GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

PLAN

I : Etude métrique des courbes planes

Des considérations élémentaires sur les courbes planes se trouvent dans le chapitre *Géométrie Elémentaire* qu'on trouvera dans le fichier GEOMELEM.DOC. L'étude locale d'un arc paramétré se trouve dans le chapitre *Développements limités* dans le fichier DLTAYLOR.

1– longueur d'une courbe

DEFINITION :
On appelle longueur de l'arc paramétré C^1 par morceaux défini par $\mathbf{OM}(t) = \mathbf{F}(t)$ pour t variant de t_0 à t_1 ($t_0 < t_1$) la quantité :

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{F}\,'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Cette définition se justifie par les raisons suivantes :

i) si $\mathbf{F}(t) = \mathrm{B} + t\mathbf{A}$, l'arc paramétré est un segment de longueur $(t_1 - t_0)\ \|\ \mathbf{A}\ \|$, ce qui correspond à la valeur donnée par la définition.

ii) si dt représente un accroissement infiniment petit du paramètre, M se déplace de M(t) à M(t+dt) suivant le vecteur $\mathbf{M}(t)\mathbf{M}(t+dt) = \mathbf{F}\,'(t)\mathrm{d}t$
La distance élémentaire parcourue est $\|\mathbf{F}\,'(t)\|\ \mathrm{d}t$.

iii) pour un cercle de rayon R, $\mathbf{F}(t) = \mathrm{R}(\cos t.\mathbf{i} + \sin t.\mathbf{j})$ et la définition donne pour longueur du cercle $2\pi\mathrm{R}$.

iv) Physiquement, si t est le temps et $\mathbf{F}(t)$ la position d'un point mobile en fonction de t, $\mathbf{F}\,'(t)$ est la vitesse vectorielle et $\|\mathbf{F}\,'(t)\|$ son module (vitesse scalaire). L'intégration de la vitesse scalaire donne la distance parcourue entre deux instants t_0 et t_1.

v) Examinons ce qui se passe en cas de changement de paramètrage. Si $u \to t(u)$ est un changement de variable strictement croissant pour u variant de u_0 à u_1, on a :

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\boldsymbol{F}\,'(t)\| \, dt = \int_{u_0}^{u_1} t'(u)\|\boldsymbol{F}\,'(t(u))\| \, du = \int_{u_0}^{u_1} \|\boldsymbol{G}\,'(u)\| \, du \text{ avec } \boldsymbol{G}(u) = \boldsymbol{F}(t(u)).$$

Si $u \to t(u)$ est strictement décroissant, on a :

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\boldsymbol{F}\,'(t)\| \, dt = \int_{u_0}^{u_1} - t'(u)\|\boldsymbol{F}\,'(t(u))\| \, du = \int_{u_1}^{u_0} \|\boldsymbol{G}\,'(u)\| \, du \text{ avec } \boldsymbol{G}(u) = \boldsymbol{F}(t(u)) \text{ et } u_1 < u_0$$

Il est cependant essentiel pour appliquer la formule de changement de variables que $t'(u)$ garde un signe constant (faute de quoi, une valeur absolue empêcherait de simplifier l'expression). Si on suppose que $\boldsymbol{F}\,'$ ne s'annule pas sur $]t_0, t_1[$, on imposera au changement de variable d'être strictement monotone. Un tel changement de paramétrage est dit admissible. Physiquement, il signifie que, si la courbe est parcourue une seule fois avec le paramètre t, il doit en être de même du paramètre u. Il n'est pas question par exemple de choisir un changement de paramètrage qui impose un aller-retour sur la courbe alors que le premier paramètrage ne le faisait pas. Faute de quoi, évidemment, la longueur du parcours serait différente.
Dans le cas de changement de paramétrage admissible, la longueur ne dépend pas de la représentation paramétrique choisie. Elle est intrinsèque à la courbe.

Il est important de vérifier si une propriété est indépendante du paramétrage ou non. Dans le premier cas, la propriété est intrinsèque à la courbe et pas dans le second cas. Considérons par exemple la question consistant à calculer la distance moyenne du point à l'origine. On est tenté de calculer $\dfrac{1}{t_1 - t_0} \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \|\boldsymbol{F}(t)\| \, dt$. Mais cette propriété n'est pas intrinsèque à la courbe. Elle dépend de la façon dont la courbe est parcourue. Si on effectue le changement de variable $u \to t(u)$ (croissant par exemple), le calcul de la distance moyenne avec le paramètre u donnerait $\dfrac{1}{u_1 - u_0} \displaystyle\int_{u_0}^{u_1} \|\boldsymbol{F}(t(u))\| \, du$, alors qu'un changement de variable dans la première intégrale donnerait $\dfrac{1}{t_1 - t_0} \displaystyle\int_{u_0}^{u_1} \|\boldsymbol{F}(t(u))\| \, t'(u) \, du$,

