après $(*)$, $a_{n_k+1} < a - \varepsilon$. Il s'ensuit, d'après **II.4.12 (a)**, que $L \leqslant a - \varepsilon < L$, contradiction.

II.5.67. Soit $a \in \left]l\,,L\right[$. Supposons, contrairement à l'énoncé, que a ne soit pas une valeur d'adhérence de $\{a_n\}$. Il existe alors un voisinage de a ne contenant qu'un nombre fini de termes de la suite. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$l < a - \varepsilon < a < a + \varepsilon < L \quad \text{et} \quad a_n \notin [a-\varepsilon\,,a+\varepsilon] \text{ pour } n > n_1. \qquad (*)$$

Par hypothèse,

$$a_n - a_{n+1} < \alpha_n < \varepsilon \quad \text{pour } n > n_2. \qquad (**)$$

Il découle de **II.4.13 (a)** qu'il existe a_{n_k} tel que $a_{n_k} > L - \varepsilon > a$. D'après $(**)$, on obtient $a_{n_k+1} = a_{n_k} + (a_{n_k+1} - a_{n_k}) > a - \varepsilon$. Maintenant, d'après $(*)$, $a_{n_k+1} > a + \varepsilon$ pour $n_k > \max\{n_1, n_2\}$. Donc, d'après **II.4.12 (c)**, $l \geqslant a + \varepsilon > a > l$, contradiction.

II.5.68. On utilise le résultat prouvé dans la solution du problème précédent. La monotonie de la suite $\{a_n\}$ implique

$$\frac{a_{n+1}}{n+1+a_{n+1}} - \frac{a_n}{n+a_n} \geqslant \frac{-a_n}{(n+1+a_{n+1})(n+a_n)} \geqslant \frac{-1}{n}.$$

Donc, d'après le résultat du problème précédent, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite donnée est l'ensemble $[l\,,L]$, où

$$l = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n+a_n} \quad \text{et} \quad L = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n+a_n}.$$

II.5.69. On note que

$$\left|a_{2n+1} - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{2}\left|a_{2n} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1+a_{2n-1}}{2} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{4}\left|a_{2n-1} - \frac{1}{3}\right|.$$

Ceci implique que la suite a deux valeurs d'adhérence : $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

II.5.70. On sait, d'après **I.1.14**, que pour tout n positif, il existe un entier q_n strictement positif et un entier p_n tels que

$$\left|2\pi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Donc, $|p_n| < (2\pi+1)q_n$ et, en conséquence,

$$\left|\sqrt{|p_n|}\sin p_n\right| = \left|\sqrt{|p_n|}\sin(2\pi q_n - p_n)\right| \leqslant \left|\sqrt{|p_n|}\sin\frac{1}{q_n}\right| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi+1}}{\sqrt{q_n}}.$$

Puisque la suite $\{q_n\}$ n'est pas bornée, elle contient une sous-suite divergeant vers l'infini. Zéro est donc une valeur d'adhérence de la suite $\{a_n\}$.

II.5.71. Il suffit de prouver qu'il existe une sous-suite $\{a_{n_k}\}$ telle que

$$\left(\frac{n_k\,(a_1 + a_{n_k+1})}{(n_k+1)a_{n_k}}\right)^{n_k} \geqslant 1.$$

Supposons que la condition ci-dessus ne soit pas vérifiée. Il existe alors n_0 tel que

$$\frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n} < 1 \quad \text{si} \quad n \geqslant n_0.$$

Donc, $\frac{a_1}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+1} < \frac{a_n}{n}$ pour $n \geqslant n_0$. D'où,

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n-1}}{n-1} &< -\frac{a_1}{n}\,,\\ \frac{a_{n-1}}{n-1} - \frac{a_{n-2}}{n-2} &< -\frac{a_1}{n-1}\,,\\ &\vdots\\ \frac{a_{n_0+1}}{n_0+1} - \frac{a_{n_0}}{n_0} &< -\frac{a_1}{n_0+1}\,.\end{aligned}$$

En additionnant les inégalités précédentes, on obtient

$$\frac{a_n}{n} < \frac{a_{n_0}}{n_0} - a_1\left(\frac{1}{n_0+1} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Donc, d'après 2.2.50 (c), $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = -\infty$, ce qui est impossible puisque $a_n > 0$.

II.5.72. De la même façon que dans la démonstration de la solution du problème précédent, on prouve qu'il existe une sous-suite $\{a_{n_k}\}$ pour laquelle

$$\left(\frac{n_k\,(a_1 + a_{n_k+p})}{(n_k+p)a_{n_k}}\right)^{n_k} \geqslant 1.$$

II.5.73. Supposons d'abord que la proposition n'est pas vérifiée. Il existe alors n_0 tel que $n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < 1$ pour $n \geqslant n_0$. On peut réécrire l'inégalité sous la forme $\frac{1}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1}$. Ceci implique (voir la solution de **II.5.71**)

$$\frac{1}{n_0+1} + \ldots + \frac{1}{n} < \frac{a_{n_0}}{n_0} - \frac{a_n}{n}\,.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = -\infty$, ce qui contredit le fait que $\{a_n\}$ soit une suite strictement positive.

Pour prouver que 1 est la meilleure constante possible, on prend $a_n = n\ln n$. On a alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(n\frac{1+(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} - n\right) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+(n+1)\ln(n+1) - n\ln n}{\ln n}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\ln(n+1)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\ln n} = 1.\end{aligned}$$

II.5.74. On remarque que $a_n^2 = 1 + a_{n-1}$ et $a_1 = 1$. Clairement, la suite est strictement croissante. On montre par récurrence qu'elle est majorée par $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$. En effet, si $a_{n-1} < \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$, alors $a_n^2 = 1 + a_{n-1} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Donc, $a_n < \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ et $\{a_n\}$ converge vers $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

II.5.75. [20]. Clairement, la suite $\{b_n\}$ est strictement croissante. Supposons d'abord que $\alpha < \ln 2$. Il existe alors, par hypothèse, $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ln(\ln a_n) < n \ln 2$ si $n \geqslant n_0$ ou, de façon équivalente, $a_n < e^{2^n}$ si $n \geqslant n_0$. On a alors

$$\begin{aligned}
b_n &= \sqrt{a_1 + \ldots + \sqrt{a_{n_0} + \ldots + \sqrt{a_n}}} \\
&\leqslant \sqrt{a_1 + \ldots + \sqrt{a_{n_0-1} + \sqrt{e^{2^{n_0}} + \ldots + \sqrt{e^{2^n}}}}} \\
&\leqslant \sqrt{a_1 + \ldots + \sqrt{a_{n_0-1} + e^{2^{n_0}}\sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1}}}}.
\end{aligned}$$

D'après le problème précédent,

$$b_n \leqslant \sqrt{a_1 + \ldots + \sqrt{a_{n_0-1} + e^{2^{n_0}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}.$$

Ceci signifie que la suite $\{b_n\}$ est majorée donc convergente.

Supposons maintenant que $\alpha > \ln 2$. Par hypothèse, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\ln(\ln a_n) > n(\alpha + \varepsilon)$ pour $n \geqslant n_0$. En posant $\alpha + \varepsilon = \ln \beta$, on obtient $a_n > e^{\beta^n}$ pour $n \geqslant n_0$ avec $\beta > \ln 2$. Donc,

$$\begin{aligned}
b_n &= \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_{n_0} + \ldots + \sqrt{a_n}}}} \\
&> \sqrt{a_1 + \ldots + \sqrt{a_{n_0-1} + e^{\frac{\beta^n}{2^{n-n_0+1}}}}} > e^{\left(\frac{\beta}{2}\right)^n}.
\end{aligned}$$

La suite $\{b_n\}$ diverge dans ce cas vers $+\infty$.

De plus, on remarque que si $0 < a_n \leqslant 1$, alors, bien que $\ln \ln a_n$ ne soit pas défini, la suite $\{b_n\}$ est croissante et majorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, donc convergente.

II.5.76. [20]. Les hypothèses impliquent $0 \leqslant a_n \leqslant n a_1$. La suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ est donc bornée. On note L sa limite supérieure. Il existe alors une suite $\{m_k\}$

d'entiers positifs telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_{m_k}}{m_k} = L$. Pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on peut écrire $m_k = nl_k + r_k$ où $r_k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Donc, par hypothèse, $a_{m_k} \leqslant l_k a_n + a_{r_k}$. D'où,

$$\frac{a_{m_k}}{m_k} \leqslant \frac{l_k}{nl_k + r_k} a_n + \frac{a_{r_k}}{m_k} .$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$L \leqslant \frac{a_n}{n} , \tag{$*$}$$

qui implique

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} .$$

Il en résulte que la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ converge.

II.5.77. On peut appliquer une analyse semblable à celle de la solution du problème précédent.

II.5.78. [20]. Les suites $\{a_n + 1\}$ et $\{1 - a_n\}$ vérifient les hypothèses du **problème II.5.76**. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n+1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-a_n}{n}$ existent et sont finies.

(a) De ce qui précède, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n+1}{n} = g$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = g$.

(b) L'inégalité se déduit immédiatement de $(*)$ dans la solution de **II.5.76**.

II.5.79. On prouve que la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ converge vers $A = \sup\left\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Soit p un entier strictement positif. On a

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{pl_n + r_n}}{pl_n + r_n} \geqslant \frac{a_{pl_n}}{pl_n + r_n} ,$$

où $r_n \in \{0, 1 \ldots, p-1\}$. Donc, par hypothèse, $\varliminf\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \geqslant \frac{a_p}{p}$. Ceci implique alors $\varliminf\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \geqslant \varlimsup\limits_{p\to+\infty} \frac{a_p}{p}$. On a donc établi la convergence de la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$. De plus, $\frac{a_{mn}}{mn} \geqslant \frac{a_n}{n}$ implique

$$\begin{aligned} A \geqslant \varliminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} &\geqslant \varlimsup_{p\to+\infty} \frac{a_p}{p} = \inf_p \sup_{l\geqslant p} \frac{a_l}{l} \\ &\geqslant \inf_p \sup_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{a_{pm}}{pm} \geqslant \inf_p \sup_m \frac{a_m}{m} = A. \end{aligned}$$

II.5.80. On montre d'abord que la suite donnée est bornée. En effet, si $\frac{1}{a} \leqslant a_n$ et $a_{n+1} \leqslant a$, alors $\frac{1}{a} \leqslant a_{n+2} = \frac{2}{a_n + a_{n+1}} \leqslant a$. Donc, d'après le principe de récurrence énoncé dans la solution du **problème II.1.10**, la suite $\{a_n\}$ est bornée. On pose

$$l = \varliminf_{n\to+\infty} a_n, \qquad L = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$a_n < L + \varepsilon \quad \text{pour } n > n_1, \tag{i}$$

$$a_n > l - \varepsilon \quad \text{pour } n > n_2. \tag{ii}$$

D'après (i), $a_{n+2} = \frac{2}{a_n + a_{n+1}} > \frac{1}{L+\varepsilon}$ pour $n > n_1$. Puisque l'on peut choisir $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on obtient $l \geqslant \frac{1}{L}$. De la même façon, (ii) implique $L \leqslant \frac{1}{l}$. Et, $L = \frac{1}{l}$. Soit $\{n_k\}$ une suite d'entiers positifs telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k+2} = L$. On peut supposer que les suites $\{a_{n_k+1}\}$, $\{a_{n_k}\}$ et $\{a_{n_k-1}\}$ convergent respectivement vers l_1, l_2 et l_3. Si ce n'est pas le cas, on peut choisir des sous-suites convergentes. Par définition de $\{a_n\}$, on a

$$l_1 + l_2 = \frac{2}{L} = 2l \quad \text{et} \quad l_2 + l_3 = \frac{2}{l_1}$$

et, puisque $l \leqslant l_1, l_2, l_3 \leqslant L$, on obtient $l_1 = l_2 = l$ et $l_2 = l_3 = L$, d'où $l = L$. Ceci et l'égalité $l = \frac{1}{L}$ impliquent que la suite $\{a_n\}$ converge vers 1.

II.5.81. Puisque $0 < a_1 \leqslant b_1$, il existe $\varphi \in \left[0\,, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $a_1 = b_1 \cos\varphi$. On peut alors montrer par récurrence que, pour $\varphi \neq 0$,

$$a_{n+1} = \frac{b_1 \sin\varphi}{2^n \tan\frac{\varphi}{2^n}} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{b_1 \sin\varphi}{2^n \sin\frac{\varphi}{2^n}}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{b_1 \sin\varphi}{\varphi}$. Si $\varphi = 0$, autrement dit si $a_1 = b_1$, les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont constantes.

II.5.82. [18]. Par hypothèse, $\frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} = 1 + \varepsilon_{k,n}$, $\varepsilon_{k,n}$ tendant uniformément vers 0 par rapport à k. Donc

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k,n} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,n} + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,n} b_{k,n}. \tag{$*$}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,n}$ existe, il existe $M > 0$ tel que $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,n}\right| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, $|\varepsilon_{k,n}| < \frac{\varepsilon}{M}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$

si n est suffisamment grand. D'où, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,n} b_{k,n}\right| < \varepsilon$ ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,n} b_{k,n} = 0$. Donc, d'après $(*)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} b_{k,n}.$$

II.5.83. On a

$$\frac{\sin \frac{(2k-1)a}{n^2}}{\frac{(2k-1)a}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{uniformément par rapport à } k.$$

Donc, d'après le problème précédent,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{(2k-1)a}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)a}{n^2} = a.$$

II.5.84. Il découle de **II.5.5** que si la suite $\{x_n\}$ tend vers 0, alors $\frac{a^{x_n}-1}{x_n \ln a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Ceci implique

$$\frac{a^{\frac{k}{n^2}} - 1}{\frac{k}{n^2} \ln a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

uniformément par rapport à k. En appliquant maintenant le **problème II.5.82**, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(a^{\frac{k}{n^2}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln a \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2} \ln a.$$

II.5.85. Si $\{x_n\}$ est une suite strictement positive convergente vers 0, alors, d'après le **problème II.5.3**, $\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On voit, en appliquant **II.5.82**, que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k^2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{1}{2}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = e^{\frac{1}{2}}$.

II.5.86. On peut montrer que si $\{x_n\}$ est une suite strictement positive convergente vers 0, alors

$$\frac{(1+x_n)^{\frac{1}{p}}-1}{\frac{1}{p}\,x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1. \tag{$*$}$$

On pose

$$c_{k,n}=\frac{k^{q-1}}{n^q}, \qquad k=1,2,\ldots,n.$$

On a alors $c_{k,n}\leqslant \max\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{n^q}\right\}$ et $\{c_{k,n}\}$ converge donc vers 0, uniformément par rapport à k. En posant $a_{k,n}=(1+c_{k,n})^{\frac{1}{p}}-1$ et $b_{k,n}=\frac{1}{p}\,c_{k,n}$ et en utilisant **II.5.82**, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{k^{q-1}}{n^q}\right)^{\frac{1}{p}}-1\right)=\frac{1}{p}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{q-1}}{n^q}.$$

D'après le théorème de Stolz (voir **II.3.11**),

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{q-1}}{n^q}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{q-1}}{n^q-(n-1)^q}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{q-1}}{n^q-n^q\left(1-\frac{1}{n}\right)^q}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{q-1}}{n^q-n^q\left(1-q\frac{1}{n}+\frac{q(q-1)}{2}\frac{1}{n^2}-\ldots\right)}=\frac{1}{q}.\end{aligned}$$

II.5.87. On pose $a_n=\frac{a(a+d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)\cdots(b+nd)}$. On a alors

$$a_n=\frac{a}{b}\,\frac{\left(1+\frac{d}{a}\right)\cdots\left(1+n\frac{d}{a}\right)}{\left(1+\frac{d}{a}+\left(\frac{b}{a}-1\right)\right)\left(1+2\frac{d}{a}+\left(\frac{b}{a}-1\right)\right)\cdots\left(1+n\frac{d}{a}+\left(\frac{b}{a}-1\right)\right)}.$$

On pose $x=\frac{b}{a}-1$. On a $x>0$ et

$$a_n=\frac{a}{b}\,\frac{1}{\left(1+\frac{x}{1+\frac{d}{a}}\right)\left(1+\frac{x}{1+2\frac{d}{a}}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{1+n\frac{d}{a}}\right)}.$$

Puisque

$$\frac{x}{1+\frac{d}{a}}+\ldots+\frac{x}{1+n\frac{d}{a}}<\left(1+\frac{x}{1+\frac{d}{a}}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{1+n\frac{d}{a}}\right),$$

on obtient

$$a_n<\frac{a}{bx\left(\frac{x}{1+\frac{d}{a}}+\frac{x}{1+2\frac{d}{a}}+\ldots+\frac{x}{1+n\frac{d}{a}}\right)}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ car

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x}{1+\frac{d}{a}}+\frac{x}{1+2\frac{d}{a}}+\ldots+\frac{x}{1+n\frac{d}{a}}\right)=+\infty.$$

This page intentionally left blank

III

SÉRIES DE NOMBRES RÉELS

Énoncés

III.1. Sommation de séries

III.1.1. Trouver la série infinie et sa somme si la suite $\{S_n\}$ de ses sommes partielles est donnée par

(a) $S_n = \dfrac{n+1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$

(b) $S_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$

(c) $S_n = \operatorname{Arctan} n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$

(d) $S_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

III.1.2. Trouver la somme des séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2},$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2},$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}},$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1},$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\sqrt{n(n+1)}}.$

III.1.3. Calculer les sommes suivantes :

(a) $$\ln\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\frac{(n+1)(3n+1)}{n(3n+4)},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\frac{(2n+1)n}{(n+1)(2n-1)}.$$

III.1.4. Trouver la somme des séries

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)\dots(n+m)},\quad m\in\mathbb{N}^*,$$

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+m)},\quad m\in\mathbb{N}^*,$$

(c) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

III.1.5. Calculer

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{n!\pi}{720},$$ (b) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{\ln n}{n-\ln n}\right].$$

III.1.6. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{2^{n+1}}\cos\frac{3}{2^{n+1}}.$$

III.1.7. Trouver

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!\,(n^4+n^2+1)}.$$

III.1.8. Démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3\times5\times\ldots\times(2n+1)}=\frac{1}{2}.$$

III.1.9. Soit $\{a_n\}$ une suite vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty}((a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)) = g, \quad 0 < g \leqslant +\infty.$$

Prouver que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)} = 1 - \frac{1}{g}$$

(avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$).

III.1.10. En utilisant le résultat du problème précédent, trouver la somme des séries

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2\times 4\times 6\times \dots \times 2n},$$

(c) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}.$$

III.1.11. Soit $\{a_n\}$ une suite récurrente définie en posant

$$a_1 > 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4}}{2}.$$

III.1.12. Pour $b > 2$, vérifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{b(b+1)\dots(b+n-1)} = \frac{1}{b-2}.$$

III.1.13. Pour $a > 0$ et $b > a+1$, établir l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)} = \frac{a}{b-a-1}.$$

III.1.14. Pour $a > 0$ et $b > a + 2$, vérifier la proposition suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)} = \frac{a(b-1)}{(b-a-1)(b-a-2)}.$$

III.1.15. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ une série divergente à termes strictement positifs. Pour $b > 0$, déterminer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_2+b)(a_3+b)\dots(a_{n+1}+b)}.$$

III.1.16. Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos^3 3^n x}{3^n}.$$

III.1.17. Étant donné a, b et c non nuls, on considère des fonctions f et g telles que $f(x) = af(bx) + cg(x)$.

(a) Prouver que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n f(b^n x) = L(x)$ existe, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n g(b^n x) = \frac{f(x) - L(x)}{c}.$$

(b) Prouver que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{-n} f(b^{-n} x) = M(x)$ existe, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^{-n} g(b^{-n} x) = \frac{M(x) - af(bx)}{c}.$$

III.1.18. En appliquant l'identité $\sin x = 3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3}$, prouver que

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n \sin^3 \frac{x}{3^{n+1}} = \frac{x - \sin x}{4}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \sin^3 \frac{x}{3^{-n+1}} = \frac{3}{4} \sin \frac{x}{3}$.

III.1.19. En appliquant l'identité $\cot x = 2\cot(2x) + \tan x$ pour $x \neq k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$, prouver que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} = \frac{1}{x} - 2\cot(2x).$$

III.1.20. En utilisant l'identité $\operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan}(bx) + \operatorname{Arctan} \frac{(1-b)x}{1+bx^2}$, établir les formules

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{(1-b)b^n x}{1+b^{2n+1}x^2} = \operatorname{Arctan} x$ pour $0 < b < 1$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{(b-1)b^n x}{1+b^{2n+1}x^2} = \operatorname{Arccotan} x$ pour $x \neq 0$ et $b > 1$.

III.1.21. Soit $\{a_n\}$ la *suite de Fibonacci* définie en posant

$$a_0 = a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n \geqslant 1).$$

On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2$. Trouver

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{S_n}.$$

III.1.22. Pour la suite de Fibonacci $\{a_n\}$ définie au problème précédent, calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n a_{n+2}}.$$

III.1.23. Pour la suite de Fibonacci $\{a_n\}$ définie en **III.1.21**, déterminer la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{1}{a_{2n}}.$$

III.1.24. Trouver les sommes

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{2}{n^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2+n+1}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{8n}{n^4-2n^2+5}$.

III.1.25. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive divergeant vers $+\infty$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{a_{n+1} - a_n}{1 + a_n a_{n+1}} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{a_1}.$$

III.1.26. Prouver que tout réarrangement des termes d'une série à termes positifs ne change pas la valeur de sa somme.

III.1.27. Établir l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

III.1.28. Prouver que

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

(c) $$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

III.1.29. On définit la suite récurrente $\{a_n\}$ par

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

Trouver $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

III.1.30. On définit la suite $\{a_n\}$ comme suit :

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \ln \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1$$

et on pose $b_n = a_1 a_2 \ldots a_n$. Trouver $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

III.1.31. Soit $\{a_n\}$ la suite définie par

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} - \sqrt{2} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1.$$

Déterminer la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

III.1.32. Trouver la somme des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+2n-1} + \frac{1}{x+2n} - \frac{1}{x+n} \right)$, $x \neq -1, -2, \ldots$

III.1.33. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

III.1.34. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

III.1.35. Déterminer la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

III.1.36. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ dont la dérivée est monotone sur un sous-intervalle $]a\,, +\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Prouver que la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_1^n f(x)\,dx \right)$$

existe. Étudier aussi le cas particulier des fonctions $f(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = \ln x$.

III.1.37. Déterminer la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

III.1.38. Trouver

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1 \right).$$

III.1.39. Étant donné un entier $k \geqslant 2$, prouver que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)k+1} + \frac{1}{(n-1)k+2} + \ldots + \frac{1}{nk-1} - \frac{x}{nk} \right)$$

ne converge que pour une valeur de x. Trouver cette valeur et la somme de la série.

III.1.40. Soit $\{a_n\}$ la suite définie par

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{3+(-1)^n}{2}.$$

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{1}{a_n^2 - 1}.$$

III.1.41. Prouver que la somme des séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ et (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}$

est irrationnelle.

III.1.42. Soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite dont les termes sont égaux à $+1$ ou -1. Prouver que la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!}$ est irrationnelle.

III.1.43. Prouver que la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^k}$$

est irrationnelle pour tout entier k strictement positif.

III.1.44. Soit $\{n_k\}$ une suite croissante d'entiers strictement positifs telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{n_k}{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}} = +\infty.$$

Prouver que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n_i}$ est irrationnel.

III.1.45. Prouver que si $\{n_k\}$ est une suite d'entiers strictement positifs telle que

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \frac{n_k}{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}} = +\infty \quad \text{et} \quad \varliminf_{k\to+\infty} \frac{n_k}{n_{k-1}} > 1,$$

alors $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n_i}$ est irrationnel.

III.1.46. Soit $\{n_k\}$ une suite croissante d'entiers strictement positifs telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[2^k]{n_k} = +\infty$. Prouver que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n_k}$ est irrationnel.

III.1.47. On considère la série convergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{q_n}$, où $p_n, q_n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\frac{p_n}{q_n - 1} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1} - 1} \geqslant \frac{p_n}{q_n}.$$

On note $\mathbf{A}$ l'ensemble des entiers n pour lesquels l'inégalité ci-dessus est stricte. Prouver que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{q_n}$ est irrationnel si et seulement si l'ensemble $\mathbf{A}$ est infini.

III.1.48. Prouver que pour toute suite strictement croissante $\{n_k\}$ d'entiers strictement positifs la somme de la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{n_k}}{n_k!}$ est irrationnelle.

III.2. Séries à termes positifs

III.2.1. Déterminer si les séries suivantes convergent ou divergent :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right), \quad a>1.$

III.2.2. Déterminer si les séries suivantes convergent :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$.

III.2.3. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ deux séries à termes strictement positifs vérifiant

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}\quad\text{pour}\quad n\geqslant n_0.$$

Prouver que si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge aussi.

III.2.4. Déterminer si les séries suivantes convergent :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$.

III.2.5. Déterminer pour quelles valeurs de α les séries suivantes convergent :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{a}-1\right)^{\alpha}, \quad a>1,$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\alpha}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)^{\alpha}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$.

III.2.6. Prouver que si une série à termes positifs $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a^{a_n}-1\right), \quad \text{où } a>1,$$

converge aussi.

III.2.7. Étudier le comportement (convergence ou divergence) des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$, $a,b>0$.

III.2.8. La série à termes positifs $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Prouver que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge aussi. Démontrer que la réciproque est fausse. Cependant, si la suite $\{a_n\}$ est décroissante, alors la proposition réciproque est vraie.

III.2.9. On suppose que la série à termes positifs $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge. Étudier le comportement des séries suivantes :

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+na_n},$$

(c) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+n^2a_n},$$

(d) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}.$$

III.2.10. On suppose que la série à termes strictement positifs $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge. On note $\{S_n\}$ la suite de ses sommes partielles. Prouver que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n} \quad \text{diverge}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^2} \quad \text{converge.}$$

III.2.11. Prouver que sous les hypothèses du problème précédent, la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\beta}}$$

converge pour tout $\beta > 0$.

III.2.12. Prouver que sous les hypothèses du **problème III.2.10**, la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$$

converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$.

III.2.13. Démontrer que si la série à termes strictement positifs $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge et si $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ représente la suite de ses restes, alors

(a) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}} \quad \text{diverge,}$$

(b) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}} \quad \text{converge.}$$

III.2.14. Prouver que sous les hypothèses du problème précédent, la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}}$$

converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$.

III.2.15. Prouver que sous les hypothèses du **problème III.2.13**, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} \ln^2 r_n$ converge.

III.2.16. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = g \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si $g > 1$ et diverge si $g < 1$. Montrer que ce test ne permet pas de conclure si $g = 1$.

III.2.17. Étudier le comportment des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$, $a > 0$, (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln \ln n}}$, $a > 0$.

III.2.18. Discuter la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}, \quad a > 0.$$

III.2.19. Utiliser le résultat du **problème III.2.16** pour démontrer le *test de Raabe* (sous forme d'une limite).

Soit $a_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) tels que

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r.$$

Prouver que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si $r > 1$ et diverge si $r < 1$.

III.2.20. Soit $\{a_n\}$ la suite récurrente définie par

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2}\, a_{n-1} \quad \text{pour } n \geqslant 2.$$

Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

III.2.21. Soit a_1 et α des réels strictement positifs. On définit la suite récurrente $\{a_n\}$ en posant

$$a_{n+1} = a_n e^{-a_n^\alpha} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Déterminer pour quelles valeurs de α et β la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^\beta$ converge.

III.2.22. Déterminer pour quelles valeurs de a la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$$

converge.

III.2.23. Soit a un réel strictement positif et $\{b_n\}$ une suite strictement positive convergente vers b. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!a^n}{(a+b_1)(2a+b_2)\ldots(na+b_n)}.$$

III.2.24. Prouver que si la suite $\{a_n\}$ de réels strictement positifs vérifie

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\gamma_n}{n \ln n}$$

où $\gamma_n \geqslant \Gamma > 1$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. De plus, si

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\gamma_n}{n \ln n}$$

où $\gamma_n \leqslant \Gamma < 1$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge. (Ce test est appelé *test de Bertrand*).

III.2.25. Utiliser les tests de Bertrand et de Raabe pour obtenir le *critère de Gauss* suivant.

Si $\{a_n\}$ est une suite de réels strictement positifs vérifiant

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} - \frac{\theta_n}{n^{\lambda}},$$

où $\lambda > 1$ et $\{\theta_n\}$ est une suite bornée, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge lorsque $\alpha > 1$ et diverge lorsque $\alpha \leqslant 1$.

III.2.26. Discuter la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)},$$

α, β et γ étant des réels strictement positifs.

III.2.27. Déterminer pour quelles valeurs de p la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$$

converge.

III.2.28. Démontrer le *test de condensation de Cauchy*.

Soit $\{a_n\}$ une suite décroissante de réels positifs. Prouver que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ converge.

III.2.29. Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}.$$

III.2.30. Démontrer le *théorème de Schlömilch* (une généralisation du théorème de Cauchy donné en **III.2.28**).

Si $\{g_k\}$ est une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs telle qu'il existe $c > 0$ vérifiant $g_{k+1} - g_k \leqslant c(g_k - g_{k-1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et si $\{a_n\}$ est une suite positive strictement décroissante, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \quad \text{si et seulement si} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (g_{k+1} - g_k) a_{g_k} < +\infty.$$

III.2.31. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive et décroissante. Prouver que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si et seulement si les séries suivantes convergent :

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n^2}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_{n^3}.$$

(d) Appliquer les tests précédents à l'étude de la convergence des séries du **problème III.2.17**.

III.2.32. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive. Montrer que

$$\varlimsup_{n\to+\infty} (a_n)^{\frac{1}{\ln n}} < \frac{1}{e}$$

implique la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

III.2.33. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive. Montrer que

$$\varlimsup_{n\to+\infty} (n a_n)^{\frac{1}{\ln \ln n}} < \frac{1}{e}$$

implique la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

III.2.34. Soit $\{a_n\}$ une suite décroissante strictement positive telle que

$$\frac{2^n a_{2^n}}{a_n} \leqslant g < 1.$$

Prouver que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

III.2.35. Soit $\{a_n\}$ une suite décroissante positive. Prouver que si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$. Prouver que cette condition n'est pas suffisante pour que la série converge.

III.2.36. Donner un exemple de série strictement positive et convergente pour laquelle la condition $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$ n'est pas vérifiée.

III.2.37. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Donner une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une suite strictement positive $\{b_n\}$ telle que les deux séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

convergent.

III.2.38. Existe-t-il une suite strictement positive $\{a_n\}$ telle que les deux séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 a_n}$$

convergent.

III.2.39. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + a_{n+1}}{a_n}$$

diverge pour toute suite strictement positive $\{a_n\}$.

III.2.40. Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites décroissantes tendant vers 0 telles que les séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergent. Que peut-on dire sur la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ où $c_n = \min\{a_n, b_n\}$?

III.2.41. Soit $\{a_n\}$ une suite positive décroissante telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ diverge. On pose

$$b_n = \min\left\{a_n, \frac{1}{\ln(n+1)}\right\}.$$

Prouver que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}$ diverge aussi.

III.2.42. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive, bornée et croissante. Prouver que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$$

converge.

III.2.43. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive, croissante et tendant vers $+\infty$. Prouver que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$$

diverge.

III.2.44. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive et croissante. Prouver que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n^{\alpha}}$$

converge pour tout $\alpha > 0$.

III.2.45. Prouver que pour toute série divergente à termes strictement positifs $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, il existe une suite $\{c_n\}$ décroissante et tendant vers 0 telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n c_n$ diverge.

III.2.46. Prouver que pour toute série convergente à termes strictement positifs $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, il existe une suite $\{c_n\}$ croissante et tendant vers $+\infty$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n c_n$ converge.

III.2.47. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série convergente à termes positifs. On appelle $\{r_n\}$ la suite de ses restes. Prouver que si $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

III.2.48. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive tendant vers $+\infty$. Que peut-on dire concernant la convergence des séries suivantes :

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^n}\,, \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^{\ln n}}\,, \qquad \text{(c)}\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^{\ln\ln n}}\,?$$

III.2.49. Étudier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ pour

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \cos a_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

III.2.50. Soit $p \in \mathbb{R}_+$. Étudier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ pour

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = n^{-p} \sin a_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

III.2.51. On note $\{a_n\}$ la suite croissante des racines strictement positives de l'équation $\tan x = x$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^2}$.

III.2.52. On note $\{a_n\}$ la suite croissante des racines strictement positives de l'équation $\tan \sqrt{x} = x$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

III.2.53. Soit $a_1 \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

III.2.54. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive et décroissante telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}} = 1.$$

III.2.55. On pose $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}$ et on note k_n le plus petit des entiers k positifs pour lesquels $S_k \geqslant n$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n}.$$

III.2.56. Soit $\mathbf{A}$ l'ensemble des entiers positifs dont l'écriture décimale ne contient pas le chiffre 0.

(a) Prouver que $\sum\limits_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n}$ converge.

(b) Trouver toutes les valeurs de α pour lesquelles $\sum\limits_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

III.2.57. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série à termes strictement positifs. On pose

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = g \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Prouver que la série converge si $g > 1$ et qu'elle diverge si $g < 1$.

Donner des exemples montrant que ce critère ne permet pas de conclure dans le cas où $g = 1$.

III.2.58. Prouver que le test de Raabe (voir le **problème III.2.19**) et le test donné au **problème III.2.16** sont équivalents. De plus, prouver que le critère donné au problème précédent est plus fort que les tests mentionnés ci-dessus.

III.2.59. Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ dont les termes sont définis par

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_n = \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ racines}}}, \quad n \geqslant 2.$$

III.2.60. Soit $\{a_n\}$ une suite décroissante tendant vers 0. Prouver que si la suite de termes

$$(a_1 - a_n) + (a_2 - a_n) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)$$

est bornée, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

III.2.61. Trouver une suite $\{a_n\}$ dont les termes vérifient les conditions suivantes :

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

III.2.62. Les termes d'une série convergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ de somme S vérifient les deux conditions

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \quad \text{et} \quad 0 < a_n \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer qu'il est possible d'écrire tout nombre $s \in \,]0\,, S]$ comme une somme finie de termes de $\{a_n\}$ ou comme une sous-série (infinie) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{n_k}$, où $\{a_{n_k}\}$ est une sous-suite de $\{a_n\}$.

III.2.63. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série dont les termes strictement positifs forment une suite décroissante. Prouver que si tout nombre appartenant à $]0\,, S[$, où S est la somme de la série, peut s'écrire comme une somme finie de termes de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ou comme une sous-série (infinie) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{n_k}$ où $\{a_{n_k}\}$ est une sous-suite de $\{a_n\}$, alors l'inégalité

$$a_n \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III.2.64. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série divergente à termes strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{S_n} = 0$, où $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 S_1^{-1} + a_2 S_2^{-1} + \ldots + a_n S_n^{-1}}{\ln S_n} = 1.$$

III.2.65. En utilisant le problème précédent, prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

III.2.66. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Que peut-on dire concernant la convergence de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\ ?$$

III.2.67. Prouver que si $\{a_n\}$ est une suite strictement positive telle que $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \geqslant \sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \leqslant 2ea_1$.

III.2.68. Démontrer l'*inégalité de Carleman* :

Si $\{a_n\}$ est une suite strictement positive telle que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1\ldots a_n} < e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

III.2.69. Prouver que si $\{a_n\}$ est une suite strictement positive, on a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1\ldots a_n} \leqslant \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{n+k}{n}\right)^n.$$

III.2.70. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive. Prouver que la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ implique celle de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^2 a_n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{-2}\right).$$

III.2.71. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive et croissante telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge. Prouver que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{na_n - (n-1)a_{n-1}}$$

diverge aussi.

III.2.72. On note $\{p_n\}$ la suite croissante des nombres premiers. Étudier la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$.

III.2.73. Étudier la convergence de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{np_n - (n-1)p_{n-1}}$$

où p_n est le n-ième nombre premier.

III.2.74. Évaluer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{n+1}}}{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n}}.$$

III.2.75. Soit $\{a_n\}$ une suite vérifiant les conditions suivantes :

$$0 \leqslant a_n \leqslant 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad a_1 \neq 0.$$

On pose

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n \quad \text{et} \quad T_n = S_1 + \ldots + S_n.$$

Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{T_n^\alpha}$ converge.

III.2.76. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\{a_n\}$ une suite croissante strictement positive telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ converge. Prouver que les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^k a_n}{a_n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^k n}{a_n}$$

sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

III.2.77. Soit $f\colon \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction décroissante et $\varphi\colon \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une fonction croissante telle que $\varphi(n) > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier les inégalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{\varphi(n)-1} f(k) < \sum_{k=1}^{\varphi(1)-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} f(\varphi(k))(\varphi(k+1)-\varphi(k)), \tag{1}$$

$$\sum_{k=\varphi(1)-1}^{\varphi(n)} f(k) > \sum_{k=2}^{n} f(\varphi(k))(\varphi(k)-\varphi(k-1)). \tag{2}$$

III.2.78. Prouver que, sous les hypothèses du problème précédent, s'il existe q tel que l'inégalité

$$\frac{f(\varphi(n))(\varphi(n+1)-\varphi(n))}{f(n)} \leqslant q < 1$$

est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge. D'autre part, si

$$\frac{f(\varphi(n))(\varphi(n)-\varphi(n-1))}{f(n)} \geqslant 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ diverge.

III.2.79. Déduire du problème précédent le test suivant sur la convergence ou la divergence d'une série positive.

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ dont les termes forment une suite décroissante strictement positive est convergente lorsque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = g < \frac{1}{2}$$

et divergente lorsque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = g > \frac{1}{2}\,.$$

III.2.80. Déduire du **problème III.2.78** le test suivant sur la convergence ou la divergence d'une série positive (comparer avec le **problème III.2.34**).

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ dont les termes forment une suite décroissante strictement positive est convergente si

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{2^n a_{2^n}}{a_n} = g < 1$$

et divergente si

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{2^n a_{2^n}}{a_n} > 2.$$

III.2.81. En utilisant le **problème III.2.77**, prouver les critères donnés en **III.2.31**.

III.2.82. Démontrer le *test de Kummer*. Soit $\{a_n\}$ une suite à valeurs strictement positives.

