

## FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE

### PLAN

#### I : Limites

- 1) Vocabulaire
- 2) Définition des limites
- 3) Opérations sur les limites
- 4) Inégalités sur les limites
- 5) Lien avec les suites
- 6) Exemples et contre-exemples

#### II : Equivalence locale

- 1) Définitions
- 2) Exemples
- 3) Opérations
- 4) Fonction négligeable devant une fonction
- 5) Somme d'équivalents

#### III : Fonctions monotones

- 1) Définition
- 2) Opérations sur les fonctions monotones
- 3) Limite d'une fonction monotone
- 4) Injectivité d'une fonction strictement monotone

#### IV : Continuité

- 1) Définition
- 2) Image d'un intervalle
- 3) Image d'un segment
- 4) Continuité et monotonie

Annexe I : fonction continue sur  $\mathbb{C}^{\mathbb{Q}}$  et discontinue sur  $\mathbb{Q}$

Annexe II : calcul de pH

### I : Limites

#### 1- Vocabulaire

Dans ce chapitre, on considère des fonctions définies sur une partie de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (fonction d'une variable réelle à valeurs réelles) ou parfois à valeurs dans  $\mathbb{C}$  (fonction d'une variable réelle à valeurs complexes)

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions et  $\lambda$  un scalaire,  $f + g$  est la fonction :  $x \rightarrow f(x) + g(x)$ .  $\lambda f$  est la fonction :  $x \rightarrow \lambda f(x)$ . Ces deux opérations confèrent à l'ensemble des fonctions définies sur le même ensemble une structure d'espace vectoriel (voir le chapitre *Espaces Vectoriels* dans le fichier ESPVECT.PDF). La fonction  $fg$  est la fonction :  $x \rightarrow f(x)g(x)$ . La fonction  $f \circ g$  est la fonction :  $x \rightarrow f(g(x))$ . La fonction  $|f|$  est la fonction :  $x \rightarrow |f(x)|$ .

Pour des fonctions à valeurs réelles, la fonction  $\text{Sup}(f,g)$  (ou  $\text{Max}(f,g)$ ) est la fonction qui à  $x$  associe la plus grande valeur de  $f(x)$  et  $g(x)$ . La fonction  $\text{Inf}(f,g)$  (ou  $\text{Min}(f,g)$ ) est la fonction qui à  $x$  associe la plus petite valeur de  $f(x)$  et  $g(x)$ .

Une fonction  $f$  à valeurs réelles est majorée si :  $\exists M, \forall x, f(x) \leq M$

Une fonction  $f$  à valeurs réelles est minorée si :  $\exists m, \forall x, f(x) \geq m$

Une fonction  $f$  à valeurs réelles est bornée si elle est majorée ou minorée. On peut écrire aussi :

$$\exists M, \forall x, |f(x)| \leq M$$

Cette dernière définition s'applique aux fonctions à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue par le module.

Une fonction  $f$  à valeurs réelles admet un maximum si :  $\exists x_0, \forall x, f(x) \leq f(x_0)$ . On note  $f(x_0) = \text{Max}_{x \in I} f(x)$  si  $I$  est l'ensemble de définition de  $f$ , ou plus succinctement,  $f(x_0) = \text{Max } f$ .

Une fonction  $f$  à valeurs réelles admet un minimum si :  $\exists x_0, \forall x, f(x) \geq f(x_0)$ . On note  $f(x_0) = \text{Min}_{x \in I} f(x)$  si  $I$  est l'ensemble de définition de  $f$ , ou plus succinctement,  $f(x_0) = \text{Min } f$ .

Une fonction  $f$  à valeurs réelles admet un extremum si elle admet un maximum ou un minimum.

Le maximum, minimum ou extremum est dit local en remplaçant précédemment  $\forall x$  par :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$$

Autrement dit, la propriété n'est vérifiée que sur un intervalle autour de  $x_0$  et non sur l'ensemble de définition de  $f$ .

Une fonction à valeurs réelles peut être bornée sans admettre de maximum ou de minimum, mais seulement une borne supérieure ou inférieure (penser à  $e^{-x}$  sur  $[0, +\infty[$  qui admet 1 comme maximum et 0 comme borne inférieure mais non comme minimum). Ces bornes sont notées respectivement  $\text{Sup}_{x \in I} f(x)$  ou plus simplement  $\text{Sup } f$ , et  $\text{Inf}_{x \in I} f(x)$  ou plus simplement  $\text{Inf } f$ .

Une fonction  $f$  est paire si :  $\forall x, f(-x) = f(x)$ . L'ensemble des fonctions paires est stable par les deux opérations d'addition des fonctions et de multiplication des scalaires ; il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions.

Une fonction  $f$  est impaire si :  $\forall x, f(-x) = -f(x)$ . Il s'agit également d'un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions.

Une fonction est périodique de période  $T$  ou  $T$ -périodique si :  $\forall x, f(x + T) = f(x)$ .

Une fonction est lipschitzienne de rapport  $k$  ou  $k$ -lipschitzienne si :  $\forall x, \forall y, |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$ .  
(Lipschitz, mathématicien allemand, 1832-1903)

## 2- Définition des limites

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Nous allons définir  $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = L$

$L$  et  $X_0$  peuvent valoir, indépendamment l'un de l'autre, une valeur finie,  $+\infty$ ,  $-\infty$ , ou  $\infty$ . Cela représente potentiellement 16 définitions. En fait, toutes reposent sur un schéma général que nous donnerons ultérieurement. Voici auparavant quelques exemples de définition de  $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = L$  :

□  $L = l$  réel et  $X_0 = x_0$  réel.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

□  $L = l$  réel et  $X_0 = +\infty$ .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A, \forall x, x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

□  $L = -\infty$  et  $X_0 = x_0$  réel.

$$\forall A, \exists \alpha, \forall x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < A$$

□  $L = +\infty$  et  $X_0 = \infty$

$$\forall A, \exists B, |x| > B \Rightarrow f(x) > A$$

Les premières définitions de ce type ont été données par Weierstrass (1815-1897).

#### DEFINITION GENERALE :

On dit que  $f$  tend vers  $L$  lorsque  $x$  tend vers  $X_0$  lorsque :

$$\forall V \text{ voisinage de } L, \exists W \text{ voisinage de } X_0, \forall x, x \in W \Rightarrow f(x) \in V$$

un voisinage désignant une partie contenant :

pour un réel  $l$ , un intervalle de la forme  $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

pour  $+\infty$ , un intervalle de la forme  $]A, +\infty[$

pour  $-\infty$ , un intervalle de la forme  $]-\infty, A[$

pour  $\infty$ , le complémentaire d'un intervalle de centre 0, de rayon  $A$ .

Cette définition peut être adaptée à chaque cas particulier, en utilisant des voisinages adéquats. Elle s'applique également aux suites, fonctions de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $X_0 = +\infty$ . Si  $f$  n'est définie que sur une partie  $D_f$ , on suppose que tout voisinage de  $X_0$  intersecte  $D_f$ .

La limite, si elle existe, est unique. Voici la démonstration dans le cas où  $x_0$ ,  $L$  et  $L'$  sont finis :

Soit  $L$  et  $L'$  deux limites différentes. Prenons  $\varepsilon = \frac{1}{2} |L - L'|$ . Il existe  $\alpha$  et  $\beta$  positifs tels que :

$$\forall x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\forall x \in ]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |f(x) - L'| < \varepsilon$$

Pour  $x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[ \cap ]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$ , on a :

$$|L - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| < 2\varepsilon$$

On a donc bien une contradiction.

Si la limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  réel est égale à  $f(x_0)$ , on dit que  $f$  est continue en  $x_0$ . Lorsque  $f$  est définie en  $x_0$ , il est équivalent de dire que la limite de  $f$  existe en  $x_0$  et que  $f$  est continue en  $x_0$ .

En remplaçant  $x$  par  $x_0 + h$ , on voit qu'il y a équivalence entre  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = L$ .