et ces deux intégrales n'ont aucune raison d'être égale. Considérons par exemple $\boldsymbol{F}(t) = \mathrm{O} + t\boldsymbol{i}$, $t \in [0,1]$. La distance moyenne est $\dfrac{1}{2}$. Mais si on prend $t = u^2$ et si on effectue le calcul avec u, on trouvera $\dfrac{1}{3}$. La raison en est que, si on considère le paramètre comme le temps, on calcule la distance moyenne en fonction du temps. Dans le premier cas, on parcourt le segment à vitesse constante et la distance moyenne est obtenue au milieu du segment. Dans le second cas, le mouvement est uniformément accéléré et on reste plus longtemps au voisinage de O de sorte que la distance moyenne est plus faible.

Il peut être alors intéressant de privilégier un paramétrage particulier. C'est le rôle que peut jouer l'abscisse curviligne.

2– abscisse curviligne

On se place dans le plan ou dans l'espace.
DEFINITION :
On appelle abscisse curviligne du point M(t), le point $M(t_0) = M_0$ étant choisi commme origine, la quantité :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{F}\,'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Si t est supérieur à t_0, $s(t)$ n'est autre que la longueur de la courbe entre M(t) et M(t_0). Si t est inférieur à t_0, $s(t)$ est l'opposé de la longueur de la courbe entre M(t) et M(t_0). L'abscisse curviligne joue donc pour une courbe le même rôle que la mesure algébrique (ou abscisse) pour une droite munie d'une origine et d'un sens (droite orientée ou axe).

Propriétés de l'abscisse curviligne :

❑ On a $|s(t)-s(t')| = \mathrm{L}(\mathrm{M}(t),\mathrm{M}(t'))$, longueur de la courbe entre M(t) et M(t').

❑ Si $u \to t(u)$ est strictement croissante, alors :

$$\int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{F}\,'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_{u_0}^{u} t'(u)\|\boldsymbol{F}\,'(t(u))\|\,\mathrm{d}u = \int_{u_0}^{u} \|\boldsymbol{G}\,'(u)\|\,\mathrm{d}u \text{ avec } \boldsymbol{G}(u) = \boldsymbol{F}(t(u)).$$

s est le même que l'on prenne $\boldsymbol{F}$ ou $\boldsymbol{G}$ comme paramétrage.

Si $u \to t(u)$ est strictement décroissante, alors :

$$\int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{F}\,'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_{u_0}^{u} -t'(u)\|\boldsymbol{F}\,'(t(u))\|\,\mathrm{d}u = -\int_{u_0}^{u} \|\boldsymbol{G}\,'(u)\|\,\mathrm{d}u \text{ avec } \boldsymbol{G}(u) = \boldsymbol{F}(t(u))$$

s change de signe selon que l'on prenne $\boldsymbol{F}$ ou $\boldsymbol{G}$ comme paramétrage. Le signe de l'abscisse curviligne dépend d'une orientation arbitraire du paramétrage. s dépend également évidemment de l'origine choisie du paramétrage. Cette propriété n'est pas surprenante. Si on considère une droite du plan sur laquelle on veut définir une abscisse, il y a **deux** choix arbitraires à faire :

i) celui de l'origine (dans le cas d'une courbe, le point M_0)

ii) celui de l'orientation de l'axe (dans le cas d'une courbe, la direction dans laquelle l'abscisse curviligne va croître)

❑ $s'(t) = \|\,\boldsymbol{F}\,'(t)\,\|$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\right\|$. Donc, sauf aux points où $\boldsymbol{F}\,'(t)$ s'annule (points dits stationnaires), s est une fonction strictement croissante de t et continue. Elle est donc bijective. On peut donc effectuer un changement de paramètre en prenant l'abscisse curviligne elle-même au lieu de t. Il s'agit d'un changement de paramètrage admissible. Si $x = s(t)$, le nouveau paramètre est x. On a :

$$\mathrm{M}(t) = \mathrm{M}(s^{-1}(x)) \text{ et } \boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{F}(s^{-1}(x)) = \boldsymbol{G}(x).$$

D'où $\boldsymbol{G}\,'(x) = (s^{-1})'(x)\,\boldsymbol{F}\,'[s^{-1}(x)] = \dfrac{1}{s'[s^{-1}(x)]}\boldsymbol{F}\,'[s^{-1}(x)]$. On en déduit

(*) $\|\,\boldsymbol{G}\,'(x)\,\| = 1$.

En général, on note $s = s(t)$ pour alléger les notations. La relation (*) s'écrit alors :

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}s}\right\| = 1$$

Physiquement, $\boldsymbol{F}\,'(t) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}$ est la vitesse vectorielle. $s'(t) = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ est la vitesse scalaire. $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}s}$ est un vecteur unitaire.

❑ Expression de l'abscisse curviligne en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

On a $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ et s est une primitive de cette fonction.