(1) S'il existe une suite $\{b_n\}$ strictement positive et une constante $C > 0$ telles que

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geqslant C \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

(2) S'il existe une suite $\{b_n\}$ strictement positive telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n}$ diverge et

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leqslant 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

III.2.83. Prouver que les tests du quotient de d'Alembert, de Raabe (**III.2.19**) et de Bertrand (**III.2.24**) sont des cas particuliers du test de Kummer (**III.2.82**).

III.2.84. Prouver la réciproque du test de Kummer.

Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive.

(1) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, il existe alors une suite $\{b_n\}$ strictement positive et une constante $C > 0$ telles que

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geqslant C.$$

(2) Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, il existe alors une suite $\{b_n\}$ strictement positive telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n}$ diverge et

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leqslant 0.$$

III.2.85. Prouver les tests suivants sur la convergence ou la divergence d'une série positive.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\{a_n\}$ une suite strictement positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} = g$. Si $g < 1$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge et si $g > 1$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\{a_n\}$ une suite strictement positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+k}} - 1\right) = g$. Si $g > k$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge et si $g < k$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

III.2.86. Soit $\{a_n\}$ et $\{\varphi_n\}$ deux suites réelles strictement positives. On suppose que $\varphi_n = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$. Prouver que la convergence de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ implique celle de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n^{1-\varphi_n}$.

III.3. Le test intégral

III.3.1. Démontrer le *test intégral* suivant :

Soit f une fonction définie sur $[1\,,+\infty[$, positive et décroissante. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\{I_n\}$, $I_n = \int_1^n f(x)\,dx$, est bornée.

III.3.2. Soit f une fonction strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que f' soit décroissante et tende vers 0 à l'infini. Montrer que les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f'(n) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f'(n)}{f(n)}$$

soit convergent toutes les deux, soit divergent toutes les deux.

III.3.3. Soit f une fonction définie sur $[1\,,+\infty[$, positive et décroissante. On pose

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f(n) \qquad \text{et} \qquad I_N = \int_1^N f(x)\,dx.$$

Prouver que la suite $\{S_N - I_N\}$ est décroissante et que sa limite appartient à l'intervalle $[0\,,f(1)]$.

III.3.4. Prouver que les limites des suites

(a) $$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n,$$

(b) $$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} - \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

appartiennent à l'intervalle $]0\,,1[$.

III.3.5. Appliquer le test intégral pour étudier la convergence de la série donnée en **III.2.29**.

III.3.6. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série strictement positive et divergente. On suppose que $S_n = a_1 + \ldots + a_n > 1$ pour $n \geqslant 1$. Vérifier les affirmations suivantes :

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n} \quad \text{diverge,}$$

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^2 S_n} \quad \text{converge.}$$

III.3.7. Soit f une fonction définie sur $[1\,,+\infty[$, strictement positive et décroissante. Soit φ une fonction strictement croissante, dérivable et telle que $\varphi(x) > x$ pour $x > 1$. Prouver que, s'il existe $q < 1$ tel que $\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)} \leqslant q$ pour x suffisamment grand, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge. Prouver aussi que la série diverge si $\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)} \geqslant 1$ pour x suffisamment grand.

III.3.8. Soit f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement positives et continûment dérivables. On suppose de plus que f est décroissante.

(a) Prouver que si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}-g'(x)\right)>0$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge.

(b) Prouver que si la suite de termes $\int_1^n \frac{1}{g(x)}\,dx$ n'est pas bornée et si $-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}-g'(x)\leqslant 0$ pour x suffisamment grand, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ diverge.

III.3.9. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement positive et continûment dérivable. Prouver que

(a) si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)>1$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge,

(b) si $-\frac{xf'(x)}{f(x)}\leqslant 1$ pour x suffisamment grand, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ diverge.

III.3.10. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement positive et continûment dérivable. Prouver que

(a) si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{x}\right)x\ln x>1$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge,

(b) si $\left(-\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{x}\right)x\ln x\leqslant 1$ pour x suffisamment grand, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ diverge.

III.3.11. Prouver la réciproque suivante du théorème énoncé en **III.3.8**.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement positive, décroissante et continûment dérivable.

(a) Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge, il existe alors une fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement positive et continûment dérivable telle que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}-g'(x)\right)>0.$$

(b) Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ diverge, il existe alors une fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement positive et continûment dérivable telle que la suite de termes

$$\int_1^n \frac{1}{g(x)}\,dx \quad (n\in\mathbb{N}^*)$$

ne soit pas bornée et telle que

$$-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) \leqslant 0$$

pour x suffisamment grand.

III.3.12. Pour $\gamma \geqslant 0$, étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)^\gamma}}.$$

III.3.13. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln\ln n}} \ln n}.$$

III.3.14. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite croissante strictement positive et f une fonction croissante strictement positive vérifiant la condition

$$\int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{1}{tf(t)}\,dt < +\infty.$$

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \frac{1}{f(\lambda_n)} < +\infty.$$

III.3.15. Prouver la généralisation suivante du test intégral.

Soit $\{\lambda_n\}$ une suite strictement croissante tendant vers $+\infty$ et f une fonction définie sur $[\lambda_1\,, +\infty[$, décroissante et strictement positive.

(a) S'il existe $M > 0$ tel que $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et si l'intégrale impropre $\int_{\lambda_1}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(\lambda_n)$ converge aussi.

(b) S'il existe $M > 0$ tel que $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et si l'intégrale impropre $\int_{\lambda_1}^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(\lambda_n)$ diverge aussi.

III.3.16. Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction dérivable de dérivée strictement positive. Prouver que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$ converge si et seulement si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge.

III.3.17. On pose $\ln_1 x = \ln x$ et $\ln_k x = \ln(\ln_{k-1} x)$ pour $k > 1$ et x suffisamment grand. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ l'unique entier positif tel que $1 \leqslant \ln_{\varphi(n)} n < e$. La série

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln_1 n)(\ln_2 n)\ldots\left(\ln_{\varphi(n)} n\right)}$$

est-elle convergente ou divergente ?

III.4. Convergence absolue. Théorème de Leibniz

III.4.1. Pour les valeurs données de a, déterminer si les séries sont absolument convergentes, simplement convergentes ou divergentes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n}$, $a \in \mathbb{R}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\frac{a}{n}$, $a \in \mathbb{R}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{-8, 2\}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$, $a \neq 0$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a}$, $a > 0$.

III.4.2. Pour $a \in \mathbb{R}$, étudier la convergence simple et la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=n_a}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1} + \ln n},$$

où n_a est un indice dépendant de a tel que $na^{n-1} + \ln n \neq 0$ pour $n \geqslant n_a$.

III.4.3. On suppose que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, dont tous les termes sont non nuls, converge. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\sin a_n}{a_n}\right).$$

III.4.4. La condition $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ implique-t-elle que la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ soit équivalente à celle de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?

III.4.5. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série semi-convergente[1]. On pose $p_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$ et $q_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}$. Montrer que les deux séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ divergent.

III.4.6. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série semi-convergente. On note $\{P_n\}$ et $\{Q_n\}$ les suites des sommes partielles des séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ définies au problème précédent. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=1$.

III.4.7. Étudier la convergence simple et la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]}}{n}.$$

III.4.8. Pour $a\in\mathbb{R}$, déterminer si la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^a}$$

converge absolument, converge simplement ou diverge.

[1] Une série est *semi-convergente* si elle converge simplement mais pas absolument. (N.d.T.)

III.4.9. Déterminer si la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$$

converge absolument, converge simplement ou diverge.

III.4.10. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\varepsilon_k = \begin{cases} +1 & \text{pour } 2^{2k} \leqslant n < 2^{2k+1}, \\ -1 & \text{pour } 2^{2k+1} \leqslant n < 2^{2k+2}. \end{cases}$$

Étudier la convergence des séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n \ln n}$.

III.4.11. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n + \sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

III.4.12. Étudier le comportement (convergence absolue ou convergence simple) des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$, $a > 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right)$.

III.4.13. Pour $a, b > 0$, étudier la convergence des séries suivantes :

$$\text{(a)} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n^b},$$

$$\text{(b)} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^b}.$$

III.4.14. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ une série alternée vérifiant les conditions de la *règle de Leibniz*[(2)], autrement dit, $0 < a_{n+1} \leqslant a_n$ pour tout n et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. On note r_n le n-ième reste de la série, $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} a_k$. Montrer que r_n est du même signe que le terme $(-1)^n a_{n+1}$ et $|r_n| < a_{n+1}$.

III.4.15. Soit $\{a_n\}$ une suite tendant vers 0. Prouver que les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + a_{n+1})$$

convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux.

III.4.16. Soit $\{a_n\}$ une suite tendant vers 0. Pour a, b, c tels que $a + b + c \neq 0$, prouver que les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (a a_n + b a_{n+1} + c a_{n+2})$$

convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux.

III.4.17. Soit $\{a_n\}$ une suite à termes non nuls telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0$. Prouver que soit les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right)$$

sont toutes les deux absolument convergentes, soit aucune ne converge absolument.

[(2)] On conserve la terminologie anglophone qui correspond au *critère spécial de convergence des séries alternées*. (N.d.T.)

III.4.18. Prouver que si la suite $\{na_n\}$ et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n+1})$ convergent, il en est alors de même de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

III.4.19. Soit $\{a_n\}$ une suite décroissante tendant vers 0. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

III.4.20. Déterminer pour quelles valeurs de a la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, n! \sin a \sin \frac{a}{2} \ldots \sin \frac{a}{n}$$

converge absolument et pour quelles valeurs elle diverge.

III.4.21. Soit a, b et c trois réels strictement positifs. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{a} - \frac{\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{2} \right).$$

III.4.22. Étudier la convergence des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\cos n)^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\sin n)^n$.

III.4.23. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive. Prouver que :

(a) si $\lim\limits_{n \to +\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 0$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge,

(b) si $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leqslant 0$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ diverge (en particulier, si $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \, n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 0$, alors la série diverge).

III.4.24. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ et une suite bornée $\{\beta_n\}$ vérifiant

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^{1+\varepsilon}}\,.$$

Prouver que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, a_n$ converge pour $\alpha > 0$ et diverge pour $\alpha \leqslant 0$.

III.4.25. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!e^n}{n^{n+p}}\,, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

III.4.26. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série convergente et $\{p_n\}$ une suite strictement positive, croissante et tendant vers $+\infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n}{p_n} = 0.$$

III.4.27. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive, décroissante et tendant vers 0. Prouver que si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_nb_n$ converge, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = 0.$$

III.4.28. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Prouver que si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ converge, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n^\alpha} = 0.$$

III.4.29. Soit $\{k_n\}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{k_n}$ est appelée une *sous-série* de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Prouver que si toutes les sous-séries d'une série convergent, la série est alors absolument convergente.

III.4.30. Soit k, l des entiers vérifiant $k \geqslant 1$, $l \geqslant 2$. La série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est-elle absolument convergente si toutes les sous-séries de la forme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{k+(n-1)l}$$

sont convergentes ?

III.4.31. Donner un exemple de série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^3$ diverge.

III.4.32. Existe-t-il une série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ telle que toutes les séries de la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^k$, k étant un entier supérieur ou égal à 2, divergent ?

III.4.33. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive et décroissante telle que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge. On suppose que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n a_n$, où ε_n est égal à $+1$ ou -1, converge. Prouver que

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n}{n} \leqslant 0 \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n}{n}.$$

III.4.34. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive et décroissante telle que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n a_n$, où ε_n est égal à $+1$ ou -1, converge. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n) = 0$$

(voir **III.2.35**).

III.4.35. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ une série convergente et $\{p_n\}$ une suite croissante telle que $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$. Prouver que

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{p_1b_1+p_2b_2+\ldots+p_nb_n}{n} \leqslant 0 \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{p_1b_1+p_2b_2+\ldots+p_nb_n}{n}.$$

III.4.36. Dans la série harmonique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, on attache le signe « + » à p termes consécutifs, puis le signe « − » à q termes consécutifs, puis le signe « + » à p termes consécutifs, etc. Démontrer que la nouvelle série converge si et seulement si $p = q$.

III.4.37. Prouver la généralisation suivante du théorème de Toeplitz (voir **II.3.1** et **II.3.26**).

Soit $\{c_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}^*\}$ un tableau de nombres réels. Pour toute suite convergente $\{a_n\}$, la suite transformée $\{b_n\}$ définie par

$$b_n = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{n,k} a_k, \quad n \geqslant 1,$$

converge vers la même limite si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $c_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_{n,k} = 1$,

(iii) il existe $C > 0$ tel que, pour tout entier n strictement positif,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_{n,k}| \leqslant C.$$

III.5. Les tests de Dirichlet et Abel

III.5.1. En utilisant les tests de Dirichlet et d'Abel[3], étudier la convergence des séries suivantes :

$$\text{(a)} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n},$$

[3] *Test d'Abel* : si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge et si $\{a_n\}$ est une suite monotone et bornée, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ converge. *Test de Dirichlet* : si la suite réelle $\{a_n\}$ est monotone et converge vers 0 et si la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ est bornée (les termes de cette série peuvent être complexes), alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ converge. (N.d.T.)

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right),$$

(c) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos\left(\pi \frac{n^2}{n+1}\right),$$

(d) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^a + \sin \frac{n\pi}{4}}, \quad a > 0.$$

III.5.2. La série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln \ln n}$ converge-t-elle ?

III.5.3. Pour $a \in \mathbb{R}$, étudier la convergence des séries

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)\sin(n^2 a)}{n},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)\cos(n^2 a)}{n}.$$

III.5.4. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n \sin(na)}{n}$$

converge pour tout $a \in \mathbb{R}$.

III.5.5. Déterminer si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(na)}{n}$, $a \in \mathbb{R}$, est absolument convergente.

III.5.6. Prouver que pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(ak)}{k}\right| < 2\sqrt{\pi}.$$

III.5.7. Prouver que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{Arctan} n}{\sqrt{n}}$$

converge.

III.5.8. Pour $x > 1$, étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{\ln x}}{n}.$$

III.5.9. Prouver le *lemme de Kronecker* suivant.

Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série convergente et $\{b_n\}$ une suite croissante tendant vers $+\infty$. On a alors

(a) $$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{b_k} = o\left(\frac{1}{b_n}\right),$$ (b) $$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = o\left(b_n\right).$$

III.5.10. On suppose que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nc_n$ converge. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (k+1)c_{n+k}$ converge aussi. Prouver de plus que si $t_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (k+1)c_{n+k}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.

III.5.11. On suppose que les sommes partielles de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ forment une suite bornée. Prouver que si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}|$ converge et si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n^k$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

III.5.12. Prouver que si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$ est absolument convergente et si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, il en est alors de même de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$.

III.5.13. Prouver, en utilisant le test d'Abel, que la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ implique celle de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ pour $|x| < 1$.

III.5.14. Pour une suite $\{a_n\}$ donnée, prouver que si la *série de Dirichlet*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

converge en $x = x_0$, elle converge alors pour tout $x > x_0$.

III.5.15. Prouver que la convergence de la série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x}$ implique celle de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}, \qquad x \notin \mathbb{Z}_-.$$

III.5.16. Prouver que si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour $|x| < 1$, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge aussi.

III.5.17. La série convergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ est-elle absolument convergente si toutes ses sous-séries de la forme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{kl^n}, \quad k \geqslant 1,\ l \geqslant 2$$

convergent ?

III.6. Produit de Cauchy de séries

III.6.1. Démontrer le *théorème de Mertens*.

Si les deux séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ convergent et une au moins converge absolument, alors leur *produit de Cauchy* (c'est-à-dire la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$, où $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$) converge. De plus, si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = A$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n = B$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = AB$.

III.6.2. Trouver la somme des séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$, $|x| < 1$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$, où $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$, $|x| < 1$, $|y| < 1$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, où $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(n-k+1)!}$.

III.6.3. Écrire le produit de Cauchy des séries suivantes et calculer sa somme.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1)x^n$.

III.6.4. Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ une série convergente. On pose $A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. Prouver que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$ converge pour $|x| < 1$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n.$$

III.6.5. Trouver le produit de Cauchy de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, par elle-même.

Indication : utiliser l'égalité $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

III.6.6. Vérifier la proposition suivante pour $a > 0$ et $|x| < 1$:

$$\left(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^n}{a+2n}\right) \times \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n\right)$$
$$= \frac{1}{a}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a+1)(a+3)\ldots(a+2n-1)}{(a+2)(a+4)\ldots(a+2n)} x^n\right).$$

III.6.7. Démontrer le *théorème d'Abel* suivant.

Si le produit de Cauchy $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ de deux séries convergentes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = A$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n = B$ converge vers C, alors $C = AB$.

III.6.8. Prouver que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

est le produit de Cauchy de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ par elle-même et trouver sa somme.

III.6.9. Étudier la convergence du produit de Cauchy de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ par elle-même.

III.6.10. Prouver que si parmi deux séries strictement positives, une au moins est divergente, alors leur produit de Cauchy est divergent.

III.6.11. Le produit de Cauchy de deux séries divergentes est-il nécessairement divergent ?

III.6.12. Prouver que le produit de Cauchy de deux séries convergentes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k(b_n + b_{n-1} + \ldots + b_{n-k+1}) = 0.$$

III.6.13. Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites positives, décroissantes et convergentes vers 0. Démontrer que le produit de Cauchy des séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ converge si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(b_0 + b_1 + \ldots + b_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) = 0.$$

III.6.14. Montrer que le produit de Cauchy de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\beta}, \qquad \alpha, \beta > 0,$$

converge si et seulement si $\alpha + \beta > 1$.

III.6.15. Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites positives, décroissantes et convergentes vers 0. Prouver que la convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ est une condition suffisante pour la convergence du produit de Cauchy des séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ et que la convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a_n b_n)^{1+\alpha}$ pour tout $\alpha > 0$ est une condition nécessaire à la convergence de leur produit de Cauchy.

III.7. Réarrangement de séries. Séries doubles

III.7.1. Soit $\{m_k\}$ une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs. On pose

$$b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{m_1}, \quad b_2 = a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \ldots + a_{m_2}, \quad \ldots$$

Prouver que si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge aussi et les deux séries ont la même somme.

III.7.2. On considère la série

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \ldots,$$

obtenue en réarrangeant les termes de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ de sorte que chaque terme positif soit suivi de deux termes négatifs. Trouver la somme de cette série.

III.7.3. On réarrange les termes de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ de sorte que des blocs de α termes positifs alternent avec des blocs de β termes négatifs, soit

$$1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2\alpha-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2\beta}+\frac{1}{2\alpha+1}+\frac{1}{2\alpha+3}+\ldots+\frac{1}{4\alpha-1} \\ -\frac{1}{2\beta+2}-\frac{1}{2\beta+4}-\ldots-\frac{1}{4\beta}+\ldots$$

Trouver la somme de la série réarrangée.

III.7.4. Montrer que

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}-\ldots=0.$$

III.7.5. Trouver un réarrangement de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ qui double la valeur de sa somme.

III.7.6. Réarranger les termes de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour obtenir une série divergente.

III.7.7. Étudier la convergence de la série

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$$

obtenue en prenant alternativement deux termes positifs et un terme négatif de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

III.7.8. Prouver que tout réarrangement d'une série absolument convergente est convergent et a la même somme que la série initiale.

III.7.9. Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction décroissante tendant vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ telle que la suite $\{nf(n)\}$ tende vers $+\infty$. On note S la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} f(n)$. Étant donné l, trouver un réarrangement de cette série qui converge vers $S+l$.

III.7.10. Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction décroissante et tendant vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} nf(n) = g$, $g \in \mathbb{R}_+^*$. On note S la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} f(n)$. Étant donné l, trouver un réarrangement de cette série qui converge vers $S + l$.

III.7.11. Réarranger les termes de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ ($p \in]0\,,1[$) pour augmenter sa somme de l.

III.7.12. Pour $\alpha > 0$, trouver un réarrangement de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ dont la somme est égale à $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \alpha$ en utilisant **III.7.10**.

III.7.13. Est-il possible d'accélérer par un réarrangement la divergence d'une série divergente dont les termes sont positifs et forment une suite décroissante ?

III.7.14. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série divergente à termes positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Démontrer qu'il est possible de ralentir arbitrairement la divergence de cette série par un réarrangement, autrement dit, que pour toute suite $\{Q_n\}$ strictement croissante vérifiant $0 < Q_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = +\infty$, il existe un réarrangement $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{n_k}$ tel que

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_m} \leqslant Q_m \quad \text{pour} \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

III.7.15. Soit $\{r_n\}$ et $\{s_n\}$ deux suites strictement croissantes d'entiers strictement positifs n'ayant pas de termes communs et telles que tout élément de $\mathbb{N}^*$ se trouve dans l'une des deux suites. Les deux sous-séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{r_n}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{s_n}$ sont appelées des *sous-séries complémentaires* de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. On dit que le réarrangement déplace les deux sous-séries complémentaires l'une par rapport à l'autre si, pour tout couple d'entiers m et n tel que $m < n$, le terme a_{r_m} précède le terme a_{r_n} et le terme a_{s_m} précède le terme a_{s_n}. Prouver que l'on peut réarranger les termes d'une série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ semi-convergente par un déplacement des deux sous-séries formées respectivement des termes positifs et négatifs pour donner une série semi-convergente dont la somme est égale à un réel donné.

III.7.16. Soit $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{n_k}$ un réarrangement d'une série semi-convergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Prouver que si $\{n_k - k\}$ est une suite bornée, alors $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{n_k} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Que se passe-t-il si la suite $\{n_k - k\}$ n'est pas bornée ?

III.7.17. Soit $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{n_k}$ un réarrangement d'une série semi-convergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Prouver que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{n_k} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ si et seulement s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que tout ensemble $\{n_k : 1 \leqslant k \leqslant m\}$ soit l'union d'au plus N blocs disjoints d'entiers consécutifs.

III.7.18. On associe à un tableau infini de réels $\{a_{i,k}\}$, $i \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, une *série double* $\sum\limits_{i,k=1}^{+\infty} a_{i,k}$. On dit que la série double converge vers $S \in \mathbb{R}$ si, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$|S_{m,n} - S| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad m, n > n_0,$$

où

$$S_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.$$

On écrit alors

$$S = \lim_{m,n \to +\infty} S_{m,n} = \sum_{i,k=1}^{+\infty} a_{i,k}.$$

On dit que $\sum\limits_{i,k=1}^{+\infty} a_{i,k}$ est absolument convergente si $\sum\limits_{i,k=1}^{+\infty} |a_{i,k}|$ converge. On note que les termes d'un tableau infini $(a_{i,k})_{i,k \in \mathbb{N}^*}$ peuvent être ordonnés pour former une suite $\{c_n\}$. La série correspondante $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ est appelée un *ordonnancement de* $\sum\limits_{i,k=1}^{+\infty} a_{i,k}$ *en une série simple*. Prouver que si un ordonnancement d'une série double converge absolument, alors la série double converge (absolument) vers la même somme.

III.7.19. Prouver que si la série double $\sum\limits_{i,k=1}^{+\infty} a_{i,k}$ est absolument convergente, alors tous ses ordonnancements $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ convergent et

$$\sum_{i,k=1}^{+\infty} a_{i,k} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n.$$

III.7.20. Prouver qu'une série double absolument convergente est convergente.

III.7.21. La *série itérée* $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{i,k}\right)$ est absolument convergente si $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |a_{i,k}|\right)$ converge et de même pour $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_{i,k}\right)$. Prouver qu'une série itérée absolument convergente est convergente.

III.7.22. Prouver que si la série double $\sum\limits_{i,k=1}^{+\infty} a_{i,k}$ est absolument convergente, alors les deux séries itérées

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_{i,k}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,k}\right)$$

sont absolument convergentes et

$$\sum_{i,k=1}^{+\infty} a_{i,k} = \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_{i,k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,k}\right).$$

III.7.23. Prouver que si une des quatre séries

$$\sum_{i,k=1}^{+\infty} |a_{i,k}|, \qquad \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |a_{i,k}|\right), \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |a_{i,k}|\right),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_{n,1}| + |a_{n-1,2}| + |a_{n-2,3}| + \ldots + |a_{1,n}|\right)$$

converge, alors les quatre séries

$$\sum_{i,k=1}^{+\infty} a_{i,k}, \qquad \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_{i,k}\right), \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,k}\right),$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_{n,1}+a_{n-1,2}+a_{n-2,3}+\ldots+a_{1,n}\right)$$

convergent vers la même somme.

III.7.24. Calculer

$$\sum_{n,k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!k!(n+k+1)}.$$

III.7.25. Trouver

$$\sum_{n,k=1}^{+\infty} \frac{1}{nk(n+k+2)}.$$

III.7.26. Montrer que

$$\sum_{n,k=0}^{+\infty} \frac{n!k!}{(n+k+2)!} = \frac{\pi^2}{6}.$$

III.7.27. Pour $0 < x < 1$, on considère le tableau infini

$$\begin{pmatrix} x & -x^2 & x^2 & -x^3 & x^3 & \ldots \\ x(1-x) & -x^2\left(1-x^2\right) & x^2\left(1-x^2\right) & -x^3\left(1-x^3\right) & x^3(1-x^3) & \ldots \\ x\left(1-x\right)^2 & -x^2\left(1-x^2\right)^2 & x^2\left(1-x^2\right)^2 & -x^3\left(1-x^3\right)^2 & x^3\left(1-x^3\right)^2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Prouver qu'une seule des séries itérées associées à ce tableau converge (pas absolument).

III.7.28. Étudier la convergence des séries doubles suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{i,k=0}^{+\infty} x^i y^k$, où $|x|, |y| < 1$,

(b) $$\sum_{i,k=1}^{+\infty} \frac{1}{i^{\alpha} k^{\beta}}, \quad \text{où} \quad \alpha, \beta > 0,$$

(c) $$\sum_{i,k=1}^{+\infty} \frac{1}{(i+k)^{p}}, \quad \text{où} \quad p > 0.$$

III.7.29. Trouver la somme des séries doubles suivantes :

(a) $$\sum_{i,k=2}^{+\infty} \frac{1}{(p+i)^{k}}, \quad \text{où} \quad p > -1,$$

(b) $$\sum_{i=2,k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^{i}},$$

(c) $$\sum_{i,k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4i-1)^{2k}}.$$

III.7.30. Étant donné un tableau infini $(b_{i,k})_{i,k\in\mathbb{N}^*}$, prouver qu'il existe une unique série double $\sum\limits_{i,k=1}^{+\infty} a_{i,k}$ telle que

$$S_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = b_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{N}^*.$$

III.7.31. En prenant

$$b_{i,k} = (-1)^{i+k} \left(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^k} \right), \quad i, k = 1, 2 \ldots$$

dans le problème précédent, étudier la convergence de la série double correspondante $\sum\limits_{i,k=1}^{+\infty} a_{i,k}$.

III.7.32. Montrer que la série double $\sum\limits_{i,k=1}^{+\infty} x^{ik}$ est absolument convergente si $|x| < 1$. Utiliser ceci pour prouver que

$$\sum_{i,k=1}^{+\infty} x^{ik} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \theta(n) x^n = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n^2}}{1-x^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2},$$

où $\theta(n)$ représente le nombre de diviseurs positifs de n.

III.7.33. Montrer que la série double $\sum\limits_{i,k=1}^{+\infty} ix^{ik}$ est absolument convergente si $|x| < 1$. Prouver de plus que

$$\sum_{i,k=1}^{+\infty} ix^{ik} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma(n)x^n,$$

où $\sigma(n)$ représente la somme des diviseurs positifs de n.

III.7.34. On note $\zeta(p) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$, la *fonction zêta de Riemann*. On pose

$$S_p = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \zeta(p) - 1, \quad p > 1.$$

Prouver que

(a) $\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty} S_p = 1,$ (b) $\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p S_p = \frac{1}{2}.$

III.7.35. Prouver le *théorème de Goldbach* suivant.
Si $\mathbf{A} = \{k^m : m, k = 2, 3, \ldots\}$, alors $\sum\limits_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n-1} = 1$.

III.7.36. On note ζ la fonction zêta de Riemann (voir **III.7.34**). Prouver que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\zeta(2)\zeta(2n-2) + \zeta(4)\zeta(2n-4) + \ldots + \zeta(2n-2)\zeta(2) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\zeta(2n).$$

III.7.37. En utilisant le résultat du problème précédent, trouver la somme des séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8}.$$

III.8. Produits infinis

III.8.1. Trouver la valeur de

(a) $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, (b) $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$,

(c) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{x}{2^n}$, $\quad x\neq 2^m\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right), m\in\mathbb{N}^*, k\in\mathbb{Z}$,

(d) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}$, $x\in\mathbb{R}$, (e) $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+x^{2^n}\right)$, $|x|<1$,

(f) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)$, (g) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}$, $a>0$,

(h) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$, (i) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{9n^2}{9n^2-1}$.

III.8.2. Étudier la convergence des produits infinis suivants :

(a) $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$, (b) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

(c) $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

III.8.3. Soit $a_n\geqslant 0$, $n\in\mathbb{N}^*$. Prouver que le produit infini $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ converge.

III.8.4. Soit $a_n\geqslant 0$, $a_n\neq 1$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. Prouver que le produit infini $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1-a_n)$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ converge.

III.8.5. On pose

$$a_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\,, \qquad a_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{n}}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que le produit infini $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ converge bien que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

III.8.6. Étudier la convergence des produits :

(a) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \cos\frac{1}{n}\,,$ (b) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} n\sin\frac{1}{n}\,,$

(c) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right),$ (d) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$

(e) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}\,,$ (f) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n^2]{n}\,.$

III.8.7. On considère la série convergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Prouver que le produit infini $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge. Prouver aussi que si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ diverge, alors le produit $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ diverge vers 0.

III.8.8. Soit $\{a_n\}$ une suite décroissante tendant vers 0. Prouver que le produit $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+(-1)^n a_n)$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge.

III.8.9. Prouver que le produit $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge bien que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.

III.8.10. Démontrer que si les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n - \frac{1}{2}a_n^2\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^3$$

convergent toutes deux, le produit $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ converge alors aussi.

III.8.11. La convergence du produit $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ implique-t-elle celle des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$?

Indication : considérez le produit

$$\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{3^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{3^{2\alpha}}\right)\ldots,$$

où $\frac{1}{3}<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

III.8.12. Prouver la généralisation suivante du résultat donné en **III.8.10**. Pour $k\geqslant 2$, si les deux séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}a_n^2+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}a_n^k\right)\quad\text{et}\quad\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^{k+1}$$

convergent, le produit $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ converge alors aussi.

III.8.13. Prouver que la convergence de $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ et de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ impliquent celle de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

III.8.14. Prouver que si les produits $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ et $\prod_{n=1}^{+\infty}(1-a_n)$ convergent, alors les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ convergent aussi.

III.8.15. Soit $\{a_n\}$ une suite décroissante tendant vers 1. Le produit

$$a_1\cdot\frac{1}{a_2}\cdot a_3\cdot\frac{1}{a_4}\cdot a_5\ldots$$

est-il toujours convergent ?

III.8.16. Soit $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\prod_{n=1}^{+\infty} b_n$ deux produits convergents à facteurs strictement positifs. Étudier la convergence de

(a) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$, (b) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} a_n^2$,

(c) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$, (d) $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

III.8.17. Montrer que pour $x_n \in \left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, $n \in \mathbb{N}^*$, les produits

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \cos x_n \quad \text{et} \quad \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin x_n}{x_n}$$

convergent si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2$ converge.

III.8.18. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série convergente à termes strictement positifs. On note S_n sa n-ième somme partielle. Montrer que

$$a_1 \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{a_n}{S_{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

III.8.19. Prouver que si le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$, $a_n > -1$, converge vers P, alors la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}$$

converge aussi. De plus, si S est sa somme, alors $S = 1 - \frac{1}{P}$.

III.8.20. On suppose que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n), \quad \text{où} \quad a_n > 0, n \in \mathbb{N}^*,$$

diverge. Prouver que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)} = 1.$$

III.8.21. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)} = 1 \quad \text{pour} \quad x > 1.$$

III.8.22. Soit $a_n \neq 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que le produit infini $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si et seulement si le *critère de Cauchy* suivant est vérifié. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que

$$|a_n a_{n+1} \dots a_{n+k} - 1| < \varepsilon$$

pour tout $n \geqslant n_0$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

III.8.23. Pour $|x| < 1$, vérifier la proposition suivante :

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + x^n) = \frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 - x^{2n-1})}.$$

III.8.24. Le *produit* $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n)$ est *absolument convergent* si $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 + |a_n|)$ converge. Prouver que le produit $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n)$ est absolument convergent si et seulement si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ est absolument convergente.

III.8.25. Prouver qu'un produit $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n)$ absolument convergent est convergent.

III.8.26. Prouver que si le produit $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n)$ est absolument convergent, alors

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{\substack{n_1, n_2 = 1 \\ n_1 < n_2}}^{+\infty} a_{n_1} a_{n_2} + \dots + \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_k = 1 \\ n_1 < n_2 < \dots < n_k}}^{+\infty} a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_k} + \dots$$

III.8.27. Soit $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ un produit absolument convergent. Prouver que le produit $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_nx)$ est absolument convergent pour tout $x\in\mathbb{R}$ et peut être développé en une série absolument convergente,

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_nx)=1+\sum_{k=1}^{+\infty}A_kx^k,$$

où

$$A_k=\sum_{\substack{n_1,n_2,\dots,n_k=1\\ n_1<n_2<\dots<n_k}}^{+\infty}a_{n_1}a_{n_2}\dots a_{n_k}.$$

III.8.28. Établir l'égalité

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^nx)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}x^n,\qquad |q|<1.$$

III.8.29. Vérifiez l'identité

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1}x)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2n})}x^n,\qquad |q|<1.$$

III.8.30. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ une série absolument convergente. Prouver que si $x\neq 0$, alors

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_nx)\left(1+\frac{a_n}{x}\right)=B_0+\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right),$$

où $B_n=A_n+A_1A_{n+1}+A_2A_{n+2}+\dots$ $(n\in\mathbb{N})$ et

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_nx)=A_0+\sum_{k=1}^{+\infty}A_kx^k\quad \text{(voir \textbf{III.8.27})}.$$

III.8.31. Pour $|q|<1$ et $x\neq 0$, établir l'identité

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1}x)\left(1+\frac{q^{2n-1}}{x}\right)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}q^{n^2}\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right).$$

III.8.32. Vérifier les propositions suivantes pour $|q| < 1$:

(a) $$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n}\right)\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n-1}\right)^2 = 1+2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2},$$

(b) $$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n}\right)\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+q^{2n-1}\right)^2 = 1+2\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n^2},$$

(c) $$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n}\right)\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+q^{2n}\right)^2 = 1+\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n^2+n}.$$

III.8.33. Pour $x > 0$, on définit la suite $\{a_n\}$ en posant

$$a_1 = \frac{1}{1+x}, \quad a_n = \frac{n}{x+n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{x-k}{x+k}, \quad n > 1.$$

Prouver que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge et trouver sa somme.

III.8.34. Prouver que si le produit infini $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+ca_n)$ converge pour deux valeurs distinctes de $c \in \mathbb{R}^*$, il converge alors pour tout c.

III.8.35. Prouver que si la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \prod_{k=0}^{n}\left(x^2-k^2\right)$$

converge en $x = x_0$, $x_0 \notin \mathbb{Z}$, elle converge alors pour tout x.

III.8.36. On note $\{p_n\}$ la suite croissante des nombres premiers.

(a) Prouver la formule de *produit eulérien* suivante :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x} \quad \text{pour} \quad x > 1.$$

(b) Prouver que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{p_n}$ diverge (comparer avec **III.2.72**).

III.8.37. En utilisant la formule de Moivre, établir les identités

(a) $$\sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

(b) $$\cos x = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

III.8.38. Prouver la *formule de Wallis* en utilisant le résultat du problème précédent :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

III.8.39. Étudier la convergence des produits

(a) $$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}, \quad x > -1,$$

(b) $$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}, \quad x > -1.$$

III.8.40. Prouver que le produit infini $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ est absolument convergent si et seulement si tout réarrangement de ses facteurs ne change pas sa valeur.

III.8.41. Trouver la valeur du produit

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2\beta+1}\right)\left(1+\frac{1}{2\alpha+2}\right)\ldots$$

obtenu en réarrangeant les facteurs de $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ de telle sorte que des blocs de α facteurs plus grands que 1 alternent avec des blocs de β facteurs plus petits que 1.

III.8.42. Prouver que l'on peut réarranger le produit infini convergent mais pas absolument convergent $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$, $a_n > -1$, pour donner un produit dont la valeur soit un réel strictement positif donné ou pour donner un produit divergeant vers 0 ou vers $+\infty$. (Comparer avec **III.7.15**.)

Solutions

III.1. Sommation de séries

III.1.1.

(a) On a $a_1 = S_1 = 2$ et $a_n = S_n - S_{n-1} = -\frac{1}{n(n-1)}$, $n > 1$. On obtient donc la série $2 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ dont la somme est égale à $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.

(b) Comme dans la solution de (a), on obtient $a_n = \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$.

(c) Par un argument semblable, on a $a_n = \operatorname{Arctan} n - \operatorname{Arctan}(n-1)$, d'où $\tan a_n = \frac{1}{n^2-n+1}$. Donc, $a_n = \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2-n+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2-n+1} = \frac{\pi}{2}$.

(d) $a_1 = -1$, $a_n = (-1)^n \frac{2n-1}{n(n-1)}$ pour $n > 1$. De plus,

$$-1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{n(n-1)} = 0.$$

III.1.2.

(a) On a $a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$. Donc, $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ et $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.

(b) De même, $a_n = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$, $S_n = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$ et $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{8}$.

(c) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$. Donc, $S_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ et $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.

(d) $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$. Donc, $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

(e) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Donc, $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.

III.1.3.

(a)

$$\begin{aligned}S_n &= \ln 1 - \ln 4 + \ln 2 + \ln 4 - \ln 1 - \ln 7 + \ln 3 + \ln 7 - \ln 2 \\ &\quad - \ln 10 + \ldots + \ln n + \ln(3n-2) - \ln(n-1) - \ln(3n+1) \\ &\quad + \ln(n+1) + \ln(3n+1) - \ln n - \ln(3n+4) = \ln \frac{n+1}{3n+4}.\end{aligned}$$

Donc, $S = \ln \frac{1}{3}$.

(b) $S = \ln 2$.

III.1.4.

