



## CHAPITRE 9

# LA STABILITÉ DES SYSTÈMES

## 1. Condition générale de stabilité

### 1.1 Domaine temporel

On considère un système possédant une réponse impulsionnelle  $h(t)$  excité par un signal  $e(t)$ . On note sa sortie  $y(t)$ .

Nous avons vu au chapitre 3 la condition de stabilité énoncée dans le domaine temporel :

Un système est dit stable, si sa **réponse impulsionnelle** est le siège d'un régime amorti :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$$

Donc, un système est stable si lorsqu'il est excité par une impulsion de Dirac, sa sortie revient à sa position initiale au bout d'un certain temps.

### 1.2 Domaine fréquentiel

On note  $H(p)$  et  $Y(p)$  les transformées de Laplace de  $h(t)$  et de  $y(t)$  respectivement. La transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac à l'entrée du système est 1.

La réponse du système dans le domaine de Laplace sera donc  $Y(p) = H(p).1$ .

La décomposition de  $H(p)$  en éléments simples s'écrit :  $Y(p) = \sum_i \frac{A_i}{p - p_i}$ , où les  $p_i$  sont réels ou complexes conjugués. La réponse  $y(t)$  est donc la somme d'exponentielles :  $y(t) = \sum_i A_i e^{p_i t}$ .

Chaque exponentielle ne revient à zéro que si la partie réelle de  $p_i$  est strictement négative.

Un système est stable si tous les **pôles de sa fonction de transfert** sont strictement à gauche de l'axe imaginaire dans le plan complexe dédié à  $p$ .

## 2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Soit  $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$  la fonction de transfert d'un système.

Les pôles de  $H(p)$  sont les racines de l'équation  $D(p) = 0$ .

Un examen assez simple de  $D(p)$  permet de savoir si certaines de ses racines sont à partie réelle positive ou nulle, rendant le système instable.

On écrit  $D(p)$  sous forme polynômiale  $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$  avec  $a_n > 0$ .

Le critère s'énonce alors de la façon suivante (nous ne le démontrerons pas) :



1. 1<sup>er</sup> examen :

Si les  $a_i$  ne sont pas tous de même signe ou si certains sont nuls,  $D(p)$  a des racines à droite dans le plan complexe, donc à partie réelle positive.

Le système est donc instable.

2. 2<sup>ème</sup> examen :

Si tous les  $a_i$  sont positifs, on ne peut connaître la place des pôles qu'après examen de la première colonne du tableau de Routh dont la construction est expliquée ci-après.

Les deux premières lignes du tableau sont écrites à l'aide des coefficients de  $D(p)$ .

Les autres lignes sont formées de termes calculés à partir de ces coefficients.

On pose	$\begin{cases} p^n \\ p^{n-1} \end{cases}$	$\begin{matrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & K \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & K \end{matrix}$	
On détermine	$\begin{cases} p^{n-2} \\ p^{n-3} \\ M \\ p^2 \\ p^1 \\ p \end{cases}$	$\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & K \\ B_1 & B_2 & B_3 & K \\ M & M & M & M \\ M_1 & M_2 & M_3 & K \\ N_1 & N_2 & N_3 & K \\ C_1 & C_2 & C_3 & K \end{matrix}$	
<i>On analyse</i>			<p style="text-align: center;"><b>Calculs</b></p> $A_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$ $A_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$ $A_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$ $B_1 = \frac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1} A_2}{A_1}$ $B_2 = \frac{A_1 a_{n-5} - a_{n-1} A_3}{A_1}$ <p style="text-align: center;">...</p> $C_1 = \frac{N_1 M_2 - M_1 N_2}{N_1}$

Routh a établi que la condition nécessaire et suffisante de stabilité est que **tous les coefficients de la première colonne soient de même signe**. De nombreux exemples seront traités en TD.

Le critère algébrique de Routh permet de savoir de façon simple et rapide si un système est stable ou non. Il nous renseigne sur la stabilité mais non sur la robustesse de cette stabilité.

De plus sa mise en œuvre nécessite de connaître l'expression de la fonction de transfert.

### 3. Critère de stabilité de Nyquist

#### 3.1 Critère simplifié du revers

Sauf des cas tout à fait particuliers, la structure des Fonctions de Transfert en Boucle Ouverte (FTBOs)  $G(p)$  permet de simplifier l'utilisation du critère de Nyquist.

Nous n'aborderons donc dans ce cours que le **critère simplifié de Nyquist** : le **critère du revers**.