❑ En polaire, $\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$ et l'expression devient $s' = \sqrt{r'^2 + r^2}$

3– repère de Frénet

On se place dans le plan, muni d'un repère orthonormé direct. Les courbes sont de classes C^2. Les points sont supposés biréguliers (pas de point stationnaires, pas de point de rebroussement[1], pas de point d'inflexion ...).

<u>a– Vecteur normé tangent à l'arc, au point M(*t*) :</u>

Il est défini par $\boldsymbol{T} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}/\mathrm{d}t}{\|\,\mathrm{d}\boldsymbol{OM}/\mathrm{d}t\,\|} = \dfrac{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t}{\|\,\mathrm{d}\boldsymbol{OM}/\mathrm{d}t\,\|}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}s}$ puisque $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \|\,\mathrm{d}\boldsymbol{OM}/\mathrm{d}t\,\|$, ce qu'on peut encore écrire $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}}$

Physiquement, t est le temps, $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}$ est la vitesse vectorielle $\boldsymbol{V}$, $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ la vitesse scalaire V. $\boldsymbol{T}$ n'est défini qu'en des points non stationnaires et est de norme 1. C'est le vecteur tangent unitaire. La relation $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}$ exprime simplement que $\boldsymbol{V} = \mathrm{V}\boldsymbol{T}$

<u>b– Vecteur normal à l'arc, au point M(*t*) :</u>

Soit $\boldsymbol{N}$ le vecteur unitaire directement orthogonal à $\boldsymbol{T}$. Soit α est l'angle entre le vecteur de base $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{T}$, de sorte que $\boldsymbol{T} = \cos(\alpha)\boldsymbol{i} + \sin(\alpha)\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{N} = -\sin(\alpha)\boldsymbol{i} + \cos(\alpha)\boldsymbol{j}$. α est évidemment fonction du paramètre t. Nous admettrons que, si $\boldsymbol{F}$ est de classe C^k, $k \geq 2$, alors on peut choisir α de façon à ce qu'il soit une fonction de classe C^{k-1}, comme $\boldsymbol{T}$. Ce paramétrage est admissible si les points de l'arc sont biréguliers.

Comme $\boldsymbol{T} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}s}$, on a, dans la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha \text{ et } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha$$

DEFINITION :

Le repère de Frénet au point M(t) est donné par les vecteurs normés $\boldsymbol{T}$ *tangent à l'arc en M(t) et* $\boldsymbol{N}$ *directement orthogonal à* $\boldsymbol{T}$.

4– courbure, rayon de courbure, centre de courbure

DEFINITION

On pose $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$, *appelée courbure de l'arc au point considéré.*

---

[1] Voir le chapitre *Développements limités* dans le fichier DLTAYLOR.PDF pour l'étude locale d'un arc paramétré et le vocabulaire utilisé.

EXEMPLE d'un cercle de centre O et de rayon R.

$$\begin{cases} x = \mathrm{R}\cos t \\ y = \mathrm{R}\sin t \end{cases}$$

$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} -\mathrm{R}\sin t \\ \mathrm{R}\cos t \end{pmatrix}$ d'où $\boldsymbol{T}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, et que $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \mathrm{R}$ et $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + t$.

On a alors $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\mathrm{R}}$. La courbure est l'inverse du rayon du cercle.

Dans le cas général, en dérivant par rapport à α et à s les expressions $\boldsymbol{T} = \cos(\alpha)\boldsymbol{i} + \sin(\alpha)\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{N} = -\sin(\alpha)\boldsymbol{i} + \cos(\alpha)\boldsymbol{j}$, on obtient immédiatement :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}\alpha} = \boldsymbol{N} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}\alpha} = -\boldsymbol{T}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\,\boldsymbol{N} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma\,\boldsymbol{T}$$

Dans le cas d'un arc quelconque, la quantité $\mathrm{R} = \dfrac{1}{\gamma}$ s'appelle rayon de courbure. Courbure et rayon de courbure sont des grandeurs algébriques. Connaissant R, il est facile de trouver le centre de courbure $\Omega = \mathrm{M} + \mathrm{R}\boldsymbol{N}$. Il n'est pas constant en général, sauf dans le cas du cercle. Le cercle de centre Ω de rayon R s'appelle cercle osculateur de la courbe au point considéré.

Plusieurs remarques :

❑ La relation $\dfrac{1}{\gamma} = \mathrm{R} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}$ est naturelle pour un cercle de rayon R. Si on tourne d'un angle $\mathrm{d}\alpha$ alors on se déplace d'une longueur $\mathrm{d}s = \mathrm{R}\mathrm{d}\alpha$. Cette formule reste donc valable dans le cas d'une courbe quelconque

❑ Si $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = 0$, alors $\dfrac{1}{\mathrm{R}} = 0$. Par convention R est dit infini. La courbure est nulle. Cela se produit sur les segments de droites (évident) ou aux points d'inflexion. En effet $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ n'est autre que $\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}s^2}$.