(a) On a

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)} \\ &= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\right).\end{aligned}$$

D'où, $S_n = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1\times 2\times\ldots\times m} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\right)$ et $S = \frac{1}{mm!}$.

(b) Puisque $a_n = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right)$, $S = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right)$.

(c) On a

$$\begin{aligned}\frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} &= \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+3)(n+4)} \\ &\quad - \frac{11}{2}\left(\frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+4)}\right) \\ &\quad + \frac{11}{4}\left(\frac{1}{(n+1)(n+4)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right).\end{aligned}$$

Comme en (b), après un calcul simple, on obtient $S = \frac{5}{36}$.

III.1.5.

(a) Pour $n \geqslant 5$, on a

$$S_n = \sin\frac{\pi}{720} + \sin\frac{\pi}{360} + \sin\frac{\pi}{120} + \sin\frac{\pi}{30} + \sin\frac{\pi}{6}.$$

(b) On remarque que $0 \leqslant \frac{\ln n}{n - \ln n} < 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, $S = 0$.

III.1.6. Puisque $a_n = \sin \frac{1}{2^{n+1}} \cos \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\sin \frac{1}{2^{n-1}} - \sin \frac{1}{2^n}\right)$, on voit que $S = \frac{1}{2}\sin 1$.

III.1.7. On remarque que

$$\frac{1}{n!\,(n^4+n^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{(n+1)!((n+1)n+1)} - \frac{n-1}{n!(n(n-1)+1)} + \frac{1}{(n+1)!}\right).$$

Donc,

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{(n+1)!((n+1)n+1)} + 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

et, d'après **II.5.6**, on obtient $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}\,e$.

III.1.8. On note que pour $n > 1$, on a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n+1)-1}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)} - \frac{1}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}\right) \end{aligned}$$

et $a_1 = \frac{1}{3}$. Il s'ensuit que

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}\right),$$

ce qui implique le résultat demandé.

III.1.9. Comme dans la solution du problème précédent, on a

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)} &= \frac{a_n+1-1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)} \\ &= \frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_{n-1}+1)} - \frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)} \end{aligned}$$

pour $n > 1$. D'où, $S_n = 1 - \frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}$.

III.1.10.

(a) Si on prend $a_n = n-1$ dans le problème précédent, on a $g = +\infty$ et la somme de la série est donc égale à 1.

(b) Ici, on prend $a_n = 2n-1$ et, comme en (a), la somme de la série est égale à 1.

(c) On prend $a_n = -\frac{1}{n^2}$. On a alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} &((a_2+1)(a_3+1)\cdots(a_n+1))\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

D'après le résultat donné en **III.1.9**, la somme de la série est égale à 1.

III.1.11. Par définition, la suite $\{a_n\}$ croît vers $+\infty$. De plus, on a

$$a_n^2 - 4 = a_{n-1}^2\left(a_{n-1}^2 - 4\right)$$

et on peut prouver par récurrence que $a_n^2 - 4 = a_1^2 a_2^2 \cdots a_{n-1}^2\left(a_1^2 - 4\right)$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_1 a_2\cdots a_{n-1}} = \sqrt{a_1^2 - 4}. \tag{1}$$

On note aussi que pour $n > 1$,

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{a_1a_2\cdots a_{n-1}} - \frac{a_{n+1}}{a_1a_2\cdots a_n}\right).$$

Donc, d'après (1), la somme de la série est égale à

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2-4} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2-4}}{2}.$$

III.1.12. On observe que

$$\begin{aligned}\frac{1}{b} &= \frac{1!}{b-2} - \frac{2!}{(b-2)b},\\ \frac{2!}{b(b+1)} &= \frac{2!}{(b-2)b} - \frac{3!}{(b-2)b(b+1)},\\ &\ \,\vdots\\ \frac{n!}{b(b+1)\cdots(b+n-1)} &= \frac{n!}{(b-2)b(b+1)\cdots(b+n-2)}\\ &\quad - \frac{(n+1)!}{(b-2)b(b+1)\cdots(b+n-1)}.\end{aligned}$$

En additionnant membre à membre les égalités ci-dessus, on obtient

$$S_n = \frac{1}{b-2} - \frac{(n+1)!}{(b-2)b(b+1)\cdots(b+n-1)}.$$

Donc, d'après **II.5.87**, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{b-2}$.

III.1.13. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}$ et $A_n = a_n(a+n+1)$. On a alors $A_{n-1} - A_n = a_n(b-a-1)$ pour $n \in \mathbb{N}$, en posant de plus $A_{-1} = a$ et $a_{-1} = 1$. En additionnant membre à membre les égalités précédentes pour $n = 0$ à $n = N$, on obtient

$$a - A_N = A_{-1} - A_N = (b-a-1)\sum_{n=0}^{N} a_n = (b-a-1)S_{N+1}$$

ou, de façon équivalente, $a - a_N(a+N+1) = (b-a-1)S_{N+1}$. Donc,

$$a\left(1 - \frac{(a+1)\cdots(a+N+1)}{b(b+1)\cdots(b+N)}\right) = (b-a-1)S_{N+1}$$

et, d'après **II.5.87**, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{N+1} = \frac{a}{b-a-1}$.

III.1.14. D'après le problème précédent,

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)} = 1 + \frac{a}{b-a-1} = \frac{b-1}{b-a-1}. \tag{1}$$

En remplaçant a par $a+1$, on voit que

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)} = \frac{b-1}{b-a-2}. \tag{2}$$

En soustrayant (1) à (2), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)} &= \frac{b-1}{b-a-2} - \frac{b-1}{b-a-1}\\ &= \frac{b-1}{(b-a-1)(b-a-2)}.\end{aligned}$$

III.1.15. On pose $A_n = \frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+b)(a_3+b)\cdots(a_{n+1}+b)}$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$. On a alors $\frac{A_k}{A_{k-1}} = \frac{a_k}{a_{k+1}+b}$ ou, de façon équivalente, $A_ka_{k+1} + A_kb = A_{k-1}a_k$. En additionnant membre à membre ces égalités pour k variant de 2 à n, on obtient

$$A_na_{n+1} + S_nb - A_1b = A_1a_2. \tag{$*$}$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned} 0 < A_n a_{n+1} &= a_1 \frac{a_2 a_3 \cdots a_{n+1}}{(a_2+b)(a_3+b)\cdots(a_{n+1}+b)} \\ &= a_1 \frac{1}{\left(1+\frac{b}{a_2}\right)\left(1+\frac{b}{a_3}\right)\cdots\left(1+\frac{b}{a_{n+1}}\right)}. \end{aligned}$$

Donc, d'après **I.2.1**,

$$0 < A_n a_{n+1} < \frac{a_1}{b\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{a_k}}$$

et, par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n a_{n+1} = 0$. L'égalité $(*)$ entraîne alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{A_1(b+a_2)}{b} = \frac{a_1}{b}.$$

III.1.16. Avec la relation trigonométrique $4\cos^3 = \cos 3x + 3\cos x$, on obtient

$$\begin{aligned} 4\cos^3 x &= \cos 3x + 3\cos x, \\ 4\cos^3 3x &= \cos 3^2x + 3\cos 3x, \\ 4\cos^3 3^2x &= \cos 3^3x + 3\cos 3^2x, \\ &\ \ \vdots \\ 4\cos^3 3^n x &= \cos 3^{n+1}x + 3\cos 3^n x. \end{aligned}$$

En multipliant respectivement chaque membre de ces égalités par $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2} \ldots,$ $(-1)^n\frac{1}{3^n}$ et en les additionnant, on obtient $4S_n = 3\cos x + (-1)^n\frac{1}{3^n}\cos 3^{n+1}x$. Donc, $S = \frac{3}{4}\cos x$.

III.1.17.

(a) Par hypothèse,

$$\begin{aligned} f(x) &= af(bx) + cg(x), \\ af(bx) &= a^2 f(b^2x) + acg(bx), \\ a^2 f(b^2x) &= a^3 f(b^3x) + ca^2 g(b^2x), \\ &\ \ \vdots \\ a^{n-1}f(b^{n-1}x) &= a^n f(b^n x) + a^{n-1}cg(b^{n-1}x). \end{aligned}$$

Donc, $f(x) = a^n f(b^n x) + c(g(x) + ag(bx) + \ldots + a^{n-1}g(b^{n-1}x))$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n f(b^n x) = L(x)$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n g(b^n x) = \frac{f(x)-L(x)}{c}$.

(b) Comme en (a),

$$\begin{aligned}
f(x) &= af(bx) + cg(x),\\
a^{-1}f(b^{-1}x) &= f(x) + a^{-1}cg(b^{-1}x),\\
a^{-2}f(b^{-2}x) &= a^{-1}f(b^{-1}x) + ca^{-2}g(b^{-2}x),\\
&\vdots\\
a^{-n}f(b^{-n}x) &= a^{1-n}f(b^{1-n}x) + a^{-n}cg(b^{-n}x).
\end{aligned}$$

Donc,

$$af(bx) = a^{-n}f(b^{-n}x) - c\left(g(x) + a^{-1}g(b^{-1}x) + \ldots + a^{-n}g(b^{-n}x)\right)$$

et, en conséquence,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^n}\, g\left(\frac{x}{b^n}\right) = \frac{M(x) - af(bx)}{c}\,.$$

III.1.18. On peut appliquer le problème précédent aux fonctions $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \sin^3 \frac{x}{3}$ avec $a = 3$, $b = \frac{1}{3}$ et $c = -4$. Le résultat demandé se déduit des égalités $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n \sin \frac{x}{3^n} = x = L(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^{-n} \sin 3^n x = 0 = M(x)$.

III.1.19. On peut appliquer **III.1.17** à $f(x) = \operatorname{cotan} x$, $g(x) = \tan x$, $a = 2$, $b = 2$ et $c = 1$ et utiliser l'égalité

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{cotan} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{x}\,.$$

III.1.20. On applique **III.1.17** à

$$f(x) = \operatorname{Arctan} x, \qquad g(x) = \operatorname{Arctan} \frac{(1-b)x}{1+bx^2}, \qquad a = c = 1,$$

et on utilise la relation suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan}(b^n x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < b < 1,\\ \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x & \text{pour } b > 1. \end{cases}$$

III.1.21. Puisque $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, on a $a_{n+1}a_n = a_n^2 + a_{n-1}a_n$ pour $n \geqslant 1$. En additionnant membre à membre ces égalités, on obtient

$$S_n = a_n a_{n+1}, \quad n \geqslant 0. \tag{$*$}$$

On peut prouver par récurrence (voir **II.2.25**) que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right), \quad n \geqslant 0, \tag{i}$$

$$a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^{n+1}, \quad n \geqslant 1. \tag{ii}$$

La combinaison de $(*)$ et (ii) donne

$$\begin{aligned}\widetilde{S_n} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{S_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a_k a_{k+1}} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}a_{k+1} - a_k^2}{a_k a_{k+1}} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{k-1}}{a_k} - \frac{a_k}{a_{k+1}}\right) = \frac{a_n}{a_{n+1}}.\end{aligned}$$

D'après (i),

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)} \\ &= \frac{2}{1+\sqrt{5}}.\end{aligned} \tag{iii}$$

Donc, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\widetilde{S_n}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$.

III.1.22. On vérifie facilement que

$$(-1)^{n+1} = a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+3}, \quad n \geqslant 0. \tag{$*$}$$

Donc,

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a_k a_{k+2}} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}a_{k+2} - a_k a_{k+3}}{a_k a_{k+2}} \\ &= -\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_{k+3}}{a_{k+2}}\right) = -3 + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}.\end{aligned}$$

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sqrt{5} - 2$ d'après (iii) dans la solution du problème précédent.

III.1.23. D'après $(*)$ dans la solution du problème précédent, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan}\frac{1}{a_{2n+1}}-\operatorname{Arctan}\frac{1}{a_{2n+2}}&=\operatorname{Arctan}\frac{a_{2n+2}-a_{2n+1}}{a_{2n+1}a_{2n+2}+1}\\&=\operatorname{Arctan}\frac{a_{2n}}{a_{2n}a_{2n+3}}=\operatorname{Arctan}\frac{1}{a_{2n+3}}.\end{aligned}$$

La somme de ces égalités donne

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{a_1}=\sum_{k=1}^{n+1}\operatorname{Arctan}\frac{1}{a_{2k}}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{a_{2n+3}}.$$

Donc, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Arctan}\frac{1}{a_{2n}}=\frac{\pi}{4}$.

III.1.24.

(a) On remarque que $\operatorname{Arctan}\frac{2}{n^2}=\operatorname{Arctan}\frac{1}{n-1}-\operatorname{Arctan}\frac{1}{n+1}$ pour $n>1$. Donc, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Arctan}\frac{2}{n^2}=\operatorname{Arctan}2+\operatorname{Arctan}1+\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\pi$, la dernière égalité se déduisant du fait que $\operatorname{Arctan}a+\operatorname{Arctan}\frac{1}{a}=\frac{\pi}{2}$ pour $a>0$.

(b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\operatorname{Arctan}\frac{1}{n^2+n+1}=\operatorname{Arctan}\frac{1}{n}-\operatorname{Arctan}\frac{1}{n+1}$. On voit donc que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Arctan}\frac{1}{n^2+n+1}=\operatorname{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$.

(c) Puisque $\operatorname{Arctan}\frac{8n}{n^4-2n^2+5}=\operatorname{Arctan}\frac{2}{(n-1)^2}-\operatorname{Arctan}\frac{2}{(n+1)^2}$ pour $n>1$, on obtient, comme en (a),

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Arctan}\frac{8n}{n^4-2n^2+5}=\operatorname{Arctan}2+\operatorname{Arctan}2+\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}+\operatorname{Arctan}2.$$

III.1.25. On peut appliquer l'identité trigonométrique

$$\operatorname{Arctan}x-\operatorname{Arctan}y=\operatorname{Arctan}\frac{x-y}{1+xy}$$

pour obtenir le résultat demandé. On remarquera ici que les résultats du problème précédent ne sont que des cas particuliers du cas présent.

III.1.26. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ un réarrangement de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. On pose de plus $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $S'_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$ et $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$. Clairement, $S'_n\leqslant S$ et $\{S'_n\}$ converge donc vers une limite que l'on note S' telle que $S'\leqslant S$. Le même argument donne aussi $S\leqslant S'$.

III.1.27. Puisque

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{2^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

III.1.28. On présente une démonstration élémentaire de ces identités bien connues en suivant A.M. Yaglom et I.M. Yaglom, Uspehi Matem. Nauk (N.S.) 8 (1953) no. 5(57), pp. 181-187 (en russe).

(a) Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on a les inégalités $\sin x < x < \tan x$. Donc, $\operatorname{cotan}^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2 x$. En prenant $x = \frac{k\pi}{2m+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ et en additionnant ces inégalités pour k variant de 1 à m, on obtient

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < m + \sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2m+1}\,. \qquad \text{(i)}$$

On montre maintenant que

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Soit $0 < t < \frac{\pi}{2}$. D'après la formule de Moivre, on a

$$\begin{aligned} \cos nt + i \sin nt &= (\cos t + i \sin t)^n = \sin^n t\,(\operatorname{cotan} t + i)^n \\ &= \sin^n t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \operatorname{cotan}^{n-k} t. \end{aligned}$$

En prenant $n = 2m+1$ et considérant les parties imaginaires, on obtient

$$\sin(2m+1)t = \sin^{2m+1} t\, P_m\left(\operatorname{cotan}^2 t\right), \qquad \text{(iii)}$$

où

$$P_m(x) = \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \ldots \pm 1. \qquad \text{(iv)}$$

La substitution $t = \frac{k\pi}{2m+1}$ dans (iii) donne $P_m\left(\cot^2 \frac{k\pi}{2m+1}\right) = 0$. Les racines de P_m sont donc les $x_k = \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ et leur somme est égale à

$$\sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3}. \tag{v}$$

Ceci, (i) et (ii) impliquent

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < m + \frac{m(2m-1)}{3}.$$

On obtient l'égalité (a) en multipliant ces inégalités par $\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}$ et en faisant tendre m vers $+\infty$.

(b) Pour prouver la seconde égalité, on note que

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m} x_i x_j = 2\frac{\binom{2m+1}{5}}{\binom{2m+1}{1}},$$

où les x_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ sont les racines du polynôme (iv). L'égalité (v) implique alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \cot^4 \frac{k\pi}{2m+1} &= \left(\frac{m(2m-1)}{3}\right)^2 - 2\frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{5!}\\ &= \frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45}.\end{aligned}$$

L'inégalité $\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \cot^2 x$ (voir (a)) implique

$$\cot^4 x < \frac{1}{x^4} < 1 + 2\cot^2 x + \cot^4 x$$

pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$. En conséquence,

$$\begin{aligned}\frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45} &< \frac{(2m+1)^4}{\pi^4} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^4}\\ &< m + 2m\frac{2m-1}{3} + \frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45}.\end{aligned}$$

L'égalité (b) est donc prouvée.

Remarque. On notera ici qu'on peut utiliser la procédure précédente pour calculer la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

(c) La formule de Moivre implique pour $m = 4n$ ($n \in \mathbb{N}^*$),

$$\cos mt = \cos^m t - \binom{m}{2} \cos^{m-2} t \sin^2 t + \ldots + \sin^m t,$$

$$\sin mt = \binom{m}{1} \cos^{m-1} t \sin t + \ldots - \binom{m}{m-1} \cos t \sin^{m-1} t$$

et, en conséquence,

$$\operatorname{cotan} mt = \frac{\operatorname{cotan}^m t - \binom{m}{2} \operatorname{cotan}^{m-2} t + \ldots - \binom{m}{m-2} \operatorname{cotan}^2 t + 1}{\binom{m}{1} \operatorname{cotan}^{m-1} t - \binom{m}{3} \operatorname{cotan}^{m-3} t + \ldots - \binom{m}{m-1} \operatorname{cotan} t}.$$

Il découle de cette dernière égalité que les

$$x_k = \operatorname{cotan} \frac{4k\pi + \pi}{4m} \quad (k = 0, \ldots, m-1)$$

sont les racines de l'équation

$$x^m - \binom{m}{1} x^{m-1} - \binom{m}{2} x^{m-2} + \ldots + \binom{m}{m-1} x + 1 = 0,$$

ce qui implique

$$\sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{cotan} \frac{4k\pi + \pi}{4m} = m. \tag{1}$$

Puisque $m = 4n$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{cotan} \frac{4k\pi + \pi}{4m} &= \sum_{k=0}^{2n-1} \operatorname{cotan} \frac{4k\pi + \pi}{4m} + \sum_{k=2n}^{m-1} \operatorname{cotan} \frac{4k\pi + \pi}{4m} \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \operatorname{cotan} \frac{4k\pi + \pi}{4m} - \sum_{k=1}^{2n} \operatorname{cotan} \frac{4k\pi - \pi}{4m}. \end{aligned}$$

Ceci et (1) donnent

$$\begin{aligned} &\operatorname{cotan} \frac{\pi}{4m} - \operatorname{cotan} \frac{3\pi}{4m} + \operatorname{cotan} \frac{5\pi}{4m} - \operatorname{cotan} \frac{7\pi}{4m} \\ &+ \ldots + \operatorname{cotan} \frac{(2m-3)\pi}{4m} - \operatorname{cotan} \frac{(2m-1)\pi}{4m} = m. \end{aligned} \tag{2}$$

Puisque

$$\operatorname{cotan} \alpha - \operatorname{cotan} \beta = \tan(\alpha - \beta) \left(1 + \frac{1}{\tan \alpha \tan \beta}\right),$$

on déduit de (2) que

$$m = \tan \frac{\pi}{2m} \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{\tan \frac{\pi}{4m} \tan \frac{3\pi}{4m}} + \ldots + \frac{1}{\tan \frac{(2m-3)\pi}{4m} \tan \frac{(2m-1)\pi}{4m}} \right).$$

On a donc, avec l'inégalité $\frac{1}{x} > \frac{1}{\tan x}$ pour $0 < x < \pi/2$,

$$m < \tan\frac{\pi}{2m}\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{\frac{\pi}{4m}\,\frac{3\pi}{4m}} + \ldots + \frac{1}{\frac{(2m-3)\pi}{4m}\,\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\right). \tag{3}$$

On a aussi

$$\operatorname{cotan}\alpha - \operatorname{cotan}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

et, comme précédemment, on obtient, en utilisant l'inégalité $\frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$,

$$\begin{aligned} m &= \sin\frac{\pi}{2m}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4m}\sin\frac{3\pi}{4m}} + \ldots + \frac{1}{\sin\frac{(2m-3)\pi}{4m}\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\right) \\ &> \sin\frac{\pi}{2m}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{4m}\,\frac{3\pi}{4m}} + \ldots + \frac{1}{\frac{(2m-3)\pi}{4m}\,\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\right). \end{aligned}$$

Ceci et (3) donnent

$$\left(\frac{m}{\tan\frac{\pi}{2m}} - \frac{m}{2}\right)\frac{\pi^2}{16m^2} < \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{(2m-3)(2m-1)} < \frac{\pi^2}{16m\sin\frac{\pi}{2m}}.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient alors

$$\frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{5\times 7} + \ldots = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1} = \frac{\pi}{8}.$$

III.1.29. On a $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$. Donc, $\frac{1}{a_{n+1}-1} = -\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n-1}$. En additionnant ces égalités pour n allant de 1 à N, on obtient

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_N} = 1 - \frac{1}{a_{N+1}-1}. \tag{$*$}$$

On vérifie facilement que la suite $\{a_n\}$ croît et diverge vers $+\infty$. Donc, $(*)$ implique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n} = 1$.

III.1.30. Par définition de la suite, on a

$$\begin{aligned} e^{a_1} - 1 &= a_1 e^{a_2}, \\ e^{a_2} - 1 &= a_2 e^{a_3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}e^{a_1} - 1 &= a_1 + a_1 a_2 e^{a_3}\\ &= \ldots = a_1 + a_1 a_2 + \ldots + a_1 \cdots a_n + a_1 \cdots a_{n+1} e^{a_{n+2}}.\end{aligned}$$

Ceci implique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = e^{a_1} - 1$ car

$$\lim_{n\to+\infty} (a_1 \cdots a_{n+1} e^{a_{n+2}}) = 0.$$

En effet, $\{a_n\}$ est minorée par 0, est décroissante et converge vers 0.

III.1.31. On a $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_n + \frac{1}{S_n} - \sqrt{2}$. On considère la fonction $f(x) = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}$ pour $x > 0$. Si la suite $\{S_n\}$ converge vers S, on a alors $f(S) = S$. La seule solution de cette équation est $\frac{1}{\sqrt{2}}$. De plus, la fonction $x \mapsto f(f(x)) - x$ est décroissante sur l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}\,, 1\right[$. Donc, si $x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}\,, 1\right[$, alors

$$f(f(x)) - x < f\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

et on a aussi $f(f(x)) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour $x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}\,, 1\right[$ car f est décroissante sur l'intervalle $]0\,, 1[$. Finalement,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < f(f(x)) < x \quad \text{pour} \quad x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}\,, 1\right[.$$

Ceci signifie que la suite $\{S_{2n-1}\}$ est décroissante et minorée, donc convergente et sa limite est $\frac{1}{\sqrt{2}}$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(S_{2n-1}) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La somme de la série est donc égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

III.1.32.

(a) On remarque que

$$\begin{aligned}S_n &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n}\\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

Donc, d'après **II.5.8 (a)**, on a $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln 2$. Clairement,

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \ln 2.$$

(b) On a $\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$. On a donc, d'après (a),

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}\\ &= \ln 2 - (\ln 2 - 1) = 1.\end{aligned}$$

(c) On note S_n la n-ième somme partielle de la série. On a alors

$$S_n = \frac{1}{x+2n+1} + \frac{1}{x+2n+2} + \ldots + \frac{1}{x+4n-1} + \frac{1}{x+4n}.$$

Comme dans la démonstration de **II.5.8**, on peut montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln 2$. Clairement, $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \ln 2$.

III.1.33. On a

$$\begin{aligned}S_{2n} &= \ln\frac{2}{1} - \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} - \ln\frac{5}{4} + \ldots + \ln\frac{2n}{2n-1} - \ln\frac{2n+1}{2n}\\ &= \ln\frac{2\times 4\times\cdots\times 2n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)} - \ln\frac{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\\ &= \ln\left(\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\right).\end{aligned}$$

D'après la formule de Wallis (voir **III.8.38**), $\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln\frac{\pi}{2}$.

III.1.34. On a

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ &\quad= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right)\\ &\quad= -\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

D'après le problème précédent, la somme de la série est égale à $\ln 2 - 2\ln\frac{\pi}{2}$.

III.1.35. La n-ième somme partielle de la série peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - (\ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots + \ln(n+1) - \ln n) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1). \end{aligned}$$

Donc, d'après le **problème II.1.41**, la somme de cette série est égale à la constante d'Euler γ.

III.1.36. [20]. On pose $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$. D'après le théorème de Taylor, il existe x_k, y_k tels que $k < x_k < k + \frac{1}{2}$, $k + \frac{1}{2} < y_k < k + 1$ et

$$\begin{aligned} F\left(k + \frac{1}{2}\right) - F(k) &= \frac{1}{2} f(k) + \frac{1}{8} f'(x_k), \\ -F\left(k + \frac{1}{2}\right) + F(k+1) &= \frac{1}{2} f(k+1) - \frac{1}{8} f'(y_k). \end{aligned}$$

En additionnant ces égalités pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - F(n) \\ &\qquad = \frac{1}{8} \left(f'(y_1) - f'(x_1) + f'(y_2) - f'(x_2) + \ldots + f'(y_{n-1}) - f'(x_{n-1}) \right). \end{aligned}$$

La limite de l'expression dans le second membre de cette égalité existe car la série $-f'(x_1) + f'(y_1) - f'(x_2) + f'(y_2) - \ldots$ est convergente (les termes sont de signes alternés et leur valeur absolue décroît de façon monotone vers 0).

Si on prend $f(x) = \frac{1}{x}$, on peut alors prouver l'existence de la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

(comparez avec **II.1.41 (a)**). En prenant $f(x) = \ln x$, on peut montrer que la suite $\left\{ \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n \right\}$ converge (d'après la formule de Stirling, sa limite est $\ln \sqrt{2\pi}$).

III.1.37. En appliquant le problème précédent à la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $(x > 0)$, on peut montrer l'existence de la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \ldots + \frac{\ln n}{n} - \frac{(\ln n)^2}{2} \right) = s.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}-\ldots+\frac{\ln 2n}{2n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(-\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\ldots+\frac{\ln 2n}{2n}-\frac{(\ln 2n)^2}{2}\right)\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 4}{4}+\ldots+\frac{\ln 2n}{2n}\right)-\frac{(\ln 2n)^2}{2}\right)$$

$$= -s+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\ldots+\frac{\ln n}{n}-\frac{(\ln n)^2}{2}\right)$$

$$+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln 2}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\ldots+\frac{\ln 2}{n}-\ln 2\ln n\right)-\frac{(\ln 2)^2}{2}$$

$$= \ln 2\left(\gamma-\frac{\ln 2}{2}\right),$$

où γ est la constante d'Euler (voir **II.1.41**).

III.1.38. D'après la formule de Stirling, $n! = \alpha_n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, où $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = 1$. Donc,

$$S_n = \frac{1}{2}\ln\frac{(2n+1)^{2n}}{((2n-1)!!)^2\,e^{2n}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(2n+1)^{2n}\,2^{2n}\,(n!)^2}{((2n)!)^2\,e^{2n}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(2n+1)^{2n}\,2^{2n}\alpha_n^2 2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\alpha_{2n}^2 4\pi n\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}\,e^{2n}} = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}\frac{\alpha_n^2}{2\alpha_{2n}^2}\right).$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

III.1.39. On suppose que la série converge pour x et pour y et on écrit

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(n-1)k+1}+\frac{1}{(n-1)k+2}+\ldots+\frac{1}{nk-1}-\frac{x}{nk}\right).$$

On a alors $S_N(x)-S_N(y) = \frac{y-x}{k}\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$. La convergence de la série implique donc $x=y$. On trouve maintenant l'unique valeur de x pour laquelle la série converge. On sait, d'après le **problème II.1.41**, que la suite $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{nk} - \ln(nk)$ converge vers la constante d'Euler. Donc,

$$\begin{aligned} S_N(k-1) &= a_N + \ln(Nk) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{nk} - \sum_{n=1}^{N} \frac{k-1}{nk} \\ &= a_N + \ln k + \left(\ln N - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Ceci implique $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N(k-1) = \gamma + \ln k - \gamma = \ln k$. La série converge donc pour $x = k-1$ et sa somme est alors égale à $\ln k$.

III.1.40. On peut facilement vérifier par récurrence que

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 3n+2 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}, \\ a_{2n-1} &= 3n+1 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} S_{2N} &= \sum_{n=0}^{2N} (-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{1}{a_n^2 - 1} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{a_{2n}^2 - 1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{a_{2n-1}^2 - 1} \\ &= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{1}{(3n+1)(3n+3)} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{1}{3n(3n+2)} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+3} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \left(\frac{1}{3n} - \frac{1}{3n+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \left(\frac{1}{3n} - \frac{1}{3n+3} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{3n} + \frac{(-1)^{N+1}}{6(N+1)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2} \right). \qquad (*) \end{aligned}$$

D'autre part, d'après **III.1.32 (a)**, on a

$$\begin{aligned}
-\ln 2 &= \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{3N}(-1)^n\frac{1}{n}\right)\\
&= \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{1}{n}\right) - \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{3}\ln 2 - \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Ceci implique $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=0}^{N-1}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right) = \frac{2}{3}\ln 2$. Finalement, d'après $(*)$, $\lim\limits_{N\to+\infty} S_{2N} = \frac{1}{6}-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. De plus, puisque $\lim\limits_{N\to+\infty} S_{2N+1} = \lim\limits_{N\to+\infty} S_{2N} + \lim\limits_{N\to+\infty}\frac{(-1)^{N+1}}{(3N+4)^2-1} = \lim\limits_{N\to+\infty} S_{2N}$, la somme de la série est donc égale à $\frac{1}{4}$.

III.1.41.

(a) On suppose que la somme S de la série est un nombre rationnel $\frac{p}{q}$. On a alors $(q-1)!p = q!S = \sum\limits_{n=1}^{q}\frac{q!}{n!}+\sum\limits_{n=q+1}^{+\infty}\frac{q!}{n!}$. Ceci implique que $\sum\limits_{n=q+1}^{+\infty}\frac{q!}{n!}$ est un nombre entier. Mais on a aussi

$$\begin{aligned}
0 < \sum_{n=q+1}^{+\infty}\frac{q!}{n!} &\leqslant \frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)\,(q+2)^2}+\dots\\
&= \frac{q+2}{(q+1)^2}\leqslant\frac{3}{4},
\end{aligned}$$

contradiction. La somme S est donc irrationnelle.

(b) On peut appliquer la même méthode qu'en (a).

III.1.42. On suppose que la somme S de la série est un nombre rationnel $\frac{p}{q}$. On a alors

$$(q-1)!p = q!S = \sum_{n=1}^{q}\frac{q!\varepsilon_n}{n!}+\sum_{n=q+1}^{+\infty}\frac{q!\varepsilon_n}{n!}.$$

Ceci implique que $\sum\limits_{n=q+1}^{+\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!}$ est un nombre entier. Mais on a aussi

$$\left| \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!} \right| \leqslant \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{n!} < 1.$$

Il suffit, pour obtenir une contradiction, de prouver que $\sum\limits_{n=q+1}^{+\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!}$ n'est pas nul. On a

$$\left| \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!} \right| \geqslant \left| \frac{1}{q+1} - \sum_{n=q+2}^{+\infty} \frac{q!}{n!} \right| > \frac{1}{q+1} - \frac{1}{q(q+1)} \geqslant 0,$$

ce qui prouve que S est irrationnelle.

III.1.43. On peut appliquer un raisonnement semblable à celui du problème précédent.

III.1.44. Supposons que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n_i} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, il existe un entier positif k tel que $\frac{n_i}{n_1 n_2 \cdots n_{i-1}} > 3q$ si $i \geqslant k$. Donc,

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{n_1 n_2 \cdots n_{k-1} q}{n_i} + \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{n_1 n_2 \cdots n_{k-1} q}{n_i} = p n_1 n_2 \cdots n_{k-1}.$$

De plus,

$$\sum_{i=k}^{+\infty} \frac{n_1 n_2 \cdots n_{k-1} q}{n_i} < \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_k n_{k+1}} + \ldots \right) < 1,$$

contradiction.

III.1.45. Si la somme est un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, on a alors, pour tout entier positif k_1, $\sum\limits_{k=k_1}^{+\infty} \frac{1}{n_k} = \frac{p}{q} - \sum\limits_{k=1}^{k_1-1} \frac{1}{n_k}$. La somme $\sum\limits_{k=k_1}^{+\infty} \frac{q n_1 n_2 \cdots n_{k_1-1}}{n_k}$ est donc un nombre entier et on a

$$\sum_{k=k_1}^{+\infty} \frac{1}{n_k} \geqslant \frac{1}{q n_1 n_2 \cdots n_{k_1-1}}. \tag{1}$$

On pose $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \frac{n_k}{n_{k-1}} = l > 1$ et on choisit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\alpha = l - \varepsilon > 1$. Il existe alors un indice k_0 tel que

$$\frac{n_k}{n_{k-1}} \geqslant \alpha > 1 \tag{2}$$

si $k > k_0$. Il existe $k_1 > k_0$ tel que $\frac{n_{k_1}}{n_1\cdots n_{k_1-1}} > \frac{\alpha q}{\alpha-1}$ car $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \frac{n_k}{n_1\cdots n_{k-1}} = +\infty$. On a donc, d'après (2),

$$\sum_{k=k_1}^{+\infty} \frac{1}{n_k} \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^j n_{k_1}} = \frac{\alpha}{(\alpha-1)n_{k_1}} < \frac{1}{qn_1n_2\cdots n_{k_1-1}}$$

ce qui contredit (1).

III.1.46. Supposons que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n_k} = \frac{p}{q}$, p et q étant des entiers strictement positifs. On a alors

$$n_1n_2\cdots n_{k-1}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{n_{k+j}} \geqslant \frac{1}{q} \quad \text{pour tout } k \geqslant 2$$

(voir la solution du problème précédent). On pose $a_k = \sqrt[2^k]{n_k}$. Par hypothèse, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = +\infty$. Il existe r_1 tel que $a_j \leqslant a_{r_1}$ pour $j = 1, 2, \ldots, r_1 - 1$. En effet, si $a_1 \leqslant a_2$, $r_1 = 2$. Si ce n'est pas le cas, on choisit le plus petit entier $r_1 > 2$ tel que $a_1 \leqslant a_{r_1}$. Il existe en fait une suite infinie d'entiers r_k vérifiant la propriété précédente, c'est-à-dire tels que $a_j \leqslant a_{r_k}$ pour $j = 1, 2, \ldots, r_k - 1$. Pour trouver r_2, on applique la procédure précédente à la suite $\{a_k\}_{k\geqslant r_1}$, et ainsi de suite. On note r le plus petit entier positif tel que $a_{r+j} > q+1$ pour $j \in \mathbb{N}$ et $a_j \leqslant a_r$ pour $j = 1, 2, \ldots, r-1$. Puisque $n_r \leqslant n_{r+j}$, on observe aussi que $a_r \leqslant a_{r+j}^{2^j}$ pour $j \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que

$$\frac{n_1n_2\cdots n_{r-1}}{n_{r+j}} \leqslant \frac{a_r^{2+2^2+\ldots+2^{r-1}}}{n_{r+j}} \leqslant \frac{a_{r+j}^{2^j(2^r-2)}}{a_{r+j}^{2^{r+j}}} = a_{r+j}^{-2^{j+1}} < (q+1)^{-(j+1)}.$$

D'où,

$$n_1n_2\cdots n_{r-1}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{n_{r+j}} < \sum_{j=0}^{+\infty}(q+1)^{-(j+1)} = \frac{1}{q},$$

contradiction.

III.1.47. Puisque la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{q_n}$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n-1} = 0$. Il s'ensuit que $\frac{p_m}{q_m-1} \geqslant \sum\limits_{n=m}^{+\infty} \frac{p_n}{q_n}$. Supposons que l'ensemble $\mathbf{A}$ soit fini. Il existe alors un indice m tel que

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{q_n} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{p_n}{q_n} + \frac{p_m}{q_m - 1}.$$

S est donc rationnel. Supposons maintenant que $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. On a alors

$$r_n = \frac{p}{q} - \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{q_k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{p_k}{q_k} \leqslant \frac{p_{n+1}}{q_{n+1} - 1}.$$

En multipliant cette inégalité par $b_n = qq_1 \cdots q_n$, on obtient

$$\begin{aligned} b_{n+1}r_{n+1} &= b_n r_n q_{n+1} - qq_1 \cdots q_{n+1} \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \\ &\leqslant b_n r_n q_{n+1} - b_n r_n (q_{n+1} - 1) = b_n r_n. \end{aligned}$$

Ceci signifie que la suite $\{b_n r_n\}$ d'entiers positifs est décroissante et tous ses termes sont donc égaux à partir d'une certaine valeur de l'indice n, ce qui implique que l'ensemble $\mathbf{A}$ est fini.