Pour  $X_0 = x_0$  réel, on parle de limite à droite ou à gauche :

$$\square \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = L \text{ (limite à droite)}$$

signifie :  $\forall V$  voisinage de  $L$ ,  $\exists \alpha > 0$ ,  $\forall x, x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow f(x) \in V$

Si  $L = f(x_0)$ , on dit que la fonction est continue à droite.

$$\square \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L \text{ (limite à gauche)}$$

signifie :  $\forall V$  voisinage de  $L$ ,  $\exists \alpha > 0$ ,  $\forall x, x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow f(x) \in V$

Si  $L = f(x_0)$ , on dit que la fonction est continue à gauche.

Plus généralement, on peut définir la limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $X_0$ , fini ou non, avec  $x$  élément d'une partie  $A$  par :

$$\forall V \text{ voisinage de } L, \text{ il existe } W \text{ voisinage de } X_0, x \in W \cap A \Rightarrow f(x) \in V$$

Il faut pour cela que tout voisinage de  $X_0$  intersecte  $A \cap D_f$  de façon que la phrase ci-dessus ait un sens.

Voici un dernier exemple :

$$\square \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = L$$

signifie :  $\forall V$  voisinage de  $L$ ,  $\exists \alpha$ ,  $\forall x, |x - x_0| < \alpha$  et  $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V$ . On a pris  $A = \mathbb{R} - \{x_0\}$ .

Il résulte des définitions que, si  $f$  admet une limite finie en  $X_0$ ,  $f$  est bornée au voisinage de  $X_0$ .

En ce qui concerne les fonctions à valeurs complexes, et comme pour les suites, si on écrit  $f = g + ih$  avec  $g$  et  $h$  les parties réelles et imaginaires de  $f$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow X_0} g(x) = \operatorname{Re}(l) \text{ et } \lim_{x \rightarrow X_0} h(x) = \operatorname{Im}(l)$$

### 3- Opérations sur les limites

Les théorèmes sur les limites sont en tous points identiques à ceux sur les suites :

a) SOMME :

#### PROPOSITION

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions. Lorsque  $x$  tend vers  $X_0$  :

- i) Si  $f$  converge vers  $L$  et  $g$  vers  $L'$ , alors  $f+g$  converge vers  $L+L'$ .
- ii) Si  $f$  est bornée au voisinage de  $X_0$  et  $g$  tend vers  $\infty$ , alors  $f+g$  tend vers  $\infty$
- iii) si  $f$  est minorée au voisinage de  $X_0$  et  $g$  tend vers  $+\infty$ , alors  $f+g$  tend vers  $+\infty$
- iv) si  $f$  est majorée au voisinage de  $X_0$  et  $g$  tend vers  $-\infty$ , alors  $f+g$  tend vers  $-\infty$

Les démonstrations sont données dans le cas où  $x_0$  est fini, mais s'adaptent facilement dans le cas où  $X_0$  est infini :

$$i) \forall \varepsilon > 0, |f(x) + g(x) - (L + L')| \leq |f(x) - L| + |g(x) - L'|$$

$$\text{Or, } \exists \alpha > 0, \forall x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\text{et } \exists \beta > 0, \forall x \in ]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |g(x) - L'| < \varepsilon$$

Posons  $\eta = \text{Min}(\alpha, \beta)$ . On a alors :

$$\forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) + g(x) - (L + L')| < 2\varepsilon$$

En particulier,  $\lim (f(x) + C) = (\lim f(x)) + C$

$$\text{ii) } \forall A, |f(x) + g(x)| \geq |g(x)| - |f(x)|$$

$$\text{Or, } \exists M \text{ et } \exists \alpha > 0, \forall x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(x)| \leq M$$

$$\text{et } \exists \beta > 0, \forall x \in ]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |g(x)| > A + M$$

Posons  $\eta = \text{Min}(\alpha, \beta)$ . On a alors :

$$\forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) + g(x)| > A.$$

Les démonstrations pour iii et iv sont analogues à celles de ii

On obtient une forme indéterminée lorsque l'une des fonctions tend vers  $+\infty$ , et l'autre vers  $-\infty$ .

## b) PRODUIT

### **PROPOSITION**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions. Lorsque  $x$  tend vers  $X_0$  :

i) Si  $f$  converge vers  $L$  réel et  $g$  vers  $L'$  réel, alors  $fg$  converge vers  $LL'$ .

ii) Si  $f$  est bornée et  $g$  converge vers 0, alors  $fg$  tend vers 0

iii) Si  $(|f|)$  est minoré par un réel strictement positif et si  $g$  tend vers  $\infty$ , alors  $fg$  tend vers

$\infty$ .

Démonstration :

i)  $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LL'| &= |f(x)(g(x) - L') + (f(x) - L)L'| \\ &\leq |f(x)| |g(x) - L'| + |f(x) - L| |L'| \\ &\leq M |g(x) - L'| + |f(x) - L| |L'| \end{aligned}$$

où  $M$  est un majorant de la fonction bornée  $f$ .

$$\text{Or, } \exists \alpha > 0, \forall x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |g(x) - L'| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\exists \beta > 0, \forall x \in ]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2|L'|}$$

Posons  $\eta = \text{Min}(\alpha, \beta)$ . On a alors :

$$\text{Donc, } \forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x)g(x) - LL'| < \varepsilon.$$

En particulier,  $\lim Cf(x) = C \lim f(x)$

ii) Soit  $M$  un majorant de  $(|f(x)|)$  sur un voisinage  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$  de  $x_0$ . On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(x)g(x)| \leq M |g(x)|$$

$$\text{Or, } \exists \beta > 0, \forall x \in ]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Posons  $\eta = \text{Min}(\alpha, \beta)$ . On a alors :

$$\forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x)g(x)| < \varepsilon.$$

iii) Soit  $m > 0$  minorant ( $|f(x)|$ ) sur un voisinage  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$  de  $x_0$ . On a :

$$\forall A > 0, \forall x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(x)g(x)| > |g(x)|m$$

$$\text{Or, } \exists \beta > 0, \forall x \in ]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |g(x)| > \frac{A}{m}$$

Posons  $\eta = \text{Min}(\alpha, \beta)$ . On a alors :

$$\forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x)g(x)| > A$$

On obtient une forme indéterminée lorsque l'une des fonctions tend vers  $\infty$ , et l'autre vers 0.

### c) INVERSE

#### PROPOSITION

Soit  $f$  une fonction. Lorsque  $x$  tend vers  $X_0$  :

i) Si  $f$  converge vers  $L$  non nul, alors  $1/f$  converge vers  $1/L$ .

ii) Si  $f$  tend vers 0, alors  $1/f$  tend vers  $\infty$ .

iii) Si  $f$  tend vers  $\infty$ , alors  $1/f$  tend vers 0.

Démonstration :

i)  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L} \right| = \frac{|f(x) - L|}{|f(x)| |L|}$$

$$\text{Or } \exists \alpha > 0, \forall x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(x)| > \frac{|L|}{2}$$

$$\text{Donc, } \forall x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L} \right| < C |f(x) - L|, \text{ avec } C = \frac{2}{|L|^2}$$

$$\exists \beta > 0, \forall x \in ]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{C}$$

Posons  $\varepsilon = \text{Min}(\alpha, \beta)$ . On a alors :

$$\text{Donc, } \forall x \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[, \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L} \right| < \varepsilon$$

$$\text{ii) } \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(x)| < \frac{1}{A}$$

$$\text{donc } \left| \frac{1}{f(x)} \right| > A$$

La démonstration de iii) est analogue à celle de ii)

#### d) QUOTIENT

##### PROPOSITION

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions. Lorsque  $x$  tend vers  $X_0$  :

i) Si  $f$  converge vers  $L$  et  $g$  vers  $L'$  non nul, alors  $\frac{f}{g}$  converge vers  $\frac{L}{L'}$ ,

ii) Si  $f$  est bornée au voisinage de  $X_0$  et  $g$  converge vers  $\infty$ , alors  $\frac{f}{g}$  tend vers 0

iii) Si  $(|f|)$  est minoré par un réel strictement positif au voisinage de  $X_0$ , et si  $g$  tend vers 0, alors  $\frac{f}{g}$  tend vers  $\infty$ .

##### Démonstration :

Ces propositions se montrent directement, mais il est plus simple d'utiliser les résultats démontrés pour le produit et l'inverse.

On obtient une forme indéterminée lorsque les deux fonctions tendent vers  $\infty$ , ou vers 0.

