Cours de Probabilités 2008/2009

Raby GUERBAZ

23 novembre 2008

Plan du cours

Réunion et intersection

Définition

- La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou B.

Réunion et intersection

Définition

- La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou B.
- L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et B.

Réunion et intersection

Définition

- La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou B.
- L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et B.

Exemple : Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, alors

Réunion et intersection

Définition

- La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou B.
- L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et B.

Exemple : Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, alors

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Réunion et intersection

Définition

- La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou B.
- L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et B.

Exemple : Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, alors

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
2. et $A \cap B = \{3, 4\}$.

Notion de cardinal

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini correspond simplement au nombre d'éléments qu'il contient.

Notion de cardinal

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini correspond simplement au nombre d'éléments qu'il contient.

Exemples :

1. Si $A = \{a, b, c, d\}$, alors $Card(A) = ?$

Notion de cardinal

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini correspond simplement au nombre d'éléments qu'il contient.

Exemples :

1. Si $A = \{a, b, c, d\}$, alors $Card(A) = 4$.

Notion de cardinal

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini correspond simplement au nombre d'éléments qu'il contient.

Exemples :

1. Si $A = \{a, b, c, d\}$, alors $Card(A) = 4$.
2. Si B est l'ensemble des lettres de l'alphabet français, alors $Card(B) = ?$

Notion de cardinal

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini correspond simplement au nombre d'éléments qu'il contient.

Exemples :

1. Si $A = \{a, b, c, d\}$, alors $Card(A) = 4$.
2. Si B est l'ensemble des lettres de l'alphabet français, alors $Card(B) = 26$.

Notion de cardinal

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini correspond simplement au nombre d'éléments qu'il contient.

Exemples :

1. Si $A = \{a, b, c, d\}$, alors $Card(A) = 4$.
2. Si B est l'ensemble des lettres de l'alphabet français, alors $Card(B) = 26$.
3. Le cardinal de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est

Notion de cardinal

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini correspond simplement au nombre d'éléments qu'il contient.

Exemples :

1. Si $A = \{a, b, c, d\}$, alors $Card(A) = 4$.
2. Si B est l'ensemble des lettres de l'alphabet français, alors $Card(B) = 26$.
3. Le cardinal de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est infinit

Régle de la somme

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) -$$

Régle de la somme

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

Régle de la somme

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

Illustration Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, alors

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $A \cap B = \{3, 4\}$.

En conséquent
$Card(A \cup B) = 8$

Régle de la somme

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

Illustration Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, alors

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $A \cap B = \{3, 4\}$.

En conséquent
$Card(A \cup B) = 8 \neq Card(A) + Card(B) = 4 + 6 = 10$

Régle de la somme

Exemple : Un imprimeur imprime des calendriers.

Régle de la somme

Exemple : Un imprimeur imprime des calendriers.
Pour éviter de recommencer tous les ans, il veux imprimer tous les mois de février possibles

Régle de la somme

Exemple : Un imprimeur imprime des calendriers.
Pour éviter de recommencer tous les ans, il veux imprimer tous les mois de février possibles
Combien doit-il imprimer de pages ? ?

Régle de la somme

Exemple : Un imprimeur imprime des calendriers.
Pour éviter de recommencer tous les ans, il veux imprimer tous les mois de février possibles
Combien doit-il imprimer de pages ? ?
Le mois de février comporte 28 ou 29 jours

Régle de la somme

Exemple : Un imprimeur imprime des calendriers.
Pour éviter de recommencer tous les ans, il veux imprimer tous les mois de février possibles
Combien doit-il imprimer de pages ? ?
Le mois de février comporte 28 ou 29 jours
Chacun peut commencer par l'un des 7 jours de la semaine

Régle de la somme

Exemple : Un imprimeur imprime des calendriers.
Pour éviter de recommencer tous les ans, il veux imprimer tous les mois de février possibles
Combien doit-il imprimer de pages ? ?
Le mois de février comporte 28 ou 29 jours
Chacun peut commencer par l'un des 7 jours de la semaine
Soit 7 pages pour 28 jours

Régle de la somme

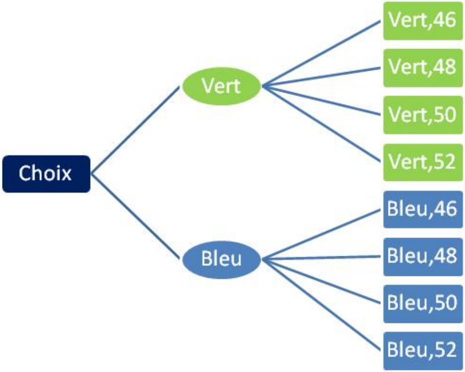
Exemple : Un imprimeur imprime des calendriers.
Pour éviter de recommencer tous les ans, il veux imprimer tous les mois de février possibles
Combien doit-il imprimer de pages ? ?
Le mois de février comporte 28 ou 29 jours
Chacun peut commencer par l'un des 7 jours de la semaine
Soit 7 pages pour 28 jours
et 7 pages pour 29

La règle du Produit : Principe fondamentale du dénombrement

Une société de vente par correspondance propose un modèle de chemisier dans 4 tailles et en 2 couleurs.
Combien de codes distincts doit-elle prévoir pour que les clientes puissent remplir correctement leurs bons de commande ?
Soit X l'ensemble des tailles : $\{46, 48, 50, 52\}$ et Y l'ensemble des couleurs : { bleu,vert}.
Chaque cliente doit choisir une taille x et un couleur y. Son choix consiste donc en un couple ordonné (x, y) dont le premier élément x est dans X, le second y dans Y. L'ensemble de ces choix est

Régle du produit

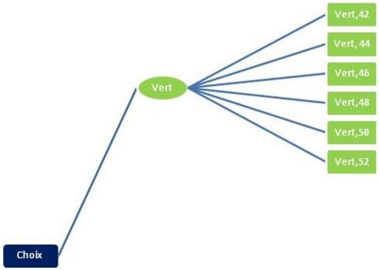
$$\{(bleu, 46); (bleu, 48); (bleu, 50); (bleu, 52); (vert, 46); (vert, 48); (vert, 50); (vert, 52)\}$$



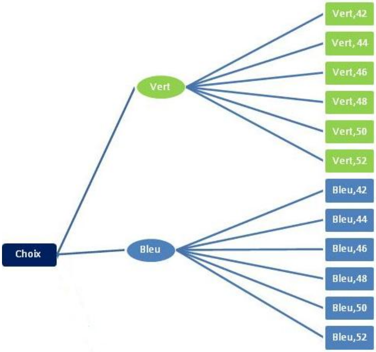
La règle du Produit : Principe fondamentale du dénombrement

Si la société propose un autre modèle cette fois dans 6 tailles et en 3 couleurs.
Soit X l'ensemble des tailles : $\{42, 44, 46, 48, 50, 52\}$ et Y l'ensemble des couleurs : $\{$ Orange,bleu,vert$\}$. Combien de codes distincts doit-elle prévoir ? ?