❑ Le calcul de R se fait comme suit : $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}$ permet de calculer $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ et $\boldsymbol{T}$ Puis $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t}$ permet de trouver R. Un calcul plus direct de R se fait également de la façon suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{1}{\mathrm{R}}\boldsymbol{N}$$

On reconnaît dans l'expression précédente celle de l'accélération vectorielle $\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t^2}$ d'un point mobile, somme de l'accélération tangentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} = \dfrac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}$ et de l'accélération normale $\dfrac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}}\boldsymbol{N}$.

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\det\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right) = \frac{(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)^3}{\mathrm{R}}}$$

Cette formule est facile à mémoriser par homogénéité d'unité. Physiquement, $\frac{d\boldsymbol{OM}}{dt}$ s'exprime en mètre par seconde m/s, $\frac{d^2\boldsymbol{OM}}{dt^2}$ en m/s^2, donc $\det(\frac{d\boldsymbol{OM}}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{OM}}{dt^2})$ s'exprime en m^2/s^3. Il y a le cube d'un temps au dénominateur d'où la nécessité d'avoir $(\frac{ds}{dt})^3$. Mais on se retrouve avec des m^3 au numérateur d'où la nécessité de diviser par R homogène à une longueur. On peut écrire également :

$$\det(\frac{d\boldsymbol{OM}}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{OM}}{dt^2}) = \det(V\,\boldsymbol{T}, \frac{dV}{dt}\boldsymbol{T} + \frac{V^2}{R}\boldsymbol{N}) = \det(V\,\boldsymbol{T}, \frac{V^2}{R}\boldsymbol{N}) = \frac{V^3}{R}$$

❑ En coordonnées cartésiennes, on obtiendra $\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{R}$ d'où $R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}$

Dans le cas d'une courbe d'équation $y = f(x)$, où x sert de paramètre, la formule donne $\frac{1}{R} = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}$.

Un cas particulier intéressant se produit lorsque l'origine O du repère est en M, l'axe des abscisse étant tangent à la courbe d'équation $y = f(x)$. x étant choisi comme paramètre, on a :

$$x' = 1$$
$$y' = 0$$
$$x'' = 0$$
$$y'' = f''(0) = \frac{1}{R}$$

Ainsi, la dérivée seconde s'interprète comme la courbure de l'arc au point considéré.

❑ En coordonnées polaires où $r = r(\theta)$, on a :

$$\boldsymbol{OM} = r\boldsymbol{e}_r$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{OM}}{d\theta} = r'\boldsymbol{e}_r + r\boldsymbol{e}_\theta = \frac{ds}{d\theta}\boldsymbol{T} \text{ donc } \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r'^2+r^2}$$
$$\frac{d^2\boldsymbol{OM}}{d\theta^2} = (r'' - r)\boldsymbol{e}_r + 2r'\boldsymbol{e}_\theta$$

Ainsi $\boldsymbol{T}$ a pour composantes dans la base $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$ $\begin{pmatrix} \frac{r'}{\sqrt{r'^2+r^2}} \\ \frac{r}{\sqrt{r'^2+r^2}} \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N}$ étant directement orthogonal à $\boldsymbol{T}$, a pour composantes $\begin{pmatrix} \frac{-r}{\sqrt{r'^2+r^2}} \\ \frac{r'}{\sqrt{r'^2+r^2}} \end{pmatrix}$

Pour calculer le rayon de courbure, on peut utiliser la formule $\det(\frac{d\boldsymbol{OM}}{d\theta}, \frac{d^2\boldsymbol{OM}}{d\theta^2}) = \frac{(ds/d\theta)^3}{R}$. Comme $\det(\frac{d\boldsymbol{OM}}{d\theta}, \frac{d^2\boldsymbol{OM}}{d\theta^2}) = \begin{vmatrix} r' & r \\ r''-r & 2r' \end{vmatrix} = 2r'^2 - rr'' + r^2$, on en déduit que $\frac{s'^3}{R} = 2r'^2 - rr'' + r^2$. Comme $s' = \sqrt{r'^2+r^2}$, on obtient finalement $R = \frac{(r'^2 + r^2)^{3/2}}{2r'^2 + r^2 - rr''}$

5– exemples

a) Ellipse :

La Terre peut-être modélisée par un ellipsoïde. Si on la coupe par un plan passant par les pôles, on obtient une ellipse paramétrée de la façon suivante :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

avec a rayon de l'équateur, b rayon d'un méridien. La latitude au point (x,y) n'est pas égale à t mais à l'angle entre la normale (verticale du lieu) est le vecteur $\boldsymbol{i}$. On se pose la question de savoir quel est le rayon de courbure en un point donné, ainsi que le centre de courbure, point où vont converger les verticales au voisinage du point.

$$\begin{cases} x' = -a\sin t \\ y' = \ \ b\cos t \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

Le vecteur tangent est donc $\boldsymbol{T}$ de composantes :

$$\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\boldsymbol{N}$ directement orthogonal à $\boldsymbol{T}$ a pour composantes :

$$\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\begin{pmatrix} -b\cos t \\ -a\sin t \end{pmatrix}$$

La latitude θ étant l'angle entre $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{i}$, on a $\tan\theta = \frac{a}{b}\tan t$. La différence entre θ et t est très faible pour la Terre ($a \approx 6378{,}160\ km$ et $b \approx 6356{,}774\ km$).