#### e) COMPOSITION :

##### PROPOSITION

Soient  $f$  et  $g$  telles que  $f$  tende vers  $Y_0$  lorsque  $x$  tend vers  $X_0$ , et que  $g$  tende vers  $L$  lorsque  $x$  tend vers  $Y_0$ . Alors  $g \circ f$  tend vers  $L$  lorsque  $x$  tend vers  $X_0$ .

Démonstration dans le cas où  $Y_0, L, X_0$  sont finis :

Soit  $\varepsilon > 0$ .  $\exists \alpha > 0, \forall y \in ]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[, |g(y) - L| < \varepsilon$

et  $\exists \beta > 0, \forall x \in ]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |f(x) - y_0| < \alpha$

donc,  $\forall x \in ]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |g(f(x)) - L| < \varepsilon$

Il résulte des propositions précédentes qu'on ne peut conclure directement dans les cas suivants :

$\lim f.g$  avec  $\lim f = 0$  et  $\lim g = \infty$  "0. $\infty$ "

$\lim \frac{f}{g}$  avec  $\lim f = 0$  et  $\lim g = 0$  " $\frac{0}{0}$ "

$\lim \frac{f}{g}$  avec  $\lim f = \infty$  et  $\lim g = \infty$  " $\frac{\infty}{\infty}$ "

$\lim f^g = \lim e^{g \cdot \ln(f)}$  avec  $\lim f = 0$  et  $\lim g = 0$  " $0^0$ "

$\lim f^g = \lim e^{g \cdot \ln(f)}$  avec  $\lim f = \infty$  et  $\lim g = 0$  " $\infty^0$ "

$\lim f^g = \lim e^{g \cdot \ln(f)}$  avec  $\lim f = 1$  et  $\lim g = \infty$  " $1^\infty$ "

Un exemple classique est le suivant :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] \rightarrow \exp(1) \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty$$

#### 4- Inégalités sur les limites

Les théorèmes sur les inégalités sont en tout point identiques à ceux sur les suites.

##### PROPOSITION

Soit  $f$  une fonction qui converge vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $X_0$ . Alors :

i)  $l > a \Rightarrow \exists W$  voisinage de  $X_0, \forall x \in W, f(x) > a$

ii)  $\exists W$  voisinage de  $X_0$ ,  $\forall x \in W, f(x) \geq a \Rightarrow l \geq a$

On a des résultats analogues avec  $<$  et  $\leq$ .

Les démonstrations sont données en utilisant la notion générale de voisinage.

Démonstration :

i) résulte de la définition de la convergence en prenant  $\varepsilon = l - a$ .

ii) Si  $l < a$ , alors il existe  $U$  voisinage de  $X_0$  tel que, pour tout  $x$  élément de  $U, f(x) < a$ . Alors, pour  $x$  élément de  $U \cap W$ , on devrait avoir simultanément  $f(x) \geq a$  et  $f(x) < a$ , ce qui est impossible. Ce résultat s'appelle passage à la limite dans une inégalité. On remarquera qu'elle se pratique avec des inégalités larges.

### PROPOSITION

i) Si  $f$  converge vers  $\alpha$ ,  $g$  vers  $\beta$ , lorsque  $x$  tend vers  $X_0$ , alors :

$$\alpha < \beta \Rightarrow \exists W \text{ voisinage de } X_0, \forall x \in W, f(x) < g(x)$$

ii) Si  $f$  converge vers  $\alpha$ ,  $g$  vers  $\beta$ , alors :

$$\exists W \text{ voisinage de } X_0, \forall x \in W, f(x) \leq g(x) \Rightarrow \alpha \leq \beta$$

iii) Si  $f$  et  $h$  convergent vers  $l$ , et si :

$$\exists W \text{ voisinage de } X_0, \forall x \in W, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

alors  $g$  converge vers  $l$ .

Démonstration :

i) et ii) se montrent en appliquant la proposition précédente à la fonction  $f - g$ .

iii)  $\forall \varepsilon > 0, \exists U$  voisinage de  $X_0, \forall x \in U, l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ .

$\exists V$  voisinage de  $X_0, \forall x \in V, l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$ .

Donc,  $\forall x \in U \cap V \cap W, l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$ .

### 5- Lien avec les suites

#### PROPOSITION

Il y a équivalence entre :

i)  $f$  tend vers  $L$  lorsque  $x$  tend vers  $X_0$ .

ii) Pour toute suite  $(a_n)$  tendant vers  $X_0$ ,  $(f(a_n))$  tend vers  $L$ .

Dans le cas des fonctions continues, cette équivalence s'exprime de la façon suivante. Il y a équivalence entre :

i)  $f$  est continue en  $x_0$ .

ii) Pour toute suite  $(a_n)$  tendant vers  $x_0$ ,  $(f(a_n))$  tend vers  $f(x_0)$ .

Démonstration :

i)  $\Rightarrow$  ii) découle du théorème de composition des limites :

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow a_n \rightarrow f(a_n)$$

Inversement, ii)  $\Rightarrow$  i).

Par l'absurde, si  $f$  ne tend pas vers  $L$ , alors :

$$\exists V \text{ voisinage de } L, \forall W \text{ voisinage de } X_0, \exists x \in W, f(x) \notin V (*)$$

Définissons en particulier, pour tout  $n$  entier, un voisinage  $W_n$  dont l'intersection se réduit à  $X_0$  :

$$\text{Si } X_0 \text{ est réel, } W_n = ]X_0 - \frac{1}{n}, X_0 + \frac{1}{n}[$$

$$\text{Si } X_0 = +\infty, W_n = ]n, +\infty[$$

$$\text{Si } X_0 = -\infty, W_n = ]-\infty, -n[$$

$$\text{Si } X_0 = \infty, W_n = ]-\infty, -n[ \cup ]n, +\infty[$$

Ces voisinages possèdent les propriétés suivantes :

$$\forall W \text{ voisinage de } X_0, \exists N, W_N \subset W (**)$$

La suite  $(W_n)$  est décroissante pour l'inclusion (\*\*\*)

Il résulte de (\*) que, pour tout  $n$ , il existe  $a_n$  élément de  $W_n$  tel que  $f(a_n)$  n'appartienne pas à  $V$ . Il résulte de (\*\*) et (\*\*\*) que la suite  $(a_n)$  tend vers  $X_0$ . On obtient une contradiction, puisque  $(f(a_n))$  devrait converger vers  $L$ , mais il existe un voisinage  $V$  de  $L$  auquel n'appartient aucun  $f(a_n)$ .

Cette proposition est souvent utilisée par la négative. S'il existe deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergeant vers  $X_0$  telle que  $(f(a_n))$  et  $(f(b_n))$  tendent vers des limites différentes (ou même n'admettent pas de limite), alors  $f$  ne peut admettre de limite.

Exemple :  $\sin \frac{1}{x}$  n'admet pas de limite en 0, puisque :

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \Rightarrow f(x_n) = 0$$

$$y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2} \Rightarrow f(y_n) = 1$$

## 6- Exemples et contre-exemples

a)  $\sin \frac{1}{x}$  n'admet pas de limite en 0. (cf ci-dessus)

b)  $x \sin \frac{1}{x}$  admet une limite nulle en 0, puisque :

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \text{ et que } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

c)  $f(x) = 1$  si  $x \in \mathbf{Q}$  (fonction de Dirichlet – 1829)  
 $= 0$  sinon

$f$  n'admet de limite en aucun point.  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{CQ}$  étant denses dans  $\mathbf{R}$ , pour tout  $x$ , il existe une suite  $(a_n)$  de rationnels qui converge vers  $x$ , et une suite  $(b_n)$  d'irrationnels qui converge vers  $x$ . On a alors :

$$f(a_n) = 1$$

$$f(b_n) = 0$$

Donc  $f$  ne peut admettre de limite en  $x$ .

## II : Equivalence locale

### 1- Définition

#### DEFINITION

On dit que deux fonctions  $f$  et  $g$  sont équivalentes au voisinage de  $X_0$  (fini ou non) s'il existe  $V$  voisinage de  $X_0$  et  $\varepsilon$  fonction définie de  $V$  dans  $\mathbb{R}$ , et tendant vers 0 quand  $x$  tend vers  $X_0$ , tels que :

$$\forall x \in V, f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$$

On note :  $f \sim g$  au voisinage de  $X_0$ . Deux fonctions équivalentes ont même signe au voisinage de  $X_0$ .