Ce critère s'énonce en deux parties :

1. Tracer la partie du lieu de Nyquist de la FTBO correspondant à la variation croissante de  $p$  sur le demi-axe imaginaire positif  $p = j\omega$
2. Vérifier que ce lieu passe à droite du point  $(-1)$ , appelé « **point critique** », dans le plan de Nyquist.

### 3.2 Critère du revers dans le plan de Black

Le point critique  $(-1)$  dans le plan de Nyquist a pour coordonnées  $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$  dans le plan de Black.

La figure 8.1 montre la représentation de la FTBO d'un système du second ordre (inconditionnellement stable) dans le plan de Nyquist pour deux amortissements différents.

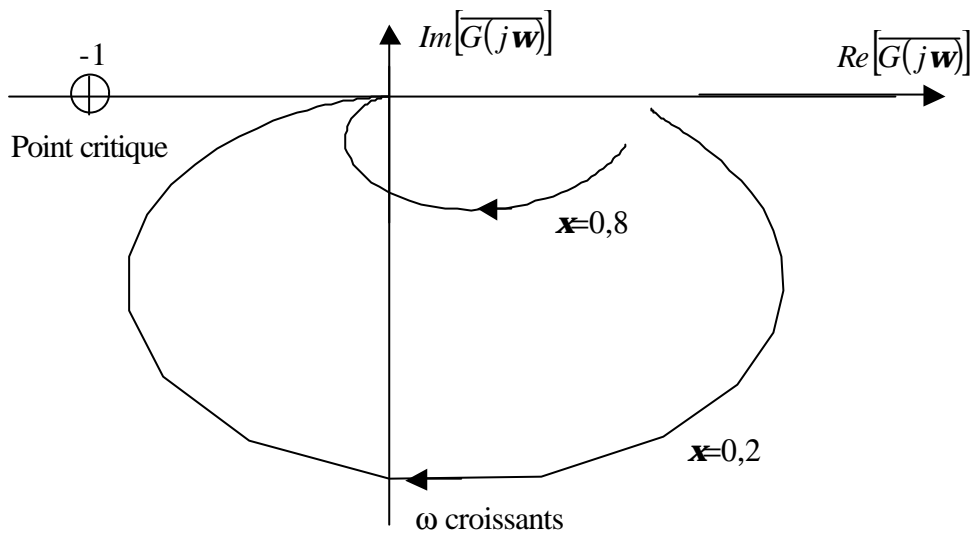


Figure 8.1.

Dans les deux cas, le point critique est laissé à gauche.

La représentation du même système dans le plan de Black est donnée sur la figure 8.2.

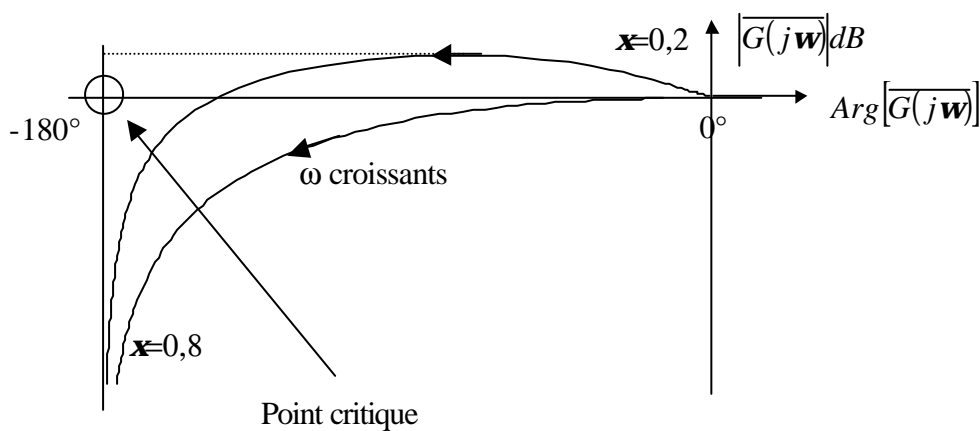


Figure 8.2.

Dans le **plan de Black**, le point critique est donc laissé à droite « en descendant ».

Le critère du revers exprime tout simplement qu'aux fréquences hautes (vis à vis des fréquences caractéristiques du système considéré : pulsation de résonance ou pulsation du système non amorti), lorsque le déphasage est de  $-180^\circ$ , il faut atténuer le signal de retour (gain  $< 1$ ), sinon le signal réinjecté va se réamplifier dans une réaction positive (LARSEN des installations radio).

#### 4. Marges de stabilité

Un système est d'autant plus stable que son **lieu de transfert en boucle ouverte** passe loin du point critique.

Pour quantifier cet aspect, on définit les marges de stabilité : **marge de gain** et **marge de phase**.