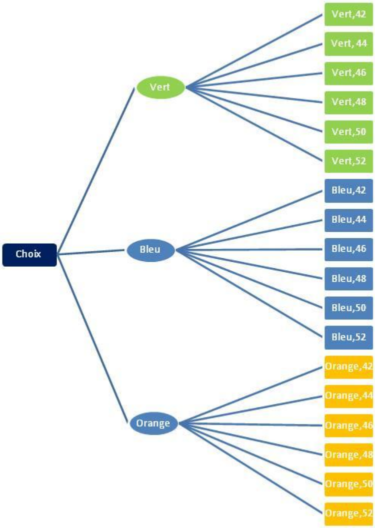
Régle du produit : Méthode d'arborescence.



Régle du produit : Méthode d'arborescence.



Méthode d'arborescence.



Régle du produit

Régle du produit

Soit une suite de r experiences telles que :

1. la première expérience a n_1 résultats possibles,

Régle du produit

Régle du produit

Soit une suite de r experiences telles que :

1. la première expérience a n_1 résultats possibles,
2. A chaque résultat de la première expérience il y a n_2 résultats possibles à la deuxième expérience,

Régle du produit

Régle du produit

Soit une suite de r experiences telles que :

1. la première expérience a n_1 résultats possibles,
2. A chaque résultat de la première expérience il y a n_2 résultats possibles à la deuxième expérience,
3. A chaque résultat possible de la première expérience et de la deuxième expérience il y a n_3 résultats possibles à la troisième expérience et si,

Régle du produit

Régle du produit

Soit une suite de r experiences telles que :

1. la première expérience a n_1 résultats possibles,
2. A chaque résultat de la première expérience il y a n_2 résultats possibles à la deuxième expérience,
3. A chaque résultat possible de la première expérience et de la deuxième expérience il y a n_3 résultats possibles à la troisième expérience et si,
4. ... Ainsi de suite jusqu'à r-ieme expérience.

Régle du produit

Régle du produit

Soit une suite de r experiences telles que :

1. la première expérience a n_1 résultats possibles,
2. A chaque résultat de la première expérience il y a n_2 résultats possibles à la deuxième expérience,
3. A chaque résultat possible de la première expérience et de la deuxième expérience il y a n_3 résultats possibles à la troisième expérience et si,
4. ... Ainsi de suite jusqu'à r-ieme expérience.

Alors le nombre total de résultats possibles à la fin des r expériences est $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r$.

n-listes ou n-Uplets

Définition

Soit X un ensemble. On appelle n-liste d'éléments de X, notée $(x_1, x_2, ..., x_n)$, toute liste de n éléments de X donnés dans cet ordre.

Exemple : Si $X = \mathbb{N}$, alors (1 , 3 , 5 , 2)

n-listes ou n-Uplets

Définition

Soit X un ensemble. On appelle n-liste d'éléments de X, notée $(x_1, x_2, ..., x_n)$, toute liste de n éléments de X donnés dans cet ordre.

Exemple : Si $X = \mathbb{N}$, alors (1 , 3 , 5 , 2)est une quatre liste d'éléments de N.

n-listes ou n-Uplets

Définition

Soit X un ensemble. On appelle n-liste d'éléments de X, notée $(x_1, x_2, ..., x_n)$, toute liste de n éléments de X donnés dans cet ordre.

Exemple : Si $X = \mathbb{N}$, alors (1 , 3 , 5 , 2)est une quatre liste d'éléments de N.
Elle est différente de la quatre-liste (5 , 1 , 3 , 2) qui donne les mêmes éléments de X,

n-listes ou n-Uplets

Définition

Soit X un ensemble. On appelle n-liste d'éléments de X, notée $(x_1, x_2, ..., x_n)$, toute liste de n éléments de X donnés dans cet ordre.

Exemple : Si $X = \mathbb{N}$, alors (1 , 3 , 5 , 2)est une quatre liste d'éléments de N.
Elle est différente de la quatre-liste (5 , 1 , 3 , 2) qui donne les mêmes éléments de X,mais dans un autre ordre.

n-listes ou n-Uplets

Exercice : Soit $X = \{a, b\}$.

1. Donner toutes les 4-listes d'éléments de X.

n-listes ou n-Uplets

Exercice : Soit $X = \{a, b\}$.

1. Donner toutes les 4-listes d'éléments de X.
   Exemple : (a,a,a,a), (a,a,b,a), (a,b,a,b)......

n-listes ou n-Uplets

Exercice : Soit $X = \{a, b\}$.

1. Donner toutes les 4-listes d'éléments de X.
   Exemple : (a,a,a,a), (a,a,b,a), (a,b,a,b)......
2. Calculer le nombre des 4-listes.

n-listes ou n-Uplets

Exercice : Soit $X = \{a, b\}$.

1. Donner toutes les 4-listes d'éléments de X.
   Exemple : (a,a,a,a), (a,a,b,a), (a,b,a,b)......
2. Calculer le nombre des 4-listes.
3. Déduire en utilisant le principe fondamentale du dénombrement une régle générale pour calculer le nombre des n-listes d'un ensemble à n éléments.

n-listes ou n-Uplets

Exercice : Soit $X = \{a, b\}$.

1. Donner toutes les 4-listes d'éléments de X.
   Exemple : (a,a,a,a), (a,a,b,a), (a,b,a,b)......
2. Calculer le nombre des 4-listes.
3. Déduire en utilisant le principe fondamentale du dénombrement une régle générale pour calculer le nombre des n-listes d'un ensemble à n éléments.

n-listes ou n-Uplets

Exercice : Soit $X = \{a, b\}$.

1. Donner toutes les 4-listes d'éléments de X.
   Exemple : (a,a,a,a), (a,a,b,a), (a,b,a,b)......
2. Calculer le nombre des 4-listes.
3. Déduire en utilisant le principe fondamentale du dénombrement une régle générale pour calculer le nombre des n-listes d'un ensemble à n éléments.

Solution : Former une 4-liste, à partir des éléments de $X = \{a, b\}$, revient à choisir entre a et b pour le premier élément de la quatre liste.

n-listes ou n-Uplets

Exercice : Soit $X = \{a, b\}$.

1. Donner toutes les 4-listes d'éléments de X.
   Exemple : (a,a,a,a), (a,a,b,a), (a,b,a,b)......
2. Calculer le nombre des 4-listes.
3. Déduire en utilisant le principe fondamentale du dénombrement une régle générale pour calculer le nombre des n-listes d'un ensemble à n éléments.

Solution : Former une 4-liste, à partir des éléments de $X = \{a, b\}$, revient à choisir entre a et b pour le premier élément de la quatre liste. Donc on a deux possibilités pour le choix du premier élément $(\bigcirc, ., ., .)$ de la 4-liste.

n-listes ou n-Uplets

Exercice : Soit $X = \{a, b\}$.

1. Donner toutes les 4-listes d'éléments de X.
   Exemple : (a,a,a,a), (a,a,b,a), (a,b,a,b)......
2. Calculer le nombre des 4-listes.
3. Déduire en utilisant le principe fondamentale du dénombrement une régle générale pour calculer le nombre des n-listes d'un ensemble à n éléments.

Solution : Former une 4-liste, à partir des éléments de $X = \{a, b\}$, revient à choisir entre a et b pour le premier élément de la quatre liste. Donc on a deux possibilités pour le choix du premier élément $(\bigcirc, ., ., .)$ de la 4-liste. Idem pour le deuxième élément, ainsi de suite.

n-listes ou n-Uplets

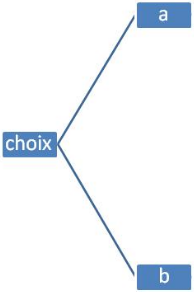
Exercice : Soit $X = \{a, b\}$.