III.1.48. On peut écrire $n! = 2^{\alpha(n)}\beta(n)$ où $\beta(n)$ est impair. Plus précisément, un théorème de Legendre affirme que $\alpha(n) = n - \nu(n)$, où $\nu(n)$ est la somme des 1 apparaissant dans l'écriture binaire de n. De plus, on a $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{n_k}}{n_k!} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \delta_n \frac{2^n}{n!}$, où $\delta_n = 1$ si $n = n_k$ et 0 autrement. Supposons que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \delta_n \frac{2^n}{n!} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$. On écrit $q = 2^s t$ avec t impair et on prend $N = 2^r > \max\left\{t, 2^{s+2}\right\}$. Il s'ensuit que $\frac{\beta(N)}{t} \in \mathbb{N}^*$. Donc, $2^s\beta(N)\frac{p}{q} = \frac{\beta(N)}{t} p \in \mathbb{N}^*$. Un calcul simple montre que $N! = 2^{N-1}\beta(N)$ (ce qui peut se retrouver directement à partir du théorème de Legendre). En multipliant l'égalité

$$\frac{p}{q} = \sum_{n=1}^{N} \delta_n \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \delta_n \frac{2^n}{n!}$$

par $2^s\beta(N)$, on obtient

$$2^s\beta(N)\frac{p}{q} = 2^s\beta(N) \sum_{n=1}^{N} \delta_n \frac{2^n}{n!} + 2^s\beta(N) \sum_{n=N+1}^{+\infty} \delta_n \frac{2^n}{n!}. \qquad (*)$$

On note que

$$2^s\beta(N)\sum_{n=1}^{N}\delta_n\frac{2^n}{n!}=2^s\sum_{n=1}^{N}\delta_n\frac{\beta(N)2^n}{2^{\alpha(n)}\beta(n)}\,.$$

Puisque $\beta(n)$ divise $\beta(N)$, on voit que le premier terme dans le second membre de $(*)$ est un entier. Pour obtenir une contradiction, on montre que $0<2^s\beta(N)\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}\delta_n\frac{2^n}{n!}<1$. En effet,

$$\begin{aligned}2^s\beta(N)\sum_{n=N+1}^{+\infty}\delta_n\frac{2^n}{n!}&=2^{s-N+1}N!\sum_{n=N+1}^{+\infty}\delta_n\frac{2^n}{n!}\\&=2^{s+2}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\delta_n2^{n-N}\frac{N!}{n!}\\&<\frac{2^{s+2}}{N+1}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(\frac{2}{N+2}\right)^{n-N-1}\\&=\frac{2^{s+2}}{N+1}\cdot\frac{N+2}{N}<\frac{2^{s+3}}{N+1}<1.\end{aligned}$$

III.2. Séries à termes positifs

III.2.1.

(a) On a

$$\begin{aligned}a_n&=\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+1}\\&=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt[3]{n^3+1}}\\&\quad\times\frac{3n^4-2n^3+3n^2}{(n^2+1)^2+(n^2+1)\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+(n^3+1)\sqrt[3]{n^3+1}}.\end{aligned}$$

Et,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\,.$$

D'après le test de comparaison, la série diverge.

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{n}{n^2+n+1}\right)^n=\frac{1}{e}$ et, d'après le test de la racine de Cauchy, la série converge.

(c) On peut vérifier par récurrence que

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} > \frac{1}{2n-1} \quad \text{pour } n > 2.$$

D'après le test de comparaison, la série est divergente.

(d) La série est convergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e}$.

(e) $1 - \cos\frac{1}{n} = 2\sin^2\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n^2}$ et la série est donc convergente.

(f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$, ce qui montre la convergence de la série.

(g) D'après le **problème II.5.4 (a)**, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}} = \ln a$$

et la série est donc divergente.

III.2.2.

(a) La série converge car $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n^2}$.

(b) La convergence de la série se déduit de l'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{n+1}{n-1} < \frac{2}{\sqrt{n}(n-1)} \quad \text{pour} \quad n > 1.$$

(c) En utilisant l'inégalité $\ln n < n$, on obtient $\frac{1}{n^2-\ln n} < \frac{1}{n(n-1)}$. La série est donc convergente.

(d) On a

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln\ln n}}.$$

La série est donc convergente.

(e) En appliquant des méthodes du calcul différentiel, on peut prouver l'inégalité $(\ln\ln x)^2 < \ln x$ pour x suffisamment grand. Donc,

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}} = \frac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}} > \frac{1}{n}$$

pour n suffisamment grand. Ceci prouve la divergence de la série.

III.2.3. On pose $c_n = \frac{a_n}{b_n}$. Par hypothèse,

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \frac{a_n}{b_n} = c_n \quad \text{pour } n \geqslant n_0.$$

La suite $\{c_n\}$ est donc décroissante pour $n \geqslant n_0$. Ceci implique que la suite est bornée, autrement dit, qu'il existe $C > 0$ tel que $0 < c_n < C$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. D'où, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n b_n < C \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, ce qui complète la démonstration de la proposition.

III.2.4.

(a) D'après le **problème II.1.38**, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}}{e} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}.$$

La convergence de la série se déduit alors du test de convergence donné au problème précédent.

(b) De même, d'après **II.1.38**, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{e} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

Si la série donnée était convergente, d'après le **problème III.2.3**, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ le serait aussi. La série donnée est donc divergente.

III.2.5.

(a) D'après le **problème II.5.4 (a)**, les séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{a}-1\right)^{\alpha}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ convergent ou divergent en même temps. La série donnée converge donc pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leqslant 1$.

(b) La solution du **problème II.5.4 (b)** implique $\ln n < n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$. Donc, pour $n > 3$ et $\alpha > 0$, on a

$$\frac{1}{n^{\alpha}} < \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha} < \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\alpha}.$$

Ceci implique que la série donnée est divergente pour $0 < \alpha \leqslant 1$. On remarque aussi que, pour $\alpha \leqslant 0$, la condition nécessaire pour que la série converge, $\lim a_n = 0$, n'est pas vérifiée. Pour $\alpha > 1$, d'après le **problème II.5.5**, la série converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha}$ converge. La convergence de cette dernière série se déduit du **problème III.2.3**, car pour n suffisamment grand, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n\ln(n+1)}{(n+1)\ln n}\right)^{\alpha} \leqslant 2^{\alpha}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}.$$

(c) D'après **II.5.5**, la série donnée converge si et seulement si la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e}\right)^{\alpha}$$

converge. Avec l'inégalité $\frac{2x}{2+x} < \ln(1+x) < x$, vérifiée pour $x > 0$ (voir le **problème II.5.3**), on obtient

$$\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1\right)^{\alpha} < \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{pour} \quad \alpha > 1$$

et

$$\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1\right)^{\alpha} > \frac{1}{(2n+1)^{\alpha}} \quad \text{pour} \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

La série donnée est donc convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $0 < \alpha \leqslant 1$. De plus, on remarque que pour $\alpha \leqslant 0$, la condition nécessaire pour que la série soit convergente n'est pas vérifiée.

(d) On vérifie facilement que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-n\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{6}.$$

La série donnée est donc convergente si et seulement si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge. Notre série est donc convergente pour $\alpha > \frac{1}{2}$ et divergente pour $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

III.2.6. D'après le **problème II.5.5**, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n\ln a}{a^{a_n}-1} = 1$ et notre série converge donc si et seulement si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

III.2.7.

(a) La convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$ se déduit du fait que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2n^2}} = 1.$$

(b) Si $c \neq 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}} = e^{\frac{a}{c}} \neq 0.$$

La série donnée est donc divergente. Si $c = 0$ et $\frac{a}{d} \geqslant 0$, alors la condition de convergence $\lim a_n = 0$ n'est pas vérifiée. Si $c = 0$ et $\frac{a}{d} < 0$, alors

$$e^{\frac{a\ln n+b}{d}} = e^{\frac{b}{d}}e^{\frac{a}{d}\ln n} = e^{\frac{b}{d}}n^{\frac{a}{d}}.$$

Dans ce cas, notre série converge donc si $\frac{a}{d} < -1$ et diverge si $\frac{a}{d} \geqslant 1$.

(c) On a

$$\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} = \frac{1}{(n+a)^b\left(1+\frac{a}{n}\right)^n(n+b)^a\left(1+\frac{b}{n}\right)^n}.$$

La série converge donc si et seulement si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{a+b}}$ converge.

III.2.8. La convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ est une conséquence immédiate de l'inégalité $\sqrt{a_na_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$. De plus, si la suite $\{a_n\}$ est décroissante, alors $\sqrt{a_na_{n+1}} \geqslant a_{n+1}$. La convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ se déduit donc de celle de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$.

On considère maintenant la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \dfrac{1}{n^4} & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

On a alors

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_ka_{k+1}} < \sum_{k=1}^{2n}\sqrt{a_ka_{k+1}} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ converge donc alors que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

III.2.9.

(a) On remarque d'abord que si la suite $\{a_n\}$ est majorée par $M > 0$, alors

$$\frac{a_n}{1+a_n} \geqslant \frac{a_n}{1+M}.$$

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ est donc divergente. D'autre part, si la suite $\{a_n\}$ n'est pas majorée, il existe alors une sous-suite $\{a_{n_k}\}$ tendant vers $+\infty$. Donc,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}} = 1$$

et la condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée.

(b) La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ peut converger ou diverger. Pour le montrer, considérons l'exemple suivant :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m^2,\ m \in \mathbb{N}^*, \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge. De plus, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+ka_k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+k^2} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}.$$

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ converge donc dans ce cas. En revanche, si on prend $a_n = \frac{1}{n}$, on voit que les deux séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ peuvent diverger.

(c) La convergence de la série en question se déduit de l'inégalité

$$\frac{a_n}{1+n^2a_n} \leqslant \frac{a_n}{n^2a_n} = \frac{1}{n^2}.$$

(d) Si la suite est majorée par M, alors

$$\frac{a_n}{1+a_n^2} \geqslant \frac{a_n}{1+M^2}.$$

Dans ce cas, la série est divergente. Mais, si par exemple $a_n = n^2$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ converge.

III.2.10. Pour des entiers n et p strictement positifs, on a

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \ldots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \geqslant \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k}{S_{n+p}} = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}}.$$

Puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}} = 1$, la suite des sommes partielles n'est pas une suite de Cauchy et la série considérée diverge donc.

D'autre part,

$$\frac{a_n}{S_n^2} \leqslant \frac{a_n}{S_n S_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n},$$

d'où

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{S_{k-1}} - \frac{1}{S_k} \right) = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+p}} < \frac{1}{S_n}.$$

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ converge donc d'après le critère de Cauchy.

III.2.11. On a

$$\frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\beta}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}^{\beta}}.$$

Soit p un entier strictement positif tel que $\frac{1}{p} < \beta$. Pour n suffisamment grand, l'inégalité

$$\frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\beta}} < \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}$$

est alors vérifiée. Il suffit donc d'établir la convergence de la série de terme général $\frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}$. Pour cela, on montre que l'inégalité

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}^{\frac{1}{p}}} \leqslant p \left(\frac{1}{S_{n-1}^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{S_n^{\frac{1}{p}}} \right)$$

est vérifiée. Cette dernière inégalité est équivalente à

$$1 - \frac{S_{n-1}}{S_n} \leqslant p \left(1 - \frac{S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}{S_n^{\frac{1}{p}}} \right).$$

Ceci se déduit de l'inégalité facilement démontrable $1 - x^p \leqslant p(1-x)$ qui est vérifiée pour $0 < x \leqslant 1$. Il suffit de poser $x = \left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)^{\frac{1}{p}}$. Donc (voir la solution du problème précédent), la convergence de la série est établie pour $\beta > 0$.

III.2.12. On suppose d'abord que $\alpha > 1$. On a alors, pour $n \geqslant 2$,

$$\frac{a_n}{S_n^\alpha} \leqslant \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\alpha-1}}.$$

La convergence se déduit donc du problème précédent. On suppose maintenant que $\alpha \leqslant 1$. On a alors $\frac{a_n}{S_n^\alpha} \geqslant \frac{a_n}{S_n}$ pour n suffisamment grand, ce qui, d'après le **problème III.2.10**, implique la divergence de la série pour $\alpha \leqslant 1$.

III.2.13.

(a) Par hypothèse, la suite $\{r_n\}$ est décroissante et tend vers 0. De plus,

$$\frac{a_n}{r_{n-1}} = \frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}}.$$

Donc, pour tous entiers n et p strictement positifs, on a

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{r_n} + \ldots + \frac{a_{n+p}}{r_{n+p-1}} &= \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n} + \ldots + \frac{r_{n+p-1} - r_{n+p}}{r_{n+p-1}} \\ &> \frac{r_n - r_{n+p}}{r_n} = 1 - \frac{r_{n+p}}{r_n}.\end{aligned}$$

Pour n fixé, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(1 - \frac{r_{n+p}}{r_n}\right) = 1$. La divergence de la série se déduit donc du critère de Cauchy.

(b) On a

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}} &= \frac{r_{n-1} - r_n}{\sqrt{r_{n-1}}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}\right)\left(\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}\right)}{\sqrt{r_{n-1}}} \\ &< 2\left(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}\right).\end{aligned}$$

On montre, en appliquant cette inégalité, que la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}}$ est une suite de Cauchy. Elle converge donc.

III.2.14. On suppose d'abord que $\alpha \geqslant 1$. On a alors, pour n suffisamment grand,

$$\frac{1}{r_{n-1}^{\alpha}} \geqslant \frac{1}{r_{n-1}}.$$

La divergence de la série se déduit alors de la partie (a) du problème précédent.

On suppose maintenant que $\alpha < 1$. Il existe alors un entier p strictement positif tel que $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$. Donc,

$$\frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}} < \frac{a_n}{(r_{n-1})^{1-\frac{1}{p}}} = \frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}} r_{n-1}^{\frac{1}{p}}.$$

En appliquant l'inégalité $1 - x^p \leqslant p(1-x)$ vérifiée pour $0 < x \leqslant 1$ à $x = \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^{\frac{1}{p}}$, on obtient

$$\frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}} \leqslant p\left(r_{n-1}^{\frac{1}{p}} - r_n^{\frac{1}{p}}\right).$$

La convergence de la série se déduit alors du critère de Cauchy.

III.2.15. Pour $0 < \alpha < 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}\ln^2 r_n}{\frac{a_{n+1}}{r_n^{\alpha}}} = 0.$$

La convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n+1}\ln^2 r_n$ se déduit donc du problème précédent.

III.2.16. On sait (voir, par exemple, le **problème II.1.38**) que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \qquad (*)$$

Supposons que $g > 1$. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $g - \varepsilon > 1$. Il existe alors n_0 tel que $n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > g - \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$. Donc, d'après $(*)$,

$$n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > g - \varepsilon > n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

et, en conséquence,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^{g-\varepsilon}}}{\frac{1}{n^{g-\varepsilon}}}.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est donc convergente d'après le test prouvé au **problème III.2.3**. Des arguments semblables s'appliquent au cas $g = +\infty$ et on peut utiliser le même raisonnement pour prouver la divergence de la série si $g < 1$.

Les exemples suivants montrent que le test ne permet pas de conclure si $g = 1$. En prenant $a_n = \frac{1}{n}$, on voit que $g = 1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

D'autre part, en posant $a_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$, on obtient la série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (voir le **problème III.2.29**). Pour montrer que dans ce cas $g = 1$, on observe d'abord que

$$n \ln \frac{\frac{1}{n \ln^2 n}}{\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + 2n \ln \frac{\ln(n+1)}{\ln n}.$$

Comme le premier terme de la somme tend vers 1, il suffit donc de montrer que $\lim_{n\to+\infty} 2n \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 0$. Pour cela, on remarque que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln \frac{n+1}{n}}{\ln n}\right)^n = e^0 = 1.$$

III.2.17.

(a) On a

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \ln 2 = +\infty.$$

La convergence de la série se déduit donc du problème précédent.

(b) De même,

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ln 2 = \ln 2 < 1$$

et la série diverge.

(c) De même

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \ln 3 > 1,$$

ce qui montre que la série converge.

(d)
$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \ln a.$$

La série est donc convergente pour $a > e$ et divergente pour $a < e$. Pour $a = e$, il s'agit de la série harmonique qui est divergente.

(e) On a (voir la solution du **problème III.2.16**)

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\ln a = 0.$$

Donc, d'après le test de convergence donné au problème précédent, la série est divergente pour tout $a > 0$.

III.2.18. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} n\ln a^{-\frac{1}{n+1}} = \ln\frac{1}{a},$$

la série est convergente pour $0 < a < \frac{1}{e}$ et divergente pour $a > \frac{1}{e}$ (comparez avec **III.2.16**). Si $a = \frac{1}{e}$, alors (voir, par exemple, le **problème II.1.41**)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = e^{-\gamma},$$

où γ est la constante d'Euler. Le test de comparaison et la divergence de la série harmonique $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ impliquent la divergence de la série étudiée dans le cas où $a = \frac{1}{e}$.

III.2.19. En appliquant l'inégalité $\frac{x}{1+x} \leqslant (1+x) \leqslant x$ qui est vérifiée pour $x > -1$, on obtient

$$\frac{n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)}{1+\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)} \leqslant n\ln\left(1+\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \leqslant n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right).$$

D'après cette inégalité, le test de Raabe et le test donné en **III.2.16** sont équivalents pour un r fini. L'inégalité précédente implique aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = +\infty$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = +\infty$. On montre maintenant que l'implication réciproque est aussi exacte. En effet, si

$\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = +\infty$, pour tout $A > 0$, il existe alors n_0 tel que $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 > \frac{A}{n}$ pour $n > n_0$. Donc,

$$n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \ln\left(1+\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)^n > \ln\left(1+\frac{A}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$$

et A pouvant être choisi arbitrairement grand, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = +\infty$. Les mêmes arguments s'appliquent au cas $r = -\infty$.

III.2.20. Puisque que la suite $\{a_n\}$ est croissante,

$$0 < n\left(\frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_{n+1}}} - 1\right) = \frac{1}{n}\,\frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{1}{n}\,.$$

D'après le test de Raabe, la série diverge.

III.2.21. Par définition de la suite,

$$a_n = a_1 e^{-\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^\alpha} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

On montre d'abord que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^\alpha$ est divergente. En effet, si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^\alpha = S < +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a_1 e^{-S} > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^\alpha > 0$, ce qui est contradictoire avec la condition nécessaire de convergence de la série. La série diverge donc et, de ce qui précède, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

On suppose maintenant que $\beta > \alpha$ et on montre que, dans ce cas, la série considérée est convergente. Pour ce faire, on montre que

$$a_n^{-\alpha} > \alpha(n-1) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1. \qquad (*)$$

Cette inégalité est évidente pour $n = 1$. On suppose qu'elle est vérifiée pour un n donné. Par définition de la suite, on obtient alors

$$a_{n+1}^{-\alpha} = a_n^{-\alpha} e^{\alpha a_n^\alpha} > a_n^{-\alpha}\left(1+\alpha a_n^\alpha\right) = a_n^{-\alpha} + \alpha > \alpha n.$$

L'inégalité $(*)$ est donc vérifiée pour tout $n > 0$. Cette inégalité est équivalente (pour $n \neq 1$) à

$$a_n^\beta < (\alpha(n-1))^{-\frac{\beta}{\alpha}}.$$

D'après le test de comparaison, la série est donc convergente pour $\beta > \alpha$. On suppose maintenant que $\beta \leqslant \alpha$. On a déjà montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Donc, pour n suffisamment grand, $0 < a_n < 1$ et $a_n^{\alpha} \leqslant a_n^{\beta}$. Cette inégalité et la divergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\alpha}$ impliquent la divergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\beta}$.

III.2.22. On remarque que

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\, a = a.$$

D'après le test de Raabe, la série est convergente pour $a > 1$ et divergente pour $0 < a < 1$. Pour $a = 1$, la série se réduit à la série harmonique divergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$.

III.2.23. On a

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nb_{n+1}}{(n+1)a} = \frac{b}{a}.$$

D'après le test de Raabe, la série est convergente pour $b > a$ et divergente pour $b < a$. Dans le cas où $b = a$, la convergence de la série dépend de la suite $\{b_n\}$. En effet, si $\{b_n\}$ est une suite constante, la série étudiée se réduit à la série harmonique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$.

On montre maintenant que si $b_n = a + \frac{2a}{\ln(n+1)}$, la série converge. En fait,

$$a_n = \frac{n!}{\left(2 + \frac{2}{\ln 2}\right)\left(3 + \frac{2}{\ln 3}\right)\cdots\left(n + 1 + \frac{2}{\ln(n+1)}\right)}.$$

Donc,

$$a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n+1} n \ln n = a_n\left((n-1)\ln(n-1) - \frac{(n+1)n\ln n}{n + 2 + \frac{2}{\ln(n+2)}}\right).$$

Un calcul donne

$$\lim_{n\to+\infty}\left((n-1)\ln(n-1) - \frac{(n+1)n\ln n}{n + 2 + \frac{2}{\ln(n+2)}}\right) = 1.$$

D'où, pour n suffisamment grand,

$$a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n+1}n\ln n \geqslant (1-\varepsilon)a_n > 0.$$

La suite positive $a_n(n-1)\ln(n-1)$ est décroissante, donc convergente. Ceci implique la convergence de la série de terme général $a_n(n-1)\ln(n-1)-a_{n+1}n\ln n$. La dernière inégalité et le test de convergence impliquent alors la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

III.2.24. Par hypothèse,

$$a_n((n-1)\ln n - 1) - a_{n+1}n\ln n = (\gamma_n - 1)a_n.$$

Si $\gamma_n \geqslant \Gamma > 1$, alors

$$a_n((n-1)\ln n - 1) - a_{n+1}n\ln n \geqslant (\Gamma - 1)a_n. \tag{1}$$

En combinant (1) à l'inégalité $(n-1)\ln(n-1) > (n-1)\ln n - 1$, on obtient

$$a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n+1}n\ln n \geqslant (\Gamma - 1)a_n > 0. \tag{2}$$

Ceci signifie que la suite $\{a_n(n-1)\ln(n-1)\}$ est décroissante, donc convergente. La série de terme général $a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n+1}n\ln n$ est alors convergente et, d'après (2), la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ est aussi convergente.

Si $\gamma_n \leqslant \Gamma < 1$, alors $a_n((n-1)\ln n - 1) - a_{n+1}n\ln n \leqslant (\Gamma - 1)a_n$. Donc,

$$a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n+1}n\ln n \leqslant \left(\Gamma + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right)a_n.$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\Gamma + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) = \Gamma - 1 < 0,$$

la suite $\{a_{n+1}n\ln n\}$ est croissante (excepté pour un nombre fini d'indices n). Il existe donc $M > 0$ tel que $a_{n+1}n\ln n > M$, d'où $a_{n+1} > \frac{M}{n\ln n}$, ce qui prouve la divergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

III.2.25. On a

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha + \frac{\theta_n}{n^{\lambda-1}}}{1 - \frac{\alpha}{n} - \frac{\theta_n}{n^{\lambda}}} = \alpha.$$

Le test de Raabe implique donc la convergence de la série pour $\alpha > 1$ et sa divergence pour $\alpha < 1$. Dans le cas $\alpha = 1$, la divergence de la série se déduit du test donné dans le problème précédent car

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\theta_n}{n^\lambda} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\gamma_n}{n \ln n},$$

où $\gamma_n = \frac{\theta_n \ln n}{n^{\lambda-1}} \leqslant \Gamma < 1$ pour un certain Γ.

III.2.26. On applique le critère de Gauss donné au problème précédent. On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta}{n^2 + (1+\gamma)n + \gamma} = 1 - \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n} - \frac{\theta_n}{n^2}.$$

La série considérée converge donc si $\alpha + \beta < \gamma$ et diverge si $\alpha + \beta \geqslant \gamma$.

III.2.27. On utilise, comme dans la démonstration précédente, le critère de Gauss. On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\frac{p}{2}}{n} - \frac{\theta_n}{n^2}.$$

La série converge donc si $p > 2$ et diverge si $p \leqslant 2$.

III.2.28. On note respectivement S_n et $\widetilde{S}_n$ les sommes partielles des séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$. On a alors, pour $n \leqslant 2^k$,

$$S_n \leqslant a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \leqslant a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k} = \widetilde{S}_k.$$

Pour $n > 2^k$, on a

$$\begin{aligned} S_n &\geqslant a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \\ &\geqslant a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2}\widetilde{S}_k. \end{aligned}$$

Les suites $\{S_n\}$ et $\{\widetilde{S}_n\}$ sont donc soit toutes les deux bornées, soit toutes les deux non bornées.

III.2.29.

(a) On applique le test de condensation de Cauchy (**III.2.28**). La série condensée étant

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n (\ln 2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n \ln 2)^\alpha},$$

la série converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $0 < \alpha \leqslant 1$. Si $\alpha \leqslant 0$, la divergence de la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ se déduit immédiatement du test de comparaison.

(b) L'égalité

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n \ln 2^n \ln \ln 2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln 2 \ln(n \ln 2)}$$

et (a) impliquent la divergence de la série étudiée.

III.2.30. On peut appliquer un raisonnement semblable à celui de la démonstration du test de condensation de Cauchy (**III.2.28**). Pour $n \leqslant g_k$, on a

$$\begin{aligned} S_n \leqslant S_{g_k} &\leqslant (a_1 + \ldots + a_{g_1 - 1}) + (a_{g_1} + \ldots + a_{g_2 - 1}) + \ldots + (a_{g_k} + \ldots + a_{g_{k+1}-1}) \\ &\leqslant (a_1 + \ldots + a_{g_1 - 1}) + (g_2 - g_1) a_{g_1} + \ldots + (g_{k+1} - g_k) a_{g_k}. \end{aligned}$$

Pour $n > g_k$, on a

$$\begin{aligned} cS_n \geqslant cS_{g_k} &\geqslant c(a_{g_1} + \ldots + a_{g_2}) + \ldots + c(a_{g_{k-1}} + \ldots + a_{g_k}) \\ &\geqslant c(g_2 - g_1) a_{g_2} + \ldots + c(g_k - g_{k-1}) a_{g_k} \\ &\geqslant (g_3 - g_2) a_{g_2} + \ldots + (g_{k+1} - g_k) a_{g_k}. \end{aligned}$$

Ces inégalités prouvent la proposition.

III.2.31.

(a) Il suffit d'appliquer le théorème de Schlömilch (**III.2.30**) en prenant $g_n = 3^n$.

(b) On obtient, en appliquant le théorème de Schlömilch à $g_n = n^2$, l'équi-convergence[4] des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1)a_{n^2}$. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)a_{n^2}}{na_{n^2}} = 2,$$

les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1)a_{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} na_{n^2}$ sont équiconvergentes.

(c) Comparez avec (b).

(d) D'après (b), les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ sont équiconvergentes. Cette dernière est convergente, par exemple par le test de la racine. On peut utiliser le test de condensation de Cauchy ou le test donné en (a) pour déterminer la convergence ou la divergence des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$. On étudie maintenant le comportement de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln \ln n}}$. Si $a > 1$, la convergence de cette série est alors équivalente à celle de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{a^{\ln n}}$ et on vérifie facilement que cette dernière série diverge, par exemple avec le test de la racine. Ceci prouve la divergence de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln \ln n}}$ pour $a > 1$. Si $0 < a \leqslant 1$, on observe que la condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée.

III.2.32. D'après le **problème II.4.13 (a)**, il existe $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$(a_n)^{\frac{1}{\ln n}} < e^{-1-\varepsilon}, \quad n > k.$$

Donc, $\frac{1}{\ln n} \ln a_n < -1-\varepsilon$, d'où $a_n < \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ et le test de comparaison assure alors la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

[4] Deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergentes ou divergentes sont *équiconvergentes* si leur différence est une série convergente de somme nulle : $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n) = 0$. Si leur différence est seulement une série convergente, les séries sont dites équiconvergentes au sens large. (N.d.T.)

III.2.33. Une analyse semblable à celle du problème précédent donne

$$a_n \leqslant \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon}} \quad \text{pour } n > k \text{ et pour un } \varepsilon > 0.$$

Donc, d'après le **problème III.2.29 (a)**, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ est convergente.

III.2.34.

$$\begin{aligned} S_{2^{n_0+k}-1} - S_{2^{n_0}-1} &= \left(a_{2^{n_0}} + a_{2^{n_0}+1} + \ldots + a_{2^{n_0+1}-1}\right) \\ &\quad + \left(a_{2^{n_0+1}} + \ldots + a_{2^{n_0+2}-1}\right) + \ldots \\ &\quad + \left(a_{2^{n_0+k-1}} + \ldots + a_{2^{n_0+k}-1}\right) \\ &\leqslant 2^{n_0} a_{2^{n_0}} + 2^{n_0+1} a_{2^{n_0+1}} + \ldots + 2^{n_0+k-1} a_{2^{n_0+k-1}} \\ &\leqslant g(a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_{n_0+k-1}). \end{aligned}$$

Donc, pour k suffisamment grand,

$$(1-g) \sum_{n=2^{n_0}}^{2^{n_0+k}-1} a_n \leqslant g \left(\sum_{n=n_0}^{2^{n_0}-1} a_n - \sum_{n=n_0+k}^{2^{n_0+k}-1} a_n \right) \leqslant g \sum_{n=n_0}^{2^{n_0}-1} a_n.$$

La suite des sommes partielles est donc bornée et la série converge.

III.2.35. Supposons que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k = 0.$$

La monotonie de $\{a_n\}$ implique alors

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} a_{2n} = n a_{2n} = \frac{1}{2}(2n a_{2n})$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}(2n+1)\, a_{2n+1}.$$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n = 0$.

Posons $a_n = \frac{1}{n\ln(n+1)}$. La série de terme général a_n est divergente et pourtant

$$\lim_{n\to+\infty} n a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0.$$

III.2.36. On pose

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pour } n = k^2,\ k \in \mathbb{N}^*, \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ est convergente mais la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n$ n'existe pas.

III.2.37. La condition que l'on cherche est la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$.
En effet, si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ converge, on prend alors $b_n = \sqrt{a_n}$.

On suppose maintenant qu'il existe une suite $\{b_n\}$ telle que les deux séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ convergent. On a alors

$$\sqrt{a_n} = \sqrt{b_n \frac{a_n}{b_n}} \leqslant \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{a_n}{b_n}\right),$$

et la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ converge donc.

III.2.38. On suppose qu'il existe une suite $\{a_n\}$ telle que les deux séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 a_n}$ convergent. On pose

$$\mathbf{A} = \left\{ n_s \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n_s} \leqslant \frac{1}{n_s^2 a_{n_s}} \right\} \quad \text{et} \quad \mathbf{A'} = \mathbb{N}^* \setminus \mathbf{A}.$$

On a $\sum\limits_{n_s\in\mathbf{A}} \frac{1}{n_s} < +\infty$ et $\sum\limits_{n_s\in\mathbf{A'}} \frac{1}{n_s} = +\infty$ ($\mathbf{A}$ peut bien sûr être l'ensemble vide).

On remarque alors que $a_{n_s} > \frac{1}{n_s}$ pour $n_s \in \mathbf{A'}$ et la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge donc, contredisant notre hypothèse.

III.2.39. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + a_{n+1}}{a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{na_n}.$$

On montre que la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{na_n}$ implique la divergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_n}$. D'après le critère de Cauchy, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{i=k+1}^{k+n} \frac{a_{i+1}}{ia_i} < \frac{1}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, $\frac{n}{n+k} \sum_{i=k+1}^{k+n} \frac{a_{i+1}}{na_i} < \frac{1}{4}$ et, pour $n > k$,

$$\sum_{i=k+1}^{k+n} \frac{a_{i+1}}{na_i} < \frac{1}{4} \cdot \frac{k+n}{n} < \frac{1}{2}.$$

L'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique implique

$$\sqrt[n]{\frac{a_{k+n+1}}{a_{k+1}}} < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad a_{k+n+1} < \frac{a_{k+1}}{2^n}.$$

Donc,

$$\frac{1}{(k+n+1)a_{k+n+1}} > \frac{2^n}{(k+n+1)a_{k+1}}$$

et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_n}$ est alors divergente.

III.2.40. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ peut bien sûr diverger (par exemple si $a_n \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). Étonnamment, elle peut aussi converger. En effet, considérez les séries dont les termes sont

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{7^2}, \frac{1}{8^2}, \frac{1}{9^2}, \ldots$$

et

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{7^2}, \underbrace{\frac{1}{8^2}, \frac{1}{8^2}, \ldots, \frac{1}{8^2}}_{8^2+1 \text{ termes}}, \ldots$$

Chacune des séries contient une infinité de blocs de termes dont la somme est supérieure à 1 et chacune diverge donc. Cependant, $c_n = \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge.

III.2.41. On utilise le théorème de condensation de Cauchy (voir **III.2.28**). La divergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}$ est équivalente à celle de la série dont les termes sont

$$b_{2^n} = \min\left\{a_{2^n}, \frac{1}{n \ln 2}\right\}.$$

De la même façon, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_{2^n}$ diverge si et seulement si la série condensée de termes

$$2^n b_{2^{2^n}} = \min\left\{2^n a_{2^{2^n}}, \frac{1}{\ln 2}\right\}$$

diverge et cette dernière série est divergente. En effet, si une série $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$ est divergente, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \min\{d_n, c\}$, où $c > 0$ est aussi divergente. Si $\min\{d_n, c\} = c$ pour une infinité de valeurs de n, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \min\{d_n, c\}$ diverge. Si $\min\{d_n, c\} = c$ pour un nombre fini de valeurs de n, la divergence résulte alors de celle de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$.

III.2.42. On a

$$1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} \leqslant \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}.$$

Ceci et la convergence de la série télescopique $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n)$ impliquent la convergence de la série étudiée.

III.2.43. On a

$$1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}}.$$

En posant $b_n = a_{n+1} - a_n$ et $S_n = b_1 + \ldots + b_n$, on obtient $\frac{b_n}{S_n + a_1} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}}$. La divergence de la série étudiée se déduit donc du **problème III.2.10**.

III.2.44. Si la suite $\{a_n\}$ n'est pas bornée, la convergence de la série considérée se déduit du **problème III.2.11**. On peut, pour le voir, appliquer des arguments semblables à ceux utilisés dans la solution du problème précédent. On suppose maintenant que la suite $\{a_n\}$ est bornée. On a alors

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n^\alpha} \leqslant \frac{1}{a_2 a_1^\alpha} (a_{n+1} - a_n).$$

La convergence de notre série se déduit alors de celle de la série télescopique $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n)$.

III.2.45. Il suffit de prendre $c_n = \frac{1}{S_n}$, où S_n est la n-ième somme partielle de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, et d'appliquer **III.2.10**.

III.2.46. On peut poser $c_n = \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}$, où $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, et utiliser **III.2.13 (b)**.

III.2.47. La suite $\{r_n\}$ est décroissante. Donc, d'après **III.2.35**, $\lim_{n\to+\infty} nr_n = 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} na_n = \lim_{n\to+\infty} n(r_{n-1} - r_n) = \lim_{n\to+\infty} ((n-1)r_{n-1} - nr_n + r_{n-1}) = 0.$$

III.2.48.

(a) Puisque $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, $a_n > 2$ pour n suffisamment grand. La convergence de la série se déduit de l'inégalité $\frac{1}{a_n^n} < \frac{1}{2^n}$ qui est vérifiée pour n suffisamment grand.

(b) Comme en (a), on peut choisir n suffisamment grand pour que $\frac{1}{a_n^{\ln n}} < \frac{1}{3^{\ln n}}$. Donc, d'après **III.2.17 (c)**, la série converge.

(c) La série peut converger ou diverger, son comportement dépendant de la suite $\{a_n\}$. Si $a_n = \ln n$ $(n \geqslant 2)$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^{\ln \ln n}}$ est alors divergente (voir **III.2.2 (e)**). Si on prend maintenant $a_n = n$, on a alors, pour $n > e^e$,

$$\frac{1}{a_n^{\ln \ln n}} = \frac{1}{e^{\ln \ln n \cdot \ln n}} < \frac{1}{n^\alpha}, \quad \text{où } \alpha > 1.$$

Dans ce cas, la série est convergente.

III.2.49. La série diverge car la condition nécessaire de convergence $\lim a_n = 0$ n'est pas vérifie (voir **II.5.25**).

III.2.50. On suppose d'abord que $p = 0$. Alors, d'après **II.5.22**, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} a_n = \sqrt{3}$ et la série diverge donc. On suppose maintenant que $p > 0$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} \cdot \frac{\sin a_n}{a_n} = 0$ et la série converge d'après le test du quotient de d'Alembert.

III.2.51. On remarque que $a_n \in \left]n\pi\,, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Donc, $\frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{n^2\pi^2}$ et la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^2}$ converge.

III.2.52. On pose $b_n = \sqrt{a_n}$. On a alors $b_n \in \left]n\pi\,, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ et la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n^2}$ converge donc (voir la solution du problème précédent).

III.2.53. La série diverge car $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 2$ (voir **II.5.29**).

III.2.54. Pour simplifier, on introduit les notations suivantes :

$$L_n = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} \quad \text{et} \quad M_n = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}.$$

La monotonie de $\{a_n\}$ implique

$$L_n \geqslant M_n \quad \text{et} \quad L_n - a_1 \leqslant M_n. \tag{1}$$

D'où, $2M_n = M_n + M_n \geqslant M_n + L_n - a_1 = \sum\limits_{k=2}^{n} a_k$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = +\infty. \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), on arrive à

$$\frac{L_n}{M_n} - 1 = \frac{L_n - M_n}{M_n} \leqslant \frac{a_1}{M_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

III.2.55. Par définition de k_n, on a $0 \leqslant S_{k_n} - n < \frac{1}{k_n}$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{k_n} - \ln k_n) = \gamma$, où γ est la constante d'Euler (voir **II.1.41**). Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} (n - \ln k_n) = \lim_{n\to+\infty} (n + 1 - \ln k_{n+1}) = \gamma.$$

D'où,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \ln \frac{k_{n+1}}{k_n}\right) = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e.$$

III.2.56.

(a) [A. J. Kempner, Amer. Math. Monthly 23(1914), 48-50]. Un nombre à k chiffres appartenant à $\mathbf{A}$ peut s'écrire sous la forme

$$10^{k-1}a_1 + 10^{k-2}a_2 + \ldots + a_k, \quad \text{où } 0 < a_i \leqslant 9,\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Pour un k donné, il y a 9^k nombres à k chiffres dans $\mathbf{A}$ et chacun d'eux est supérieur à 10^{k-1}. Donc,

$$\sum_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n} < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9^k}{10^{k-1}} = 90.$$

(b) Comme en (a), on a

$$\sum_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n^\alpha} < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9^k}{10^{\alpha(k-1)}}.$$

Donc, si $\alpha > \log_{10} 9$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n^\alpha}$ converge. De plus, puisque

$$\sum_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n^\alpha} > \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9^k}{(10^k - 1)^\alpha} > \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9^k}{10^{k\alpha}},$$

la série $\sum\limits_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge si $\alpha \leqslant \log_{10} 9$.

Remarque. Soit $\mathbf{A_k}$ l'ensemble des entiers strictement positifs dont l'écriture décimale ne contient pas le chiffre k. De la même façon que précédemment, on peut prouver que $\sum\limits_{n\in\mathbf{A_k}} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > \log_{10} 9$.