Pour calculer le rayon de courbure, nous pouvons :

❑ Ou bien calculer la dérivée de $\boldsymbol{T}$ par rapport à t ce qui donne :

$$\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\begin{pmatrix} -a\cos t \\ -b\sin t \end{pmatrix} - \frac{(a^2 - b^2)\sin t\cos t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}\begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$$

soit, après simplification :

$$\frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}\begin{pmatrix} -b\cos t \\ -a\sin t \end{pmatrix}$$

Ainsi $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{ab}{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}.\boldsymbol{N}$ et $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}.\boldsymbol{N}$

Le rayon de courbure vaut donc $\mathrm{R} = \frac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}$

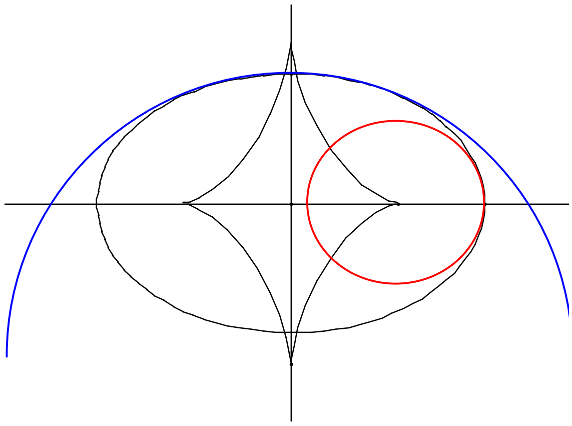
❑ ou bien calculer $\det(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t^2})$ ce qui donne $\begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t \\ b\cos t & -b\sin t \end{vmatrix} = ab$ et qui n'est autre que $\frac{(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)^3}{\mathrm{R}}$. On obtient donc $\mathrm{R} = \frac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}$

On note qu'à l'équateur ($t = 0$), le rayon de courbure vaut $\frac{b^2}{a}$ alors qu'au pôle ($t = \frac{\pi}{2}$), le rayon de courbure vaut $\frac{a^2}{b}$. Ainsi, le rayon de courbure à l'équateur est ***plus petit*** que le rayon de courbure au pôle, alors que le rayon a du cercle équateur est plus grand que le rayon b du méridien. Cette distinction n'est pas forcément aisée à comprendre et a donné lieu à une polémique au XVIIIème.

Le centre de courbure a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} a\cos t - \dfrac{\cos t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{a} \\ b\sin t - \dfrac{\sin t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(a^2-b^2)\cos^3 t}{a} \\ \dfrac{(b^2-a^2)\sin^3 t}{b} \end{pmatrix}$$

Voici ci-dessous le lieu des centres de courbures pour une ellipse fortement aplatie, ainsi que les cercles osculateurs à l'équateur (en rouge) et au pôle (en bleu) :



Si $a = b$, le centre de courbure est fixe et est au centre du cercle !!

b) Cycloïde :
Elle est paramétrée par :

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = a(1-\cos t) = 2a\sin^2(t/2) \\ y' = a\sin t = 2a\sin(t/2)\cos(t/2) \end{cases} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 2a\sin(t/2)$$

et $\boldsymbol{T}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$ pour $t \in [0,2\pi]$. $\boldsymbol{N}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} -\cos(t/2) \\ \sin(t/2) \end{pmatrix}$.

D'où $\dfrac{d\boldsymbol{T}}{dt} = -\dfrac{1}{2}.\boldsymbol{N} \Rightarrow \dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds} = -\dfrac{1}{4a\sin(t/2)}.\boldsymbol{N}$

Ainsi, R = – 4$a$sin(t/2).