1. Donner toutes les 4-listes d'éléments de X.
   Exemple : (a,a,a,a), (a,a,b,a), (a,b,a,b)......
2. Calculer le nombre des 4-listes.
3. Déduire en utilisant le principe fondamentale du dénombrement une régle générale pour calculer le nombre des n-listes d'un ensemble à n éléments.

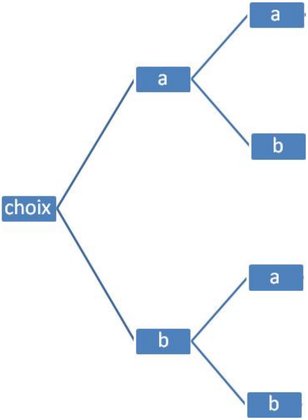
Solution : Former une 4-liste, à partir des éléments de $X = \{a, b\}$, revient à choisir entre a et b pour le premier élément de la quatre liste. Donc on a deux possibilités pour le choix du premier élément $(\bigcirc, ., ., .)$ de la 4-liste. Idem pour le deuxième élément, ainsi de suite.

Alors Selon la régle du produit : Il exist au total
$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ quatre-listes.

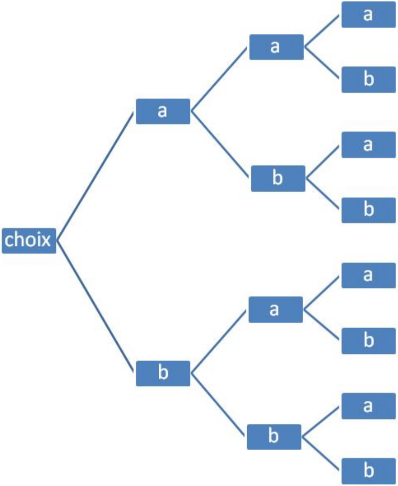
n-listes ou n-Uplets



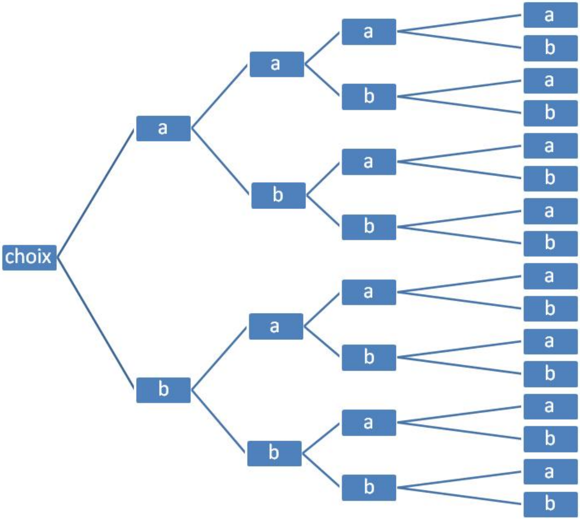
n-listes ou n-Uplets



n-listes ou n-Uplets



n-listes ou n-Uplets



n-listes

Proposition

Si X est un ensemble non-vide, à m éléments, (Card(X)=m), alors l'ensemble des n-listes d'éléments de X, contient m^n éléments.

Application : Placer n objets dans m boîtes, chaque boîte pouvant contenir les n objets

Le nombre de manières de placer n objets dans m boîtes, chaque boîte pouvant contenir les n objets, est m^n.

En effet,
Il y a m choix possibles pour placer le 1er objet.

Application : Placer n objets dans m boîtes, chaque boîte pouvant contenir les n objets

Le nombre de manières de placer n objets dans m boîtes, chaque boîte pouvant contenir les n objets, est m^n.

En effet,
Il y a m choix possibles pour placer le 1er objet.
Il y a m choix possibles pour placer le 2e objet.

Application : Placer n objets dans m boîtes, chaque boîte pouvant contenir les n objets

Le nombre de manières de placer n objets dans m boîtes, chaque boîte pouvant contenir les n objets, est m^n.

En effet,
Il y a m choix possibles pour placer le 1er objet.
Il y a m choix possibles pour placer le 2e objet.
Il y a encore m choix possibles pour placer le ne objet.

Application : Placer n objets dans m boîtes, chaque boîte pouvant contenir les n objets

Le nombre de manières de placer n objets dans m boîtes, chaque boîte pouvant contenir les n objets, est m^n.

En effet,
Il y a m choix possibles pour placer le 1er objet.
Il y a m choix possibles pour placer le 2e objet.
Il y a encore m choix possibles pour placer le ne objet.

D'après la règle du produit, il y a donc m^n façons de placer les n objets dans les m boîtes.

Placer n objets dans m boîtes, chaque boîte pouvant contenir les n objets

Exercice : le distributeur de prospectus

Placer n objets dans m boîtes, chaque boîte pouvant contenir les n objets

Exercice : le distributeur de prospectus

Un distributeur de prospectus publicitaires arrive dans le hall d'un immeuble où il trouve 5 boîtes aux lettres. Il a encore 3 prospectus différents à distribuer.

Placer n objets dans m boîtes, chaque boîte pouvant contenir les n objets

Exercice : le distributeur de prospectus

Un distributeur de prospectus publicitaires arrive dans le hall d'un immeuble où il trouve 5 boîtes aux lettres. Il a encore 3 prospectus différents à distribuer.

De combien de manières peut-il répartir ces trois prospectus dans les 5 boîtes ?

Placer n objets dans m boîtes, chaque boîte pouvant contenir les n objets

Exercice : le distributeur de prospectus
Un distributeur de prospectus publicitaires arrive dans le hall d'un immeuble où il trouve 5 boîtes aux lettres. Il a encore 3 prospectus différents à distribuer.
De combien de manières peut-il répartir ces trois prospectus dans les 5 boîtes ?
Solution : $5^3 = 125$.

Echantillon ordonné avec remise

Exemple : les taxis

Echantillon ordonné avec remise

Exemple : les taxis
Dans une ville il y a cent taxis. Un homme d'affaires arrivant dans cette ville est amené à emprunter quatre fois des taxis.
Il note à chaque fois le numéro d'immatriculation du taxi utilisé. Il peut emprunter plusieurs fois le même véhicule.

Echantillon ordonné avec remise

Exemple : les taxis
Dans une ville il y a cent taxis. Un homme d'affaires arrivant dans cette ville est amené à emprunter quatre fois des taxis.
Il note à chaque fois le numéro d'immatriculation du taxi utilisé. Il peut emprunter plusieurs fois le même véhicule.
De combien de manières peut-on réaliser cette expérience ?

Solution : Chaque taxi emprunté est un élément de l'ensemble X des taxis, et chaque issue de cette expérience est une quatre-liste (x_1, x_2, x_3, x_4) d'éléments de X.

Echantillon ordonné avec remise

Exemple : les taxis

Dans une ville il y a cent taxis. Un homme d'affaires arrivant dans cette ville est amené à emprunter quatre fois des taxis.
Il note à chaque fois le numéro d'immatriculation du taxi utilisé. Il peut emprunter plusieurs fois le même véhicule.
De combien de manières peut-on réaliser cette expérience ?

Solution : Chaque taxi emprunté est un élément de l'ensemble X des taxis, et chaque issue de cette expérience est une quatre-liste (x_1, x_2, x_3, x_4) d'éléments de X.
Il y a donc : $100^4 = 100000000$ issues à cette expérience.