III.2.57. On suppose que $-\infty < g < 1$ et on prend $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $g + \varepsilon < 1$. Pour n suffisamment grand, on a alors $\ln \frac{1}{a_n} < (g+\varepsilon)\ln n$ et $a_n > \frac{1}{n^{g+\varepsilon}}$. La série diverge donc. Si $g = -\infty$, alors (pour n suffisamment grand) $\ln \frac{1}{a_n} < -1 \times \ln n$ et $a_n > n$. La série diverge donc encore. La même démonstration fonctionne aussi pour $g > 1$. Considérons deux séries : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$. La première diverge et la seconde converge alors que pour chacune, $g = 1$.

III.2.58. L'équivalence de ces tests a été prouvée dans la solution du **problème III.2.19**. D'après **II.5.34**, si le critère de Raabe permet de conclure, il en est de même du critère donné au problème précédent. Pour prouver que la réciproque est fausse, on considère la série de terme général a_n défini par $a_{2n-1} = \frac{1}{n^2}$ et $a_{2n} = \frac{1}{4n^2}$.

III.2.59. On pose $b_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ racines}}$. On a $b_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (comparez avec **II.5.41**). Par définition de $\{a_n\}$, on a $a_n^2 = 2 - b_{n-1}$, d'où $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2^n}$. La série considérée converge donc.

III.2.60. Soit $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$(a_1 - a_n) + (a_2 - a_n) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) \leqslant K \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On a $a_1 + \ldots + a_n - na_n \leqslant K$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $m \in \mathbb{N}^*$. La monotonie de la suite $\{a_n\}$ et sa convergence vers 0 impliquent qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$a_n \leqslant \frac{1}{2}a_m \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_0. \tag{$*$}$$

On a

$$a_1 + \ldots + a_m - ma_n + a_{m+1} + \ldots + a_n - (n-m)a_n \leqslant K.$$

La monotonie de $\{a_n\}$ donne

$$a_{m+1} + \ldots + a_n \geqslant (n-m)a_n \quad \text{et} \quad a_1 + \ldots + a_m \geqslant ma_m.$$

Donc, $m(a_m - a_n) = ma_m - ma_n \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_m - ma_n \leqslant K$. Ceci et $(*)$ impliquent $\frac{1}{2}ma_m \leqslant m(a_m - a_n) \leqslant K$. Finalement,

$$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m = S_m - ma_m + ma_m \leqslant K + ma_m \leqslant 3K.$$

III.2.61. On déduit des relations

$$a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots \quad \text{et} \quad a_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$$

que $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$. On a alors, par récurrence, $a_n = \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III.2.62. [20]. On pose $r_{n,k} = a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} r_{n,k} = r_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $s \in \,]0\,, S[$ et on note a_{n_1} le premier terme de la suite $\{a_n\}$ tel que $a_{n_1} < s$. Soit il existe un k_1 tel que $r_{n_1,k_1} < s \leqslant r_{n_1,k_1+1}$, soit $r_{n_1} \leqslant s$. On a, dans le second cas,

$s \leqslant a_{n_1-1} \leqslant r_{n_1} \leqslant s$ et $r_{n_1} = s$. Dans le premier cas, on détermine le premier terme a_{n_2} pour lequel $n_2 > n_1 + k_1$ et $r_{n_1,k_1} + a_{n_2} < s$. Soit il existe k_2 tel que

$$r_{n_1,k_1} + r_{n_2,k_2} < s \leqslant r_{n_1,k_1} + r_{n_2,k_2+1},$$

soit $r_{n_1,k_1} + r_{n_2} = s$. Cette procédure peut se répéter et si le premier cas se produit à chaque étape, alors $s = r_{n_1,k_1} + r_{n_2,k_2} + \ldots$.

III.2.63. [20]. On suppose, contrairement à la proposition, qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_k = 2p + \sum\limits_{n=k+1}^{+\infty} a_n$, où $p > 0$. On a alors

$$a_k - p = p + \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n a_n,$$

où ε_n prend pour valeur 0 ou 1. La monotonie de $\{a_n\}$ implique $\varepsilon_n = 0$ pour $n \leqslant k$. Donc, $a_k - p = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n a_n \leqslant \sum\limits_{n=k+1}^{+\infty} a_n = a_k - 2p$, contradiction.

III.2.64. D'après le théorème de Stolz (voir **II.3.11**), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 S_1^{-1} + a_2 S_2^{-1} + \ldots + a_n S_n^{-1}}{\ln S_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n S_n^{-1}}{-\ln\left(1 - a_n S_n^{-1}\right)} = 1,$$

la dernière égalité découlant, par exemple, de **II.5.5**.

III.2.65. Posez $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

III.2.66. Puisque $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} > \frac{a_1}{n}$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ est divergente pour toute suite $\{a_n\}$ strictement positive et cette divergence est indépendante du comportement de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

III.2.67. Par hypothèse,

$$a_2 \leqslant a_1, \qquad \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_k.$$

On a alors par récurrence

$$\sum_{k=1}^{2^n} a_k \leqslant 2\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) a_1.$$

De plus,

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right)$$

$$\leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\right) < e.$$

III.2.68. On pose $c_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} = n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$c_1\cdots c_n = (n+1)^n \quad \text{et} \quad c_n < ne. \tag{$*$}$$

En utilisant l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique (voir, par exemple, **I.2.3**), on arrive à

$$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} = \frac{1}{n+1}\sqrt[n]{a_1c_1\times\cdots\times a_nc_n} \leqslant \frac{a_1c_1+\ldots+a_nc_n}{n(n+1)}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} &\leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{a_1c_1+\ldots+a_nc_n}{n(n+1)}\\
&= a_1c_1\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{N(N+1)}\right)\\
&\quad + a_2c_2\left(\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{N(N+1)}\right)\\
&\quad + \ldots + a_Nc_N\frac{1}{N(N+1)}\\
&< a_1c_1+\frac{1}{2}a_2c_2+\frac{1}{3}a_3c_3+\ldots+\frac{1}{N}a_Nc_N\\
&\leqslant 2a_1+ea_2+\ldots+ea_N,\end{aligned}$$

la dernière inégalité se déduisant de $(*)$. On obtient l'inégalité demandée en faisant tendre N vers $+\infty$.

III.2.69. En écrivant

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(n+1)^n \cdots (n+k-1)^n\,(n+k)^n}{n^{n-1}\cdots (n+k-2)^{n-1}\,(n+k-1)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{n+k}{n}\right)^n n(n+1)\cdots(n+k-1), \end{aligned}$$

on obtient $c_1\cdots c_n = (n+1)^n\cdots(n+k)^n$. On a donc, comme dans la solution du problème précédent,

$$\sum_{n=1}^{N} \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{a_1c_1+\ldots+a_nc_n}{n(n+1)\cdots(n+k)}$$

$$\begin{aligned} &= a_1c_1\left(\frac{1}{1\times 2\times\ldots\times(1+k)}+\ldots+\frac{1}{N(N+1)\cdots(N+k)}\right) \\ &\quad + a_2c_2\left(\frac{1}{2\times 3\times\ldots\times(2+k)}+\ldots+\frac{1}{N(N+1)\cdots(N+k)}\right) \\ &\quad + \ldots + a_Nc_N\frac{1}{N(N+1)\cdots(N+k)} \\ &< \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k!}\,a_1c_1+\frac{1}{2\times 3\times\ldots\times(1+k)}\,a_2c_2\right. \\ &\quad \left.+\ldots+\frac{1}{N(N+1)\cdots(N+k-1)}\,a_Nc_N\right), \end{aligned}$$

la dernière inégalité se déduisant du **problèm III.1.4 (a)**. Puisque

$$\frac{1}{l(l+1)\cdots(l+k-1)}\,c_l = \left(\frac{l+k}{l}\right)^l,$$

on obtient l'inégalité cherchée en faisant tendre N vers $+\infty$.

III.2.70. On pose $T_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ et on note S_n la n-ième somme partielle de la série considérée. On a alors

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2(T_n - T_{n-1})}{T_n^2} \\
&\leqslant \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2(T_n - T_{n-1})}{T_{n-1}T_n} \\
&= \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{T_{n-1}} - \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{T_n} \\
&= \frac{1}{a_1} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(n+1)^2}{T_n} - \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{T_n} \\
&\leqslant \frac{5}{a_1} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{2n}{T_n} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{T_n} \\
&\leqslant \frac{5}{a_1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2n}{T_n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{T_n}.
\end{aligned}$$

De plus, d'après l'inégalité de Cauchy (voir **I.2.12**), on a

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{T_n}\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2 a_n}{T_n^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n} \leqslant S_N M,$$

où $M = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$. Donc,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{T_n} \leqslant \sqrt{S_N} \cdot \sqrt{M}$$

et, en conséquence, $S_N \leqslant \frac{5}{a_1} + 2\sqrt{S_N}\sqrt{M} + M$, d'où

$$S_N \leqslant \left(\sqrt{M} + \sqrt{2M + \frac{5}{a_1}}\right)^2.$$

III.2.71. L'inégalité entre les moyennes arithmétique et harmonique (voir, par exemple, **I.2.3**) donne

$$\frac{\sum\limits_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{na_n-(n-1)a_{n-1}}}{2^{k-1}} \geqslant \frac{2^{k-1}}{\sum\limits_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} (na_n-(n-1)a_{n-1})}$$
$$= \frac{2^{k-1}}{2^k a_{2^k} - 2^{k-1}a_{2^{k-1}}} \geqslant \frac{1}{2a_{2^k}}\,.$$

Donc,

$$\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{na_n-(n-1)a_{n-1}} \geqslant \frac{2^k}{4a_{2^k}}\,.$$

D'où,

$$S_{2^k} \geqslant \sum_{l=1}^{k} \frac{2^l}{4a_{2^l}}\,.$$

La divergence de la série se déduit alors du théorème de condensation de Cauchy (voir **III.2.28**).

III.2.72. On prouve que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$ est divergente. On suppose pour ce faire qu'elle est convergente. Il existe donc un entier n tel que $\sum\limits_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p_m} < \frac{1}{2}$. On pose $a = p_1p_2\cdots p_n$. L'entier $1+ka$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ peut s'écrire comme un produit de nombres premiers et cette factorisation, unique, ne contient aucun des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Donc,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+ka} < \sum_{l=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p_m}\right)^l < \sum_{l=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l = 1,$$

contradiction.

III.2.73. Il suffit d'appliquer les résultats du problème précédent et du **problème III.2.71**.

III.2.74. On obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^{n+1}}}{\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+\frac{2^{n+1}}{4^{n+1}}+\ldots\right)}{\frac{1}{2^{n}}\left(1+\frac{2^{n}}{3^{n}}+\frac{2^{n}}{4^{n}}+\ldots\right)}=\frac{1}{2}\,,$$

car les sommes entre parenthèses tendent vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. En effet,

$$\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+\frac{2^{n+1}}{4^{n+1}}+\ldots=2^{n+1}\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{k^{n+1}}\,.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{k^{n+1}}&=\frac{1}{3^{n+1}}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^{n+1}}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^{n+1}}\\&\leqslant\frac{1}{3^{n+1}}+2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^{n+1}}\\&=\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2^{n}}\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{k^{n+1}}\,.\end{aligned}$$

Donc,

$$2^{n+1}\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{k^{n+1}}\leqslant\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\frac{1}{2^{n}}}{\left(1-\frac{1}{2^{n}}\right)}$$

et

$$2^{n+1}\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{k^{n+1}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

III.2.75. On suppose d'abord que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ converge. La convergence de la série étudiée se déduit de l'inégalité $\frac{1}{T_n^{\alpha}}\leqslant\frac{1}{a_1^{\alpha}}$. Si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ diverge, il existe alors une suite strictement croissante $\{n_m\}$ d'entiers strictement positifs telle que $S_{n_m-1}\leqslant m<S_{n_m}$. On a alors

$$T_{n_m}=S_1+\ldots+S_{n_m}\geqslant S_{n_1}+\ldots+S_{n_m}>\frac{m(m+1)}{2}\,.$$

Donc,

$$\sum_{n=n_2}^{+\infty} \frac{a_n}{T_n^\alpha} = \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{k=n_m}^{n_{m+1}-1} \frac{a_k}{T_k^\alpha} \leqslant \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{S_{n_{m+1}-1} - S_{n_m-1}}{T_{n_m}^\alpha}$$
$$< \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{T_{n_m}^\alpha} < \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2+m}{2}\right)^\alpha}.$$

La série en question est donc convergente si $\alpha > \frac{1}{2}$. La série peut être divergente si $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. En effet, il suffit de prendre $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

III.2.76. D'après le **III.2.35**, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{a_n} = 0$. On choisit $0 < K < 1$. Il existe alors n_0 tel que $n \leqslant K a_n$ pour $n \geqslant n_0$. D'où,

$$\frac{\ln^k a_n}{a_n} \geqslant \ln^k\left(\frac{1}{K}\right) \frac{\ln^k n}{a_n}.$$

La convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^k a_n}{a_n}$ implique donc la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^k n}{a_n}$. Pour démontrer l'autre implication, on pose

$$\mathbf{I}_1 = \left\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \leqslant n^{k+2}\right\} \quad \text{et} \quad \mathbf{I}_2 = \mathbb{N}^* \setminus \mathbf{I}_1.$$

On a alors, pour $n \in \mathbf{I_1}$, $\ln a_n \leqslant (k+2)\ln n$ et la convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbf{I}_1} \frac{\ln^k n}{a_n}$ implique celle de $\sum\limits_{n\in\mathbf{I}_1} \frac{\ln^k a_n}{a_n}$. De plus, pour $n \in \mathbf{I}_2$ suffisamment grand, on a

$$\frac{\ln^k a_n}{a_n} < \frac{a_n^{\frac{k}{k+1}}}{a_n} < \frac{1}{n^{\frac{k+2}{k+1}}}.$$

Donc, $\sum\limits_{n\in\mathbf{I}_2} \frac{\ln^k a_n}{a_n} < +\infty$ car $\frac{k+2}{k+1} > 1$.

III.2.77. On a

$$\sum_{k=1}^{\varphi(n)-1} f(k) = \sum_{k=1}^{\varphi(1)-1} f(k) + (f(\varphi(1)) + f(\varphi(1)+1) + \ldots + f(\varphi(2)-1))$$
$$+ \ldots + (f(\varphi(n-1)) + f(\varphi(n-1)+1) + \ldots + f(\varphi(n)-1))$$
$$< \sum_{k=1}^{\varphi(1)-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} f(\varphi(k))(\varphi(k+1)-\varphi(k)).$$

L'inégalité (1) est donc prouvée. L'inégalité (2) se démontre de la même façon.

III.2.78. On suppose d'abord que

$$\frac{f(\varphi(n))(\varphi(n+1)-\varphi(n))}{f(n)} \leqslant q < 1.$$

On a alors, d'après l'inégalité (1) du problème précédent,

$$S_{\varphi(n)-1} < \sum_{k=1}^{\varphi(1)-1} f(k) + qS_{n-1}.$$

Du fait que $\varphi(n) > n$, on a donc $(1-q)S_{n-1} < \sum_{k=1}^{\varphi(1)-1} f(k)$ et la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ est prouvée. On peut utiliser l'inégalité (2) du problème précédent et procéder comme ci-dessus pour prouver la seconde partie du problème.

III.2.79. On peut utiliser le résultat du problème précédent en prenant $\varphi(n) = 2n$.

III.2.80. On peut appliquer le résultat du **problème III.2.78** en prenant $\varphi(n) = 2^n$.

III.2.81. Appliquez le résultat du **problème III.2.77** en prenant respectivement

$$\varphi(n) = 3^n, \qquad \varphi(n) = n^2, \qquad \varphi(n) = n^3.$$

III.2.82.

(1) On a $a_n b_n - a_{n+1}b_{n+1} \geqslant Ca_{n+1}$. La suite $\{a_n b_n\}$ est positive et décroissante donc convergente et la série télescopique $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n b_n - a_{n+1}b_{n+1})$ converge. La convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ s'en déduit par le test de comparaison.

(2) On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\frac{1}{b_{n+1}}}{\frac{1}{b_n}}.$$

La divergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se déduit alors du test donné au **problème III.2.3**.

III.2.83. Pour obtenir le test du quotient de d'Alembert, on prend $b_n = 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $b_n = n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient le test de Raabe et en posant $b_n = n \ln n$ pour $n = 2, 3, \ldots$, on arrive au test de Bertrand.

III.2.84. [J. Tong, Amer. Math. Monthly, 101(1994), 450-452].

(1) On pose $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et

$$b_n = \frac{S - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{a_n} = \frac{r_n}{a_n}.$$

Bien sûr, $b_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus,

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{r_n}{a_{n+1}} - \frac{r_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1.$$

(2) Dans ce cas, on pose

$$b_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{a_n} = \frac{S_n}{a_n}.$$

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n}$ est alors divergente (voir, par exemple, le **problème III.2.10**). De plus,

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{S_{n+1}}{a_n} - \frac{S_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{-a_{n+1}}{a_{n+1}} = -1.$$

III.2.85.

(a) Il suffit d'appliquer le test du quotient à chacune des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{kn}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_{1+kn}, \quad \ldots, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_{(k-1)+kn}.$$

(b) Il suffit d'appliquer le test de Raabe (voir **III.2.19**) à chacune des séries données dans la solution de (a).

III.2.86. Par hypothèse, il existe $K > 0$ tel que

$$\varphi_n \leqslant K \frac{1}{\ln n} \quad \text{pour } n \geqslant 2.$$

On définit les sous-ensembles $\mathbb{N}_1$ et $\mathbb{N}_2$ de $\mathbb{N}^*$ comme suit :

$$\mathbb{N}_1 = \left\{ n : a_n \leqslant \frac{1}{n^2} \right\} \quad \text{et} \quad \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}_1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}_1$ suffisamment grand, on a

$$a_n^{1-\varphi_n} \leqslant a_n^{1-\frac{K}{\ln n}} = a_n^{\frac{\ln \frac{n}{\exp(K)}}{\ln n}} = \left(\frac{e^K}{n}\right)^{\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}} \leqslant \frac{e^{2K}}{n^2}. \tag{1}$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}_2$ suffisamment grand, on a

$$\frac{a_n^{1-\varphi_n}}{a_n} \leqslant a_n^{-\frac{K}{\ln n}} = \left(\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{K}{\ln n}} \leqslant n^{\frac{2K}{\ln n}} = e^{2K}. \tag{2}$$

En combinant (1) et (2) à la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, on arrive à

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_1} a_n^{1-\varphi_n} < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}_2} a_n^{1-\varphi_n} < +\infty.$$

III.3. Le test intégral

III.3.1. Pour $k-1 \leqslant x \leqslant k$, $k \geqslant 2$, on a $f(x) \geqslant f(k)$. Pour $k \leqslant x \leqslant k+1$, on a $f(x) \leqslant f(k)$. Donc,

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx, \quad k = 2, 3 \ldots$$

En additionnant membre à membre les inégalités précédentes pour k allant de 2 à n, on obtient

$$\int_2^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \leqslant \int_1^n f(x)\,dx,$$

ce qui démontre le test intégral.

III.3.2. On remarque que $\frac{f'}{f}$ est une fonction décroissante strictement positive. Donc, d'après le test intégral, la convergence de la série étudiée est équivalente au fait que les suites $\left\{\int_1^n f'(x)\,dx\right\}$ et $\left\{\int_1^n \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx\right\}$ soient bornées. Puisque

$$\int_1^n f'(x)\,dx = f(n) - f(1) \quad \text{et} \quad \int_1^n \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(n) - \ln f(1),$$

soit les deux suites sont bornées, soit aucune des deux ne l'est.

III.3.3. On a $S_N - I_N - (S_{N+1} - I_{N+1}) = \int_N^{N+1} f(x)\,dx - f(N+1) \geqslant 0$. De plus, $f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leqslant f(n-1)$ pour $n = 2, 3, \ldots, N$. En additionnant membre à membre ces inégalités pour n variant de 2 à N, on obtient $S_N - f(1) \leqslant I(N) \leqslant S(N) - f(N)$. Donc, $0 < f(N) \leqslant S(N) - I(N) \leqslant f(1)$, ce qui complète la démonstration.

III.3.4. La convergence des suites données se déduit du problème précédent. Il reste à montrer que les limites de ces suites appartiennent à $]0\,,1[$.

(a) Puisque $f(x) = \frac{1}{x}$ est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$, $S_N - I_N < S_2 - I_2 < f(1) = 1$ pour $N > 2$ et

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(N-1) + f(N) >$$
$$f(2) + f(3) + \ldots + f(N-1) > \int_2^N f(x)\,dx$$

ou, de façon équivalente, $S_N - f(1) > I_N - I_2$. Finalement,

$$0 < 1 - I_2 \leqslant \lim_{N\to+\infty} (S_N - I_N) \leqslant S_2 - I_2 < 1.$$

(Voir aussi **II.1.41** et **III.1.36**.)

(b) La démonstration est semblable à celle de (a).

III.3.5.

(a) La convergence de la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ est équivalente au fait que la suite $\int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,dx$ soit bornée. Pour $\alpha \neq 1$,

$$\int_2^n \frac{1}{x\,(\ln x)^\alpha}\,dx = \frac{(\ln n)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{(\ln 2)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}.$$

La série est donc convergente si $\alpha > 1$ et divergente si $0 < \alpha < 1$. Clairement, si $\alpha \leqslant 0$, la série est alors divergente. Finalement, si $\alpha = 1$, alors $\int_2^n \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$. La suite $\int_2^n \frac{1}{x\ln x}\,dx$ n'est pas bornée et la série diverge donc.

(b) Dans ce cas, on a

$$\int_3^n \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}\,dx = \ln(\ln(\ln n)) - \ln(\ln(\ln 3)).$$

La série est donc divergente d'après le test intégral.

III.3.6.

(a) On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_{n+1}}{S_n\ln S_n}&=\sum_{n=1}^{N}\frac{S_{n+1}-S_n}{S_n\ln S_n}\\&\geqslant\sum_{n=1}^{N}\int_{S_n}^{S_{n+1}}\frac{1}{x\ln x}\,dx\\&=\ln\ln S_{N+1}-\ln\ln S_1\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty.\end{aligned}$$

(b) Comme en (a), on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}\frac{a_n}{S_n\ln^2 S_n}&=\sum_{n=2}^{N}\frac{S_{n+1}-S_n}{S_n\ln^2 S_n}\\&\leqslant\sum_{n=2}^{N}\int_{S_n}^{S_{n+1}}\frac{1}{x\ln^2 x}\,dx\\&=-\frac{1}{\ln S_N}+\frac{1}{\ln S_1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{1}{\ln S_1}.\end{aligned}$$

III.3.7. Si

$$\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)}\leqslant q<1\quad\text{pour}\quad x>x_0,$$

alors

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)}f(t)\,dt=\int_{x_0}^{x}\varphi'(t)f(\varphi(t))\,dt\leqslant q\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt.$$

D'où,

$$\begin{aligned}(1-q)\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)}f(t)\,dt&\leqslant q\left(\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt-\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)}f(t)\,dt\right)\\&=q\left(\int_{x_0}^{\varphi(x_0)}f(t)\,dt-\int_{x}^{\varphi(x)}f(t)\,dt\right)\leqslant q\int_{x_0}^{\varphi(x_0)}f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Donc, d'après le test intégral, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$ est convergente.

Si maintenant

$$\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)}\geqslant 1\quad\text{pour}\quad x>x_0,$$

alors $\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt \geqslant \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$. En conséquence,

$$\int_{x}^{\varphi(x)} f(t)\,dt \geqslant \int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)\,dt.$$

De plus, puisque pour tout n il existe $k_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n < \varphi(n) < n+k_n$, on a

$$I_{n+k_n} - I_n = \int_{n}^{n+k_n} f(t)\,dt \geqslant \int_{n}^{\varphi(n)} f(t)\,dt \geqslant \int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)\,dt.$$

La suite $\{I_n\}$ n'est donc pas une suite de Cauchy et n'est donc pas bornée. La série diverge alors d'après le test intégral.

III.3.8.

(a) Si $\displaystyle\varliminf_{x\to+\infty} \left(-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x)\right) > 0$, il existe alors x_0 et $\delta > 0$ tels que

$$-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) \geqslant \delta \quad \text{pour} \quad x \geqslant x_0.$$

Donc, $-(g(x)f(x))' \geqslant \delta f(x)$ pour $x \geqslant x_0$. On obtient alors, pour n suffisamment grand,

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{n} f(x)\,dx &\leqslant \frac{1}{\delta}\int_{x_0}^{n} -(f(x)g(x))'\,dx\\ &= \frac{1}{\delta}\left(g(x_0)f(x_0) - g(n)f(n)\right) \leqslant \frac{1}{\delta}\,g(x_0)f(x_0).\end{aligned}$$

D'après le test intégral, la série converge donc.

(b) Comme en (a), on obtient $-(g(x)f(x))' \leqslant 0$ pour $x \geqslant x_0$. La fonction gf est donc croissante sur $[x_0\,,+\infty[$ et $g(x)f(x) \geqslant g(x_0)f(x_0)$ si $x \geqslant x_0$. Ceci signifie que $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)g(x_0)}{g(x)}$ pour $x > x_0$. La suite $\int_1^n f(x)\,dx$ n'est donc pas bornée car, par hypothèse, la suite $\int_1^n \frac{1}{g(x)}\,dx$ ne l'est pas non plus.

III.3.9. Il suffit d'appliquer le problème précédent en prenant $g(x) = x$.

III.3.10. On prend $g(x) = x\ln x$ dans **III.3.8**.

III.3.11.

(a) On pose

$$g(x) = \frac{\int_x^{+\infty} f(t)\,dt}{f(x)}.$$

On a alors $-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) = 1 > 0$.

(b) On pose

$$g(x) = \frac{\int_{1/2}^{x} f(t)\,dt}{f(x)}.$$

On a alors $\int_1^n \frac{1}{g(x)}\,dx = \ln \int_{1/2}^n f(t)\,dt - \ln \int_{1/2}^1 f(t)\,dt$, ce qui implique que la suite $\int_1^n \frac{1}{g(x)}\,dx$ n'est pas bornée. De plus,

$$-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) = -1 < 0.$$

III.3.12. On applique le test prouvé en **III.3.9**. On obtient, en prenant $f(x) = (\ln x)^{-(\ln x)^\gamma}$ pour $x > 1$,

$$-x\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln x)^{\gamma-1}(\gamma \ln\ln x + 1).$$

Si $\gamma \geqslant 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\gamma-1}(\gamma\ln\ln x + 1) = +\infty$ et la série est donc convergente. D'autre part, si $0 \leqslant \gamma < 1$, on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\gamma-1}(\gamma\ln\ln x + 1) = 0$, ce qui signifie que la série diverge.

III.3.13. On pose

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\frac{1}{\ln\ln x}}\ln x}, \quad x > e.$$

On peut montrer que $\underline{\lim}_{x\to+\infty}\left(-x\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = 1$ et on ne peut donc pas appliquer le test donné en **III.3.9**. On va appliquer celui donné en **III.3.10**. Pour x suffisamment grand, on a

$$\left(-\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x}\right)x\ln x = \frac{\ln x}{\ln\ln x} - \frac{\ln x}{(\ln\ln x)^2} + 1 > 2$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x} - \frac{\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right) = +\infty$.

III.3.14. On a $(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\frac{1}{\lambda_{n+1}f(\lambda_{n+1})} \leqslant \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \frac{1}{tf(t)}\,dt$. Donc,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\frac{1}{f(\lambda_{n+1})} \leqslant \int_{\lambda_1}^{+\infty}\frac{1}{tf(t)}\,dt < +\infty.$$

On a donc prouvé que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\frac{1}{f(\lambda_{n+1})}$ est convergente. On note respectivement $\{S_n\}$ et $\{S'_n\}$ la suite des sommes partielles de la série donnée dans le problème et la suite des sommes partielles de la série ci-dessus. On a alors

$$\begin{aligned} S_N - S'_N &= \sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\left(\frac{1}{f(\lambda_n)}-\frac{1}{f(\lambda_{n+1})}\right) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{f(\lambda_n)}-\frac{1}{f(\lambda_{n+1})}\right) < \frac{1}{f(\lambda_1)}, \end{aligned}$$

ce qui implique la convergence de la série donnée.

III.3.15. La monotonie de f implique

$$f(\lambda_{n+1})(\lambda_{n+1}-\lambda_n) \leqslant \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(t)\,dt \leqslant f(\lambda_n)(\lambda_{n+1}-\lambda_n). \tag{$*$}$$

(a) D'après l'inégalité de gauche et les hypothèses, on a

$$M\sum_{n=1}^{+\infty} f(\lambda_{n+1}) \leqslant \int_{\lambda_1}^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty.$$

(b) L'inégalité de droite dans $(*)$ implique la divergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(\lambda_n)$.

III.3.16. On suppose d'abord que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{f(n)}$ converge. D'après le test intégral, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(t)}\,dt$ converge aussi. Une intégration par parties suivie d'un changement de variable donne

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty}\frac{1}{f(t)}\,dt &= \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{f(t)} - \frac{1}{f(1)} + \int_1^{+\infty}\frac{tf'(t)}{f^2(t)}\,dt \\ &= \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{f(t)} - \frac{1}{f(1)} + \int_{f(1)}^{+\infty}\frac{f^{-1}(t)}{t^2}\,dt. \end{aligned} \tag{1}$$

On montre maintenant que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{f(t)} = 0. \tag{2}$$

La convergence de l'intégrale impropre implique $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_t^{2t} \frac{1}{f(x)}\, dx = 0$. Puisque $\frac{1}{2}\,\frac{2t}{f(2t)} = \frac{1}{f(2t)} \int_t^{2t} dx < \int_t^{2t} \frac{1}{f(x)}\, dx$, l'égalité (2) est vérifiée. L'intégrale impropre $\int_{f(1)}^{+\infty} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\, dt$ converge donc.

On a de plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\, dt = \int_{f(1)}^{+\infty} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\, dt < +\infty,$$

ce qui signifie que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2}$ converge. Évidemment, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge aussi.

Pour démontrer l'implication réciproque, on suppose que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge. De façon semblable, on peut prouver que l'intégrale $\int_{f(1)}^{+\infty} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\, dt$ converge et, en conséquence, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)}\, dt$ converge aussi. Donc, d'après le test intégral, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$ est convergente.

III.3.17. On remarque d'abord que la fonction φ peut être définie, de la même façon, sur tout l'intervalle $[e\,,+\infty[$. On a alors $\varphi(x) = 1$ pour $x \in [e\,,e^e[$, $\varphi(x) = 2$ pour $x \in \left[e^e\,,e^{e^e}\right[$. Pour simplifier, on note $\hat{e}^1 = e$ et $\hat{e}^k = e^{\hat{e}^{k-1}}$ pour $k > 1$. On a donc

$$\varphi(x) = k \quad \text{pour} \quad x \in \left[\hat{e}^k\,,\hat{e}^{k+1}\right[.$$

On pose

$$f(x) = \frac{1}{x\,(\ln_1 x)\,(\ln_2 x)\cdots\left(\ln_{\varphi(x)} x\right)}$$

et on a

$$f(x) = \frac{1}{x\,(\ln_1 x)\,(\ln_2 x)\cdots(\ln_k x)} \quad \text{pour} \quad x \in \left[\hat{e}^k\,,\hat{e}^{k+1}\right[.$$

Notre série diverge alors d'après le test intégral car, pour $n > \hat{e}^k$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_e^n f(x)\,dx \\ &\geqslant \int_e^{\hat{e}^k} f(x)\,dx \\ &= \int_e^{\hat{e}^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx + \int_{\hat{e}^2}^{\hat{e}^3} \frac{1}{x(\ln x)(\ln_2 x)}\,dx \\ &\quad + \ldots + \int_{\hat{e}^{k-1}}^{\hat{e}^k} \frac{1}{x(\ln x)(\ln_2 x)\cdots(\ln_{k-1} x)}\,dx = k-1. \end{aligned}$$

III.4. Convergence absolue. Théorème de Leibniz

III.4.1.

(a) On a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{an}{n+1}\right|^n} = |a|\,.$$

La série est donc absolument convergente si $|a| < 1$ et divergente si $|a| > 1$. Si $|a| = 1$, la série diverge car

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{an}{n+1}\right|^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}\,.$$

(b) On pose $f(x) = \frac{(\ln x)^a}{x}$ pour $x > 0$. On a alors $f'(x) = \frac{(\ln x)^{a-1}(a-\ln x)}{x^2} < 0$ pour $x > \max\{1, e^a\}$. Donc, d'après la règle de Leibniz, la série converge pour tout $a \in \mathbb{R}$. On détermine maintenant si la série est absolument convergente, c'est-à-dire si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n}$ converge. D'après le théorème de Cauchy (voir **III.2.28**), la convergence de cette série est équivalente à celle de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^a (\ln 2)^a$. Notre série est donc absolument convergente si $a < -1$.

(c) Si $a > 0$, la série est convergente d'après la règle de Leibniz. Si $a < 0$, on a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\frac{a}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin\frac{|a|}{n}\,.$$

En appliquant de nouveau la règle de Leibniz, on voit que la série converge pour tout $a \in \mathbb{R}$. La série n'est pas absolument convergente si $a \neq 0$ car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{|a|}{n}}{\frac{1}{n}} = |a| .$$

(d) La série converge si et seulement si $-1 \leqslant \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} < 1$, c'est-à-dire, si $a \in \left[-4\,,\frac{4}{5}\right[\cup [3\,,+\infty[$. Clairement, la série est absolument convergente si $a \in \left]-4\,,\frac{4}{5}\right[\cup]3\,,+\infty[$.

(e) Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{a^{n^2}}\right|} = 0 \quad \text{si} \quad |a| > 1,$$

la série est absolument convergente si $|a| > 1$. Si $|a| \leqslant 1$, la condition nécessaire à la convergence n'est alors pas vérifiée car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^n}{|a|^{n^2}} = +\infty$.

(f) On observe que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a} = \lim_{n\to+\infty} n^{\ln\ln n - a} = +\infty.$$

La condition nécessaire de convergence n'est donc pas vérifiée.

III.4.2. Si $|a| < 1$, on a alors, pour n suffisamment grand,

$$\left|\frac{a^{n-1}}{na^{n-1} + \ln n}\right| < |a|^{n-1}$$

et la série est donc absolument convergente. Si $|a| \geqslant 1$, alors

$$\frac{a^{n-1}}{na^{n-1} + \ln n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1 + \frac{\ln n}{na^{n-1}}}\right).$$

Donc, pour n suffisamment grand, les termes de la série sont strictement positifs et, d'après le test de comparaison, sa divergence découle de celle de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

III.4.3. On suppose d'abord que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut montrer en dérivant que $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ pour $x > 0$. Donc, $1 - \frac{\sin a_n}{a_n} < \frac{1}{6}\, a_n^2$. Puisque $a_n^2 < a_n$ pour n suffisamment grand, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ est convergente, ce qui implique la convergence de la série donnée. Si on abandonne l'hypothèse $a_n > 0$, la série peut converger ou diverger. En effet, en prenant $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\sin a_n}{a_n}\right)$ diverge si $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ et converge si $\alpha > \frac{1}{2}$.

III.4.4. Non, comme le montre l'exemple suivant :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n \ln n}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \geqslant 2.$$

III.4.5. On a $a_n = p_n - q_n$ et $|a_n| = p_n + q_n$. On note aussi que p_n et q_n sont positifs. Les deux séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ divergent donc car $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverge.

III.4.6. On pose $S_n = a_1 + \ldots + a_n$. D'après le problème précédent, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{S_n}{Q_n}\right) = 1.$$

III.4.7. La série n'est pas absolument convergente. On montre qu'elle est simplement convergente. Pour ce faire, on regroupe les termes de même signe et on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]}}{n} = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2}\right).$$

La convergence se déduit de la règle de Leibniz.

III.4.8. Clairement, la série est absolument convergente si $a > 1$ et divergente si $a \leqslant 0$. On montre que la série converge simplement si $\frac{1}{2} < a \leqslant 1$. On remarque que les trois premiers termes sont négatifs, les cinq suivants positifs, etc. En regroupant les termes de même signe, on obtient la série alternée

$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n A_n$ où $A_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k^a}$. De plus, pour $a \neq 1$, on a

$$A_n < \frac{1}{n^{2a}} + \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{t^a}\,dt = \frac{1}{n^{2a}} + \frac{1}{1-a}\left((n+1)^{2-2a} - n^{2-2a}\right).$$

Donc (voir **II.2.3**), $\lim_{n\to+\infty} A_n = 0$ si $\frac{1}{2} < a < 1$. Pour $a = 1$, on a $\frac{2}{n+1} < A_n < \frac{2n+1}{n^2}$ et, en conséquence, $\lim_{n\to+\infty} A_n = 0$ pour $\frac{1}{2} < a \leqslant 1$. On montre maintenant que pour un tel a, la suite $\{A_n\}$ est décroissante. En effet,

$$\begin{aligned}
A_n - A_{n+1} &= \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k^a} - \sum_{k=(n+1)^2}^{(n+2)^2-1} \frac{1}{k^a} \\
&= \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k^a} - \sum_{k'=n^2}^{(n+1)^2+1} \frac{1}{(k'+2n+1)^a} \\
&= \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \left(\frac{1}{k^a} - \frac{1}{(k+2n+1)^a}\right) - \frac{1}{\left((n+2)^2-2\right)^a} \\
&\quad - \frac{1}{\left((n+2)^2-1\right)^a} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{1}{(n^2+k)^a} - \frac{1}{\left((n+1)^2+k\right)^a}\right) - \frac{1}{\left((n+2)^2-2\right)^a} \\
&\quad - \frac{1}{\left((n+2)^2-1\right)^a} \\
&> (2n+1)\left(\frac{1}{(n^2+2n)^a} - \frac{1}{\left((n+1)^2+2n\right)^a}\right) \\
&\quad - \frac{1}{\left((n+2)^2-2\right)^a} - \frac{1}{\left((n+2)^2-1\right)^a},
\end{aligned}$$

la dernière inégalité se déduisant de la monotonie de la fonction

$$g(x) = \frac{1}{(n^2+x)^a} - \frac{1}{\left((n+1)^2+x\right)^a}$$

sur l'intervalle $[0\,,2n]$. Donc, pour n suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned}A_n - A_{n+1} &> (2n+1)\left(\frac{1}{(n^2+2n)^a} - \frac{1}{\left((n+1)^2+2n\right)^a}\right) - \frac{2}{(n+1)^{2a}}\\ &= \frac{2}{n^{2a}}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-a} - \left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{-a}\right) - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2a}\right]\\ &\geqslant n^{-2a}(2a-1) > 0,\end{aligned}$$

car $(1+x)^{-a} > 1-ax$ et $(1+x)^{-a} < 1-ax+\frac{a(a+1)}{2}x^2$ pour $a, x > 0$ (ces deux inégalités peuvent se prouver en dérivant). Donc, d'après la règle de Leibniz, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n A_n$ converge si $\frac{1}{2} < a \leqslant 1$.