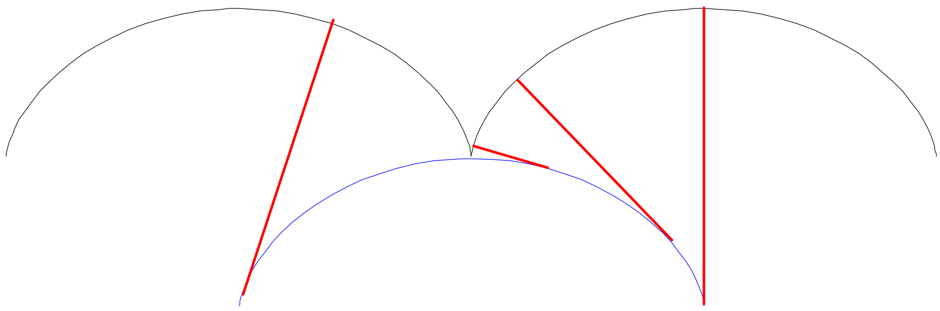
Le centre de courbure a pour composantes :

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) + 2a\sin t = a(t+\sin t) \\ y = a(1-\cos t) - 2a(1-\cos t) = -a(1-\cos t) \end{cases}$$

La courbe parcourue par le centre de courbure (en bleu) lorsque t varie est une cycloïde obtenue par translation de la cycloïde initiale. Posons $t = u - \pi$. On a:

$$\begin{cases} x = -a\pi + a(u-\sin u) \\ y = -2a + a(1-\cos u) \end{cases}$$

Le vecteur de translation permettant de passer d'une cycloïde à l'autre est le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} -a\pi \\ -2a \end{pmatrix}$



6– Cinématique

M est un point ponctuel mobile se déplaçant au cours du temps t. Sa vitesse vectorielle est $\boldsymbol{V} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}$. La norme de cette vitesse n'est autre que $|\mathrm{d}s/\mathrm{d}t|$. La quantité $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ s'interprète donc comme la vitesse V numérique du point. Son accélération vectorielle est :

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)^2}{\mathrm{R}}\boldsymbol{N}$$

Ce qu'on peut encore écrire : $\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T} + \dfrac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}}\boldsymbol{N}$

$\dfrac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}t}$ est la composante tangentielle de $\boldsymbol{a}$; $\dfrac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}}$ en est la composante normale.

Nous avons donc, dans le repère de Frénet :

$$\boldsymbol{V} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}}\boldsymbol{N}$$

L'accélération centripète en $\dfrac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}}$ permet de tester facilement la loi de la gravitation universelle de Newton.

i) A la surface de la Terre, soit à une distance de 6370 *km* environ du centre de la Terre, l'accélération de la pesanteur est 9,81 $m.s^{-2}$.

ii) La Lune se trouve à une distance de 384400 *km* de la Terre, et sa période sidérale T est de 27,3 jours. Elle est soumise à une accélération $\dfrac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}} = \mathrm{R}\omega^2 = \dfrac{4\pi^2\mathrm{R}}{\mathrm{T}^2}$ soit :

$$\frac{4\pi^2 \times 384{,}4\ 10^6}{27{,}3^2 \times 86400^2}\ m.s^{-2} = 2{,}73 \times 10^{-3}\ m.s^{-2}$$

Il revient à Newton d'avoir attribué à la même cause ces deux effets, alors que la physique aristotélicienne, encore vaillante au XVIIème, bien que largement mise à mal par Galilée, distinguait soigneusement les phénomènes terrestres des phénomènes astronomiques.

iii) Si l'on calcule le produit de l'accélération par le carré de la distance, on trouve :

dans le cas i) : $9{,}81 \times 6{,}37^2 \times 10^{12} = 398 \times 10^{12}\ m^3.s^{-2}$

dans le cas ii) : $2{,}73 \times 10^{-3} \times 384{,}4^2 \times 10^{12} = 403 \times 10^{12}\ m^3.s^{-2}$

Ces deux quantités sont proches de $400 \times 10^{12}\ m^3.s^{-2}$. Elle correspond à la quantité GM, où M est la masse de la Terre et G la constante de la gravitation universelle. Sa détermination par Cavendish en 1798 permet de déterminer la masse M de la Terre. On a G de l'ordre de $6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3.s^{-2}.kg^{-1}$, de sorte que M vaut environ $6 \times 10^{24}\ kg$.

II : Champs de vecteurs

1– Potentiel scalaire

Un champ de vecteurs est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, qui à tout point (x, y, z) associe un vecteur $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$, abrégé en $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$. On peut se limiter à un champ de vecteurs du plan en supprimant la coordonnée z et la composante R.

Ce champ dérive d'un potentiel scalaire f si $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{grad}f$. L'intérêt d'un tel potentiel est de pouvoir raisonner sur une seule fonction scalaire f au lieu de raisonner sur les trois composantes de $\boldsymbol{V}$. On cherche donc f telle que :

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$R = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Dans le cas où les composantes P, Q, R sont de classe C^1, il est nécessaire, d'après le théorème de Schwarz que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ avec x_i et x_j représentant x, y ou z. Cela s'exprime sous la forme suivante :

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ (seule relation à utiliser pour un champ de vecteurs } \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \text{du plan } \mathbb{R}^2\text{)}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$ s'appelle rotationnel de $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$.