Si la fonction  $g$  ne s'annule pas, c'est donc équivalent à :

$$\lim_{x \rightarrow X_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

On vérifiera aisément que  $f \sim g$  et  $g \sim h \Rightarrow f \sim h$ , permettant d'effectuer des calculs en chaîne.

## 2- Exemples

### PROPOSITION

Soit  $x_0$  réel,  $f$  dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) \neq 0$ . Alors  $f(x_0+x) - f(x_0)$  est équivalent à  $xf'(x_0)$  au voisinage de  $x_0$ .

Cela résulte immédiatement de la définition de la dérivabilité de  $f$  en  $x_0$ .

Au voisinage de 0, on a :

$$\sin x \sim x$$

$$\cos x \sim 1$$

$$\tan x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$e^x \sim 1$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$(1+x)^\alpha \sim 1$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$a_p x^p + \dots + a_n x^n \sim a_p x^p \text{ (avec } p < \dots < n, a_p \neq 0)$$

au voisinage de  $\infty$

$$a_p x^p + \dots + a_n x^n \sim a_n x^n \text{ (avec } p < \dots < n, a_n \neq 0)$$

Une fonction  $f$  équivalente à la fonction identiquement nulle 0 au voisinage de  $x_0$  est de la forme  $0(1 + \varepsilon) = 0$ , autrement dit elle est identiquement nulle dans un intervalle ouvert contenant  $x_0$ . Il en résulte qu'on ne trouve **JAMAIS** 0 comme équivalent d'une fonction, à moins d'être parti de la fonction identiquement nulle (mais dans ce cas pourquoi chercher un équivalent de cette fonction ??)

Les fonctions équivalentes à une constante  $l$  **non nulle** sont les fonctions admettant  $l$  comme limite au voisinage de  $X_0$ .

## 3- Opérations

Il résulte aisément de la définition de l'équivalence que celle-ci est compatible avec le produit des fonctions, le quotient, l'inverse, l'élévation à une puissance quelconque. On a donc :

$$\begin{cases} f_1 \sim g_1 \\ f_2 \sim g_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{f} \sim \frac{1}{g} \text{ (pour des fonctions ne s'annulant pas)} \\ f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2 \\ \frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2} \\ f_1^\alpha \sim g_1^\alpha \end{cases}$$

Par contre, l'exemple suivant **prouve l'incompatibilité avec la somme.**

$$\ln(1+x) \sim x \text{ au voisinage de } 0$$

$$-\sin x \sim -x$$

Mais  $\ln(1+x) - \sin x$  n'est pas équivalent à 0, puisqu'elle n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0.

On pourra également retenir le résultat suivant :

Si  $f \sim g$  au voisinage de  $X_0$  et si  $f$  tend vers  $+\infty$  (on dit que  $f$  et  $g$  sont des infiniment grands), alors  $\ln(f) \sim \ln(g)$

$$\text{En effet, } f = g(1+\varepsilon) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0$$

$$\Rightarrow \ln(f) = \ln(g) + \ln(1+\varepsilon) = \ln(g) \left[ 1 + \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln(g)} \right]$$

et la fonction entre crochets converge vers 1 quand  $x$  tend vers  $X_0$ .

Ainsi,  $\ln(x+1) \sim \ln(x)$  en  $+\infty$ .

Ce résultat devient faux si  $f$  et  $g$  tendent vers 1.

$$e^x \sim \cos x \sim 1 \text{ au voisinage de } 0, \text{ mais}$$

$$\ln(e^x) = x$$

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + \cos x - 1) \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

$$\ln(1) = 0$$

#### 4- Fonction négligeable devant une fonction

##### DEFINITION

i)  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $X_0$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $X_0$  et une fonction  $\varepsilon$  qui tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $X_0$  tels que :

$$\forall x \in V, f(x) = g(x) \varepsilon(x)$$

ii)  $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $X_0$  s'il existe une constante  $C$  et un voisinage  $V$  de  $X_0$  tels que :

$$\forall x \in V, |f(x)| \leq C |g(x)|$$

Si la fonction  $g$  ne s'annule pas, i) est équivalent à :

$$\lim_{x \rightarrow X_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note  $f = o(g)$  au voisinage de  $X_0$  pour  $f$  négligeable devant  $g$ , et  $f = O(g)$  pour  $f$  dominée par  $g$ . Si  $f$  est négligeable devant  $g$ ,  $f$  est évidemment dominée par  $g$ .

##### EXEMPLES :

au voisinage de  $+\infty$  :  $(\ln x)^r = o(x^s)$  et  $x^s = o(e^{tx})$  avec  $r, s, t$  positifs quelconques.

au voisinage de 0 :  $(\ln x)^r = o\left(\frac{1}{x^s}\right)$  avec  $r$  et  $s$  positifs quelconques.

au voisinage de  $-\infty$  :  $e^{sx} = o\left(\frac{1}{|x|^r}\right)$  avec  $r$  et  $s$  positifs quelconques.

Toutes ces formules se déduisent des comparaisons entre logarithmes, puissances et exponentielles, et se basent sur des formules telles que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ , et qu'on trouvera dans le chapitre *Fonctions Usuelles*, dans le fichier FONCTUSU.PDF.

## 5- Somme d'équivalents

Nous sommes maintenant en mesure de donner une règle permettant d'additionner des équivalents. On considère deux fonctions  $f$  et  $g$  et une fonction de référence  $h$  (en général on prendra  $h(x) = x$  ou une puissance de  $x$ ).

### PROPOSITION

Au voisinage de  $X_0$  :

(i) Si  $f \sim h$  et  $g = o(h)$  alors  $f + g \sim h$

(ii) Si  $f \sim \lambda h$  et  $g \sim \mu h$ , et si  $\lambda + \mu \neq 0$ , alors  $f + g \sim (\lambda + \mu)h$

(ii) Si  $f \sim \lambda h$  et  $g \sim \mu h$ , et si  $\lambda + \mu = 0$ , alors  $f + g = o(h)$

### Démonstration :

(i) il existe deux fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  de limite nulle en  $X_0$  telles que :

$$\begin{cases} f(x) = h(x)(1 + \alpha(x)) \\ g(x) = h(x)\beta(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = h(x)(1 + \alpha(x) + \beta(x)) \sim h(x)$$

(ii) il existe deux fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  de limite nulle en  $X_0$  telles que :

$$\begin{cases} f(x) = \lambda h(x)(1 + \alpha(x)) \\ g(x) = \mu h(x)(1 + \beta(x)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = h(x)(\lambda + \lambda\alpha(x) + \mu + \mu\beta(x)) = (\lambda + \mu)h(x)\left(1 + \frac{\lambda\alpha(x) + \mu\beta(x)}{\lambda + \mu}\right) \sim (\lambda + \mu)h(x)$$

(iii) Dans le cas où  $\lambda + \mu = 0$ , le même calcul que précédemment conduit à :

$$f(x) + g(x) = h(x)(\lambda + \lambda\alpha(x) + \mu + \mu\beta(x)) = h(x)(\lambda\alpha(x) + \mu\beta(x)) = o(h)$$

### EXEMPLE :

$$f(x) = 1 + \sin^2 x - \cos x + 3x^3$$

On a, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ \sin^2 x &\sim x^2 = o(1) \\ -\cos x &\sim -1 \\ 3x^3 &= o(1) \end{aligned}$$

On a donc  $1 + \sin^2(x) \sim 1$ ,  $-\cos(x) + 3x^3 \sim -1$  et donc  $f(x) = o(1)$ , i.e.  $\lim_{x \rightarrow 0} f = 0$  ce qui était évident

sans calcul d'équivalents. Par contre, si on écrit :

$$\begin{aligned} 1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2} \\ \sin^2 x &\sim x^2 \end{aligned}$$

$$3x^3 \ll x^2$$

On peut conclure que :

$$f(x) \sim \frac{3x^2}{2}$$

### III : Fonctions monotones

#### 1- Définition

##### DEFINITION

une fonction  $f$  est croissante (respectivement décroissante, strictement croissante, strictement décroissante) sur un intervalle  $I$  d'intérieur non vide si :

$$\forall x \in I, \forall y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

(respectivement  $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$  ;  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$  ;  $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ )

$f$  est monotone sur  $I$  si elle est croissante sur  $I$ , ou décroissante sur  $I$ .

