

HYPERCUBE EN DIMENSION 4

On considère les points -1 et 1 dans \mathbb{R} formant le segment $[-1,1]$

On en déduit les points $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ formant un carré

A partir du carré, on construit un cube : chaque point du carré se dédouble en rajoutant une troisième coordonnée qui peut être 1 ou -1 . Deux sommets sont reliés s'ils diffèrent par une seule coordonnée.

Par la même méthode, on construit dans \mathbb{R}^4 l'hypercube de dimension 4 (noté C_4) :

- 1) Ecrire sous Maple la liste S_4 des sommets de C_4 sous la forme $[[1,1,1,1], \dots]$ (un sommet est une liste de 4 nombres)
- 2) En déduire à l'aide de Maple la liste L_4 des segments de C_4 (un segment

Commandes utiles :

- $L[i]$ ou bien $op(i,L)$: extrait le i -ième terme de la liste L .
- $op(L)$: suites des termes de la liste (sans les crochets) $> op([1,2,3]) = 1,2,3$.
- $nops(L)$: nombre de termes de la liste.
- $subsop(k = \text{nouveau}, L)$: remplace le k -ième de la liste L par nouveau.
- $[]$ liste vide (utile pour initialiser une liste dans une procédure).
- $subsop(k=NULL, L)$: supprime le k -ième terme de la liste.

- 3) Entrer et comprendre la procédure suivante :

```
proj1:=proc(M,u,v,d)
```

```
# projection du point M sur l'hyperplan vectoriel de  $\mathbb{R}^d$  normal à au vecteur  $u$  dans la direction  $v$ .
```

```
# le point M et les vecteurs  $u$  et  $v$  sont donnés sous forme de listes tout comme le projeté de M.
```

```
local a, i, j, so l, x;
```

```
sol:= solve({seq(x[i] = M[i] + a*v[i], i = 1..d), sum(x[j] * u[j], j = 1..d) = 0}, {a, seq(x[j], j = 1..d)});
```

```
assign(sol);
```

```
RETURN([seq(x[i], i = 1..d)]);
```

```
end;
```

- 4) Entrer et tester la procédure suivante

```
segment:=proc(A,B) # A, B sont des listes
```

```
local i,t,u;
```

```
RETURN([seq(A[i]+t*(B[i]-A[i]),i=1..3)],t=0..1, color = black);
```

```
end;
```

```
spacecurve(segment(A,B)) tracera le segment  $[AB]$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
```

- 5) Ecrire la fonction pr1 qui à un point M de \mathbb{R}^4 sous forme de liste $[x,y,z,t]$ associe le triplet des coordonnées du projeté de M sur l'hyperplan $t = 0$ parallèlement au vecteur v (utiliser proj1 avec un u convenable).

- 6) A l'aide de pr1, générer la suite des spacecurve(segment(A,B)) où $[AB]$ parcourt les segments de la liste L_4
Réunir tous les spacecurve à l'aide de display pour afficher la projection de l'hypercube dans \mathbb{R}^3 ; éventuellement faire varier la direction de projection v . On peut faire tourner dans \mathbb{R}^3 la figure obtenue en cliquant sur le graphique.

- 7) On désire maintenant faire une projection centrale : si I est le centre de la projection et \mathcal{H} un hyperplan de \mathbb{R}^3 , l'image d'un point M est le point d'intersection de \mathcal{H} avec la droite (IM) .

Ecrire la procédure proj2 qui prend en paramètre le centre I , le point M à projeter et le vecteur u normal à \mathcal{H} et qui retourne le projeté de M sous forme d'une liste (s'inspirer de proj1).

- 8) Tracer la projection de l'hypercube : prendre à nouveau l'hyperplan $t = 0$ et le centre sur l'axe des t .

- 9) Ecrire une procédure qui prend en paramètre un entier $n > 0$ et qui retourne la liste des sommets de l'hypercube de dimension n (on pourra écrire une procédure récursive).