Ainsi, pour qu'un champ de vecteurs de classe C^1 dérive d'un potentiel, il est nécessaire que son rotationnel soit nul. Nous admettrons que la condition donnée est également suffisante localement sur des boules, ou des convexes.

2– Circulation, abscisse curviligne

Supposons maintenant qu'un point se déplace dans l'espace entre les instants t_0 et t_1, suivant une courbe paramétrée $\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t_0 \leq t \leq t_1\}$ de classe C^1 ou C^1 par morceaux, depuis le point

$M_0 = M(t_0)$ et $M_1 = M(t_1)$ et qu'en chaque point soit défini une force de composantes $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$, dépendant de x, y et z. On dispose d'un champ de forces. Le travail effectué par cette force le long de Γ est donné par l'intégrale suivante

$$W = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

qui par définition, n'est autre que :

$$W = \int_{t_0}^{t_1} P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\,dt$$

La première notation se justifie par le fait que W dépend de Γ mais ne dépend pas du paramétrage choisi pour le parcourir (Physiquement, un changement de paramétrage correspond au fait de parcourir Γ avec des vitesses différentes. Le travail W dépend du chemin parcouru mais pas de la vitesse à laquelle il est parcouru). On peut noter également :

$$W = \int_\Gamma \omega$$

où ω est la forme dite différentielle $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.

Plus généralement, si $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ est un champ de vecteurs défini sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et que cet ouvert contient une courbe Γ, on définit la circulation de ce champ le long de Γ par l'intégrale suivante, dite intégrale curviligne :

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{t_0}^{t_1} P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\,dt$$

où l'application $[t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3$

$$t \to (x(t), y(t), z(t))$$

est une représentation paramètrique de Γ. La formule de changement de variables sur les intégrales permet de montrer que cette définition ne dépend pas de la représentation paramétrique choisie, et donc ne dépend que de la forme de l'arc Γ.

EXEMPLE 1 : Considérons $W = \int_\Gamma y\,dx - x\,dy$ où Γ est le segment joignant le point (0, 1) au point (1, 0). Un paramétrage possible est donné par $x = t$, $y = 1 - t$, t variant de 0 à 1. D'où W = 1. Par contre, si on va de (0, 1) à (1, 0) par le segment [(0,1), (0,0)] suivi de [(0,0), (0,1)], on trouvera W = 0. Autrement dit, W dépend du chemin suivi

EXEMPLE 2 : Considérons $W = \int_\Gamma y\,dx + x\,dy$ où Γ est le segment joignant le point (0, 1) au point (1, 0). Reprenons le paramétrage $x = t$, $y = 1 - t$, t variant de 0 à 1. D'où W = 0. Si on va de (0, 1) à (1, 0) par le segment [(0,1), (0,0)] suivi de [(0,0), (0,1)], on a toujours W = 0. Dans le cas présent, W ne dépend pas du chemin suivi. La différence avec l'exemple 1 est que le champ $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ dérive d'un potentiel scalaire (à savoir $f = xy$), mais pas le champ $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

EXEMPLE 3 :

On appelle une énergie potentielle E dont dérive une force $\boldsymbol{F}$ de composantes $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ une quantité E_p telle que $-\,\boldsymbol{grad}\ E_p = \boldsymbol{F}$ (La raison du signe – est que la force indique la direction dans laquelle l'énergie potentielle diminue). Le travail de cette force est :

$$W = \int_\Gamma \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dM} = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$
$$= -\int_\Gamma \frac{\partial E_p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}\,dz$$
$$= -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial E_p}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + \frac{\partial E_p}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + \frac{\partial E_p}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\,dt$$

t_1

On reconnaît le dérivée de la fonction composée $t \to (x, y, z) \to E_p(x, y, z)$ que nous continuerons à noter $E_p(t)$ pour se conformer à l'usage en physique. L'intégrale vaut donc :

$$W = -\int_{t_0}^{t_1} E_p'(t)\,dt = E_p(t_0) - E_p(t_1) = E_p(M_0) - E_p(M_1)$$

Plusieurs points sont remarquables :

❑ Ce travail ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement du point de départ et d'arrivée.

❑ La relation $E_p(M_0) = E_p(M_1) + W$ est une démonstration du principe de conservation de l'énergie. On notera par ailleurs que, si $\boldsymbol{a}$ désigne l'accélération de la particule de masse m soumise à la force $\boldsymbol{F}$, et $\boldsymbol{V}$ sa vitesse, on a :

$W = \int_\Gamma \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dM} = m\int_\Gamma \boldsymbol{a}.\boldsymbol{V}\,dt = m\int_\Gamma \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{d}\mathbf{V} = \frac{1}{2}\,mV_1^2 - \frac{1}{2}\,mV_0^2$. La relation précédente s'écrit donc aussi sous la forme :

$$E_p(M_0) + \frac{1}{2}\,m\,V_0^2 = E_p(M_1) + \frac{1}{2}\,m\,V_1^2$$

et l'on voit apparaître la conservation de l'énergie mécanique, somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique.