#### 2- Opérations sur les fonctions monotones

On vérifiera aisément que :

□ la somme de fonctions croissantes (respectivement décroissante) est croissante (respectivement décroissante).

□ l'inverse d'une fonction monotone de signe constant est monotone de monotonie opposée.

□ le produit de fonctions croissantes (respectivement décroissante) **positives** est croissante (respectivement décroissante).

□ la composée de deux fonctions de même monotonie est croissante ; la composée de deux fonctions de monotonie opposée est décroissante.

#### 3- Limite d'une fonction monotone

On dispose pour les fonctions d'un résultat analogue à celui des suites :

##### PROPOSITION

Soit  $f$  monotone sur un intervalle  $I$  d'intérieur non vide. Si  $x_0$  est intérieur à  $I$ , alors  $f$  admet une limite à gauche et une limite à droite de  $x_0$ . Si  $X_0$  est une borne (finie ou non) de  $I$ ,  $f$  admet une limite en  $X_0$  si et seulement si  $f$  est bornée au voisinage de  $X_0$ . C'est le cas si  $f$  est définie en  $X_0$ . Sinon,  $f$  tend vers l'infini.

##### Démonstration :

La démonstration est faite dans le cas où  $f$  est croissante.

1) Soit  $x_0$  intérieur à  $I$ . Montrons que  $f$  admet une limite à gauche de  $x_0$ . (La démonstration est analogue à droite). Pour tout  $x < x_0$ , on a  $f(x) \leq f(x_0)$ . Donc  $\{f(x) \mid x < x_0\}$  est majoré. Soit  $M$  sa borne supérieure. On remarque que  $M \leq f(x_0)$ . Montrons que  $M$  est égale à la limite de  $f$  à gauche de  $x_0$ . On a :

$$(i) \forall x < y, f(x) \leq f(y)$$

$$(ii) \forall x < x_0, f(x) \leq M$$

$$(iii) \forall \varepsilon > 0, \exists x < x_0, f(x) > M - \varepsilon .$$

Soit  $\varepsilon > 0$  quelconque. D'après (iii), il existe  $x_1 < x_0$  tel que :

$$M - \varepsilon < f(x_1).$$

Pour tout  $x$  élément de  $]x_1, x_0[$ , on a alors :

$$M - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq M < M + \varepsilon$$

$$(i) \quad (ii)$$

ce qui est la propriété voulue.

On note parfois  $f(x_0^-)$  la limite à gauche de  $x_0$  et  $f(x_0^+)$  la limite à droite.

Il résulte de ce qui précède que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

2) Si la borne  $X_0$  est dans  $I$ , ou si  $f$  est borné au voisinage de  $X_0$ , la démonstration est analogue avec  $M = \text{Sup} \{ f(x) \mid x < X_0 \}$  (pour  $X_0$  borne droite de  $I$ ). Si  $f$  n'est pas bornée, on a :

- (i)  $\forall x < y, f(x) \leq f(y)$
- (ii)  $\forall A, \exists x < X_0, f(x) > A$

Soit  $A$  quelconque. D'après (ii), il existe  $x_1 < X_0$  tel que :

$$f(x_1) > A$$

Pour tout  $x$  élément de  $]x_1, x_0[$ , on a alors :

$$A < f(x_1) \leq f(x)$$

(ii) (i)

ce qui montre que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $X_0$ .

#### 4- Injectivité d'une fonction strictement monotone

Une fonction strictement monotone est injective, i.e. deux réels distincts ont deux images distinctes par  $f$ . En effet, soit  $x \neq y$ . On a par exemple  $x < y$ . Donc  $f(x) < f(y)$  si  $f$  est strictement croissante, et  $f(x) > f(y)$  si  $f$  est strictement décroissante. Dans tous les cas,  $f(x) \neq f(y)$ .

### IV : Continuité

#### 1- Définition

Rappelons que  $f$  est continue en  $x_0$  si la limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  est égale à  $f(x_0)$ . Un cas particulièrement simple est donné par les fonctions lipschitziennes. Si  $f$  est lipschitzienne de rapport  $k$ , alors :

$$\forall x, |f(x) - f(x_0)| \leq k |x - x_0|$$

On a alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  puisque le majorant  $|x - x_0|$  tend vers 0.

#### EXEMPLE :

La fonction  $x \rightarrow |x|$  est continue car lipschitzienne de rapport 1. Cela résulte de l'inégalité triangulaire

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Si la limite se calcule à droite de  $x_0$ , on parle de continuité à droite. De même à gauche.

Exemple :

$$f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \\ = 1 \text{ si } x > 0$$

alors  $f$  est continue à gauche de 0, mais pas à droite.

Si  $f$  n'est pas définie en  $x_0$  et si  $f$  tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ , alors on peut poser  $f(x_0) = l$ , prolongeant ainsi  $f$  par continuité en  $x_0$ . Si  $I$  est un intervalle, on dit que  $f$  est continue sur  $I$  si  $f$  est continue en tout point de  $I$ . Si  $I$  contient l'une de ses bornes, la continuité se fait à droite ou à gauche. On note  $C(I)$  l'espace des fonctions continues sur  $I$ .

Il résulte des théorèmes d'opérations sur les limites que des sommes, produits, inverses, quotients, composées de fonctions continues en un point ou sur un intervalle sont continues en ce point ou sur cet intervalle. Si  $f$  est continue,  $|f|$  aussi comme composée de la fonction  $f$  et de la valeur absolue, toutes deux continues. Si  $f$  et  $g$  sont continues, alors  $\text{Sup}(f, g)$  et  $\text{Inf}(f, g)$  aussi. Il suffit d'écrire que :

$$\text{Sup}(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$$

$$\text{Inf}(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

## 2- Image d'un intervalle

### PROPOSITION

Soit  $I$  un intervalle et  $f$  continue sur  $I$ . Alors  $f(I)$  est un intervalle.

*Démonstration non exigible. Début de partie réservée aux MPSI*

Démonstration :

La propriété à prouver est équivalente aux suivantes :

i)  $\forall y \in f(I), \forall z \in f(I), [y, z] \subset f(I)$

Ceci découle de la caractérisation des intervalles comme parties convexes de  $\mathbb{R}$ , vue dans le chapitres sur les Suites, dans le fichiers SUITES.PDF

ii)  $\forall a \in I, \forall b \in I, [f(a), f(b)] \subset f(I)$

Ceci est obtenu à partir de i) en posant  $y = f(a)$  et  $z = f(b)$ .

iii)  $\forall a \in I, \forall b \in I, f(a) \leq z \leq f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b], z = f(c)$

On a juste traduit dans ii) la phrase :  $[f(a), f(b)] \subset f(I)$

iv)  $\forall a \in I, \forall b \in I, f(a) \leq 0 \leq f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b], f(c) = 0$

Découle immédiatement de iii) avec  $z = 0$ . Inversement, iii) s'en déduit en raisonnant sur  $g = f - z$ .

v)  $\forall a \in I, \forall b \in I, f(a) < 0 < f(b) \Rightarrow \exists c \in ]a, b[, f(c) = 0$

Ce dernier énoncé est connu sous le nom de théorème des valeurs intermédiaires. C'est donc ce dernier qu'il s'agit de démontrer :

*Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.*

### THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ , telle que  $f(a) < 0 < f(b)$ . Alors il existe  $c$  élément de  $]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$

Ce théorème n'a eu de démonstration que fort tard. Il nécessite en effet une conception claire de la continuité, qui n'est apparue qu'au XIX<sup>ème</sup>. En 1817, Bolzano (1781–1848) rejette les justifications usuelles basées sur des considérations liées à la géométrie, au mouvement, à l'espace, dans un domaine qu'il considère purement analytique. Notons que la définition de Cauchy de la continuité a été publiée en 1821.

*Démonstration non exigible*

Démonstration 1 :

Soit  $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}$

A contient  $a$ , donc est non vide, et est majoré par  $b$ . Il admet donc une borne supérieure  $c$ ,  $c < b$ . Montrons que  $c$  convient :

Si  $f(c) < 0$ , alors  $f$  est strictement négative dans un voisinage  $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$  de  $c$ , donc  $c+\varepsilon$  appartient à  $A$ , ce qui contredit le fait que  $c$  soit la borne supérieure de  $A$ .