Si $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$, puisque $A_n > (2n+1)\frac{1}{(n^2+2n)^a}$, la condition nécessaire à la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n A_n$ n'est alors pas vérifiée.

III.4.9. Comme dans la solution des **problèmes III.4.7** et **III.4.8**, on regroupe les termes de même signe et on réécrit la série sous la forme suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{[e^{n-1}]+1} + \ldots + \frac{1}{[e^n]}\right).$$

On remarque aussi que

$$\frac{1}{[e^{n-1}]+1} + \ldots + \frac{1}{[e^n]} > \frac{[e^n]-[e^{n-1}]}{[e^n]} = 1 - \frac{[e^{n-1}]}{[e^n]}.$$

De plus, puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{[e^{n-1}]}{[e^n]}\right) = 1 - \frac{1}{e},$$

la condition nécessaire à la convergence de la série n'est pas vérifiée et la série diverge donc.

III.4.10.

(a) On remarque que l'on peut écrire la série sous la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n A_n \quad \text{où} \quad A_n = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k}.$$

Puisque $A_n > 2^n \frac{1}{2^{n+1}-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$, la série diverge.

(b) Comme en (a), on peut écrire la série sous la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n A_n \quad \text{où} \quad A_n=\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k\ln k}\,.$$

De plus,

$$0<A_n<2^n\frac{1}{2^n\ln 2^n}\,.$$

Ceci implique $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n=0$. On montre alors que $\{A_n\}$ est décroissante. En effet,

$$\begin{aligned}
A_{n+1}&=\sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1}\frac{1}{k\ln k}=\sum_{l=0}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{(2^{n+1}+l)\ln(2^{n+1}+l)}\\
&=\sum_{l=0}^{2^n-1}\left(\frac{1}{(2^{n+1}+2l)\ln(2^{n+1}+2l)}+\frac{1}{(2^{n+1}+2l+1)\ln(2^{n+1}+2l+1)}\right)\\
&<\sum_{l=0}^{2^n-1}\frac{2}{(2^{n+1}+2l)\ln(2^{n+1}+2l)}<\sum_{l=0}^{2^n-1}\frac{1}{(2^n+l)\ln(2^n+l)}=A_n.
\end{aligned}$$

III.4.11. On a

$$\begin{aligned}
(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{(-1)^n+\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}&=(-1)^n\left(1-\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}\right)\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\\
&=(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\,.
\end{aligned}$$

D'après la règle de Leibniz, les séries

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

convergent. En revanche, la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge et la série étudiée diverge donc aussi.

III.4.12.

(a) La série converge absolument (voir **III.2.1 (f)**).

(b) La convergence de la série se déduit de la règle de Leibniz. En revanche, elle n'est pas absolument convergente (voir **III.2.1 (g)**).

(c) Clairement, la suite $\{\sqrt[n]{n}\}$, $n \geqslant 3$, est décroissante et la série converge donc. Mais elle n'est pas absolument convergente (voir **III.2.5 (b)**).

(d) La convergence se déduit de la monotonie de $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ et du fait que la limite de cette suite est e (voir **II.1.38**). Pour montrer que la série n'est pas absolument convergente, on utilise l'inégalité

$$\ln(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3, \quad x > 0,$$

en prenant $x = \frac{1}{n}$ pour obtenir $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e^{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}}$. Donc,

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > e\left(1 - e^{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}}\right) > e\left(1 - e^{-\frac{1}{4n}}\right) \quad \text{pour } n > 1.$$

Il s'ensuit, d'après **II.5.4 (a)**, que

$$4n\left(1 - e^{-\frac{1}{4n}}\right) > \frac{1}{2}$$

pour n suffisamment grand. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ est donc divergente.

(e) La convergence de cette série se déduit de la monotonie de la suite $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ et du fait que e est sa limite (voir **II.1.38**). Selon **III.2.5 (c)**, la série n'est pas absolument convergente.

III.4.13.

(a) La fonction

$$f(x) = \frac{(\ln x)^a}{x^b}, \quad x \in \left]e^{\frac{a}{b}}, +\infty\right[,$$

est décroissante et tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$. La série converge donc d'après la règle de Leibniz. On prouve que la série est absolument convergente si $b > 1$. D'après le théorème de Cauchy (voir **III.2.28**), il suffit de prouver la convergence de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{n^a}{2^{nb}}.$$

D'après le test de la racine, cette série converge si $b > 1$ et diverge si $0 < b < 1$. Clairement, si $b = 1$, la série est divergente.

(b) On note que
$$\frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^b} = \frac{e^{(\ln n)(\ln \ln n)}}{n^b} = \frac{n^{\ln \ln n}}{n^b}.$$
La condition nécessaire de convergence n'est donc pas vérifiée.

III.4.14. On a, avec la monotonie de $\{a_n\}$,

$$r_{2n} = (a_{2n+1} - a_{2n+2}) + (a_{2n+3} - a_{2n+4}) + \ldots > 0,$$
$$r_{2n+1} = (-a_{2n+2} + a_{2n+3}) + (-a_{2n+4} + a_{2n+5}) + \ldots < 0$$

et

$$r_{2n} = a_{2n+1} + (-a_{2n+2} + a_{2n+3}) + \ldots < a_{2n+1},$$
$$-r_{2n+1} = a_{2n+2} + (-a_{2n+3} + a_{2n+4}) + \ldots < a_{2n+2}.$$

III.4.15. On remarque que

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + a_{k+1}) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1} - a_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -a_1.$$

III.4.16. On observe que

$$\sum_{k=1}^{n}(aa_k + ba_{k+1} + ca_{k+2}) - (a+b+c)\sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$= b(a_{n+1} - a_1) + c(a_{n+1} + a_{n+2} - a_1 - a_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -ba_1 - c(a_1 + a_2).$$

III.4.17. Par hypothèse, il existe des constantes strictement positives c et C telles que, pour n suffisamment grand, $c \leqslant |a_n| \leqslant C$. D'où,

$$\left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right| \leqslant \frac{1}{c^2}\left|a_{n+1} - a_n\right|,$$
$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant C^2\left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right|.$$

La proposition se déduit donc du test de comparaison.

III.4.18. Soit S_n et $\widetilde{S}_n$ les sommes partielles respectives des séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n+1})$. On a

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n}(k+1)a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \\ &= -(n+1)a_{n+1} + S_{n+1},\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

III.4.19. La convergence se déduit de la règle de Leibniz.

III.4.20. Si $|a| < 1$, la série est alors absolument convergente. En effet, puisque $|\sin x| \leqslant |x|$, on a

$$\left| n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdots \sin \frac{a}{n} \right| \leqslant |a|^n .$$

On passe maintenant au cas où $|a| \geqslant 1$. On prouve que, dans ce cas, la série diverge car la condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée. En fait, pour a fixé, il existe n_0 tel que $\frac{|a|}{n_0} \leqslant 1$. Donc, en posant $C = (n_0 - 1)! \left| n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdots \sin \frac{a}{n_0 - 1} \right|$ et en utilisant l'inégalité $\frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6}$ pour $x > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\left| n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdots \sin \frac{a}{n} \right| &= C n_0 \cdots n \sin \frac{|a|}{n_0} \cdots \sin \frac{|a|}{n} \\ &\geqslant C n_0 \cdots n \sin \frac{1}{n_0} \cdots \sin \frac{1}{n} \\ &\geqslant C \prod_{k=n_0}^{n} \left(1 - \frac{1}{6k^2} \right) \\ &\geqslant C \prod_{k=n_0}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \\ &= C \frac{(n_0 - 1)(n+1)}{n_0 n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} C \frac{n_0 - 1}{n_0} > 0.\end{aligned}$$

III.4.21. D'après **II.5.4 (a)**, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-\frac{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{2}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}-\frac{\sqrt[n]{b}-1+\sqrt[n]{c}-1}{2\frac{1}{n}}\right)\\ &= \ln a-\frac{1}{2}(\ln b+\ln c)=\ln\frac{a}{\sqrt{bc}}\,.\end{aligned}$$

Donc, si $a>\sqrt{bc}$, tous les termes sont alors strictement positifs à partir d'une certaine valeur de l'indice n et, d'après le test de comparaison, la série diverge. Si $a<\sqrt{bc}$, les termes de la série sont strictement négatifs et elle diverge aussi. Pour $a=\sqrt{bc}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{a}-\frac{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{2}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[2n]{b}-\sqrt[2n]{c}\right)^2.$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[2n]{b}-1-\sqrt[2n]{c}+1}{\frac{1}{2n}}\right)^2=(\ln b-\ln c)^2\,,$$

la convergence de la série considérée se déduit donc de celle de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

III.4.22.

(a) D'après **I.1.14**, il existe une suite d'entiers $\{p_n\}$ et une suite d'entiers naturels non nuls $\{q_n\}$ telles que

$$\left|\pi-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}\,.$$

Donc, $|\cos p_n|=|\cos(\pi q_n-p_n)|>\cos\frac{1}{q_n}=1-2\sin^2\frac{1}{2q_n}>1-\frac{1}{2q_n^2}$ et

$$|\cos p_n|^{p_n}>\left(1-\frac{1}{2q_n^2}\right)^{p_n}>1-\frac{p_n}{q_n}\frac{1}{2q_n}\,.$$

Ceci signifie que la sous-suite $\{(\cos p_n)^{p_n}\}$ de $\{\cos^n n\}$ ne converge pas vers 0. La condition nécessaire de convergence n'est donc pas vérifiée.

(b) D'après **I.1.22**, on sait que les suites $\{p_n\}$ et $\{q_n\}$ mentionnées en (a) peuvent être choisies de sorte que tous les termes de $\{q_n\}$ soient impairs. L'inégalité

$$\left|\frac{\pi}{2}-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}$$

donne alors $|\sin p_n| = \left|\cos(\frac{\pi}{2}\, q_n - p_n)\right| > \cos\frac{1}{q_n} > 1 - \frac{1}{2q_n^2}$. Donc, comme en (a), la suite $\{(\sin p_n)^{p_n}\}$ ne converge pas vers 0 et la série diverge.

III.4.23.

(a) Par hypothèse (voir aussi **II.4.13 (b)**), il existe n_0 et α tel que

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > \alpha > 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_0.$$

Donc, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n}{n+\alpha} < 1$, ce qui signifie que, à partir d'une certaine valeur n_0 de l'indice n, la suite $\{a_n\}$ décroît. On montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Il découle de ce qui précède que

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0} < \frac{n(n-1)\cdots n_0}{(\alpha+n)\cdots(\alpha+n_0)}\, a_{n_0}\,.$$

Il suffit maintenant de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)\cdots n_0}{(\alpha+n)\cdots(\alpha+n_0)} = 0$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)\cdots n_0}{(\alpha+n)\cdots(\alpha+n_0)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{\alpha}{n_0}\right)} = 0,$$

car (voir **I.2.1**)

$$\left(1+\frac{\alpha}{n_0}\right)\cdots\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) > 1 + \frac{\alpha}{n_0} + \ldots + \frac{\alpha}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Donc, d'après la règle de Leibniz, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge.

(b) L'hypothèse $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 0$ implique que la suite $\{a_n\}$ croît et, en conséquence, que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ diverge car la condition nécessaire pour la convergence n'est pas vérifiée.

III.4.24. Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \alpha$. Pour $\alpha \neq 0$, on peut appliquer le test prouvé au problème précédent. Pour $\alpha = 0$, la condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée. En effet, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n} \\ &= \frac{1}{a_1}\left(1+\frac{\beta_1}{1^{1+\varepsilon}}\right)\left(1+\frac{\beta_2}{2^{1+\varepsilon}}\right)\cdots\left(1+\frac{\beta_{n-1}}{(n-1)^{1+\varepsilon}}\right).\end{aligned}$$

De plus, il existe β tel que $|\beta_n| \leqslant \beta$. Donc,

$$a_n \geqslant \frac{a_1}{\left(1+\frac{\beta}{1^{1+\varepsilon}}\right)\left(1+\frac{\beta}{2^{1+\varepsilon}}\right)\cdots\left(1+\frac{\beta}{(n-1)^{1+\varepsilon}}\right)} \geqslant \frac{a_1}{e^{\beta A}}$$

où $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$.

III.4.25. D'après **II.5.34**, l'existence de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}$ est équivalente à l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ et les deux limites sont égales. On pose $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = p - \frac{1}{2}$. Donc, d'après **III.4.23**, la série converge si $p > \frac{1}{2}$ et diverge si $p < \frac{1}{2}$. Dans le cas où $p = \frac{1}{2}$, la condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée car, d'après la formule de Stirling, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{2\pi}$.

III.4.26. On pose $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, on utilise la *sommation* dite *par parties* (*transformation d'Abel*) pour avoir

$$a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(p_k - p_{k+1}) + S_np_n$$

et on obtient

$$\frac{a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n}{p_n} = S_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \frac{p_k - p_{k+1}}{p_n}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème de Toeplitz (voir **II.3.1**).

III.4.27. On applique le résultat du problème précédent à la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_nb_n$ en prenant $p_n = \frac{1}{a_n}$.

III.4.28. Le résultat est un cas particulier du problème précédent.

III.4.29. Si la série n'était pas absolument convergente, la sous-série des termes positifs et la sous-série des termes négatifs seraient divergentes (voir **III.4.5**).

III.4.30. [20]. Non, comme le montre l'exemple suivant. On considère une série semi-convergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ et on pose

$$a_1 = b_1, a_2 = a_3 = \frac{b_2}{2!}, a_4 = a_5 = \ldots = a_9 = \frac{b_3}{3!}, \ldots$$

$$a_{1!+2!+\ldots+(n-1)!+1} = a_{1!+2!+\ldots+(n-1)!+2} = \ldots = a_{1!+2!+\ldots+(n-1)!+n!} = \frac{b_n}{n!}, \ldots$$

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ est semi-convergente. Mais pour tout $k \geqslant 1$ et tout $l \geqslant 2$, la sous-série

$$a_k + a_{k+l} + a_{k+2l} + \ldots$$

converge. En effet, pour $n \geqslant l$, il y a $\frac{n!}{l}$ termes de la forme $\frac{b_n}{n!}$. En regroupant ces termes, on obtient la série convergente

$$\text{constante} + \frac{1}{l}\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n.$$

III.4.31. Considérez la série

$$1 + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n\sqrt[3]{n}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}}_{n \text{ termes}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots$$

III.4.32. Oui. Considérez la série

$$1 + \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n\ln n} + \ldots + \frac{1}{n\ln n}}_{n \text{ termes}} - \frac{1}{\ln n} + \ldots$$

On a alors

$$\sum_{n=1}^{\frac{N^2+3N-2}{2}} a_n^k = \begin{cases} 1 + \sum\limits_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n^{k-1}\ln^k n} + \frac{1}{\ln^k n}\right) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 1 + \sum\limits_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n^{k-1}\ln^k n} - \frac{1}{\ln^k n}\right) & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy (voir **III.2.28**), la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^k n}$ diverge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par ailleurs, la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{k-1}\ln^k n}$ converge si $k \geqslant 2$.

III.4.33. [20]. On suppose, contrairement à la proposition, que $\varliminf_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n}{n} = 2\alpha > 0$. D'après **II.4.13 (b)**, il existe alors n_0 tel que pour $n > n_0$,

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n > \alpha n. \qquad (*)$$

On pose $E_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$. En utilisant une sommation par parties, on obtient

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n = \sum_{k=1}^{n-1} E_k(a_k - a_{k+1}) + E_n a_n.$$

Donc, d'après $(*)$,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n &> \sum_{k=1}^{n_0} E_k(a_k - a_{k+1}) + \alpha \sum_{k=n_0+1}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) + \alpha n a_n \\ &= \text{constante} + \alpha \sum_{k=n_0+2}^{n} a_k,\end{aligned}$$

contradiction.

III.4.34. [20]. On pose $E_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $\{E_n\}$ a la propriété qu'entre deux termes de signes opposés se trouve un terme nul. On considère deux cas :

(1) un nombre fini de termes de $\{E_n\}$ s'annulent,

(2) une infinité de termes de $\{E_n\}$ s'annulent.

Le cas (1) est un cas particulier de **III.2.35**. Dans le cas (2), d'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$\begin{aligned}\varepsilon > \left|\sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k a_k\right| &= \left|\sum_{k=m+1}^{n} ((E_k - E_m) - (E_{k-1} - E_m))a_k\right| \\ &= \left|\sum_{k=m+1}^{n} (E_k - E_m)(a_k - a_{k+1}) + (E_n - E_m)a_{n+1}\right| \qquad (*)\end{aligned}$$

si $n > m > n_0$. On suppose que $E_m = 0$ et que les termes $E_{m+1}, E_{m+2}, \ldots, E_n$ sont de même signe. Alors $(*)$ et la monotonie de la suite $\{a_n\}$ impliquent

$$|E_n a_n| < \varepsilon, \quad n \geqslant m+1.$$

III.4.35. La démonstration est semblable à celle de **III.4.33**. On pose $E_n = p_1b_1 + \ldots + p_nb_n$ et on suppose que $\varliminf_{n\to+\infty} \frac{p_1b_1+\ldots+p_nb_n}{n} = 2\alpha > 0$. Pour $n > n_0$, on a alors $p_1b_1 + \ldots + p_nb_n > \alpha n$ et, en conséquence,

$$\begin{aligned} b_1 + \ldots + b_n &= \frac{1}{p_1}(p_1b_1) + \ldots + \frac{1}{p_n}(p_nb_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} E_k\left(\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_{k+1}}\right) + E_n\frac{1}{p_n} \\ &> \text{constante} + \alpha \sum_{k=n_0+2}^{n} \frac{1}{p_k}, \end{aligned}$$

contradiction.

III.4.36. On observe d'abord que la série converge si $p = q$. On a

$$\begin{aligned} S_{lp} = &\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p+1} + \ldots + \frac{1}{2p}\right) \\ &+ \ldots + (-1)^{l+1}\left(\frac{1}{(l-1)p+1} + \ldots + \frac{1}{lp}\right) \end{aligned}$$

et S_{lp} est donc la somme partielle d'une série alternée. D'après la règle de Leibniz, $\lim_{l\to+\infty} S_{lp}$ existe. Clairement, chaque somme partielle de la forme S_{lp+k} $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$ tend vers la même limite lorsque l tend vers $+\infty$.

Supposons maintenant que la série converge. D'après **III.4.34**, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{np - nq}{np + nq} = \frac{p-q}{p+q} = 0,$$

ce qui implique $p = q$.

III.4.37. On remarque d'abord que si les conditions (i)-(iii) sont vérifiées, alors la suite transformée $\{b_n\}$ est bien définie pour toute suite convergente $\{a_n\}$. La démonstration se conduit alors de la même façon que dans les solutions des **problèmes II.3.1** et **II.3.26**.

III.5. Les tests de Dirichlet et Abel

III.5.1.

(a) Puisque $\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2n}(1-\cos(2n))$, il suffit de considérer les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\cos(2n).$$

La première série converge d'après la règle de Leibniz. La convergence de la seconde se déduit du test de Dirichlet (voir, par exemple, la note de bas de page de l'**exercice III.5.1** ou [12], p. 105). En effet, avec la formule (que l'on peut démontrer par récurrence)

$$\sum_{k=1}^{n}\cos ka = \frac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \quad \text{pour } a \neq 2l\pi,\ l\in\mathbb{Z}, \tag{1}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(2k)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\cos((\pi-2)k)\right| \\ &= \left|\frac{\sin\frac{(\pi-2)n}{2}\cos\frac{(n+1)(\pi-2)}{2}}{\cos 1}\right| \leqslant \frac{1}{\cos 1}.\end{aligned}$$

La suite des sommes partielles de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cos(2n)$ est bornée. De plus, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ est monotone et converge vers 0. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\cos(2n)$ est donc convergente.

(b) La suite

$$a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$$

des moyennes arithmétiques de $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge vers 0 (voir **II.3.2**). On vérifie facilement que la suite $\{a_n\}$ est décroissante. Avec la formule (que l'on peut démontrer par récurrence)

$$\sum_{k=1}^{n}\sin ka = \frac{\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \quad \text{pour } a \neq 2l\pi,\ l\in\mathbb{Z}, \tag{2}$$

on obtient

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| = \left|\frac{\sin\frac{n}{2}\sin\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}.$$

Donc, d'après le test de Dirichlet, la série converge.

(c) On observe que

$$\cos\left(\pi\frac{n^2}{n+1}\right) = \cos\left(n\pi - \frac{n\pi}{n+1}\right) = (-1)^n\cos\left(\pi - \frac{\pi}{n+1}\right)$$
$$= (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}.$$

La série étudiée peut donc s'écrire sous la forme

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos\frac{\pi}{n+1}}{\ln^2 n}.$$

La convergence de cette série se déduit du test d'Abel (voir, par exemple, la note de bas de page de l'**exercice III.5.1** ou [12], p. 106), car la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln^2 n}$ converge (par la règle de Leibniz) et $\left\{\cos\frac{\pi}{1+n}\right\}$ est une suite monotone et bornée.

(d) On a

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a + \sin\frac{n\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}\left(1 - \frac{\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}}\right).$$

La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}, \quad a > 0,$$

converge (d'après le test de Dirichlet). On étudie maintenant la série (à termes positifs)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}}.$$

Il existe des constantes strictement positives c_a et C_a telles que

$$c_a\frac{1}{n^{2a}} < \frac{\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}} < C_a\frac{1}{n^{2a}}, \quad n \neq 4k,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

La série converge donc si $a > \frac{1}{2}$ et diverge si $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$.

III.5.2. On a

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n} = \sum_{n=2}^{N} \frac{\sin n \cos\frac{1}{n}}{\ln\ln n} + \sum_{n=2}^{N} \frac{\cos n \sin\frac{1}{n}}{\ln\ln n}.$$

Avec la formule (2) donnée dans la solution du **problème III.5.1 (b)** et le test de Dirichlet, on voit que la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n}{\ln\ln n}$ converge. Puisque la suite $\left\{\cos\frac{1}{n}\right\}$ est monotone et bornée, la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n \cos\frac{1}{n}}{\ln\ln n}$ converge d'après le test d'Abel. Finalement, la convergence de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos n \sin\frac{1}{n}}{\ln\ln n}$ se déduit de la formule (1) donnée dans la solution du **problème III.5.1 (a)** et du test de Dirichlet.

III.5.3.

(a) On a

$$\begin{aligned} 2\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(k^2 a)\sin(ka)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} [\cos(k(k-1)a) - \cos(k(k+1)a)]\right| \\ &= |1-\cos(n(n+1)a)| \leqslant 2. \end{aligned}$$

La convergence de la série se déduit donc du test de Dirichlet.

(b) Comme en (a), on peut appliquer le test de Dirichlet.

III.5.4. En utilisant la formule

$$\frac{\cos n \sin(na)}{n} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin(n(a+1))}{n} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin(n(a-1))}{n},$$

la convergence de la série étudiée se déduit directement du test de Dirichlet (utilisez la formule (2) donnée dans la solution de **III.5.1 (b)**).

III.5.5. Si $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tous les termes de la série sont alors nuls. Si $a \neq k\pi$, on obtient alors, avec l'inégalité $|sinx| \geqslant \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|\sin(na)|}{n} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(2na)}{n}.$$

La série n'est donc pas absolument convergente dans ce cas.

III.5.6. On suppose d'abord que $0 < a < \pi$ et on pose $m = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{a}\right]$. On a alors, pour n suffisamment grand,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(ak)}{k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left|\frac{\sin(ak)}{k}\right| + \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin(ak)}{k}\right|.$$

Puisque $|\sin t| < |t|$ pour $t \neq 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{\sin(ak)}{k}\right| < \sum_{k=1}^{m} \frac{ak}{k} = ma \leqslant \sqrt{\pi}. \tag{1}$$

De plus, on déduit de (2) dans la solution du **problème III.5.1 (b)** et de l'inégalité $\sin t > \frac{2}{\pi} t$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, que

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin(ak)}{k}\right| \leqslant \frac{1}{(m+1)\left|\sin \frac{a}{2}\right|} < \frac{1}{\frac{a}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{a}} = \sqrt{\pi}. \tag{2}$$

On voit en combinant (1) et (2) que l'inégalité cherchée est vérifiée pour $a \in \left]0\,,\pi\right[$. Clairement, puisque la fonction sinus est impaire, l'inégalité est aussi vérifiée pour $a \in \left]-\pi\,,0\right[$. De plus, puisque $\sin k\pi = 0$ et que la fonction sinus est périodique, l'inégalité est vérifiée pour tout $a \in \mathbb{R}$.

III.5.7. La convergence de la série se déduit du test d'Abel car la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ est convergente et la suite $\{\operatorname{Arctan} n\}$ est croissante et majorée.

III.5.8. La série converge d'après le test d'Abel. En effet, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge et la suite $\left\{\sqrt[n]{\ln x}\right\}$ est bornée, strictement croissante si $x > e$ et strictement décroissante si $1 < x < e$.

III.5.9.

(a) On observe d'abord que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ converge d'après le test d'Abel.

De plus, si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ est convergente, la suite $\{r_n\}$, $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, converge vers 0. Donc, pour $p \geqslant n$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{p}\frac{a_k}{b_k}\right| &= \left|\sum_{k=n}^{p}\frac{r_k-r_{k+1}}{b_k}\right| = \left|\sum_{k=n}^{p}\frac{r_k}{b_k}-\sum_{k=n}^{p}\frac{r_{k+1}}{b_k}\right| \\ &= \left|\frac{r_n}{b_n}+\sum_{k=n+1}^{p} r_k\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k-1}}\right)-\frac{r_{p+1}}{b_p}\right| \\ &\leqslant \varepsilon_n\left(\frac{1}{b_n}+\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_p}+\frac{1}{b_p}\right)=\frac{2\varepsilon_n}{b_n},\end{aligned}$$

où $\varepsilon_n = \sup\limits_{k\geqslant n}|r_k|$. En conséquence,

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{a_k}{b_k}\right| \leqslant 2\varepsilon_n\frac{1}{b_n} = o\left(\frac{1}{b_n}\right).$$

(b) Voir **III.4.26**.

III.5.10. On note que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)c_{n+k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{n+k-1}\,(n+k-1)\,c_{n+k-1}.$$

Le test d'Abel implique donc la convergence de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(k+1)c_{n+k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $r_n = nc_n + (n+1)c_{n+1} + \ldots$, on obtient

$$\begin{aligned}t_n = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)c_{n+k} &= \sum_{k=n}^{+\infty}(k-n+1)c_k \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty}kc_k-(n-1)\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k}\,kc_k \\ &= r_n-(n-1)\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k}\,(r_k-r_{k+1}) \\ &= \frac{1}{n}\,r_n+(n-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)r_k.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}|t_n| &\leqslant \frac{1}{n}|r_n| + \sup_{k\geqslant n+1}|r_k|\,(n-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{n}|r_n| + \sup_{k\geqslant n+1}|r_k|\,\frac{n-1}{n}.\end{aligned}$$

Ceci, combiné à $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$, donne $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.

III.5.11. Une sommation par parties donne

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^k = \sum_{i=1}^{n-1} A_i\left(b_i^k - b_{i+1}^k\right) + A_n b_n^k,$$

où A_n représente la n-ième somme partielle de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $|b_i| < \varepsilon$ pour $i \geqslant n_0$. Donc, si $m > n \geqslant n_0$ et $|A_n| \leqslant L$, alors

$$\begin{aligned}|S_m - S_n| &= \left|\sum_{i=n}^{m-1} A_i\left(b_i^k - b_{i+1}^k\right) - A_n b_n^k + A_m b_m^k\right|\\ &\leqslant \sum_{i=n}^{m-1}|A_i|\left|b_i^k - b_{i+1}^k\right| + \left|A_n b_n^k\right| + \left|A_m b_m^k\right|\\ &\leqslant L\left(\sum_{i=n}^{m-1}|b_i - b_{i+1}|\left|b_i^{k-1} + b_i^{k-2}b_{i+1} + \ldots + b_{i+1}^{k-1}\right| + \left|b_n^k\right| + \left|b_m^k\right|\right)\\ &\leqslant L\left(k\varepsilon^{k-1}\sum_{i=n}^{m-1}|b_i - b_{i+1}| + 2\varepsilon^k\right).\end{aligned}$$

La convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ se déduit donc du critère de Cauchy.

III.5.12. Une sommation par parties donne

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) + A_n b_n, \qquad (*)$$

où A_n représente la n-ième somme partielle de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Puisque la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})$ est absolument convergente et la suite $\{A_n\}$ est bornée, la série

$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ est absolument convergente. La convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})$ implique l'existence de $\lim_{n\to+\infty} b_n$, car $(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_{n-1} - b_n) = b_1 - b_n$. En conséquence, $\lim_{n\to+\infty} A_n b_n$ existe aussi et, d'après $(*)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ converge.

III.5.13. Pour $0 \leqslant x < 1$, la suite $\{x^n\}$ est décroissante et bornée donc le test d'Abel s'applique. Pour $-1 < x < 0$, les deux suites $\left\{x^{2n}\right\}$ et $\left\{x^{2n-1}\right\}$ sont monotones et bornées. En conséquence, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}x^{2n-1}$ sont convergentes. La convergence de la série étudiée se déduit de l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}x^{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}x^{2n-1}.$$

III.5.14. On observe que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \times \frac{1}{n^{x-x_0}}$$

si $x > x_0$. Il suffit alors d'appliquer le test d'Abel.

III.5.15. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} \cdot \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

et on remarque que, pour n suffisamment grand, les réels $\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ sont tous de même signe. On montre qu'ils forment une suite monotone. Pour cela, on observe que le rapport entre le $(n+1)$-ième terme et le n-ième terme est égal à

$$\frac{(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^x}{x+n+1} = \frac{e^{(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{1+\frac{x+1}{n}}.$$

On pose alors $R_n = e^{(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 - \frac{x+1}{n}$ et on voit que, d'après le résultat de **II.5.7**,

$$\begin{aligned}R_n &= (x+1)\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2!}(x+1)^2\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &\quad + \frac{1}{3!}(x+1)^3\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right) + \dots\\ &= \frac{1}{n^2}\left(-\frac{x+1}{2} + \frac{1}{2}(x+1)^2 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{3!}(x+1)^3\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right) + \dots\end{aligned}$$

Ceci implique que, pour n suffisamment grand, R_n est strictement positif si $x(x+1) > 0$ et strictement négatif si $x(x+1) < 0$. Le rapport entre deux termes consécutifs de $\left\{\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right\}$ est soit plus grand, soit plus petit que 1 pour tout n suffisamment grand. On montre maintenant que cette suite est convergente pour $x \notin \mathbb{Z}_-$. Pour cela, on écrit

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{1}{x}\,\frac{n}{x+n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}.$$

On suppose d'abord que $x > 1$. Pour un tel x, on a $\left(1+\frac{1}{k}\right)^x > 1+\frac{x}{k}$. Donc,

$$\ln\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right),$$

tous les termes de la somme étant strictement positifs. On note de plus que

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)}{\frac{1}{k^2}} = \frac{x(x-1)}{2}.$$

L'existence de la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}$$

se déduit alors de la convergence de la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$. La suite considérée est donc bien convergente pour $x > 1$.

On suppose maintenant que $x \in \left]0\,,1\right[$. Pour un tel x, on a $\left(1+\frac{1}{k}\right)^x < 1+\frac{x}{k}$. On peut donc appliquer le raisonnement précédent à la suite de termes

$$-\ln\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}.$$

Finalement, on considère le cas où $x < 0$, $x \notin \mathbb{Z}_-$. Soit $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 + \frac{x}{k} > 0$ pour $k \geqslant k_0$. Pour montrer que la suite

$$\prod_{k=k_0}^{n-1} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}$$

converge, on note que

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^x > 1 + \frac{x}{k} \quad \text{pour} \quad k \geqslant k_0$$

et on procède comme dans le cas où $x > 1$.

III.5.16. Il découle immédiatement du test d'Abel que pour $|x| < 1$, la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ implique celle de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n}$ (voir **III.5.13**). Puisque $\left\{\frac{1}{1-x^{2n}}\right\}$ est monotone et bornée, l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n x^n \frac{1}{1-x^{2n}} + a_n x^{2n} \frac{1}{1-x^{2n}}\right)$$

et le test d'Abel impliquent la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

III.5.17. [20]. Non. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ une série semi-convergente. Soit $F(x) = 2^{x^2}$. On définit une nouvelle série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ en posant

$$a_1 = a_2 = \frac{b_1}{2}, \quad a_k = \frac{b_m}{F(m) - F(m-1)} \quad \text{pour} \quad F(m-1) < k \leqslant F(m).$$

Cette série est aussi semi-convergente. On montre maintenant que toute sous-série de la forme

$$a_k + a_{kl} + a_{kl^2} + \ldots \tag{$*$}$$

converge. On note d'abord que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique t_m, $t_m = \left[\log_l \frac{F(m)}{k}\right]$, tel que

$$kl^{t_m} \leqslant F(m) < kl^{t_m+1}.$$

Il découle de la définition de t_m qu'à partir d'une certaine valeur de l'indice m, la sous-série $(*)$ a $t_m - t_{m-1}$ termes de la forme $\frac{b_m}{F(m)-F(m-1)}$. On transforme $(*)$ en regroupant ces termes pour obtenir la série

$$\text{constante} + \sum_{m=n_1}^{+\infty} \frac{t_m - t_{m-1}}{F(m) - F(m-1)}\, b_m.$$

D'après le test d'Abel, cette série converge car la suite formée des termes

$$c_m = \frac{t_m - t_{m-1}}{F(m) - F(m-1)}$$

est décroissante. En effet,

$$c_m > \frac{(2m-1)\log_l 2 - 1}{2^{m^2} - 2^{(m-1)^2}} \quad \text{et} \quad c_{m+1} < \frac{(2m+1)\log_l 2 + 1}{2^{(m+1)^2} - 2^{m^2}}\,.$$

On a donc, pour m suffisamment grand, $c_{m+1} < c_m$ car

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{(2m+1)\log_l 2 + 1}{(2m-1)\log_l 2 - 1} \cdot \frac{2^{m^2} - 2^{(m-1)^2}}{2^{(m+1)^2} - 2^{m^2}} = 0.$$

III.6. Produit de Cauchy de séries

III.6.1. On suppose que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge absolument. On note respectivement A_n, B_n et C_n les n-ièmes sommes partielles de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$. On a alors

$$\begin{aligned} C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0) \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0. \end{aligned}$$

On pose

$$B = B_n + r_n \quad \text{où} \quad \lim_{n\to+\infty} r_n = 0.$$

On a alors

$$C_n = BA_n - (a_0r_n + a_1r_{n-1} + \ldots + a_nr_0).$$

On montre maintenant que

$$\lim_{n\to+\infty} (a_0r_n + a_1r_{n-1} + \ldots + a_nr_0) = 0. \tag{$*$}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et m, M tels que

$$|r_n| \leqslant m \quad \text{pour tout } n \geqslant 0, \qquad M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,.$$

Il existe $k, l \in \mathbb{N}^*$ tels que si $n \geqslant k$, alors $|r_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$ et si $n \geqslant l+1$, alors $|a_{l+1}| + \ldots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2m}$. On a donc, pour $n \geqslant l+k$,

$$\begin{aligned}
|a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + \ldots + a_n r_0| &\leqslant (|a_0|\,|r_n| + \ldots + |a_l|\,|r_{n-l}|) \\
&\quad + (|a_{l+1}|\,|r_{n-l-1}| + \ldots + |a_n|\,|r_0|) \\
&< (|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_l|)\,\frac{\varepsilon}{2M} \\
&\quad + (|a_{l+1}| + \ldots + |a_n|)\,m \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2m}m = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui démontre $(*)$.

On remarque que l'analyse précédente implique que si les deux séries sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy l'est aussi.

III.6.2.

(a) Le théorème de Mertens implique que le produit de Cauchy de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ par elle-même converge si $|x| < 1$. De plus,

$$c_n = x^n + x x^{n-1} + \ldots + x^n = (n+1)x^n.$$

Donc,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2.$$

(b) $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-y}$.

(c) La série est le produit de Cauchy de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ par $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. La somme de la première série est égale à 1 (voir **III.1.4 (b)**), celle de la seconde est égale à $e-1$ (voir **II.5.6**). Donc, d'après le théorème de Mertens, la somme de la série considérée est égale à $e-1$.

III.6.3.

(a) On a

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \cdot \frac{1}{2^{n-k}(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 2^k \frac{1}{2^{n-k}} = \frac{1}{n!}\left(2 + \frac{1}{2}\right)^n.$$

D'après **II.5.7**, la somme du produit de Cauchy est égale à $e^{\frac{5}{2}}$.

(b) Le produit de Cauchy est la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-3)^k}{k}.$$

D'après **III.1.32 (a)**, sa somme vaut $-\frac{1}{2}\ln 2$.