Tirage ordonné avec remise

On considère une urne contenant m boules numérotées de 1 à m.

Tirage ordonné avec remise

On considère une urne contenant m boules numérotées de 1 à m. On prélève une boule dans l'urne et on note son numéro. On remet la boule dans l'urne.

Tirage ordonné avec remise

On considère une urne contenant m boules numérotées de 1 à m.
On prélève une boule dans l'urne et on note son numéro. On remet la boule dans l'urne.
On recommence l'opération n fois.

Tirage ordonné avec remise

On considère une urne contenant m boules numérotées de 1 à m.
On prélève une boule dans l'urne et on note son numéro. On remet la boule dans l'urne.
On recommence l'opération n fois.
Si X est l'ensemble des boules, on peut considérer que l'issue d'une telle expérience est une n-liste $(x_1, x_2, ..., x_n)$ d'éléments de X , où x_i désigne le numéro de la iéme boule prélevée.

Tirage ordonné avec remise

On considère une urne contenant m boules numérotées de 1 à m.
On prélève une boule dans l'urne et on note son numéro. On remet la boule dans l'urne.
On recommence l'opération n fois.
Si X est l'ensemble des boules, on peut considérer que l'issue d'une telle expérience est une n-liste $(x_1, x_2, ..., x_n)$ d'éléments de X , où x_i désigne le numéro de la iéme boule prélevée.
Cette expérience a donc un nombre d'issues égal à m^n.

Arrangements $\asymp$ Les n-listes sans répétition

Exemple introductif 10 chevaux sont engagés dans une course comptant pour le tiercé.

Arrangements $\asymp$ Les n-listes sans répétition

Exemple introductif 10 chevaux sont engagés dans une course comptant pour le tiercé.
De combien de manières peut-on désigner les 3 chevaux qui seront classés premier, deuxième ou troisième ?

Arrangements $\asymp$ Les n-listes sans répétition

Exemple introductif 10 chevaux sont engagés dans une course comptant pour le tiercé.
De combien de manières peut-on désigner les 3 chevaux qui seront classés premier, deuxième ou troisième ?

Solution : Les 3 chevaux qui sont classés respectivement 1er, 2e et 3e constituent une 3-liste de l'ensemble X des chevaux engagés. Il y a 10 chevaux susceptibles d'arriver premier. Connaissant le cheval classé premier il ne reste plus que 9 chevaux susceptibles d'être second. Connaissant les chevaux arrivés en première et deuxième positions il ne reste plus que 8 chevaux susceptibles d'être troisième. Il y a donc : $10 \times 9 \times 8 = 720$ tiercés possibles dans l'ordre.

Arrangements $\asymp$ Les n-listes sans répétition

Définition

Soit X un ensemble à m éléments. Un arrangement de n éléments de X est une $n-$liste sans répétition d'éléments de X.

Si X a m éléments, pour constituer un arrangement de n éléments de X, il faut d'abord choisir le premier élément. Il y a m façons de le faire.

Arrangements $\asymp$ Les n-listes sans répétition

Définition

Soit X un ensemble à m éléments. Un arrangement de n éléments de X est une $n-$liste sans répétition d'éléments de X.

Si X a m éléments, pour constituer un arrangement de n éléments de X, il faut d'abord choisir le premier élément. Il y a m façons de le faire.
Il faut ensuite choisir le 2e élément ; il n'y a plus que m - 1 façons de le faire, puisque le 2e élément doit être distinct du premier.

Arrangements $\asymp$ Les n-listes sans répétition

Définition

Soit X un ensemble à m éléments. Un arrangement de n éléments de X est une $n-$liste sans répétition d'éléments de X.

Si X a m éléments, pour constituer un arrangement de n éléments de X, il faut d'abord choisir le premier élément. Il y a m façons de le faire.
Il faut ensuite choisir le 2e élément ; il n'y a plus que m - 1 façons de le faire, puisque le 2e élément doit être distinct du premier.
Pour choisir le ne élément, il n'y a $m-(n-1)=m-n+1$ possibilités, puisque n - 1e éléments ont déjà été utilisés.

Arrangements $\asymp$ Les n-listes sans répétition

Définition

Soit X un ensemble à m éléments. Un arrangement de n éléments de X est une $n-$liste sans répétition d'éléments de X.

Si X a m éléments, pour constituer un arrangement de n éléments de X, il faut d'abord choisir le premier élément. Il y a m façons de le faire.
Il faut ensuite choisir le 2e élément ; il n'y a plus que m - 1 façons de le faire, puisque le 2e élément doit être distinct du premier.
Pour choisir le ne élément, il n'y a $m-(n-1)=m-n+1$ possibilités, puisque n - 1e éléments ont déjà été utilisés.
Il y donc

$$A_m^n = m(m-1)...(m-n+1)$$

n-listes sans répétition d'éléments de X, lorsque X a m éléments.

Arrangements $\asymp$ Les n-listes sans répétition

Exemple : les mots de quatre lettres

Chacune des 4-listes sans répétition obtenues à partir des lettres $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ peut être considérée comme un mot de quatre lettres, toutes distinctes.

Arrangements $\asymp$ Les n-listes sans répétition

Exemple : les mots de quatre lettres
Chacune des 4-listes sans répétition obtenues à partir des lettres $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ peut être considérée comme un mot de quatre lettres, toutes distinctes.
Le nombre de mots à quatres lettres X toutes distinctes est $A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4$.
Exercice : Combien de mots de 7 lettres, sans répétition de lettres, peut-on constituer en utilisant l'alphabet latin ?

Placer n objets dans m boîtes : un seul objet par boîte

On dispose de n objets à placer dans m boîtes, chaque boîte ne pouvant contenir qu'un seul objet.

Placer n objets dans m boîtes : un seul objet par boîte

On dispose de n objets à placer dans m boîtes, chaque boîte ne pouvant contenir qu'un seul objet.
De combien de manières peut-on répartir ces n objets dans les m boîtes ?

Placer n objets dans m boîtes : un seul objet par boîte

On dispose de n objets à placer dans m boîtes, chaque boîte ne pouvant contenir qu'un seul objet.
De combien de manières peut-on répartir ces n objets dans les m boîtes ?
Il y a m possibilités pour le 1^{ier} objet.

Placer n objets dans m boîtes : un seul objet par boîte

On dispose de n objets à placer dans m boîtes, chaque boîte ne pouvant contenir qu'un seul objet.
De combien de manières peut-on répartir ces n objets dans les m boîtes ?
Il y a m possibilités pour le 1^{ier} objet.
Il y a m-1 possibilités pour le 2^{ieme} objet

Placer n objets dans m boîtes : un seul objet par boîte

On dispose de n objets à placer dans m boîtes, chaque boîte ne pouvant contenir qu'un seul objet.
De combien de manières peut-on répartir ces n objets dans les m boîtes ?
Il y a m possibilités pour le 1^{ier} objet.
Il y a m-1 possibilités pour le 2^{ieme} objet
Il y a m - (n - 1) possibilités pour le n^{ieme} objet.

Placer n objets dans m boîtes : un seul objet par boîte

On dispose de n objets à placer dans m boîtes, chaque boîte ne pouvant contenir qu'un seul objet.
De combien de manières peut-on répartir ces n objets dans les m boîtes ?
Il y a m possibilités pour le 1^{ier} objet.
Il y a m-1 possibilités pour le 2^{ieme} objet
Il y a m - (n - 1) possibilités pour le n^{ieme} objet.