Plus généralement, on a montré ci-dessus que si le champ de vecteurs dérive d'un potentiel scalaire, alors l'intégrale ne dépend que des valeurs de ce potentiel au point initial et final. En particulier, si la courbe Γ est fermée, l'intégrale est nulle.

Inversement, on prouve que si toute circulation du champ de vecteur ne dépend que des valeurs initiales et finales par une formule :

$$\int_{[M_0,M_1]} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = E(M_0) - E(M_1)$$

Alors le champ de vecteurs dérive du potentiel E. Il suffit pour cela de considérer par exemple un déplacement selon x, alors que y et z restent constant, pour voir que P est la dérivée de –E par rapport à x. De même pour les autres variables.

3– Formule de Green-Riemann

On considère un domaine Σ du plan (convexe pour simplifier), et Γ est un arc fermé de classe C^1 par morceaux, sans point double, entourant le domaine Σ, orienté dans le sens trigonométrique. On suppose que $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est un champ de vecteurs de classe C^1, et l'on s'intéresse à la circulation de ce champ le long de Γ. La formule de Green-Riemann énonce :

$$\boxed{\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Sigma \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy}$$

Comme expliqué en 2), la première intégrale se calcule en prenant un paramétrage de Γ. On retrouve le fait que, si $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ dérive d'un potentiel scalaire, alors sa circulation le long d'un chemin fermé est nulle. L'intégrale de gauche n'est autre que $\int_\Gamma \langle \boldsymbol{grad} f, d\boldsymbol{M}\rangle$, nulle si Γ est fermé. Une condition nécessaire pour que $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ dérive d'un potentiel est que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ pour f de classe C^2 et la deuxième intégrale est également nulle.

EXEMPLE : Soit A (1,0) et $B(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$. Soit Γ formé du segment [OA], de l'arc de cercle AB de centre O, et du segment [BO]. On paramétrise [OA] par $(x,0)$, $0 \le x \le 1$, AB par $(\cos\theta, \sin\theta)$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ et [BO] par (t,t), t variant de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à 0

$$\int_\Gamma y^2dx + x^2dy = \int_0^{\pi/4} -\sin^3\theta + \cos^3\theta\,d\theta - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2t^2\,dt = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}$$

Par ailleurs :

$$\iint_\Sigma 2x - 2y\,dxdy = \iint_D 2(\cos\theta - \sin\theta)\,r^2 dr d\theta = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}$$

où $D = \{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \text{ et } 0 \le r \le 1\}$.

On peut donner la justification suivante de la formule. Supposons pour simplifier que Σ puisse d'écrire :

$$\Sigma = \{(x,y) \mid f(x) \le y \le g(x),\ a \le x \le b\}.$$

On a :

$$\iint_\Sigma \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=f(x)}^{y=g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx = \int_a^b P(x,g(x)) - P(x,f(x))\,dx$$

On reconnaît $\int_\Gamma - P(x,y)\,dx$

On montre de même que $\iint_\Sigma \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \int_\Gamma Q(x,y)\,dy$

On en déduit par exemple que l'aire de Σ vaut :

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\Gamma} x\ \mathrm{d}y = -\int_{\Gamma} y\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

La dernière formule peut s'interpréter géométriquement comme la somme d'aires de triangles infinitésimaux de côtés (x,y) et $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$. Ainsi, en thermodynamique, le cycle d'une machine thermique est représenté avec les coordonnées (V,P) au lieu de (x,y). Le travail reçu est égal à l'intégrale de – PdV. Il s'agit de l'aire englobée par le cycle si le parcourt se fait dans le sens trigonométrique. Pour fournir du travail, le chemin devra être parcourue dans le sens inverse au sens trigonométrique.

On prendra garde au fait que la forme différentielle doit être définie non seulement sur Γ mais sur Σ tout entier. Considérer par exemple l'exemple suivant :

$$\omega = \mathrm{P}\mathrm{d}x + \mathrm{Q}\mathrm{d}y = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

avec Γ le cercle unité. Alors :

$$\mathrm{Q} = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\mathrm{P} = -\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$$

$\begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \end{pmatrix}$ dérive localement d'un potentiel, mais pas globalement. On n'a pas :

$$\int_{\Gamma} \mathrm{P}\ \mathrm{d}x + \mathrm{Q}\ \mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

car ω n'est pas définie en (0,0). En fait, l'intégrale curviligne vaut 2π. Cependant la formule serait valable si Γ était un arc limitant un domaine Σ ne contenant pas (0,0). Dans ce cas, l'intégrale est nulle.

La formule de Green-Riemann possède deux extensions possibles en dimension 3, la formule de Green-Ostrogradski, et la formule de Stokes.