(c) On a

$$\begin{aligned}
c_{2n+1} &= x^{2n+1} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k (k+1)(2n+1-k+1) \\
&= x^{2n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1)(2n+1-k+1) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^k (k+1)(2n+1-k+1) \right) \\
&= x^{2n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1)(2n+1-k+1) \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{k'=0}^{n} (-1)^{k'} (k'+1)(2n+1-k'+1) \right) = 0.
\end{aligned}$$

De plus, puisque $c_{2n+1} = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= x^{2n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n-k} (k+1)(2n-k+1) \\
&= x^{2n} \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k (k+1)(2n-1-k+1) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k (k+1) + (2n+1) \right) \\
&= x^{2n}(0 + (-n) + (2n+1)) = (n+1)x^{2n}.
\end{aligned}$$

Finalement, d'après **III.6.2 (a)**,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{2n} = \frac{1}{(1-x^2)^2}\,.$$

III.6.4. On observe que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$ est le produit de Cauchy de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ par $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Elle est donc convergente pour $|x| < 1$ et sa somme vaut $\frac{1}{1-x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

III.6.5. Il suffit d'identifier les coefficients de x^n dans chaque membre de l'égalité $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ pour prouver l'égalité donnée en indication. D'où,

$$c_n = (-1)^n x^{2n}\frac{1}{(n!)^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = (-1)^n x^{2n}\frac{1}{(n!)^2}\binom{2n}{n}.$$

III.6.6. On a la relation

$$c_n = \left(\frac{1}{a}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} + \frac{1}{2(a+2)}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} + \ldots + \frac{1}{a+2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)x^n,$$

il suffit donc de prouver l'égalité

$$\frac{1}{a}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} + \frac{1}{2(a+2)}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} + \ldots + \frac{1}{a+2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$
$$= \frac{(a+1)(a+3)\cdots(a+(2n-1))}{a(a+2)(a+4)\cdots(a+2n)}\,.$$

Pour cela, on décompose le second membre en éléments simples :

$$\frac{(a+1)(a+3)\cdots(a+(2n-1))}{a(a+2)(a+4)\cdots(a+2n)} = \frac{\alpha_0}{a} + \frac{\alpha_1}{a+2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a+2n}\,.$$

En multipliant chaque membre de cette égalité par $a(a+2)(a+4)\cdots(a+2n)$ et en prenant $a=0$, $a=-2$, ..., $a=-2k$, ..., $a=-2n$, on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\\
\alpha_1 &= \frac{-1(2n-3)!!}{-2(2n-2)!!}\\
&\vdots\\
\alpha_k &= \frac{(-2k+1)(-2k+3)\cdots(-1)\times 1\times 3\cdots(2(n-k)-1)}{-2k((-2k+2)\cdots(-2)\times 2\times 4\cdots(2(n-k))}\\
&= \frac{(2k-1)!!(2(n-k)-1)!!}{(2k)!!(2(n-k))!!}\\
\alpha_n &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},
\end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité désirée.

III.6.7. Soit A_n, B_n et C_n les n-ièmes sommes partielles respectivement de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$. On vérifie facilement que

$$C_n = a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0.$$

Donc,

$$C_0 + C_1 + \ldots + C_n = A_0B_n + A_1B_{n-1} + \ldots + A_nB_0.$$

En divisant chaque membre de cette égalité par $n+1$ et en utilisant **II.3.2** et **II.3.8**, on obtient $C = AB$.

III.6.8. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ le produit de Cauchy de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ par elle-même. On a

$$c_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\times n} + \frac{1}{2(n-1)} + \ldots + \frac{1}{k(n-k+1)} + \ldots + \frac{1}{n\times 1}\right).$$

Puisque

$$\frac{1}{k(n-k+1)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

on peut écrire

$$c_n = (-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

On sait que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ (voir **III.1.32 (a)**) et que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$ converge (voir **III.4.19**). Donc, d'après le problème précédent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = (\ln 2)^2 .$$

III.6.9. Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ est le produit de Cauchy de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ par elle-même, alors

$$c_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{1 \times \sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k} \times \sqrt{n-k+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n} \times 1}\right).$$

Puisque chaque terme dans la parenthèse est plus grand que $\frac{1}{n}$, on voit donc que $|c_n| > 1$ pour $n > 1$. Il s'ensuit que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ est une série divergente.

III.6.10. On a

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 > a_0 b_n$$

et, en conséquence, si la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge, le produit de Cauchy $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ diverge alors aussi.

III.6.11. Non. On considère les deux séries divergentes suivantes :

$$1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

On a alors

$$c_n = a_0 b_n + b_0 a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k},$$

où $a_0 = b_0 = 1$, $a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^n$ et $b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$. Donc,

$$c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(2^{n-k} + \frac{1}{2^{n-k+1}}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n .$$

III.6.12. Soit A_n, B_n et C_n les n-ièmes sommes partielles respectivement de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$. On a

$$C_n = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} a_k (b_n + b_{n-1} + \ldots + b_{n-k+1}) \\
&\qquad = a_1(B_n - B_{n-1}) + a_2(B_n - B_{n-2}) + \ldots + a_n(B_n - B_0) \\
&\qquad = B_n(A_n - a_0) - a_1 B_{n-1} - a_2 B_{n-2} - \ldots - a_n B_0 \\
&\qquad = B_n A_n - C_n.
\end{aligned}$$

III.6.13. Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ le produit de Cauchy des séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$. On a

$$c_n = (-1)^n (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0).$$

On suppose d'abord que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$. On obtient, avec la monotonie des suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$,

$$|c_n| \geqslant b_n(a_0 + \ldots + a_n) \quad \text{et} \quad |c_n| \geqslant a_n(b_0 + \ldots + b_n).$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n(a_0 + \ldots + a_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n(b_0 + \ldots + b_n) = 0.$$

On suppose maintenant que les deux égalités sont vérifiées. D'après le problème précédent, il suffit alors de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k \left((-1)^n b_n + (-1)^{n-1} b_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-k+1} b_{n-k+1} \right) = 0.$$

On remarque que

$$\left| (-1)^n b_n + (-1)^{n-1} b_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-k+1} b_{n-k+1} \right| \leqslant b_{n-k+1}$$

et, en conséquence,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k\left((-1)^n b_n+(-1)^{n-1}b_{n-1}+\ldots+(-1)^{n-k+1}b_{n-k+1}\right)\right|$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}.$$

On montre alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}=0$. En effet,

$$0<\sum_{k=1}^{2n} a_k b_{2n-k+1}\leqslant (a_1+\ldots+a_n)b_n+(b_1+\ldots+b_n)a_n,$$

ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} a_k b_{2n-k+1}=0$. On peut montrer de la même façon que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n-1} a_k b_{2n-k}=0$, ce qui complète la démonstration.

III.6.14. On observe d'abord qu'il suffit de considérer le cas où α et β sont tous les deux inférieurs ou égaux à 1. On montre que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{2^\beta}+\ldots+\frac{1}{n^\beta}\right)=0$$

si et seulement si $\alpha+\beta>1$. D'après le théorème de Stolz (voir **II.3.11**), on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{2^\beta}+\ldots+\frac{1}{n^\beta}\right)&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\beta\left(n^\alpha-(n-1)^\alpha\right)}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\beta}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\alpha\right)}.\end{aligned}$$

La règle de L'Hospital donne

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha+\beta}\left(1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^\alpha\right)}&=\lim_{t\to0^+}\frac{t^{\alpha+\beta}}{1-(1-t)^\alpha}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{(\alpha+\beta)t^{\alpha+\beta-1}}{\alpha\,(1-t)^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\beta}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\alpha\right)}=\begin{cases}0 & \text{si } \alpha+\beta>1,\\ \frac{1}{\alpha} & \text{si } \alpha+\beta=1,\\ +\infty & \text{si } \alpha+\beta<1.\end{cases}$$

Le résultat cherché se déduit alors du problème précédent.

III.6.15. On suppose que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ converge. D'après le résultat du **problème III.6.13**, il suffit de prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(b_0+b_1+\ldots+b_n)=0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n(a_0+a_1+\ldots+a_n)=0.$$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $k_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $a_{k_0+1}b_{k_0+1}+a_{k_0+2}b_{k_0+2}+\ldots<\frac{\varepsilon}{2}$. Donc, pour $k>k_0$, on a

$$a_n(b_0+\ldots+b_n)<a_n(b_0+\ldots+b_{k_0})+\frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, puisque $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$, il existe $n_1>k_0$ tel que

$$a_n<\frac{\varepsilon}{2(b_0+\ldots+b_{k_0})} \quad \text{si} \quad n>n_1,$$

ce qui implique $a_n(b_0+\ldots+b_n)<\varepsilon$ pour $n>n_1$. On a donc prouvé que $\lim_{n\to+\infty} a_n(b_0+\ldots+b_n)=0$.

On suppose maintenant que le produit de Cauchy est convergent. Il s'ensuit, d'après **III.6.13**, que $\lim_{n\to+\infty} a_n(b_0+\ldots+b_n)=0$. D'où, pour n suffisamment grand,

$$(n+1)a_nb_n<a_n(b_0+\ldots+b_n)<1$$

et

$$(a_nb_n)^{1+\alpha}<\left(\frac{1}{n+1}\right)^{1+\alpha}.$$

III.7. Réarrangement de séries. Séries doubles

III.7.1. Soit $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ la n-ième somme partielle de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. On a

$$b_1+b_2+\ldots+b_n=S_{m_n} \quad \text{pour} \quad n\geqslant 1.$$

Puisque toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite, $\lim_{n\to+\infty} S_{m_n}=\lim_{n\to+\infty} S_n$.

III.7.2. On appelle $\{T_n\}$ la suite des sommes partielles de la série réarrangée. On a

$$\begin{aligned}T_{3n} &= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}\right)-\frac{1}{4n}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).\end{aligned}$$

Donc, d'après **III.1.32 (a)**, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{3n} = \frac{1}{2}\ln 2$. Bien sûr, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{3n} = \lim\limits_{n\to+\infty} T_{3n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} T_{3n+2}$. Il s'ensuit que

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\ldots=\frac{1}{2}\ln 2.$$

III.7.3. Soit $\{T_n\}$ la suite des sommes partielles de la série réarrangée. On pose $f(n) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$. On a alors

$$\begin{aligned}T_{\alpha+\beta} &= 1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2\alpha-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2\beta}\\ &= f(2\alpha-1)-\frac{1}{2}f(\alpha-1)-\frac{1}{2}f(\beta)\\ &= \frac{1}{2}f(\alpha)-\frac{1}{2}f(\beta).\end{aligned}$$

On montre maintenant par récurrence que

$$T_{n(\alpha+\beta)} = f(2n\alpha)-\frac{1}{2}f(n\alpha)-\frac{1}{2}f(n\beta).$$

Comme on l'a déjà prouvé, l'égalité est vérifiée pour $n=1$. Si elle est vérifiée pour un $n\in\mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned}T_{(n+1)(\alpha+\beta)} &= f(2n\alpha)-\frac{1}{2}f(n\alpha)-\frac{1}{2}f(n\beta)+\frac{1}{2n\alpha+1}+\frac{1}{2n\alpha+3}+\ldots\\ &\quad+\frac{1}{2(n+1)\alpha-1}-\frac{1}{2n\beta+2}-\frac{1}{2n\beta+4}-\ldots-\frac{1}{2(n+1)\beta}\\ &= f(2n\alpha)-\frac{1}{2}f(n\alpha)-\frac{1}{2}f(n\beta)+f(2(n+1)\alpha-1)-\frac{1}{2}f((n+1)\alpha-1)\\ &\quad-f(2n\alpha)+\frac{1}{2}f(n\alpha)-\frac{1}{2}f((n+1)\beta)+\frac{1}{2}f(n\beta)\\ &= f(2(n+1)\alpha)-\frac{1}{2}f((n+1)\alpha)-\frac{1}{2}f((n+1)\beta).\end{aligned}$$

Donc, d'après **II.1.41**,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} T_{n(\alpha+\beta)} \\
&\quad = \lim_{n\to+\infty}\left(f(2n\alpha)-\ln(2n\alpha)-\frac{1}{2}f(n\alpha)+\frac{1}{2}\ln(n\alpha)-\frac{1}{2}f(n\beta)+\frac{1}{2}\ln(n\beta)\right) \\
&\qquad + \lim_{n\to+\infty}\left(\ln(2n\alpha)-\frac{1}{2}\left(\ln(n\alpha)+\ln(n\beta)\right)\right) \\
&\quad = \lim_{n\to+\infty}\ln\frac{2n\alpha}{\sqrt{n^2\alpha\beta}} = \ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{\beta}.
\end{aligned}$$

III.7.4. Ce résultat est un cas particulier ($\alpha = 1$ et $\beta = 4$) du problème précédent.

III.7.5. Il suffit d'appliquer le résultat du **problème III.7.3** en prenant $\alpha = 4$ et $\beta = 1$.

III.7.6. On considère la série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots \tag{1}$$

obtenue en réarrangeant les termes de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ de sorte que n ($n \in \mathbb{N}^*$) termes positifs soient suivis d'un terme négatif. En regroupant les termes de la série (1) comme suit

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\dots,$$

on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2-n+1}+\frac{1}{n^2-n+3}+\dots+\frac{1}{n^2+n-1}-\frac{1}{2n}\right). \tag{2}$$

On note respectivement S_n et T_n les n-ièmes sommes partielles des séries (1) et (2). On a alors

$$T_n = S_{\frac{(n+1)n}{2}+n} > \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k^2+k-1}-\frac{1}{2k}\right) > \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty.$$

III.7.7. On réécrit la série en regroupant les termes sous la forme

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right).$$

De plus,

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{\sqrt{(4n-1)2n}+\sqrt{(4n-3)2n}-\sqrt{(4n-3)(4n-1)}}{\sqrt{4n-3}\sqrt{4n-1}\sqrt{2n}}$$
$$>\frac{2\sqrt{2n}-\sqrt{4n-1}}{\sqrt{4n-1}\sqrt{2n}}>\frac{2\sqrt{2n}-\sqrt{4n}}{\sqrt{4n-1}\sqrt{2n}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4n-1}}.$$

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{3n}=+\infty$, $\{S_n\}$ étant la suite des sommes partielles de la série réarrangée. La série diverge donc.

III.7.8. On suppose que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ est absolument convergente, on appelle S_n sa n-ième somme partielle et on pose $S=\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. On note $\{T_n\}$ la suite des sommes partielles de la série réarrangée. La convergence absolue de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ implique que, étant donné $\varepsilon>0$, il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots<\varepsilon. \qquad (*)$$

Soit m un entier suffisamment grand pour que tous les termes $a_1,a_2,\ldots,a_n$ apparaissent dans T_m. D'après $(*)$, on a alors

$$|S-T_m|\leqslant|S-S_n|+|S_n-T_m|<2\varepsilon.$$

III.7.9. [4]. On suppose d'abord que $l>0$ et on pose $n=d+u$, $d>u$. On réarrange alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}f(n)$ de sorte que la n-ième somme partielle de la nouvelle série soit

$$T_n=T_{u+d}=(f(1)-f(2)+f(3)-\ldots-f(2u))+(f(2u+1)$$
$$+f(2u+3)+\ldots+f(2d-1)).$$

Cette somme contient u termes négatifs et tous ceux restant, au nombre de d, sont positifs. La somme dans la seconde parenthèse contient $d-u$ termes et cette somme est donc comprise entre $(d-u)f(2u)$ et $(d-u)f(2d)$. Puisque la somme dans la première parenthèse converge vers S lorsque u tend vers $+\infty$, la différence entre la somme avant et après le réarrangement est égale à la limite de la seconde parenthèse. On pose $\nu(u)=d-u$. On a

$$\nu(u)f(2d)<f(2u+1)+f(2u+3)+\ldots+f(2d-1)<\nu(u)f(2u) \qquad (1)$$

et la monotonie de la suite $\{nf(n)\}$ implique

$$\frac{u}{u+\nu(u)}<\frac{f(2u+2\nu(u))}{f(2u)}<1. \qquad (2)$$

On choisit $\nu(u)$ tel que
$$\lim_{u\to+\infty} \nu(u) f(2u) = l \tag{3}$$
(on peut prendre, par exemple, $\nu(u) = l\left[\frac{1}{f(2u)}\right]$). On a alors $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{\nu(u)}{u} = 0$ car
$$l = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{2}\,\frac{\nu(u)}{u}\, 2uf(2u) \quad \text{et} \quad \lim_{u\to+\infty} 2uf(2u) = +\infty.$$
Donc (2) implique $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{f(2u+2\nu(u))}{f(2u)} = 1$. Les inégalités (1) et le théorème des gendarmes donnent alors
$$\lim_{u\to+\infty} (f(2u+1) + f(2u+3) + \ldots + f(2d-1)) = l.$$
On a donc prouvé que $\lim\limits_{u\to+\infty} T_{2u+\nu(u)} = S + l$.

On note maintenant que si $2u + \nu(u) < k < 2(u+1) + \nu(u+1)$, alors
$$0 \leqslant T_k - T_{2u+\nu(u)} + f(2u+2) \leqslant T_{2u+2+\nu(u+1)} - T_{2u+\nu(u)} + f(2u+2).$$
Puisque $\lim\limits_{u\to+\infty} f(2u+2) = 0$ lorsque $u \to +\infty$, on voit que $\lim\limits_{k\to+\infty} T_k = S + l$.

Dans le cas où $l < 0$, on peut échanger le rôle de d et u et procéder de la même façon.

III.7.10. Étant donné $\varepsilon > 0$, à partir d'une certaine valeur n_0 de l'indice n, on a
$$\frac{g-\varepsilon}{n} < f(n) < \frac{g+\varepsilon}{n}. \tag{1}$$
On considère la série réarrangée dont la n-ième somme partielle est (voir la solution du **problème III.7.9**)
$$T_n = T_{u+d} = (f(1) - f(2) + f(3) - \ldots - f(2u)) + (f(2u+1) \\ + f(2u+3) + \ldots + f(2d-1)).$$
On suppose de plus que le nombre d de termes positifs est tel que $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{d}{u} = k$. On a alors, dans le cas où $d > u$,
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2u+1} + \frac{1}{2u+3} + \ldots + \frac{1}{2d-1} \\
&\qquad = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2u+1} + \ldots + \frac{1}{2d-1} - \ln(2d-1)\right) \\
&\qquad\quad - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2u-1} - \ln(2u-1)\right) \\
&\qquad\quad - \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{2u+2} + \ldots + \frac{1}{2d-2}\right) - \ln\frac{2u-1}{2d-1}.
\end{aligned}$$

D'après **II.1.41**, chacune des deux premières parenthèses tend vers la constante d'Euler γ. Comme en **II.5.8 (a)**, on peut montrer que la troisième parenthèse tend vers $\frac{1}{2}\ln k$. Donc,

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{2u+1}+\frac{1}{2u+3}+\ldots+\frac{1}{2d-1}\right)=\frac{1}{2}\ln k.$$

En conséquence, (1) implique

$$\lim_{u\to+\infty}(f(2u+1)+f(2u+3)+\ldots+f(2d-1))=\frac{1}{2}\,g\ln k.$$

Le changement dans la somme de la série est donc égal à $\frac{1}{2}\,g\ln k$. Le même raisonnement peut s'appliquer au cas où $d<u$.

III.7.11. Il suffit d'appliquer le réarrangement décrit dans la solution du **problème III.7.9** en prenant $\nu(u)=l\left[(2u)^p\right]$.

III.7.12. On prend le réarrangement décrit dans la solution du **problème III.7.10** avec $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{d}{u}=\alpha$.

III.7.13. Non. En effet, soit $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_{n_k}$ un réarrangement d'une série divergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. La monotonie de la suite $\{a_n\}$ implique

$$a_{n_1}+a_{n_2}+\ldots+a_{n_m}\leqslant a_1+a_2+\ldots+a_m.$$

Il n'est donc pas possible d'accélérer la divergence de cette série.

III.7.14. [20]. On choisit une sous-suite $\{a_{r_n}\}$ de $\{a_n\}$ telle que

$$a_{r_n}<\min\left(2^{-n},Q_n-Q_{n-1}\right)$$

pour $n\in\mathbb{N}^*$ en posant $Q_0=0$. On a alors

$$a_{r_1}+a_{r_2}+\ldots+a_{r_n}\leqslant Q_n\quad\text{et}\quad a_{r_1}+a_{r_2}+\ldots+a_{r_n}<1.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}Q_n=+\infty$, la suite $\{Q_n-(a_{r_1}+a_{r_2}+\ldots+a_{r_n})\}$ tend aussi vers $+\infty$. On ajoute maintenant les termes de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ qui n'apparaissent pas dans la suite $\{a_{r_n}\}$ à la somme $a_{r_1}+a_{r_2}+\ldots+a_{r_n}$ de sorte que

$$a_1+a_2+\ldots+a_{r_1-1}+a_{r_1}+a_{r_1+1}+\ldots+a_i+a_{r_k}+a_{r_{k+1}}+\ldots+a_{r_n}\leqslant Q_n,$$

a_i étant le dernier terme permis, autrement dit si on ajoute un terme n'apparaissant pas dans la suite $\{a_{r_n}\}$ et d'indice plus grand que i, l'inégalité précédente n'est pas vérifiée.

III.7.15. [W. Sierpiński, Bull. Inter. Acad. Sci. Cracovie, 1911, 149-158]. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ deux sous-séries complémentaires d'une série semi-convergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ formées respectivement des termes positifs et des termes strictement négatifs. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. Puisque la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ tend vers $+\infty$, il existe un plus petit indice k_1 tel que

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} > \sigma.$$

On choisit ensuite le plus petit indice n_1 tel que

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} + q_1 + q_2 + \ldots + q_{n_1} < \sigma.$$

Puis on trouve le plus petit indice k_2 tel que

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} + q_1 + q_2 + \ldots + q_{n_1} + p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2} > \sigma$$

et le plus petit indice n_2 tel que

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} + q_1 + q_2 + \ldots + q_{n_1} + p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2} + q_{n_1+1} + \ldots + q_{n_2} < \sigma.$$

En poursuivant ce procédé, on définit deux suites $k_1, k_2, \ldots$ et $n_1, n_2, \ldots$ et le réarrangement correspondant de notre série. Soit S_n la n-ième somme partielle de ce réarrangement. On a

$$S_n \leqslant \sigma \quad \text{pour } n < k_1 \quad \text{et} \quad S_n \geqslant \sigma \quad \text{pour } k_1 \leqslant n < k_1 + n_1.$$

De plus,

$$S_n \leqslant \sigma \quad \text{pour} \quad k_m + n_m \leqslant n < k_{m+1} + n_m,$$

$$S_n \geqslant \sigma \quad \text{pour} \quad k_{m+1} + n_m \leqslant n < k_{m+1} + n_{m+1},$$

où $m \in \mathbb{N}^*$. Par définition des suites $\{k_m\}$ et $\{n_m\}$, on a aussi

$$\begin{aligned}
&\left|S_{k_{m+1}-1+n_m} - \sigma\right| < p_{k_{m+1}},\\
&\left|S_{k_{m+1}+n_m} - \sigma\right| < p_{k_{m+1}},\\
&\left|S_{k_{m+1}+n_m+l} - \sigma\right| < p_{k_{m+1}} \quad \text{pour} \quad l = 1, 2, \ldots, n_{m+1} - n_m - 1,\\
&\left|S_{k_{m+1}+n_{m+1}} - \sigma\right| < \left|q_{n_{m+1}}\right|,\\
&\left|S_{k_{m+1}+l+n_{m+1}} - \sigma\right| < \left|q_{n_{m+1}}\right| \quad \text{pour} \quad l = 1, 2, \ldots, k_{m+2} - k_{m+1} - 1.
\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n = 0$, on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sigma$.

III.7.16. On note respectivement $\{S_m\}$ et $\{T_m\}$ les suites des sommes partielles de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{n_k}$. Puisque que $\{n_k - k\}$ est bornée, il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $k - l \leqslant n_k \leqslant k + l$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Si $m > l$ et $n_k \leqslant m - l$, alors $k - l \leqslant n_k \leqslant m - l$. Donc $k \leqslant m$ et, en conséquence,

$$\{1, 2, \ldots, m - l\} \subset \{n_1, n_2, \ldots, n_m\}. \tag{1}$$

En effet, si $s \in \mathbb{N}^*$ et $s \leqslant m - l$, il existe alors un unique $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $s = n_k$. Il découle de ce qui précède que $k \leqslant m$ ou, dit autrement, que $s \in \{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$. D'après (1), on voit que chaque a_n pour $n = 1, 2, \ldots, m - l$ apparaît dans T_m. D'autre part, si $k \leqslant m$, alors $n_k \leqslant k + l \leqslant m + l$ et réciproquement, tous les termes de $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_m}$ apparaissent dans S_{m+l}. D'où,

$$|S_m - T_m| \leqslant |a_{m-l+1}| + \ldots + |a_{m+l}| \quad \text{pour} \quad m > l$$

et $\lim\limits_{m\to+\infty} S_m = \lim\limits_{m\to+\infty} T_m$.

Si la suite $\{n_k - k\}$ n'est pas bornée, les exemples donnés en **III.7.2 - III.7.6** montrent que la série réarrangée peut diverger ou que le réarrangement peut changer la somme de la série. On donne maintenant un exemple de réarrangement qui ne change pas la somme de la série. Pour cela, on prend une suite $\{n_k\}$ obtenue par la permutation des entiers positifs qui échange $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n+3)}{2}$ et laisse les autres entiers inchangés. Puisque $\frac{n(n+3)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = n$, la suite $\{n_k - k\}$ n'est pas bornée. De plus,

$$T_m - S_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m = \frac{n(n+3)}{2}, \\ a_{n(n+3)/2} - a_{n(n+1)/2} & \text{si } \frac{n(n+1)}{2} \leqslant m < \frac{n(n+3)}{2}. \end{cases}$$

III.7.17. [R.P. Agnew, Proc. Amer. Math. Soc. 6(1955), 563-564]. On applique le théorème de Toeplitz (voir **III.4.37**). On pose $S_m = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$ et $T_m = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{n_k}$. On suppose que m est suffisamment grand pour que $1 \in \{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ et on ordonne les éléments de $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ pour former une suite croissante

$$1, 2, 3, \ldots, \beta_{0,m}, \alpha_{1,m} + 1, \alpha_{1,m} + 2, \ldots, \beta_{1,m},$$
$$\alpha_{2,m} + 1, \alpha_{2,m} + 2, \ldots, \beta_{2,m}, \ldots, \alpha_{j_m,m} + 1, \alpha_{j_m,m} + 2, \ldots, \beta_{j_m,m},$$

où

$$0 < \beta_{0,m} < \alpha_{1,m} < \beta_{1,m} < \alpha_{2,m} < \ldots < \beta_{j_m,m}.$$

La somme partielle T_m de la série réarrangée peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$T_m = S_{\beta_{0,m}} + (S_{\beta_{1,m}} - S_{\alpha_{1,m}}) + \ldots + (S_{\beta_{j_m,m}} - S_{\alpha_{j_m,m}}).$$

En conséquence, $T_m = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{m,k} S_k$, où

$$c_{m,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \beta_{l,m},\ l = 0, 1, 2, \ldots, j_m, \\ -1 & \text{si } k = \alpha_{l,m},\ l = 1, 2, \ldots, j_m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $\lim_{m\to+\infty} \beta_{0,m} = +\infty$, $\lim_{m\to+\infty} c_{m,k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. De plus, $\sum_{k=1}^{+\infty} c_{m,k} = 1$ pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} |c_{m,k}| = 2B_m - 1$, où B_m représente le nombre de blocs disjoints d'entiers consécutifs dans l'ensemble $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$. Finalement, d'après le théorème de Toeplitz, $\lim_{m\to+\infty} T_m = \lim_{m\to+\infty} S_m$ si et seulement s'il existe N tel que $B_m \leqslant N$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

III.7.18. On suppose que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ est absolument convergente et on note S sa somme. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_0 tel que

$$|c_1 + c_2 + \ldots + c_{k_0} - S| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{l=k_0+1}^{+\infty} |c_l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit m, n deux entiers suffisamment grands pour qu'il existe i et k, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tels que $c_l = a_{i,k}$, pour tout $l \in \{1, 2, \ldots, k_0\}$. On a alors

$$|S_{m,n} - S| < |c_1 + c_2 + \ldots + c_{k_0} - S| + \sum_{l=k_0+1}^{+\infty} |c_l| < \varepsilon.$$

La convergence de la série double vers S est donc prouvée. On peut prouver de même la convergence absolue de cette série double.

III.7.19. On pose

$$S^* = \sum_{i,k=1}^{+\infty} |a_{i,k}|, \qquad T^* = \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|,$$

$$S^*_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|, \qquad T^*_n = \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $l \in \mathbb{N}^*$. On choisit m et n suffisamment grands pour que tous les termes de T^*_l se trouvent dans $S^*_{m,n}$ et $\left|S^* - S^*_{m,n}\right| < \varepsilon$. On a alors

$T_l^* \leqslant S_{m,n}^* < S^* + \varepsilon$, ce qui signifie que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ est absolument convergente. On note respectivement T_n et T la n-ième somme partielle et la somme de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$. Pour prouver l'identité

$$\sum_{i,k=1}^{+\infty} a_{i,k} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n,$$

on se donne $\varepsilon > 0$ et on choisit l suffisamment grand pour que

$$|T_l^* - T^*| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |T_l - T| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Si $S_{m,n} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}$ et si m et n sont suffisamment grands pour que tous les termes de T_l se trouvent dans $S_{m,n}$, alors

$$|S_{m,n} - T| \leqslant |T - T_l| + |T^* - T_l^*| < \varepsilon.$$

III.7.20. Il s'agit d'un corollaire des deux problèmes précédents.

III.7.21. On suppose, par exemple, que la série itérée $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |a_{i,k}|\right)$ converge et on pose $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |a_{i,k}| = \sigma_i$ et $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \sigma_i = \sigma$. Chacune des séries $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{i,k}$ $(i \in \mathbb{N}^*)$ est donc convergente et $\left|\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{i,k}\right| = |S_i| \leqslant \sigma_i$. Ceci et la convergence de $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \sigma_i$ impliquent la convergence absolue de $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} S_i$. En conséquence, $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} S_i = \sum\limits_{i=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{i,k}\right)$.

III.7.22. On pose $\sum\limits_{i,k=1}^{+\infty} a_{i,k} = S$, $\sum\limits_{i,k=1}^{+\infty} |a_{i,k}| = S^*$, on note $S_{m,n} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}$ et $S_{m,n}^* = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k}|$. On prouve d'abord que la série itérée

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |a_{i,k}|\right)$$

converge vers S^*. En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $S^* - \varepsilon < S^*_{m,n} < S^*$ pour $m, n > n_0$. On fixe m pour le moment. La suite $\{S^*_{m,n}\}$ est alors croissante et bornée donc convergente, $\lim\limits_{n\to+\infty} S^*_{m,n} = S^*_m$ et $S^* - \varepsilon < S^*_m < S^*$ pour $m > n_0$. Ceci signifie que $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} S^*_{m,n}\right) = S^*$. On sait par le problème précédent que la convergence absolue de la série itérée implique sa convergence. Donc, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{i,k}$ converge pour tout i ; notons S_i la limite. On montre alors que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe m_1 tel que

$$|(S_1 + S_2 + \ldots + S_m) - S| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad m > m_1.$$

Par convergence absolue de la série double, on a

$$|S_{m,n} - S| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left|S^*_{m,n} - S^*\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad m, n > m_1.$$

Donc, pour $m > m_1$, on a

$$\begin{aligned}
|(S_1 + S_2 + \ldots + S_m) - S| &= \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{+\infty} a_{i,k} - S\right| \\
&\leqslant |S_{m,n} - S| + \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_{i,k}\right| \\
&\leqslant |S_{m,n} - S| + \left|S^* - S^*_{m,n}\right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

La démonstration de la convergence de l'autre série itérée se fait de la même façon.

III.7.23. On note que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n,1} + a_{n-1,2} + a_{n-2,3} + \ldots + a_{1,n})$ est un ordonnancement de la série double. Si une des séries

$$\sum_{i,k=1}^{+\infty} |a_{i,k}| \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(|a_{n,1}| + |a_{n-1,2}| + |a_{n-2,3}| + \ldots + |a_{1,n}|)$$

converge, la proposition se déduit alors directement de **III.7.18**, **III.7.19** et **III.7.22**. Il suffit donc de montrer que la convergence absolue d'une des séries itérées implique celle de n'importe quel ordonnancement de la série double. Pour ce faire, on suppose que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|a_{i,k}|\right)$ converge vers une limite que l'on note S^*. Soit $\{c_n\}$ une suite obtenue par énumération du tableau infini $(a_{i,k})_{i,k\in\mathbb{N}^*}$. Pour $l \in \mathbb{N}^*$, il existe alors m et n suffisamment grands pour que

$$|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_l| \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \leqslant S^*.$$

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ est absolument convergente ce qui implique alors la convergence absolue de la série double (voir **III.7.18**).

III.7.24. Puisque $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m$, on a $\sum\limits_{\substack{n,k=0\\k+n=m}}^{m} \frac{1}{n!k!} = \frac{2^m}{m!}$. Donc,

$$\sum_{\substack{n,k=0\\k+n=m}}^{m} \frac{1}{n!k!(n+k+1)} = \frac{2^m}{(m+1)!}\,.$$

En conséquence, d'après **III.7.23**, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n,k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!k!(n+k+1)} &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{\substack{n,k=0\\k+n=m}}^{m} \frac{1}{n!k!(n+k+1)}\\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^m}{(m+1)!} = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{1}{2}\left(e^2-1\right),\end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de **II.5.7**.

III.7.25. On a (voir **III.7.23**)

$$\begin{aligned}\sum_{n,k=1}^{+\infty} \frac{1}{nk(n+k+2)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k+2}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\right.\\ &\quad\left. + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \ldots\right] = \frac{7}{4}\,.\end{aligned}$$

III.7.26. Il découle de **III.7.23** que

$$\sum_{n,k=0}^{+\infty} \frac{n!k!}{(n+k+2)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{k+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n!}{(n+k+1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+k+2)!} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{k+1} \frac{0!}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \,.$$

Le résultat demandé est donc prouvé, d'après **III.1.28 (a)**.

III.7.27. On observe que les sommes des séries formées par chaque ligne du tableau sont finies. En effet la somme de la première ligne est égale à x, celle de la seconde est égale à $x(1-x)$, celle de la troisième à $x\,(1-x)^2$, etc. De plus,

$$x + x(1-x) + x\,(1-x)^2 + \ldots = 1.$$

D'autre part, les sommes des séries formées par chaque colonne sont alternativement égales à $+1$ et -1. L'autre série itérée diverge donc et, d'après **III.7.23**, on conclut que la série itérée n'est pas absolument convergente.

III.7.28.

(a) La convergence absolue de $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} x^i$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} y^k$ implique la convergence absolue de la série itérée $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^i y^k \right)$ car

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left| x^i y^k \right| \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left| x^i \right| \left(\frac{1}{1-|y|} \right) = \frac{1}{(1-|x|)(1-|y|)} \,.$$

La série double est donc absolument convergente.

(b) En considérant les séries itérées, on voit que la série étudiée converge si et seulement si $\alpha > 1$ et $\beta > 1$.

(c) En rassemblant les termes pour lesquels $i + k = n$, on obtient

$$\sum_{i,k=1}^{+\infty} \frac{1}{(i+k)^p} = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) \frac{1}{n^p} \,.$$

La série double converge donc si $p > 2$ et diverge si $p \leqslant 2$.

III.7.29.

(a) Il suffit de calculer la somme de la série itérée. On a

$$\sum_{i=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(p+i)^k}\right)=\sum_{i=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{p+i}-\frac{1}{p+i-1}\right)=\frac{1}{p+1}\,.$$

(b) Comme en (a), on calcule la somme de la série itérée :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^i}\right)&=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k(2k-1)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=\ln 2,\end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de **III.1.32 (a)**.

(c) Comme en (b), on a

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(4i-1)^{2k}}\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{(4i-2)4i}=\frac{1}{4}\ln 2.$$

III.7.30. Comme $S_{m,n}=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{i,k}=b_{m,n}$, on voit que

$$\begin{aligned}&a_{1,1}=S_{1,1}=b_{1,1},\\&a_{1,n}=S_{1,n}-S_{1,n-1}=b_{1,n}-b_{1,n-1},\quad n>1,\\&a_{m,1}=S_{m,1}-S_{m-1,1}=b_{m,1}-b_{m-1,1},\quad m>1.\end{aligned}$$

De même, pour $m,n>1$, on obtient

$$\begin{aligned}a_{m,n}&=S_{m,n}-S_{m-1,n}-(S_{m,n-1}-S_{m-1,n-1})\\&=b_{m,n}-b_{m-1,n}-(b_{m,n-1}-b_{m-1,n-1}),\quad m,n>1.\end{aligned}$$

III.7.31. On a $S_{m,n}=(-1)^{m+n}\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^n}\right)$. Donc, pour $\varepsilon>0$, il existe n_0 tel que $|S_{m,n}|<\varepsilon$ si $m,n>n_0$. La série double converge donc vers 0. Cependant, chacune des séries itérées diverge. En effet,

$$\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}=S_{i,n}-S_{i-1,n}=(-1)^{i+n}\,\frac{3}{2^i}+(-1)^{i+n}\,\frac{1}{2^{n-1}}\,,$$

ce qui implique que toutes les séries $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{i,k}$ $(i\in\mathbb{N}^*)$ divergent.

III.7.32. On a
$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x|^{ik}\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{|x|^i}{1-|x|^i}.$$
D'après le test du quotient, la série dans le second membre de cette égalité converge. Ceci signifie que la série itérée converge absolument. Donc, d'après **III.7.23**, on a
$$\sum_{i,k=1}^{+\infty}x^{ik}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^k}.$$
En regroupant les paires (i,k) pour lesquelles le produit ik est le même, on obtient
$$\sum_{i,k=1}^{+\infty}x^{ik}=\sum_{n=1}^{+\infty}\theta(n)x^n,$$
car le nombre de diviseurs de n est égal au nombre de paires (i,k) telles que $ik=n$. De plus, pour $n=2,3,\ldots$, on a
$$\begin{aligned}S_{n,n}-S_{n-1,n-1}&=x^n+x^{2n}+\ldots+x^{(n-1)n}+x^{n^2}+x^{n(n-1)}+\ldots+x^{n\times 2}+x^n\\&=2\frac{x^n-x^{n^2}}{1-x^n}+x^{n^2}.\end{aligned}$$
Clairement, $S_{1,1}=x=2\frac{x-x}{1-x}+x$. Donc, en tenant compte du fait que
$$S_{n,n}=(S_{n,n}-S_{n-1,n-1})+(S_{n-1,n-1}-S_{n-2,n-2})+\ldots+S_{1,1},$$
on voit que
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n-x^{n^2}}{1-x^n}+\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n^2}.$$

III.7.33. Comme dans la solution du problème précédent, on montre que la série itérée converge absolument. La première égalité se déduit donc directement de **III.7.23**. Pour prouver l'autre égalité, on considère l'ordonnancement de la série double décrite dans la solution de **III.7.32**.

III.7.34.