Il y a donc A_m^n manières de répartir n objets dans m boîtes si chaque boîte ne peut recevoir qu'un seul objet.

Arrangements

Exemples : le distributeur de prospectus (Honnête)
Un distributeur de prospectus, arrivé à la fin de sa tournée, n'a plus que trois prospectus différents à placer dans sept boîtes aux lettres du dernier immeuble qu'il visite.

Arrangements

Exemples : le distributeur de prospectus (Honnête)
Un distributeur de prospectus, arrivé à la fin de sa tournée, n'a plus que trois prospectus différents à placer dans sept boîtes aux lettres du dernier immeuble qu'il visite.
Il décide de ne mettre qu'un prospectus par boîte. De combien de manières peut-il répartir ces 3 derniers prospectus ?

Solution : Il a le choix de 7 boîtes pour le premier, de 6 pour le second, de 5 pour le dérnier ; soit au total :

$$A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

Arrangements

Echantillon ordonné sans remise

Soit X un ensemble à m éléments numérotés de 1 à m. On prélève un premier élément de X. On note son numéro.

Arrangements

Echantillon ordonné sans remise

Soit X un ensemble à m éléments numérotés de 1 à m. On prélève un premier élément de X. On note son numéro.
On prélève un deuxième élément de X. On note son numéro.

Arrangements

Echantillon ordonné sans remise

Soit X un ensemble à m éléments numérotés de 1 à m. On prélève un premier élément de X. On note son numéro.
On prélève un deuxième élément de X. On note son numéro.
On répète l'opération n fois. On dit qu'on a prélevé un échantillon ordonné sans remise de n éléments de X.

Arrangements

Echantillon ordonné sans remise

Soit X un ensemble à m éléments numérotés de 1 à m. On prélève un premier élément de X. On note son numéro.
On prélève un deuxième élément de X. On note son numéro.
On répète l'opération n fois. On dit qu'on a prélevé un échantillon ordonné sans remise de n éléments de X.
Il y a A_m^n tels échantillons ordonnés sans remise de n éléments, pris parmi les m éléments de X.

Arrangements

Exemples : Sur les 20 témoins d'un hold-up un inspecteur de police décide dans un premier temps d'en interroger cinq.

Arrangements

Exemples : Sur les 20 témoins d'un hold-up un inspecteur de police décide dans un premier temps d'en interroger cinq.
De combien de manières peut-il constituer la liste des convocations ?

Arrangements

Exemples : Sur les 20 témoins d'un hold-up un inspecteur de police décide dans un premier temps d'en interroger cinq.
De combien de manières peut-il constituer la liste des convocations ? Réponse : 1860480

Arrangements

Exemples : Sur les 20 témoins d'un hold-up un inspecteur de police décide dans un premier temps d'en interroger cinq.
De combien de manières peut-il constituer la liste des convocations ? Réponse : 1860480

Solution : Il a 20 possibilités pour désigner la première personne à convoquer, 19 pour la 2ième, 18 pour la 3ième, 17 pour la 4ième, 16 pour la 5ième ; soit au total :

$$A_{20}^{5} = 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 = 1860480$$

manières de convoquer 5 témoins pris parmi 20, en les recevant individuellement.

Les Permutations sans répétitions

Combien de mots de quatre lettres peut-on réaliser avec les lettres A B C D si les répétitions ne sont pas permises ?

Les Permutations sans répétitions

Combien de mots de quatre lettres peut-on réaliser avec les lettres A B C D si les répétitions ne sont pas permises ?

Solution : C'est le nombre d'arrangements de 4 lettres parmi 4 ; $A_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$.

Définition

Une permutation de n éléments est un arrangement de n éléments pris parmi n en tenant compte de l'ordre. Alors, le nombre de permutations est $P_n = A_n^n = n!$

En effet,

$$\begin{aligned} A_n^n &= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times ... \times (n-n+1) \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times ... \times 1. \end{aligned}$$

Les Permutations avec répétitions

Définition

Le nombre de permutations différentes de n objets non tous distincts tels que

Les Permutations avec répétitions

Définition

Le nombre de permutations différentes de n objets non tous distincts tels que
n_1 objets forment un 1er groupe d'objets identiques,

Les Permutations avec répétitions

Définition

Le nombre de permutations différentes de n objets non tous distincts tels que
n_1 objets forment un 1er groupe d'objets identiques,
n_2 objets forment un 2e groupe d'objets identiques,

Les Permutations avec répétitions

Définition

Le nombre de permutations différentes de n objets non tous distincts tels que
n_1 objets forment un 1er groupe d'objets identiques,
n_2 objets forment un 2e groupe d'objets identiques,
n_3 objets forment un 3e groupe d'objets identiques,

Les Permutations avec répétitions

Définition

Le nombre de permutations différentes de n objets non tous distincts tels que
n_1 objets forment un 1er groupe d'objets identiques,
n_2 objets forment un 2e groupe d'objets identiques,
n_3 objets forment un 3e groupe d'objets identiques,
n_k objets forment un ke groupe d'objets identiques est donné par

$$P_{n,n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3 \ldots \times n_k!}$$

Les Permutations avec répétitions

Exemple 1 : Combien peut-on former de mots différents avec toutes les lettres du mot PROPORTION

Les Permutations avec répétitions

Exemple 1 : Combien peut-on former de mots différents avec toutes les lettres du mot PROPORTION

Solution : C'est le nombre de permutations des 10 lettres, divisé par le nombre de permutations des lettres identiques (O, P, R). Le nombre est $\frac{10!}{3!2!2!} = 151200$.

Les Permutations avec répétitions

Exemple 1 : Combien peut-on former de mots différents avec toutes les lettres du mot PROPORTION

Solution : C'est le nombre de permutations des 10 lettres, divisé par le nombre de permutations des lettres identiques (O, P, R). Le nombre est $\frac{10!}{3!2!2!} = 151200$.

Exemple 2 : On lance un sou 10 fois. Combien existe-t-il de façons différentes d'obtenir 6 piles ?

Solution : Les résultats possibles sont : PPPPPPFFFF, PPPFFFFPPP,....

Les Permutations avec répétitions

Exemple 1 : Combien peut-on former de mots différents avec toutes les lettres du mot PROPORTION

Solution : C'est le nombre de permutations des 10 lettres, divisé par le nombre de permutations des lettres identiques (O, P, R). Le nombre est $\frac{10!}{3!2!2!} = 151200$.

Exemple 2 : On lance un sou 10 fois. Combien existe-t-il de façons différentes d'obtenir 6 piles ?

Solution : Les résultats possibles sont : PPPPPPFFFF, PPPFFFFPPP,....

donc le nombre de façons differentes d'obtenir 6 Piles est $\frac{10!}{6!4!} = 210$.

Les Combinaisons

10 chevaux A, B, C, D, E, F, G, H, I, J prennent le départ d'une course.
De combien de manières peut-on désigner les 3 chevaux qui prendront les trois premières places ?
Supposons que les 3 chevaux ayant obtenus les trois premières places soient les chevaux A, B, C.

Les Combinaisons

10 chevaux A, B, C, D, E, F, G, H, I, J prennent le départ d'une course.
De combien de manières peut-on désigner les 3 chevaux qui prendront les trois premières places ?
Supposons que les 3 chevaux ayant obtenus les trois premières places soient les chevaux A, B, C.
De combien de manières peut-on classer ces 3 chevaux ?