Si  $f(c) > 0$ , alors  $f$  est strictement positive dans un voisinage  $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$  de  $c$ . Cependant,  $c$  étant la borne supérieure de  $A$ , il devrait exister un élément  $x$  de  $A$  dans  $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ , donc tel que  $f(x) \leq 0$ , ce qui est contradictoire.

Ainsi, on a bien  $f(c) = 0$

### Démonstration 2 :

Cette démonstration utilise le principe de dichotomie. A savoir :

Soit  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ . Rappelons que l'on a supposé  $f(a) < 0 < f(b)$ . On définit par récurrence :

$$m_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } f(m_n) > 0 \text{ alors } a_n &= a_{n-1} \\ & \quad b_n = m_n \\ \text{sinon } a_n &= m_n \\ & \quad b_n = b_{n-1} \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que :

$$\forall n, a_n < b_n$$

$$\forall n, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

$$\forall n, f(a_n) \leq 0 \text{ et } f(b_n) > 0$$

$(a_n)$  et  $(b_n)$  sont donc deux suites adjacentes, convergeant vers un réel  $c$ .  $f$  étant continue, on a :

$$\forall n, f(a_n) \leq 0 \Rightarrow f(c) \leq 0$$

$$\forall n, f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(c) \geq 0$$

Donc  $f(c) = 0$ .

La démonstration précédente donne un algorithme de calcul d'une valeur approchée de  $c$ , une erreur  $e$  étant acceptée. On suppose  $f(a) \neq 0$  et  $f(b) \neq 0$ , de signe contraire :

$$u := a$$

$$v := b$$

tant que  $v - u > e$  et  $f(\frac{u+v}{2}) \neq 0$  faire

$$\text{Si } f(\frac{u+v}{2}) * f(b) > 0 \text{ alors } v := \frac{u+v}{2}$$

$$\text{sinon } u := \frac{u+v}{2} \text{ finsi}$$

finfaire

$$\frac{u+v}{2}$$

Dans la pratique, il se pose des problèmes, négligés ci-dessus, provenant du fait que les valeurs numériques sont toujours approchées et donc qu'un test tel que  $f(\frac{u+v}{2}) \neq 0$  n'a guère de sens. Pour

des valeurs proches de 0, il se peut même que  $f(\frac{u+v}{2})$  soit positif mais que la machine en donne une valeur approchée négative.

REMARQUE :

- Il peut y avoir plusieurs solutions possibles à l'équation  $f(x) = 0$ .
- L'image  $f(I)$  d'un intervalle  $I$  n'est pas nécessairement de même nature que  $I$ .

Exemple :  $f(x) = \sin x$ .  $I = ]-\pi, \pi[$  est ouvert,  $f(I) = [-1, 1]$  est fermé.

On prouvera cependant ci-dessous que l'image d'un segment est un segment.

### 3- Image d'un segment

#### PROPOSITION

Soit  $f$  continue sur un segment  $[a, b]$ . Alors  $f([a, b])$  est un segment  $[c, d]$ .

On sait déjà que  $f([a, b])$  est un intervalle. Il suffit de montrer que  $f$  admet un maximum  $d$  et un minimum  $c$ .

*Démonstration non exigible. Début de partie réservée aux MPSI*

Démonstration 1 :

Soit  $d = \text{Sup} \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ , éventuellement infini. Il existe une suite  $(x_n)$  de  $[a, b]$  tel que  $f(x_n)$  tend vers  $d$ . En appliquant le théorème de Bolzano-Weierstrass, on extrait de  $(x_n)$  une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$  convergeant vers  $l$ . Alors  $(f(x_{\varphi(n)}))$  converge vers  $f(l)$ , mais continue également à converger vers  $d$ , donc  $d = f(l)$ , ce qui signifie que  $d$  est un maximum atteint au point  $l$ . On opère de même pour le minimum.

Démonstration 2 : cette démonstration utilise la propriété de Cousin énoncée en annexe dans le chapitre *Suites*.

Supposons que  $f$  n'admette pas de maximum. Alors, pour tout  $t$ , il existe  $Y$  tel que  $f(t) < f(Y)$  puisque  $f(t)$  n'est pas le maximum de  $f$ . Par continuité, cette inégalité s'étend sous la forme  $f(x) < f(Y)$  pour tout  $x$  d'un intervalle centré en  $t$ , de la forme  $]t - \delta(t), t + \delta(t)[$ . On définit ainsi une fonction  $\delta$  strictement positive. La propriété de Cousin affirme qu'il existe une subdivision de  $[a, b]$   $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ , marquée par des points  $t_i$  éléments de  $[x_{i-1}, x_i]$ , qui est plus fine que  $\delta$ , c'est à dire que  $[x_{i-1}, x_i] \subset ]t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)[$ . Chaque  $f(t_i)$  est inférieur à un certain  $f(Y_i)$ , et par définition de  $\delta$ ,  $f(Y_i)$  majore strictement l'image par  $f$  de  $[x_{i-1}, x_i]$ . Soit maintenant  $k$  l'indice tel que  $f(Y_k)$  soit maximal parmi les  $f(Y_i)$ , de sorte que, pour tout  $i$ ,  $f(Y_i) \leq f(Y_k)$ . Mais  $Y_k$  appartient à un certain intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ . On a alors  $f(Y_k) < f(Y_i)$  puisque  $f(Y_i)$  majore strictement  $f([x_{i-1}, x_i])$ . D'où une contradiction.

*Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.*

### 4- Continuité et monotonie

On rappelle qu'une fonction monotone admet une limite strictement à gauche et à droite en chaque point.

#### THEOREME

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Il y a équivalence entre :

- i)  $f$  est strictement monotone sur  $I$ .
- ii)  $f$  est bijective de  $I$  sur  $f(I)$ .

Dans ce cas,  $f^{-1}$  est continue et strictement monotone.  $I$  et  $f(I)$  sont de même nature.

$f(I)$  désigne l'ensemble des images des éléments de  $I$  par  $f$ .

Démonstration :

i)  $\Rightarrow$  ii)

$f$  est évidemment surjective sur  $f(I)$ , i.e. tout élément de  $f(I)$  est l'image par  $f$  d'un élément de  $I$ . Par ailleurs, une fonction strictement monotone est injective. En effet, soit  $x \neq y$ . On a par exemple  $x < y$ . Donc  $f(x) < f(y)$  si  $f$  est strictement croissante, et  $f(x) > f(y)$  si  $f$  est strictement décroissante. Dans

tous les cas,  $f(x) \neq f(y)$ . Ainsi, tout élément de  $f(I)$  est l'image d'un et d'un seul élément de  $I$ .  $f$  est bijective.

ii)  $\Rightarrow$  i)

Par l'absurde, si  $f$  n'est pas strictement monotone, on a :

$$\exists x < y, f(x) \leq f(y) \text{ (} f \text{ n'est pas strictement décroissante)}$$

$$\exists x' < y', f(x') \geq f(y') \text{ (} f \text{ n'est pas strictement croissante)}.$$

On a en fait des inégalités strictes. Soit :

$$g(t) = f[x + t(x'-x)] - f[y + t(y'-y)].$$

Alors :

$$\square g \text{ est définie, continue sur } [0,1]$$

$$\square g(0) = f(x) - f(y) < 0$$

$$\square g(1) = f(x') - f(y') > 0$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $c$  élément de  $]0,1[$  tel que  $g(c) = 0$

$$\Rightarrow f[x + c(x'-x)] = f[y + c(y'-y)]$$

$$\Rightarrow x + c(x'-x) = y + c(y'-y) \text{ car } f \text{ est injective.}$$

$$\Rightarrow (x-y)(1-c) = c(y'-x')$$

Ceci est impossible car le premier membre est strictement négatif, alors que le second membre est strictement positif.

Montrons que  $f^{-1}$  est strictement monotone. Supposons par exemple  $f$  strictement croissante. Soit  $x$  et  $y$  élément de  $f(I)$  tels que  $x < y$ . Alors :

$$\exists a \in I, \exists b \in I, x = f(a), y = f(b), f(a) < f(b)$$

On a donc  $a < b$  car  $a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

donc  $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ . La démonstration si  $f$  est strictement décroissante est analogue.