Les marges de stabilité peuvent être définies indifféremment dans le plan de Nyquist, le plan de Black ou les diagrammes de Bode. En pratique, l'utilisation du plan de Black et des diagrammes de Bode est plus utilisée du fait que l'on a accès directement au module et à la phase d'un système de façon expérimentale. Dans ce cours, nous détaillons essentiellement l'utilisation du **plan de Black**

##### 4.1 Dans le plan de Black

La **marge de gain** correspond à l'écart entre le gain (module)  $|G(j\omega)|_{dB}$  de la FTBO et l'axe 0 dB du plan de Black.

La **marge de phase** correspond à l'écart entre la phase (argument)  $\mathbf{j}(\omega)$  de la FTBO et l'axe  $-180^\circ$  du plan de Black.

Les marges de stabilité sont explicitées sur la figure 8.3.

$Mg$  représente la marge de gain exprimée en dB ;  $Mj$  représente la marge de phase exprimée en degrés.

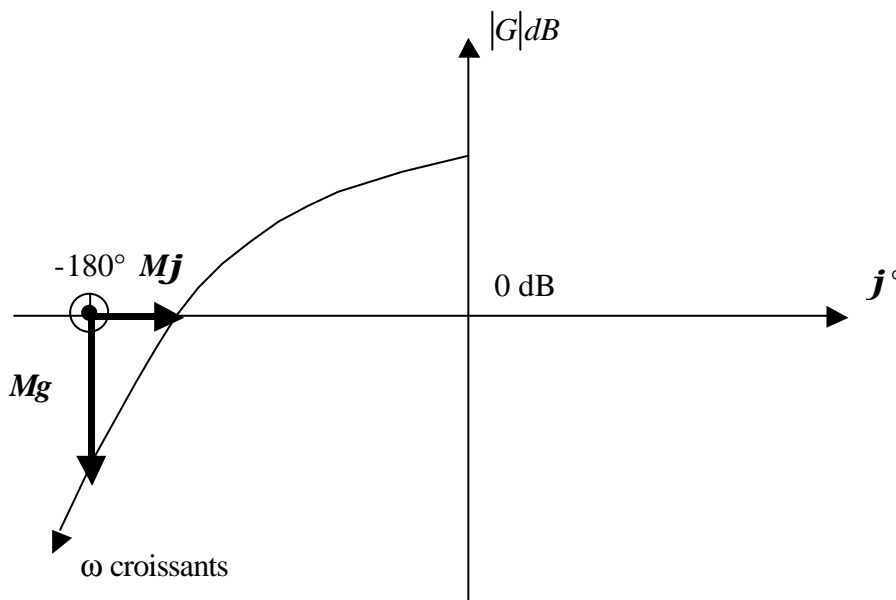


Figure 8.3. Définition des marges de stabilité dans le plan de Black.

Les **valeurs courantes** sont les suivantes :

- Marge de gain :  $10\text{dB} < Mg < 15\text{dB}$
- Marge de phase :  $45^\circ < MJ < 50^\circ$

En analysant simplement le tracé de la figure 8.3., on se rend compte qu'une augmentation du gain de la boucle ouverte, en décalant le lieu de Black vers le haut, va réduire les marges de stabilité.

De la même façon, une augmentation de la phase de la FTBO, par exemple par un retard pur, réduit ces mêmes marges et peut conduire à l'instabilité.

#### 4.2 Limites de stabilité

Lorsque le lieu de transfert en boucle ouverte  $\overline{G(j\omega)}$  passe par le point critique, le système  $\overline{H(j\omega)}$  en boucle fermée est **juste instable**.

Si l'on considère un système du second ordre,  $\overline{H(j\omega)}$  possède alors deux pôles  $j\omega_0$  et  $-j\omega_0$  imaginaires conjugués placés sur l'axe imaginaire, l'amortissement  $\alpha$  est nul.

$H(p)$  contient donc le facteur  $\frac{1}{1 + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$  qui est la transformée de Laplace d'une sinusoïde de pulsation

$\omega_0$ .

Sous l'influence d'un simple parasite, le système risque d'osciller de façon sinusoïdale à la pulsation  $\omega_0$ .

Ce fonctionnement, très gênant en automatique du fait qu'à tout moment le système peut basculer vers l'instabilité et voir sa sortie prendre des valeurs démesurées, est utilisé en électronique pour fabriquer des systèmes oscillants. Le système démarre grâce au bruit ; la difficulté réside alors dans la maîtrise de la pulsation des oscillations à la pulsation  $\omega_0$  et de l'amplitude des oscillations.