Les Combinaisons

10 chevaux A, B, C, D, E, F, G, H, I, J prennent le départ d'une course.
De combien de manières peut-on désigner les 3 chevaux qui prendront les trois premières places ?
Supposons que les 3 chevaux ayant obtenus les trois premières places soient les chevaux A, B, C.
De combien de manières peut-on classer ces 3 chevaux ?
Ainsi à chaque façon de désigner les 3 chevaux qui prennent les 3 premières places correspondent 6 tiercés dans l'ordre différents.

Les Combinaisons

10 chevaux A, B, C, D, E, F, G, H, I, J prennent le départ d'une course.
De combien de manières peut-on désigner les 3 chevaux qui prendront les trois premières places ?
Supposons que les 3 chevaux ayant obtenus les trois premières places soient les chevaux A, B, C.
De combien de manières peut-on classer ces 3 chevaux ?
Ainsi à chaque façon de désigner les 3 chevaux qui prennent les 3 premières places correspondent 6 tiercés dans l'ordre différents.
Combien y-a-t-il de tiercés dans l'ordre ?

Les Combinaisons

10 chevaux A, B, C, D, E, F, G, H, I, J prennent le départ d'une course.
De combien de manières peut-on désigner les 3 chevaux qui prendront les trois premières places ?
Supposons que les 3 chevaux ayant obtenus les trois premières places soient les chevaux A, B, C.
De combien de manières peut-on classer ces 3 chevaux ?
Ainsi à chaque façon de désigner les 3 chevaux qui prennent les 3 premières places correspondent 6 tiercés dans l'ordre différents.
Combien y-a-t-il de tiercés dans l'ordre ?
Combien y-a-t-il de tiercés dans le désordre ?

Les Combinaisons

Nombre de parties à n éléments dans un ensemble à m éléments

Les Combinaisons

Nombre de parties à n éléments dans un ensemble à m éléments
Nous venons de dénombrer le nombre de parties à 3 éléments de l'ensemble des 10 chevaux.

Les Combinaisons

Nombre de parties à n éléments dans un ensemble à m éléments
Nous venons de dénombrer le nombre de parties à 3 éléments de l'ensemble des 10 chevaux.
Etant donné un ensemble X à m éléments.

Les Combinaisons

Nombre de parties à n éléments dans un ensemble à m éléments
Nous venons de dénombrer le nombre de parties à 3 éléments de l'ensemble des 10 chevaux.
Etant donné un ensemble X à m éléments.
Combien X possède-t-il de parties à n éléments ?

Les Combinaisons

Nombre de parties à n éléments dans un ensemble à m éléments
Nous venons de dénombrer le nombre de parties à 3 éléments de l'ensemble des 10 chevaux.
Etant donné un ensemble X à m éléments.
Combien X possède-t-il de parties à n éléments ?
Si on considère n éléments de X il y a n ! manières de les permuter.

Les Combinaisons

Nombre de parties à n éléments dans un ensemble à m éléments
Nous venons de dénombrer le nombre de parties à 3 éléments de l'ensemble des 10 chevaux.
Etant donné un ensemble X à m éléments.
Combien X possède-t-il de parties à n éléments ?
Si on considère n éléments de X il y a n ! manières de les permuter.
Ainsi à chaque façon de prélever les n éléments dans X correspond n ! manières de prélever ces éléments dans un ordre déterminé.

Les Combinaisons

Nombre de parties à n éléments dans un ensemble à m éléments
Nous venons de dénombrer le nombre de parties à 3 éléments de l'ensemble des 10 chevaux.
Etant donné un ensemble X à m éléments.
Combien X possède-t-il de parties à n éléments ?
Si on considère n éléments de X il y a n ! manières de les permuter.
Ainsi à chaque façon de prélever les n éléments dans X correspond n ! manières de prélever ces éléments dans un ordre déterminé.
Il y a $A_m^n = m(m-1)...(m-n+1)$ manières de prélever n éléments de X dans un ordre donné.

Les Combinaisons

Nombre de parties à n éléments dans un ensemble à m éléments
Nous venons de dénombrer le nombre de parties à 3 éléments de l'ensemble des 10 chevaux.
Etant donné un ensemble X à m éléments.
Combien X possède-t-il de parties à n éléments ?
Si on considère n éléments de X il y a n ! manières de les permuter.
Ainsi à chaque façon de prélever les n éléments dans X correspond n ! manières de prélever ces éléments dans un ordre déterminé.
Il y a $A_m^n = m(m-1)...(m-n+1)$ manières de prélever n éléments de X dans un ordre donné.
Par application du principe des bergers il y a donc :

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{n!}$$

Les Combinaisons

Nombre de parties à n éléments dans un ensemble à m éléments
Nous venons de dénombrer le nombre de parties à 3 éléments de l'ensemble des 10 chevaux.
Etant donné un ensemble X à m éléments.
Combien X possède-t-il de parties à n éléments ?
Si on considère n éléments de X il y a n ! manières de les permuter.
Ainsi à chaque façon de prélever les n éléments dans X correspond n ! manières de prélever ces éléments dans un ordre déterminé.
Il y a $A_m^n = m(m-1)...(m-n+1)$ manières de prélever n éléments de X dans un ordre donné.
Par application du principe des bergers il y a donc :

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{n!}$$

façons de prélever n éléments parmi les m éléments de X.

Les Combinaisons

Nombre de parties à n éléments dans un ensemble à m éléments
Nous venons de dénombrer le nombre de parties à 3 éléments de l'ensemble des 10 chevaux.
Etant donné un ensemble X à m éléments.
Combien X possède-t-il de parties à n éléments ?
Si on considère n éléments de X il y a n ! manières de les permuter.
Ainsi à chaque façon de prélever les n éléments dans X correspond n ! manières de prélever ces éléments dans un ordre déterminé.
Il y a $A_m^n = m(m-1)...(m-n+1)$ manières de prélever n éléments de X dans un ordre donné.
Par application du principe des bergers il y a donc :

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{n!}$$

façons de prélever n éléments parmi les m éléments de X.
Les nombres C_m^n s'appellent les coefficients binômiaux.

Les Combinaisons

Combien de comités différents de 5 personnes peut-on former dans une association de 20 personnes ?

À un examen on demande de répondre à seulement 6 questions sur 10. Combien y a-t-il de choix différents possibles ?

Echantillon non ordonné sans remise

Exemple Un enquêteur chargé de collecter des données pour une enquête de marché, doit interviewer 3 familles parmi les 20 qui habitent un immeuble.

Echantillon non ordonné sans remise

Exemple Un enquêteur chargé de collecter des données pour une enquête de marché, doit interviewer 3 familles parmi les 20 qui habitent un immeuble.
De combien de manières peut-il choisir ces familles ?

Echantillon non ordonné sans remise

Exemple Un enquêteur chargé de collecter des données pour une enquête de marché, doit interviewer 3 familles parmi les 20 qui habitent un immeuble.
De combien de manières peut-il choisir ces familles ?
On dit qu'il a prélevé un échantillon non ordonné de 3 familles sans remise dans l'ensemble des 20 familles ; l'ordre dans lequel les familles ont été choisies n'intervient pas.