Montrons que  $f^{-1}$  est continue. Supposons  $f^{-1}$  croissante. La démonstration en cas de décroissance est analogue. Posons  $g = f^{-1}$  pour alléger les notations. L'image de  $g$  est égale à  $I$ , qui est un intervalle. Par ailleurs,  $g$  étant monotone, cette fonction admet une limite à droite et à gauche en chaque point  $x_0$ . On a :

$$g(x_0^-) \leq g(x_0) \leq g(x_0^+)$$

Il suffit de montrer que les limites sont égales à  $g(x_0)$ . Faisons-le pour la limite à gauche, le cas de la limite à droite étant analogue. Si on avait  $g(x_0^-) < g(x_0)$ , alors il existerait  $t$  tel que :

$$g(x_0^-) < t < g(x_0)$$

Pour  $x < x_0 < y$ , on a  $g(x) \leq g(x_0^-) < t < g(x_0) \leq g(y)$ .

Ce qui prouve que  $t$  n'est l'image par  $g$  d'aucun réel. Ceci est en contradiction avec la convexité de l'image de  $g$  qui est un intervalle.

On raisonne d'une façon analogue pour un point  $x_0$  borne de l'intervalle de définition de  $g$ .

Pour  $f$  croissante, on a :

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

$$f(]a, b]) = ]f(a^+), f(b^-)[$$

$$f([a, b[) = [f(a), f(b^-)[$$

$$f(]a, b]) = ]f(a^+), f(b)]$$

Pour  $f$  décroissante, on a :

$$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$$

$$f(]a, b]) = ]f(b^-), f(a^+)[$$

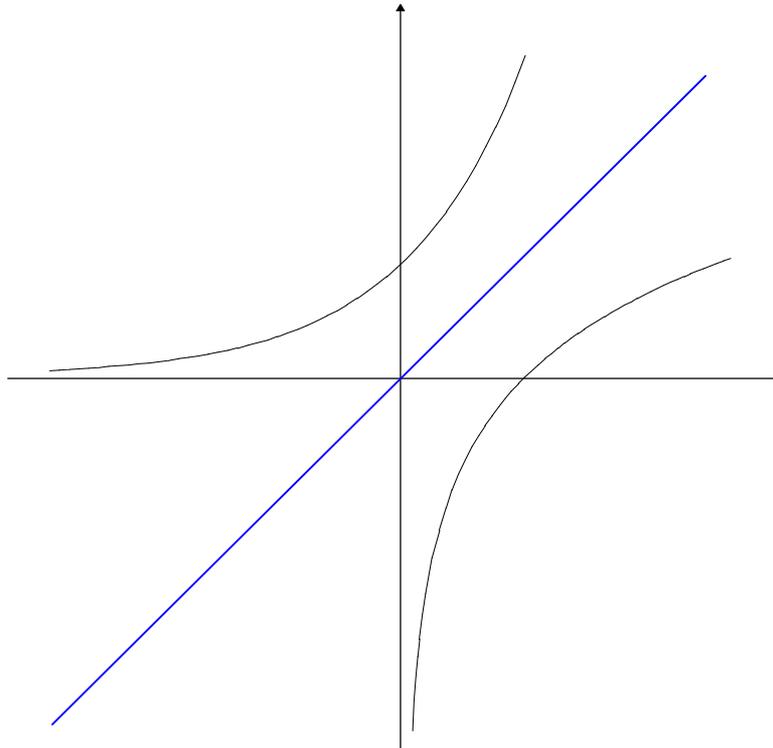
$$f(]a, b]) = [f(b), f(a^+)[$$

$$f([a, b]) = ]f(b^-), f(a)]$$

La représentation graphique de  $f^{-1}$  est le symétrique de celle de  $f$  par rapport à la droite  $y = x$ . En effet :

- (X, Y) appartient au graphe de  $f^{-1}$
- $\Leftrightarrow Y = f^{-1}(X)$
- $\Leftrightarrow X = f(Y)$
- $\Leftrightarrow (Y, X)$  appartient au graphe de  $f$

Ainsi, on passe du graphe de  $f$  au graphe de  $f^{-1}$  en échangeant les rôles des deux coordonnées, ce qui revient à faire une symétrie par rapport à la première bissectrice :



### **Annexe I : fonction continue sur $\mathbb{C}\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$**

On pose :

$$f(x) = \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q} \text{ non nul irréductible, } q > 0$$

$$f(x) = 1 \text{ si } x = 0$$

$$f(x) = 0 \text{ si } x \text{ est irrationnel.}$$

Alors  $f$  est continue en tout point irrationnel et discontinue ailleurs. En effet :

□ Soit  $x_0$  rationnel. Alors  $\mathbb{C}\mathbb{Q}$  étant dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe une suite  $a_n$  d'irrationnels convergeant vers  $x_0$ . Mais  $f(a_n) = 0$  donc la limite de cette suite est différente de  $f(x_0)$  et  $f$  ne peut être continue en  $x_0$ .

□ Soit  $x_0$  irrationnel. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $q$  entier positif tel que  $\frac{1}{q}$  soit inférieur à  $\varepsilon$ .

Considérons les fractions de la forme  $\frac{p}{q!}$  et prenons  $p$  l'entier tel que :

$$\frac{p}{q!} < x_0 < \frac{p+1}{q!}$$

( $p$  est la partie entière de  $x_0 q!$ )

Tout  $x$  élément de l'intervalle  $I = ]\frac{p}{q!}, \frac{p+1}{q!}[$  vérifie :

ou bien  $x$  est irrationnel et  $f(x) = 0$

ou bien  $x$  est rationnel, mais son dénominateur est supérieur à  $q$ . En effet, si  $x = \frac{a}{b}$  avec

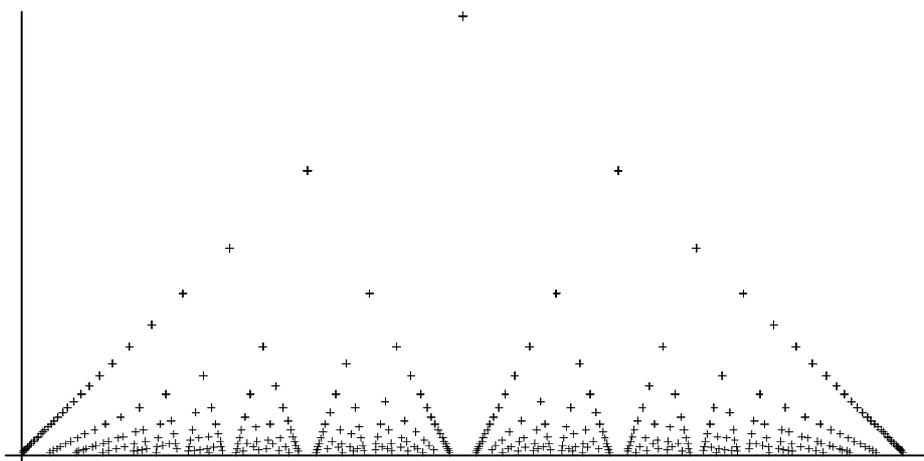
$\frac{p}{q!} < \frac{a}{b} < \frac{p+1}{q!}$ , on a, en multipliant par  $q!$  :  $p < \frac{aq!}{b} < p+1$  donc  $\frac{aq!}{b}$  ne peut être entier donc  $b$  est

supérieur à  $q$  sinon la fraction  $\frac{aq!}{b}$  pourrait se simplifier par  $b$ . Donc :

$$0 < f(x) < \frac{1}{q} < \varepsilon.$$

On a trouvé un voisinage de  $x_0$  tel que, pour tout  $x$  de ce voisinage,  $f(x)$  appartienne à  $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon [$ . La continuité est donc prouvée.