(a) D'après **III.7.23**,
$$\sum_{p=2}^{+\infty}S_p=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{3^n}+\ldots=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)}=1.$$

(b) Comme en (a),

$$\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p S_p = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}.$$

III.7.35. Soit $\mathbf{B}$ l'ensemble des entiers qui ne sont pas des puissances. On a

$$\mathbf{A} = \{k^n : n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, k \in \mathbf{B}\}.$$

Puisque $\frac{1}{n-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{n^j}$, $n \geqslant 2$, en appliquant **III.7.23** et **III.7.34**, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n-1} &= \sum_{n\in\mathbf{A}} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{n^j} = \sum_{k\in\mathbf{B}} \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{nj}} \\ &= \sum_{k\in\mathbf{B}} \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{nj}} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = 1.\end{aligned}$$

III.7.36. [G. T. Williams, *Amer. Math. Monthly*, 60 (1953), 19-25]. Le premier membre de l'égalité est égal à

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k^2} \frac{1}{j^{2n-2}} + \frac{1}{k^4} \frac{1}{j^{2n-4}} + \ldots + \frac{1}{k^{2n-2}} \frac{1}{j^2} \right). \tag{1}$$

En sommant l'expression entre parenthèses, on obtient

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \frac{j^{2-2n} - k^{2-2n}}{k^2 - j^2} + (n-1)\frac{1}{j^{2n}} \right). \tag{2}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \frac{j^{2-2n} - k^{2-2n}}{k^2 - j^2} &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \frac{j^{2-2n}}{k^2 - j^2} - \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \frac{k^{2-2n}}{k^2 - j^2} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \frac{1}{j^{2n-2}} \frac{1}{k^2 - j^2} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \frac{1}{k^{2n-2}} \frac{1}{j^2 - k^2} \\ &= 2 \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{2n-2}} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \frac{1}{k^2 - j^2}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{j^{2-2n}-k^{2-2n}}{k^2-j^2}+(n-1)\frac{1}{j^{2n}}\right)$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left(2\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n-2}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{k^2-j^2}+(n-1)\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n}}\right). \qquad (3)$$

On observe maintenant que

$$2j\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{k^2-j^2}=\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{k-j}-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{k+j}$$

$$=\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k-j}+\sum_{k=j+1}^{N}\frac{1}{k-j}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k+j}+\frac{1}{2j}$$

$$=-\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{N-j}\frac{1}{k}-\sum_{k=j+1}^{N+j}\frac{1}{k}+\frac{1}{2j}$$

$$=-\sum_{k=1}^{N+j}\frac{1}{k}+\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{N-j}\frac{1}{k}+\frac{1}{2j}$$

$$=\frac{3}{2j}-\left(\frac{1}{N-j+1}+\frac{1}{N-j+2}+\ldots+\frac{1}{N+j}\right).$$

Donc, d'après (3),

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{j^{2-2n}-k^{2-2n}}{k^2-j^2}+(n-1)\frac{1}{j^{2n}}\right)$$

$$=\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n}}-\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n-1}}\left(\frac{1}{N-j+1}+\ldots+\frac{1}{N+j}\right).$$

De plus, puisque $0 < \frac{1}{N-j+1} + \ldots + \frac{1}{N+j} < \frac{2j}{N-j+1}$, on voit que

$$\begin{aligned}
0 &< \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{2n-1}} \left(\frac{1}{N-j+1} + \ldots + \frac{1}{N+j} \right) \\
&< 2 \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{2n-2}} \frac{1}{N-j+1} \\
&\leqslant 2 \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \frac{1}{N-j+1} \\
&= \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{N-j+1} \right) \\
&= \frac{4}{N+1} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \\
&\leqslant \frac{4}{N+1} \left(\gamma + \ln(N+1) \right),
\end{aligned}$$

où γ est la constante d'Euler (voir **II.1.41**). Finalement, d'après (1),

$$\begin{aligned}
&\lim_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k^2} \frac{1}{j^{2n-2}} + \frac{1}{k^4} \frac{1}{j^{2n-4}} + \ldots + \frac{1}{k^{2n-2}} \frac{1}{j^2} \right) \\
&\qquad = \lim_{N \to +\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{2n}} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \zeta(2n).
\end{aligned}$$

III.7.37. En substituant $n = 2$ dans l'identité donnée au problème précédent, on obtient

$$\zeta(2)\zeta(2) = \left(2 + \frac{1}{2} \right) \zeta(4).$$

Puisque $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ (voir **III.1.28 (a)**), on a (voir aussi **III.1.28 (b)**)

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

De même, en prenant $n = 3$, on trouve

$$\zeta(6) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}\,.$$

De même,

$$\zeta(8) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}\,.$$

III.8. Produits infinis

III.8.1.

(a) On a

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\,.$$

(b)

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)\left((k+1)^2-(k+1)+1\right)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$
$$= \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3}\,.$$

(c) Pour $x = 0$, la valeur du produit est égale à 1. Si $x \neq 2^m\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, alors $\cos\frac{x}{2^m} \neq 0$ et $\sin\frac{x}{2^m} \neq 0$. Donc,

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{\sin\frac{x}{2^k}} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin x}{x}\,.$$

(d) Vu les relations

$$\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}x}{x} = 1,$$

comme en (c), on obtient

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \operatorname{ch}\frac{x}{2^n} = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(e) On a

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=\prod_{k=0}^{n}\frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x^{2^k}}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{1-x}.$$

(f)

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\frac{2(n+1)}{n+2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}2.$$

(g) Puisque

$$\prod_{k=1}^{n}a^{\frac{(-1)^k}{k}}=a^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}},$$

la continuité de la fonction exponentielle et **III.1.32 (a)** impliquent $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}=a^{-\ln 2}$.

(h)

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{1}{k}}}{1+\frac{1}{k}}=\frac{e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{n+1}=e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n}\times\frac{n}{n+1}.$$

Donc, d'après **II.1.41**,

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=e^{\gamma}$$

où γ est la constante d'Euler.

(i) On a

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{(3k)^2}{(3k-1)(3k+1)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{(3k)^3}{(3k-1)3k(3k+1)}=\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n+1)!}.$$

En utilisant la formule de Stirling

$$n!=\alpha_n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\quad\text{où}\quad\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=1,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} P_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{3n}\,(2\pi)^{3/2}\,n^{3n+3/2}e^{-3n}}{(2\pi)^{1/2}\,(3n+1)^{3n+1+1/2}\,e^{-3n-1}} \\
&= 2\pi e \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{3n} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{3/2} \\
&= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

III.8.2.

(a)

$$\begin{aligned}
P_{2n} &= \prod_{k=2}^{2n}\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right) \\
&= 1+\frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1, \\
P_{2n-1} &= \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{2n-2}{2n-1} = 1.
\end{aligned}$$

(b) On a

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

donc $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge.

(c) Le produit $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ diverge car

$$P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

III.8.3. On note d'abord que pour $a_n \geqslant 0$, on a

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \leqslant (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n). \tag{1}$$

De plus, l'inégalité $e^x \geqslant 1+x$ pour $x \geqslant 0$ donne

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leqslant e^{a_1+a_2+\ldots+a_n}. \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) et la continuité de la fonction exponentielle montrent que la convergence du produit $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ est équivalente à celle de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

III.8.4. On suppose que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Pour N suffisamment grand, on a alors $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} a_n < \frac{1}{2}$. Il découle de **I.2.1** que

$$\prod_{k=N}^{n}(1-a_k) \geqslant 1 - \sum_{k=N}^{n} a_k > \frac{1}{2}\,.$$

Puisque $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n}(1-a_k) = P_{N-1}\prod\limits_{k=N}^{n}(1-a_k)$, on voit que la suite $\left\{\frac{P_n}{P_{N-1}}\right\}$ est décroissante et minorée, donc convergente vers une limite que l'on note P et $P \in \left[\frac{1}{2}\,,1\right]$. D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P_{N-1}P \neq 0$.

Pour prouver l'autre implication, on suppose que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge. Si la suite $\{a_n\}$ ne converge pas vers 0, alors la suite $\{1-a_n\}$ ne converge pas vers 1 et la condition nécessaire de convergence du produit $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1-a_n)$ n'est pas vérifiée. On peut donc supposer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et, en conséquence, que $0 \leqslant a_n < 1$ à partir d'une certaine valeur N de l'indice n. Vu l'égalité (voir **II.5.7**)

$$e^{-x} = 1 - x + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}\right) + \ldots,$$

on obtient $1 - x \leqslant e^{-x}$ pour $0 \leqslant x < 1$ car tous les termes entre parenthèses sont positifs. D'où,

$$0 \leqslant \prod_{k=N}^{n}(1-a_k) \leqslant e^{-\sum\limits_{k=N}^{n} a_k} \qquad (n \geqslant N)$$

et, en conséquence, $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=N}^{n}(1-a_k) = 0$. Le produit $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1-a_n)$ est donc divergent.

III.8.5. On note que

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n}(1+a_k) &= \prod_{k=1}^{n}(1+a_{2k-1})(1+a_{2k})\\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k\sqrt{k}}\right).\end{aligned}$$

Donc, d'après **III.8.4**, le produit converge.

III.8.6.

(a) Puisque $\cos\frac{1}{n} = 1-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ et $1 \neq 1-\cos\frac{1}{n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut appliquer le résultat de **III.8.4**. La convergence du produit se déduit de la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ (voir **III.2.1 (e)**).

(b) Comme en (a), la convergence du produit découle de la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)$ (voir **III.2.5 (d)**).

(c) On a

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}} = 1+\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}.$$

Puisque $\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}} > 0$ pour $n \geqslant 2$ et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = 2,$$

d'après **III.8.3**, le produit diverge.

(d) Étant donné que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$, la convergence du produit se déduit de **III.8.4**.

(e) La divergence du produit découle de celle de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ (voir **III.2.5 (a)**).

(f) Puisque $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n} = 1$, d'après **II.5.5**, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\ln n}{\sqrt[n^2]{n}-1} = 1$. La convergence du produit se déduit donc de celle de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

III.8.7. Par hypothèse, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge et on peut, sans perte de généralité, supposer que $|a_n| < 1$. Puisque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2} \tag{1}$$

et que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ est équivalente à celle de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+a_n)$, qui à son tour est équivalente à celle de $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$.

On note que si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ diverge, d'après (1),

$$a_n - \ln(1+a_n) > \frac{1}{4}\,a_n^2 \quad \text{pour tout } n \text{ suffisamment grand.}$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+a_n)$ diverge donc vers $-\infty$, ce qui signifie que le produit $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ diverge vers 0.

III.8.8. Le résultat se déduit immédiatement de **III.8.7**.

III.8.9. Appliquez **III.8.7** et **III.8.8**.

III.8.10. On utilise l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\ln(1+a_n) - a_n + \frac{1}{2}\,a_n^2\right|}{|a_n|^3} = \frac{1}{3}$$

et on procède comme dans la solution de **III.8.7**.

III.8.11. Non. D'après le test donné au problème précédent, on voit que le produit donné en indication converge si $\frac{1}{3} < \alpha$. D'autre part, les séries

$$-\frac{1}{2^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^{2\alpha}}\right) - \frac{1}{3^\alpha} + \left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{3^{2\alpha}}\right) - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots$$

et

$$\left(-\frac{1}{2^\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^{2\alpha}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3^\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{3^{2\alpha}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4^\alpha}\right)^2 + \ldots$$

divergent toutes deux si $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

III.8.12. On remarque que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\ln(1+a_n) - a_n + \frac{1}{2}\,a_n^2 - \frac{1}{3}\,a_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^k}{k}\,a_n^k\right|}{|a_n|^{k+1}} = \frac{1}{k+1}\,.$$

III.8.13. D'après la formule de Taylor,

$$\ln(1+a_n) = a_n - \frac{1}{2\,(1+\theta_n)^2}\,a_n^2 = a_n - \Theta_n a_n^2,$$

où $\frac{2}{9} < \Theta_n < 2$ si $|a_n| < \frac{1}{2}$. Donc, si n_1 et n_2 sont suffisamment grands et $n_1 < n_2$, alors

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \ln(1+a_n) = \sum_{n=n_1}^{n_2} a_n - \Theta \sum_{n=n_1}^{n_2} a_n^2, \quad \text{où} \quad \Theta \in \left]\frac{2}{9}\,, 2\right[.$$

La convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ se déduit donc du critère de Cauchy.

III.8.14. Si les produits $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ et $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1-a_n)$ convergent tous deux, alors $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1-a_n^2)$ converge aussi. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge donc (voir **III.8.4**). Le résultat cherché se déduit alors du problème précédent.

III.8.15. Oui. Puisque $\{a_n\}$ décroît vers 1, on peut écrire $a_n = 1 + \alpha_n$, $\{\alpha_n\}$ décroissant vers 0. La convergence du produit est équivalente à celle de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln(1+\alpha_n).$$

Clairement, cette série converge d'après la règle de Leibniz.

III.8.16.

(a) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = 1+1 = 2$, la condition nécessaire pour la convergence d'un produit n'est pas vérifiée.

(b) La convergence de $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ se déduit de la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln a_n^2$.

(c), (d) La convergence des produits se déduit de celle des séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(a_n b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln b_n$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{a_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln b_n.$$

III.8.17. On suppose que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^2$ converge. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et la convergence des deux produits se déduit de **III.8.4** et des égalités

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos x_n}{x_n^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{\sin x_n}{x_n}}{x_n^2} = \frac{1}{6}.$$

On suppose maintenant qu'un des produits converge. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^2$ se déduit des égalités ci-dessus.

III.8.18. On remarque que

$$a_1 \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{a_k}{S_{k-1}}\right) = a_1 \prod_{k=2}^{n} \frac{S_k}{S_{k-1}} = S_n.$$

III.8.19. Voir le **problème III.1.9**.

III.8.20. Voir le **problème III.1.9**.

III.8.21. Appliquez le problème précédent en prenant $a_n = x^n$.

III.8.22. On suppose d'abord que le produit $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, autrement dit, que $\lim_{n\to+\infty} P_n = P \neq 0$, où $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$. Ceci implique qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $|P_n| \geqslant \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite convergente $\{P_n\}$ est une suite de Cauchy. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que $|P_{n+k} - P_{n-1}| < \varepsilon\alpha$ si $n \geqslant n_0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. D'où,

$$\left|\frac{P_{n+k}}{P_{n-1}} - 1\right| < \frac{\varepsilon\alpha}{|P_{n-1}|} \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_0.$$

On suppose maintenant que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que

$$|a_n a_{n+1} \cdots a_{n+k} - 1| < \varepsilon \tag{1}$$

pour $n \geqslant n_0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. En prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\frac{1}{2} < \frac{P_{n-1}}{P_{n_0}} < \frac{3}{2} \quad \text{pour} \quad n > n_0. \tag{2}$$

Puis en utilisant (1) en remplaçant ε par $\frac{2\varepsilon}{3|P_{n_0}|}$, on trouve un entier n_1 tel que

$$\left|\frac{P_{n+k}}{P_{n-1}} - 1\right| < \frac{2\varepsilon}{3\,|P_{n_0}|} \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_1, k \in \mathbb{N}^*.$$

Donc, si $n > \max\{n_0, n_1\}$, alors

$$|P_{n+k} - P_{n-1}| < \frac{2\varepsilon}{3}\left|\frac{P_{n-1}}{P_{n_0}}\right| < \varepsilon.$$

Ceci signifie que $\{P_n\}$ est une suite de Cauchy. De plus, (2) implique que sa limite est différente de 0.

III.8.23. On a

$$\prod_{k=1}^{2n}\left(1+x^k\right)=\prod_{k=1}^{2n}\frac{1-x^{2k}}{1-x^k}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(1-x^{2k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(1-x^{k}\right)}$$

$$=\frac{\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(1-x^{2k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-x^{2k}\right)\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-x^{2k-1}\right)}$$

$$=\frac{\prod\limits_{k=n+1}^{2n}\left(1-x^{2k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-x^{2k-1}\right)}.$$

Le résultat cherché se déduit alors du critère de Cauchy (voir **III.8.22**).

III.8.24. Il s'agit d'une conséquence de **III.8.3**.

III.8.25. On note que pour $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, on a

$$|(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)-1| \leqslant (1+|a_1|)(1+|a_2|)\cdots(1+|a_n|)-1$$

et on applique le critère de Cauchy (**III.8.22**).

III.8.26. On pose $P_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. On a alors $P_n-P_{n-1}=P_{n-1}a_n$ et

$$\begin{aligned}P_n&=P_1+(P_2-P_1)+\ldots+(P_n-P_{n-1})\\&=P_1+P_1a_2+P_2a_3+\ldots+P_{n-1}a_n.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}P_n=&(1+a_1)+a_2(1+a_1)+a_3(1+a_1)(1+a_2)\\&+\ldots+a_n(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})\end{aligned}$$

ou, de façon équivalente,

$$\begin{aligned}P_n=&(1+a_1)+(a_2+a_1a_2)+(a_3+a_1a_3+a_2a_3+a_1a_2a_3)\\&+\ldots+\big(a_n+a_1a_n+\ldots+a_{n-1}a_n+a_1a_2a_n\\&+\ldots+a_{n-2}a_{n-1}a_n+\ldots+a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n\big).\end{aligned}$$

La convergence absolue de $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ implique alors la convergence absolue de la série $1+a_1+\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})$. Cette série est un ordonnancement de la série double dont les termes forment le tableau infini

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ a_1a_2 & a_1a_3 & a_2a_3 & a_1a_4 & \dots \\ a_1a_2a_3 & a_1a_2a_4 & a_1a_3a_4 & a_2a_3a_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

D'après **III.7.18**, la série double est absolument convergente et, d'après **III.7.22**, la série itérée donnée dans le problème converge. On obtient donc l'égalité demandée.

III.8.27. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ étant absolument convergente, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il suffit d'alors d'appliquer le problème précédent.

III.8.28. Clairement, pour $|q| < 1$ et $x \in \mathbb{R}$, le produit $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+q^n x)$ est absolument convergent. En prenant $a_n = q^n$ dans le problème précédent, on obtient $f(x) = \prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+q^n x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$. On observe alors que $(1+qx)f(qx) = f(x)$. En égalant les coefficients des termes de même degré, on obtient donc

$$A_1 = \frac{q}{1-q} \quad \text{et} \quad A_n = A_{n-1}\frac{q^n}{1-q^n} \quad \text{pour} \quad n = 2, 3, \dots$$

Finalement, par récurrence, on montre que

$$A_n = \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}.$$

III.8.29. On pose $f(x) = \prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+q^{2n-1}x\right)$ et on note que $(1+qx)f\left(q^2x\right) = f(x)$. On applique alors un raisonnement semblable à celui utilisé au **problème III.8.28**.

III.8.30. On a

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_nx)\left(1+\frac{a_n}{x}\right)=\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}A_kx^k\right)\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{A_k}{x^k}\right)$$
$$=1+\sum_{k=1}^{+\infty}A_k\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)+\sum_{k=1}^{+\infty}A_kx^k\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{A_k}{x^k}.$$

La convergence absolue de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}A_kx^k$ et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{A_k}{x^k}$ implique celle de leur produit de Cauchy (voir la solution du **problème III.6.1**). On remarque que ce produit de Cauchy est un ordonnancement de la série double correspondant au tableau

$$\begin{pmatrix} A_1A_1 & A_2A_2 & A_3A_3 & \dots \\ A_2A_1\left(x+\frac{1}{x}\right) & A_3A_2\left(x+\frac{1}{x}\right) & A_4A_3\left(x+\frac{1}{x}\right) & \dots \\ A_3A_1\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) & A_4A_2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) & A_5A_3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

On obtient donc, d'après **III.7.18** et **III.7.22**,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}A_kx^k\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{A_k}{x^k}=(A_1A_1+A_2A_2+A_3A_3+\dots)$$
$$+(A_2A_1+A_3A_2+A_4A_3+\dots)\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$+(A_3A_1+A_4A_2+A_5A_3+\dots)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\dots$$

III.8.31. [4]. D'après **III.8.30**, on a

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1}x)\left(1+\frac{q^{2n-1}}{x}\right)=B_0+\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right).$$

En posant

$$F(x)=\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1}x)\left(1+\frac{q^{2n-1}}{x}\right)$$

et en utilisant l'égalité $qxF(q^2x)=F(x)$, on obtient

$$B_1=B_0q,\quad B_n=B_{n-1}q^{2n-1}$$

et, par récurrence,

$$B_n = B_0 q^{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc,

$$F(x) = B_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n^2} \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\right).$$

On peut utiliser les résultats de **III.8.29** et **III.8.30** pour déterminer B_0. On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 - q^{2k})$ et $P = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^{2n})$. On a alors

$$B_0 q^{n^2} = B_n = A_n + A_1 A_{n+1} + \ldots = \frac{q^{n^2}}{P_n} + \frac{q^{(n+1)^2+1}}{P_1 P_{n+1}} + \ldots$$

Donc,

$$P_n B_0 - 1 < \frac{q^{2n}}{P^2} + \frac{q^{4n}}{P^2} + \ldots$$

En faisant tendre alors n vers $+\infty$, on obtient $B_0 = \frac{1}{P}$.

III.8.32. On applique **III.8.31** en prenant

(a) $x = -1$,

(b) $x = 1$,

(c) $x = q$.

III.8.33. On remarque que pour $n > 1$, on a

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{x-k}{x+k} - \prod_{k=1}^{n} \frac{x-k}{x+k}\right).$$

Donc,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{1+x} + \sum_{k=2}^{n} a_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{x-k}{x+k}.$$

Si $x \in \mathbb{N}^*$, alors $S_n = \frac{1}{2}$ pour n assez grand. On montre maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$ pour $x \notin \mathbb{N}^*$. On remarque que $\left|\frac{x-k}{x+k}\right| = 1 - \frac{2x}{x+k}$ pour k suffisamment grand. D'où, d'après le résultat de **III.8.4**,

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left|\frac{x-k}{x+k}\right| = 0,$$

ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$ comme annoncé.

III.8.34. On suppose que le produit $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+ca_n)$ converge en $c=c_0$ et en $c=c_1$, $c_0\neq c_1$. Les produits

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+c_1a_n)^{\frac{c_0}{c_1}} \quad \text{et} \quad \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+c_1a_n)^{\frac{c_0}{c_1}}}{1+c_0a_n}$$

convergent aussi. De plus,

$$\frac{(1+c_1a_n)^{\frac{c_0}{c_1}}}{1+c_0a_n}=1+\frac{c_0(c_0-c_1)}{2}\,a_n^2(1+\varepsilon_n),$$

où ε_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc, d'après **III.8.3** et **III.8.4**, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ converge. Puis, d'après **III.8.13**, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ converge aussi. En conséquence, pour tout $c\in\mathbb{R}$, chacune des séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(ca_n)^2$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}ca_n$ converge. La proposition se déduit donc de **III.8.7**.

III.8.35. Clairement, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\prod\limits_{k=0}^{n}\left(x^2-k^2\right)$ converge si x est un entier. On suppose maintenant qu'elle converge en $x_0\notin\mathbb{Z}$. Pour $x\in\mathbb{R}$, on considère la suite dont les termes sont donnés par

$$b_n=\frac{\prod\limits_{k=0}^{n}\left(x^2-k^2\right)}{\prod\limits_{k=0}^{n}\left(x_0^2-k^2\right)}.$$

On a

$$b_n=\prod_{k=0}^{n}\frac{x^2-k^2}{x_0^2-k^2}=\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{x^2-x_0^2}{x_0^2-k^2}\right).$$

On conclut de ceci qu'à partir d'une certaine valeur de l'indice n, la suite $\{b_n\}$ est monotone. De plus, puisque le produit $\prod\limits_{k=0}^{n}\frac{x^2-k^2}{x_0^2-k^2}$ converge, la suite $\{b_n\}$ est bornée. On a aussi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\prod_{k=0}^{n}\left(x^2-k^2\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\prod_{k=0}^{n}\left(x_0^2-k^2\right)b_n.$$

Donc, d'après le test d'Abel, la série considérée converge pour tout $x\in\mathbb{R}$.

III.8.36.

(a) On a

$$\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = 1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{p_n^{kx}}.$$

En multipliant entre elles les N premières égalités, on obtient

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = 1+\sum_{k=1}^{+\infty}{}'\frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{p_N}\frac{1}{k^x}+\sum_{k=p_N+1}^{+\infty}{}'\frac{1}{k^x}, \qquad (*)$$

où $\sum'$ représente la sommation sur les entiers dont la factorisation en nombres premiers ne contient que les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Donc,

$$0 < \prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} - \sum_{k=1}^{p_N}\frac{1}{k^x} = \sum_{k=p_N+1}^{+\infty}{}'\frac{1}{k^x} < \sum_{k=p_N+1}^{+\infty}\frac{1}{k^x}.$$

Puisque $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=p_N+1}^{+\infty}\frac{1}{k^x}=0$, on obtient

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}.$$

(b) D'après $(*)$ dans la solution de la partie (a), on a

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1} > \sum_{k=1}^{p_N}\frac{1}{k}.$$

La divergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ implique donc que $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ diverge vers 0, ce qui est équivalent à la divergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{p_n}$ (voir **III.8.4**).

III.8.37. [18].

(a) La formule de Moivre, $\cos mt + i\sin mt = (\cos t + i\sin t)^m$ donne, avec $m = 2n+1$,

$$\sin(2n+1)t = (2n+1)\cos^{2n}t\sin t - \binom{2n+1}{3}\cos^{2n-2}t\sin^3 t$$
$$+\ldots+(-1)^n\sin^{2n+1}t.$$

On peut donc écrire

$$\sin(2n+1)t = \sin t\, W(\sin^2 t), \tag{1}$$

où $W(u)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal n. Puisque la fonction dans le premier membre s'annule aux points $t_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ qui appartiennent à l'intervalle $\left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, le polynôme $W(u)$ s'annule en $u_k = \sin^2 t_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. D'où,

$$W(u) = A\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{u}{\sin^2 t_k}\right).$$

Donc, d'après (1),

$$\sin(2n+1)t = A\sin t\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right). \tag{2}$$

Le but est maintenant de trouver A. On a $A = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} = 2n+1$. En substituant cette valeur à A dans (2) et en prenant $t = \frac{x}{2n+1}$, on obtient

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right). \tag{3}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $|x| < (m+1)\pi$, on prend n plus grand que m. On a alors, d'après (3),

$$\sin x = P_{m,n}Q_{m,n}, \tag{4}$$

où

$$P_{m,n} = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right),$$

$$Q_{m,n} = \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} P_{m,n} = x\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{5}$$

Pour $x \neq k\pi$, l'égalité (4) implique $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_{m,n} = Q_m$. Pour évaluer Q_m, on note que, d'après les hypothèses précédentes,

$$0 < \frac{|x|}{2n+1} < \frac{k\pi}{2n+1} \leqslant \frac{n\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad k = m+1, \ldots, n.$$

En utilisant l'inégalité $\frac{2}{\pi}u < \sin u < u$ pour $0 < u < \frac{\pi}{2}$, on voit que $\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right) < Q_{m,n} < 1$. Puisque que le produit $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right)$ converge, on a

$$\prod_{k=m+1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right) \leqslant Q_m \leqslant 1.$$

En conséquence,

$$\lim_{m\to+\infty} Q_m = 1. \tag{6}$$

Finalement, le résultat cherché se déduit de (4), (5) et (6).

(b) On applique (a) et l'identité $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

III.8.38. On remplace x par $\frac{\pi}{2}$ dans la formule donnée en **III.8.37 (a)**.

III.8.39.

(a) La convergence du produit donné est équivalente à celle de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right)$. La convergence absolue de cette série se déduit de l'égalité

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right|}{\frac{x^2}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

(b) On a

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} = 1+\frac{x(x-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La convergence absolue du produit découle donc de **III.8.3**.

III.8.40. Clairement, le produit $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$, $a_n > -1$, converge si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+a_n)$ converge. De plus, si P est la valeur du produit et S est la somme de la série, alors $P = e^S$.

On suppose maintenant que le produit est absolument convergent. Étant donnée l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} = 1 \quad \left(\text{car } \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right), \tag{$*$}$$

la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+a_n)$ est absolument convergente. En conséquence (voir **III.7.8**), tout réarrangement de cette série converge vers la même somme. Finalement, avec la remarque faite au début de la solution de ce problème, tout réarrangement des facteurs du produit ne change pas sa valeur.

On suppose maintenant que la valeur du produit $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ ne dépend pas de l'ordre de ses facteurs. Ceci signifie que la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+a_n)$ ne dépend pas non plus de l'ordre de ses termes. D'après le théorème de Riemann, la série converge absolument ce qui, avec $(*)$, implique la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. Le résultat demandé est donc prouvé.

III.8.41. [20]. On pose $R_n = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \ldots \times \frac{2n+1}{2n} = \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$. On a alors

$$R_\alpha = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2\alpha}\right),$$
$$\frac{1}{R_\beta} = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2\beta+1}\right).$$

Le $(\alpha+\beta)n$-ième produit partiel est donc égal à $\frac{R_{n\alpha}}{R_{n\beta}}$. D'après la formule de Wallis (voir **III.8.38**), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_{n\alpha}}{R_{n\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

III.8.42. Si le produit $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ converge, mais pas absolument, il en est alors de même de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+a_n)$ (voir la solution de **III.8.40**). D'après le théorème de Riemann, ses termes peuvent être réarrangés pour donner soit une série convergente dont la somme est un nombre réel donné S, soit une série divergente (vers $+\infty$ ou $-\infty$). La proposition se déduit donc de la relation $P = e^S$ (voir la solution de **III.8.40**).

This page intentionally left blank

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Banaś et S. Wędrychowicz. *Zbiór zadań z analizy matematycznej.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Varsovie, 1994.

[2] W. Bernik, O. Melnikov et I. Žuk. *Sbornik olimpiadnych zadač po matematike.* Narodnaja Asveta, Minsk, 1980.

[3] P. Biler et A. Witkowski. *Problems in Mathematical Analysis.* Marcel Dekker, New York, Basel, 1990.

[4] T. J. I. Bromwich. *An introduction to the theory of infinite series.* AMS Chelsea, New-York, 3e edition, 1991.

[5] R. B. Burckel. *An Introduction to Classical Complex Analysis.* Academic Press, New-York, San-Franscico, 1979.

[6] B. P. Demidovič. *Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu.* Nauka, Moscou, 1969.

[7] A. J. Dorogovcev. *Matematičeskij analiz. Spravočnoe posobe.* Vyščaja Škola, Kiev, 1985.

[8] A. J. Dorogovcev. *Matematičeskij analiz. Sbornik zadač.* Vyščaja Škola, Kiev, 1987.

[9] G. M. Fikhtengol'ts. *A course in differential and integral calculus*, volume I, II, 7th ed., III, 5th ed. Nauka, Moscou, 1969. (Russe). Trad. all. : G. M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung*, Verlag Harri Deutsch.

[10] G. H. Hardy. *A Course of Pure Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1946.

[11] G. H. Hardy, J. E. Littlewood et G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[12] G. Klambauer. *Mathematical Analysis.* Marcel Dekker, New York, Basel, 1975.

[13] G. Klambauer. *Problems and Propositions in Analysis.* Marcel Dekker, New York, Basel, 1979.

[14] K. Knopp. *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.

[15] L. D. Kudriavtsev, A. D. Kutasov, V. I. Chejlov et M. I. Shabunin. *Problemas de análisis Matemático. Límite, Continuidad, Derivabilidad.* Mir, Moscou, 1989.

[16] K. Kuratowski. *Introduction to calculus.* Pergamon Press, Oxford, Edimbourg, New York, 1969.

[17] D. S. Mitrinović. *Elementary Inequalities.* P. Noordhoff, Groningen, 1964.

[18] D. S. Mitrinović et D. D. Adamović. *Nizovi i Redovi. Definicije, stavovi, zadaci, problemi.* Naučna Knjiga, Belgrade, 1971 (serbo-croate).

[19] A. M. Ostrowski. *Aufgabensammlung zur Infinitesimalrechnung, Band I : Funktionen einer Variablen.* Birkhaüser, Bâle, Stuttgart, 1964.

[20] G. Pólya et G. Szegö. *Problems and Theorems in Analysis I.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978.

[21] Y. I. Rivkind. *Zadači po matematičeskomu analizu.* Vyšejšaja Škola, Minsk, 1973.

[22] W. I. Rozhkov, G. D. Kurdevanidze et N. G. Panfilov. *Sbornik zadač matematičeskich olimpiad.* Izdat. Univ. Druzhby Nardov, Moscou, 1987.

[23] Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, 2nd edition, 1976. Trad. : *Principes d'analyse mathématique*, Dunod, 2000.

[24] W. A. Sadowničij, A. S. Podkolzin. *Zadačin studenčeskich olimpiad po matematike.* Nauka, Moscou, 1978.

[25] W. Sierpiński. *Działania nieskończone.* Czytelnik, Varsovie, 1948.

[26] W. Sierpiński. *Arytmetyka teoretyczna.* PWN, Varsovie, 1959.

[27] H. Silverman. *Complex variables.* Houghton Mifflin, Boston, 1975.

[28] G. A. Tonojan et W. N. Sergeev. *Studenčeskije matematičeskije olimpiady.* Izdatelstwo Erevanskogo Universiteta, Erivan, 1985.

TABLE DES RENVOIS

En règle générale, nous n'indiquons pas les renvois d'un problème au précédent ou au suivant. Si vous cherchez une application d'un problème, il est donc conseillé de commencer par regarder le problème suivant (parfois le précédent). Nous ne faisons pas dans cette table la différence entre un énoncé et la solution proposée et le renvoi peut donc se trouver dans l'un ou dans l'autre.

I.1.2 : I.4.6 (vol. II)
I.1.4 : I.4.7 (vol. II)
I.1.14 : I.1.22, II.5.70, III.4.22, I.2.25 (vol. II), I.3.29 (vol. II)
I.1.15 : I.2.22 (vol. II)
I.1.18 : I.1.20
I.1.19 : I.1.22, I.1.23
I.1.20 : I.1.22, I.1.24, I.1.25, I.1.26, I.1.28, II.2.53, II.4.7
I.1.21 : II.4.7
I.1.22 : III.4.22
I.1.23 : I.1.25, II.2.53
I.1.24 : II.2.53
I.2.1 : I.2.40, II.2.39, II.5.7, III.1.15, III.4.23, III.8.4
I.2.2 : I.2.39
I.2.3 : I.2.34, I.2.36, I.2.37, I.2.43, II.1.33, II.1.35, II.1.38, II.1.39, II.1.40, II.2.44, II.2.45, II.3.6, III.2.68, III.2.71
I.2.4 : II.2.39, II.2.56
I.2.12 : I.2.14, I.2.15, I.2.17, I.2.18, I.2.19, I.2.20, I.2.23, I.2.24, I.2.35, III.2.70, III.3.20 (vol. II), II.5.33 (vol. III), II.5.53 (vol. III)
I.2.15 : I.2.41, I.2.42
I.2.17 : I.2.23
I.2.19 : II.1.2
I.2.20 : I.2.22, II.1.2
I.2.30 : I.2.32, I.2.33
I.2.43 : I.2.45, II.4.9 (vol. II)
I.2.45 : II.4.9 (vol. II)
II.1.1 : I.1.35 (vol. II), I.4.18 (vol. II)
II.1.3 : II.1.11, II.2.1
II.1.10 : II.1.31, II.5.80
II.1.16 : II.5.41
II.1.38 : II.1.41, II.2.56, II.5.1, II.5.6, II.5.8, III.2.4, III.2.16, III.4.12, I.1.15 (vol. II), I.1.16 (vol. II)
II.1.39 : II.5.3, I.5.55 (vol. III)

III.1.17 : III.1.19, III.1.20
III.1.21 : III.1.23
III.1.27 : I.5.63 (vol. III)
III.1.28 : III.7.26, III.7.37, I.5.59 (vol. III), I.5.63 (vol. III)
III.1.32 : III.1.40, III.6.3, III.6.8, III.7.2, III.7.29, III.8.1, III.2.18 (vol. II)
III.1.36 : III.3.4
III.2.1 : III.4.12, III.8.6, I.1.1 (vol. II)
III.2.2 : III.2.48
III.2.3 : III.2.5, III.2.16, III.2.82
III.2.5 : III.4.12, III.8.6
III.2.10 : III.2.12, III.2.43, III.2.45, III.2.84
III.2.11 : III.2.44
III.2.13 : III.2.15, III.2.46
III.2.16 : III.2.19, III.2.58, III.2.18, III.2.19, III.2.6 (vol. II)
III.2.17 : III.2.31, III.2.48
III.2.19 : III.2.58, III.2.83, III.2.85
III.2.24 : III.2.83
III.2.25 : III.4.14 (vol. II)
III.2.28 : III.2.30, III.2.41, III.2.71, III.4.1, III.4.13, III.4.32, III.2.1 (vol. II), III.2.2 (vol. II)
III.2.29 : III.3.5, III.2.16, III.2.33
III.2.31 : III.2.81
III.2.34 : III.2.80
III.2.35 : III.2.47, III.2.76, III.4.34
III.2.71 : III.2.73
III.2.72 : III.8.36, III.2.39 (vol. II)
III.2.77 : III.2.81
III.2.78 : III.2.80
III.3.8 : III.3.10, III.3.11
III.3.8 : III.3.12, III.3.13
III.3.10 : III.3.13
III.4.5 : III.4.29
III.4.7 : III.4.9
III.4.8 : III.2.16 (vol. II)
III.4.14 : III.2.9 (vol. II)
III.4.19 : III.6.8
III.4.23 : III.4.25
III.4.26 : III.5.9
III.4.33 : III.4.35
III.4.34 : III.4.36
III.4.37 : III.7.17
III.5.1 : III.5.4, III.5.6
III.5.9 : III.3.20 (vol. II)
III.5.13 : III.5.16
III.6.1 : III.8.30, III.3.5 (vol. II), III.3.12 (vol. II), III.3.22 (vol. II), III.4.9 (vol. II)
III.6.4 : III.3.11 (vol. II)
III.6.11 : III.3.5 (vol. II)
III.6.13 : III.6.15
III.7.2 : III.7.16
III.7.3 : III.7.5, III.7.16
III.7.4 : III.7.16
III.7.5 : III.7.16
III.7.6 : III.7.16
III.7.8 : III.8.40
III.7.9 : III.7.11
III.7.10 : III.7.12
III.7.15 : III.8.42
III.7.18 : III.7.23, III.8.26, III.8.30
III.7.19 : III.7.23
III.7.22 : III.8.26, III.8.30
III.7.23 : III.7.25, III.7.26, III.7.27, III.7.32, III.7.33, III.7.34, III.7.35, III.4.7 (vol. II)
III.7.34 : III.7.36
III.8.3 : III.8.6, III.8.24, III.8.34, III.8.39
III.8.4 : III.8.6, III.8.14, III.8.17, III.8.33, III.8.34, III.8.36

INDEX