Echantillon non ordonné sans remise

Exemple Un enquêteur chargé de collecter des données pour une enquête de marché, doit interviewer 3 familles parmi les 20 qui habitent un immeuble.
De combien de manières peut-il choisir ces familles ?
On dit qu'il a prélevé un échantillon non ordonné de 3 familles sans remise dans l'ensemble des 20 familles ; l'ordre dans lequel les familles ont été choisies n'intervient pas.
Exemple Prélever simultanément n boules de couleurs différentes dans une urne contenant m, c'est prélever un échantillon non ordonné sans remise de n boules parmi m.

Echantillon non ordonné sans remise

Exemple Un enquêteur chargé de collecter des données pour une enquête de marché, doit interviewer 3 familles parmi les 20 qui habitent un immeuble.
De combien de manières peut-il choisir ces familles ?
On dit qu'il a prélevé un échantillon non ordonné de 3 familles sans remise dans l'ensemble des 20 familles ; l'ordre dans lequel les familles ont été choisies n'intervient pas.
Exemple Prélever simultanément n boules de couleurs différentes dans une urne contenant m, c'est prélever un échantillon non ordonné sans remise de n boules parmi m.
Il y a $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ façons de le faire.

Formule du Binôme : Triangle de Pascal

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1							1	
1								1
1								

Notion d'expérience aléatoire

On lance un dé cubique à 6 faces.

Notion d'expérience aléatoire

On lance un dé cubique à 6 faces.
Peut on prévoir le numéro qui apparaîtra sur la face supérieure du dé après l'immobilisation ?

Notion d'expérience aléatoire

On lance un dé cubique à 6 faces.
Peut on prévoir le numéro qui apparaîtra sur la face supérieure du dé après l'immobilisation ? Non

Notion d'expérience aléatoire

On lance un dé cubique à 6 faces.
Peut on prévoir le numéro qui apparaîtra sur la face supérieure du dé après l'immobilisation ? Non

On dit que l'expérience qui consiste à lancer un dé est une EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Notion d'expérience aléatoire

On lance un dé cubique à 6 faces.
Peut on prévoir le numéro qui apparaîtra sur la face supérieure du dé après l'immobilisation ? Non

On dit que l'expérience qui consiste à lancer un dé est une EXPÉRIENCE ALÉATOIRE *car on ne peut pas prévoir son résultat.*

Notion d'expérience aléatoire

On lance un dé cubique à 6 faces.
Peut on prévoir le numéro qui apparaîtra sur la face supérieure du dé après l'immobilisation ? Non

On dit que l'expérience qui consiste à lancer un dé est une EXPÉRIENCE ALÉATOIRE *car on ne peut pas prévoir son résultat.*

Exemples d'experiences aléatoires

- Dix cheveaux s'engagent dans une course, est ce qu'on peut connaitre le numéro du cheval gagnant ?

Notion d'expérience aléatoire

On lance un dé cubique à 6 faces.
Peut on prévoir le numéro qui apparaîtra sur la face supérieure du dé après l'immobilisation ? Non

On dit que l'expérience qui consiste à lancer un dé est une EXPÉRIENCE ALÉATOIRE *car on ne peut pas prévoir son résultat.*

Exemples d'experiences aléatoires

- Dix cheveaux s'engagent dans une course, est ce qu'on peut connaitre le numéro du cheval gagnant ?
- Tirer une carte parmi les 52 cartes d'un jeux.

Notion d'expérience aléatoire

On lance un dé cubique à 6 faces.
Peut on prévoir le numéro qui apparaîtra sur la face supérieure du dé après l'immobilisation ? Non

On dit que l'expérience qui consiste à lancer un dé est une EXPÉRIENCE ALÉATOIRE *car on ne peut pas prévoir son résultat.*

Exemples d'experiences aléatoires

- Dix cheveaux s'engagent dans une course, est ce qu'on peut connaitre le numéro du cheval gagnant ?
- Tirer une carte parmi les 52 cartes d'un jeux.
- Lancer une pièce de monnaie.

Univers des possibles (ensemble fondamental)

L'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé a six résultats ou issues possibles : l'un des nombres : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

L'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de ces issues s'appelle l'univers des possibles de cette expérience aléatoire.

Exemples :

1. L'univers des possibles associé à l'expérience aléatoire "lancer une piéce de monnaie" est

Univers des possibles (ensemble fondamental)

L'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé a six résultats ou issues possibles : l'un des nombres : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

L'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de ces issues s'appelle l'univers des possibles de cette expérience aléatoire.

Exemples :

1. L'univers des possibles associé à l'expérience aléatoire "lancer une piéce de monnaie" est $\Omega = \{Pile, Face\}$.

Univers des possibles (ensemble fondamental)

L'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé a six résultats ou issues possibles : l'un des nombres : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

L'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de ces issues s'appelle l'univers des possibles de cette expérience aléatoire.

Exemples :

1. L'univers des possibles associé à l'expérience aléatoire "lancer une piéce de monnaie" est $\Omega = \{Pile, Face\}$.
2. L'univers des possibles associé à l'expérience aléatoire "lancer une piéce de monnaie trois fois de suite" est :

Univers des possibles (ensemble fondamental)

L'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé a six résultats ou issues possibles : l'un des nombres : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

L'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de ces issues s'appelle l'univers des possibles de cette expérience aléatoire.

Exemples :

1. L'univers des possibles associé à l'expérience aléatoire "lancer une piéce de monnaie" est $\Omega = \{Pile, Face\}$.
2. L'univers des possibles associé à l'expérience aléatoire "lancer une piéce de monnaie trois fois de suite" est : $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$.

Univers des possibles (ensemble fondamental)

L'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé a six résultats ou issues possibles : l'un des nombres : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

L'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de ces issues s'appelle l'univers des possibles de cette expérience aléatoire.

Exemples :

1. L'univers des possibles associé à l'expérience aléatoire "lancer une piéce de monnaie" est $\Omega = \{Pile, Face\}$.
2. L'univers des possibles associé à l'expérience aléatoire "lancer une piéce de monnaie trois fois de suite" est : $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$.

Définition : L'ensemble des résultats possibles d'une épreuve est appelé "univers des possibles" ou ensemble fondamental de cette expérience aléatoire. On le note par Ω.

Evénements liés à une expérience aléatoire

Définition :

Un événement est une éventualité susceptible d'être réalisée lors de l'épreuve, sa réalisation dépendant du hasard.

Evénements liés à une expérience aléatoire

Définition :

Un événement est une éventualité susceptible d'être réalisée lors de l'épreuve, sa réalisation dépendant du hasard.

L'issue "x est pair" est un événement lié à l'expérience aléatoire "lancer un dé".

Il peut être réalisé ou non suivant la valeur que prendra x à l'issue d'une épreuve de l'expérience aléatoire.

"x est pair" est réalisé si $x = 2$ ou $x = 4$ ou $x = 6$.

"x est pair" n'est pas réalisé si $x = 1$ ou $x = 3$ ou $x = 5$.

Evénements liés à une expérience aléatoire

A tout événement correspond un sous-ensemble de l'univers Ω, qui est la liste de tous les résultats possibles qui peuvent le realiser.

Evénements liés à une expérience aléatoire

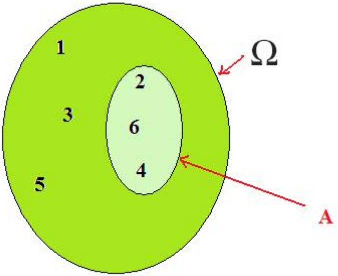
A tout événement correspond un sous-ensemble de l'univers Ω, qui est la liste de tous les résultats possibles qui peuvent le realiser.