Voici le graphe de  $f$  :



## Annexe II : calcul de pH

La méthode usuelle de calcul du pH d'une solution en chimie repose sur les étapes successives suivantes :

### i) Etablissement des équations :

Elles utilisent :

La constante de dissociation de l'eau :  $K_e = [H^+][OH^-]$

La conservation des atomes. Ex :  $C = [AH] + [A^-]$  dans le cas de la dissolution d'un acide faible AH ( $AH \leftrightarrow A^- + H^+$ ), où  $C$  est la concentration initiale de l'acide AH. Ou bien  $C = [B] + [BH^+]$  dans le cas de l'introduction d'une base B ( $B + H^+ \leftrightarrow BH^+$ ), où  $C$  est la concentration initiale de la base B. On écrit une telle équation pour chaque acide introduit et chaque base. Du fait que le couple AH/A<sup>-</sup> est un couple acide/base au même titre que le couple BH<sup>+</sup>/B, on se limitera ci-dessous à l'écriture :  $Acide \leftrightarrow Base + H^+$ , avec  $C = [Acide] + [Base]$

La définition des constantes de dissolution, à savoir la constante d'acidité  $K = \frac{[Base][H^+]}{[Acide]}$ . On écrit une telle équation pour chaque couple acide/base.

Le bilan protonique.  $[H^+] + \sum [Acide] = [OH^-] + \sum [Base]$ , les sommes étant prises sur toutes les concentrations d'acides provenant de la capture d'un proton par une base, et sur toutes les concentrations de bases provenant d'un acide ayant cédé un proton. Cette égalité peut également être formulée en la faisant reposer sur l'électroneutralité du milieu. Dans les cas encore plus complexes, il y a également possibilité de précipitation de sels issus d'un acide et d'une base. Nous n'en tiendrons pas compte ici.

### ii) Formulation d'hypothèses visant à simplifier les équations :

En général, le système est trop complexe à résoudre. En effet, si on a introduit  $p$  couples acido-basiques, on dispose de  $2 + 2p$  équations non linéaires, les quantités inconnues étant également au nombre de  $2 + 2p$ , à savoir les concentrations  $[H^+]$  et  $[OH^-]$ , et les concentrations  $[Acide]$  et  $[Base]$  pour chaque couple. On est amené à faire des hypothèses visant à simplifier les équations afin de se ramener à la résolution d'une équation de degré 1, ou 2 au plus.

**EXEMPLE :** dans le cas de la dissolution d'un acide faible AH, le milieu sera acide donc le bilan protonique se réduira à  $[H^+] = [A^-] = h$  en négligeant  $[OH^-]$ .

iii) Résolution du système compte tenu des simplifications

Dans le cas de l'exemple de dissolution d'un acide faible où l'on a supposé que  $h = [A^-]$ , la constante de dissolution donne alors, en tenant compte de la concentration  $C$  du corps introduit :

$$K_A = \frac{h^2}{[AH]} = \frac{h^2}{C - h}$$

$$\Rightarrow h^2 + hK_A - CK_A = 0$$

En dehors du cas où  $K_A$  est infini, et qui donne  $h = C$  (avec  $C$  grand devant  $10^{-14}$ ) (acide fort, dissociation totale), on approxime souvent  $h$  par :

$$h \approx \sqrt{CK_A} \Rightarrow \text{pH} = \frac{1}{2} \text{p}K_A - \frac{1}{2} \log(C) \text{ (acide faible)}$$

Cela revient à négliger le terme  $hK_A$  dans l'équation du second degré devant  $h^2$  ou  $CK_A$ . Cela signifie donc qu'on s'attend à trouver  $h$  notablement plus grand que  $K_A$  ou plus petit que  $C$ , ce que donne la solution  $\sqrt{CK_A}$  si  $C$  est notablement plus grand que  $K_A$  (par exemple  $K_A = 10^{-4}$ ,  $C = 10^{-2}$  et  $h = 10^{-3}$ ). La solution exacte est en fait  $h = 0,95 \times 10^{-3}$ .

La constante de dissociation de l'eau permet ensuite de déterminer  $[OH^-] = \frac{K_e}{h}$ . Puis, la concentration

$[AH]$  est donnée par :  $[AH] = C - h$

iv) Vérification des hypothèses faites en ii) :

Toujours dans le cas de l'acide faible,  $h = \sqrt{CK_A}$  est en général bien supérieur à  $10^{-7}$  donc le milieu est bien acide, ce qui est cohérent avec l'hypothèse faite. On peut également vérifier les équations, en particulier :

$$\frac{[\text{Base}][H^+]}{[\text{Acide}]} = \frac{h^2}{C - h} = \frac{CK_A}{C - \sqrt{CK_A}} \approx K_A \text{ si } K_A \text{ est petit devant } C.$$

Du point de vue strictement logique, cette démarche semble poser problème. En effet, en ii), on fait des hypothèses (Hyp). Ces hypothèses permettent de transformer les équations (Eq) posées en i) en un système d'équations plus simples (Eq2). De sorte que  $\{(Hyp), (Eq)\} \Leftrightarrow \{(Hyp), (Eq2)\}$ . Puis, en iii), on résout le système d'équations (Eq2) et on en déduit en conclusion (Concl) les valeurs des concentrations, de sorte que  $(Eq2) \Leftrightarrow (Concl)$ . On vérifie ensuite la cohérence des hypothèses faites avec les conclusions, c'est à dire qu'on vérifie que  $(Concl) \Rightarrow (Hyp)$ . Supposons que l'on ait vérifié toutes les implications sans erreur de calcul. Que peut-on logiquement en déduire ? On a simplement montré les équivalences:

$$(Concl) \Leftrightarrow \{(Hyp), (Eq2)\} \Leftrightarrow \{(Hyp), (Eq)\}$$

ce qui signifie que, (Eq) étant supposées valides, hypothèse et conclusion sont simultanément vraies (tout va bien), ou simultanément fausses (aïe, aïe, aïe). Une hypothèse fautive peut avoir conduit à une conclusion fautive, mais dont les valeurs sont cohérentes avec la fautive hypothèse faite et avec les équations. Aucune contradiction n'a pu être trouvée, et cependant, jamais l'hypothèse pas plus que la conclusion n'ont été validées.

La validité de la méthode repose en fait sur une propriété supplémentaire, tacitement utilisée, celle de l'unicité de la solution cherchée pour le système d'équation initial (Eq). S'il y a une seule solution à (Eq), cela signifie que tout système de valeurs des concentrations vérifiant (Eq) est la solution. Comme on sait que  $(Eq2) \Leftrightarrow (Concl)$ , pour remonter jusqu'à (Eq), il suffit bien de vérifier que  $(Concl) \Rightarrow (Hyp)$  pour pouvoir en conclure que (Eq) est effectivement vérifié et donc que (Concl) est bien la solution cherchée.

Quant à la raison de l'unicité de la solution, elle repose sur une équation du type  $f(h) = 0$  avec  $f$  strictement croissante. En effet :

□ Le bilan protonique donne :

$$[H^+] + \sum [\text{Acide}] = [OH^-] + \sum [\text{Base}]$$

$$\Rightarrow h + \sum [\text{Acide}] - [OH^-] - \sum [\text{Base}] = 0 \text{ en posant } h = [H^+]$$

Posons  $f(h) = h + \sum [\text{Acide}] - [OH^-] - \sum [\text{Base}]$

□ On peut écrire :

$$f(h) = h + \sum [\text{Acide}] - \frac{K_e}{h} - \sum [\text{Base}]$$

en introduisant la constante de dissociation de l'eau. On note que  $h$  et  $-\frac{K_e}{h}$  sont des fonctions strictement croissantes de  $h$ .

□ Pour chaque couple acido-basique, on a :

$$C = [\text{Acide}] + [\text{Base}]$$

$$K = \frac{[\text{Base}][H^+]}{[\text{Acide}]} = \frac{(C - [\text{Acide}])h}{[\text{Acide}]} = \frac{[\text{Base}][H^+]}{C - [\text{Base}]}$$

$$\Rightarrow [\text{Acide}] = \frac{Ch}{K + h} \text{ fonction strictement croissante de } h$$

$$[\text{Base}] = \frac{CK}{K + h} \text{ fonction strictement décroissante de } h, \text{ et donc } -[\text{Base}] \text{ est strictement}$$

croissante.

Conclusion :  $f(h)$  est la somme de fonctions strictement croissantes de  $h$ . Elle est elle-même strictement croissante. On vérifiera que, lorsque  $h$  décrit  $]0, +\infty[$ ,  $f(h)$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ . L'équation  $f(h) = 0$  admet donc une solution unique  $h$ .

(Je remercie mes collègues J.M. Toledano et B. Rooy pour leurs conseils avisés sur la question).