Exemples : On considère l'expérience aléatoire "lancer un dé"

Evénements liés à une expérience aléatoire

A tout événement correspond un sous-ensemble de l'univers Ω, qui est la liste de tous les résultats possibles qui peuvent le realiser.

Exemples : On considère l'expérience aléatoire "lancer un dé"
On associe à l'événement "x est pair" la partie $A = \{2, 4, 6\}$.

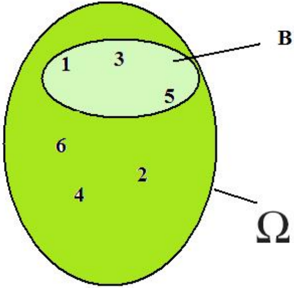


Evénements liés à une expérience aléatoire

l'événement "x est impair" correspond à la partie

Evénements liés à une expérience aléatoire

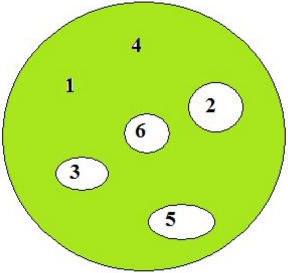
l'événement "x est impair" correspond à la partie $B = \{1, 3, 5\}$.



Evénements élémentaires

L'événement :" Le numéro sorti est le numéro 5", correspond à une partie à un élément $C = \{5\}$.
On dit que c'est un événement élémentaire.

Les événements élémentaires sont les événements liés à des parties à un élément de Ω



Evénement certain, événement impossible

l'évènement impossible : il n'est jamais réalisé quel que soit le résultat obtenu.

Exemple : On lance un dé, et on considère l'événement le numéro sorti est un 7. Peut-il être réaliser ?.
On dit que cet événement est impossible. On lui associe la partie vide, notée $\emptyset$, de Ω.

l'évènement impossible : il est toujours réalisé quel que soit le résultat obtenu.

Exemple : Considèrons l'événement, le numèro sorti est plus grand où égale à 1.
Cet événement se réalisera toujours après chaque lancé du dé.
On dit que cet événement est l'événement certain. On lui associe la partie Ω.

Evénements incompatibles

Considérons les événements :

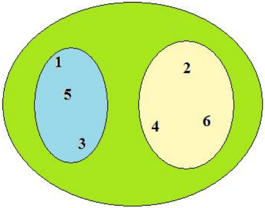
A : le numéro est pair $A = \{2, 4, 6\}$

B : le numéro est impair $B = \{1, 3, 4\}$

Evénements incompatibles

Considérons les événements :
A : le numéro est pair $A = \{2, 4, 6\}$
B : le numéro est impair $B = \{1, 3, 4\}$

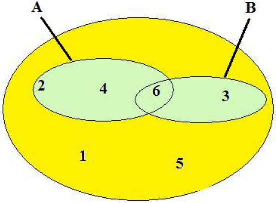
Peuvent-ils se réaliser simultanément ?
On dit que ces événements sont incompatibles.
Les parties $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{1, 3, 5\}$ de Ω qui leur sont associées ont une intersection vide. $A \cap B = \emptyset$



Composition d'événements

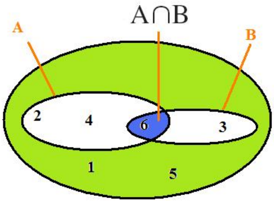
On peut composer les événements associés à une expérience aléatoire en utilisant les connexions logiques : et, ou, non.

Exemple : Considérons les événements :
A : le numéro est un multiple de 2. Alors $A = \{2, 4, 6\}$
B : le numéro est un multiple de 3. Alors $B = \{3, 6\}$.
L'événement A ou B est l'événement "le numéro est un multiple de 2 ou un multiple de 3".
A l'événement A ou B on associe la partie $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$



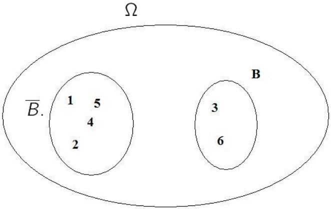
Composition d'événements

L'événement A et B est l'événement "le numéro est un multiple de 2 et un multiple de 3".
A l'événement A et B on associe la partie $A \cap B = \{6\}$



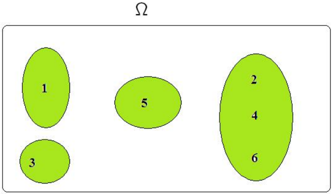
Evénements contraire

A l'événement $B = \{3, 6\}$ "le numéro est un multiple de 3", on peut associer l'événement contraire, non B, le numéro n'est pas un multiple de 3.
Notation : Cet evénement est noté $\overline{B}$. Dans l'exemple $\overline{B} = \{1, 2, 5, 4\}$.
$\overline{B}$ est le complémentaire de B dansΩ.



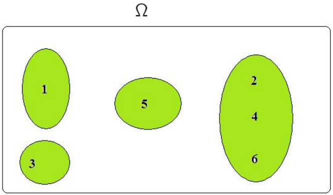
Système complet d'événements

On lance un dé, et on considère les événements suivants :
$A = \{1\}$ le numéro affiché est 1.
$B = \{5\}$ le numéro affiché est 5.
$C = \{3\}$ le numéro affiché est 1.
$D = \{2, 4, 5\}$ le numéro affiché est pair.



On remarque que $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $A \cap D = \emptyset$, ... On dit que les événements A, B, C, D sont deux à deux incompatibles.

Système complet d'événements

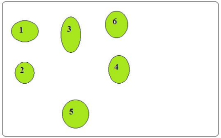


En plus, $A \cup B \cup C \cup D = \Omega$, est l'évément sur.

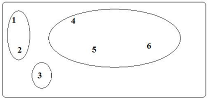
On dira que les événements A, B, C et D constituent un système complet d'événements.

Système complet d'événements

Les événements $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, constituent un système complet d'événements de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

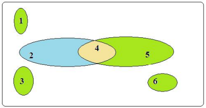


Un autre exemple de système complet d'événements :



Système complet d'événements

Ceci n'est pas un système complet d'événements car les événements $\{2, 4\}$ et $\{4, 5\}$ ont une intersection non vide.



Définition d'une probabilité

On propose d'associer à chaque événement A, lié à l'expérience E, un nombre compris entre 0 et 1, que l'on appellera la probabilité de l'événement A et qui donne une mesure de la possibilité de réalisation de l'événement A.
La probabilité d'un événement dépend de l'expérience aléatoire.
Elle est le reflet de ce que l'on sait du phénomène étudié.

Définition d'une probabilité

On appelle probabilité, toute application :

$$P \ : \ \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1],$$

possédant les propriétés suivantes :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Si A et B sont incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ainsi à tout événement A , $A \subset \Omega$ associe le nombre $P(A)$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Evénement impossible : Comme l'événement impossible $\emptyset$, est incompatible avec l'événement certain

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega, \quad \text{et} \quad \Omega \cap \emptyset = \emptyset$$

L'événement impossible a une probabilité nulle.

Définition d'une probabilité

Une formule simple d'évaluation de la probabilité d'un évènement, dans le cas "d'équiprobabilité" des événements élémentaires, est donnée par :

$$\text{Probabilité} = \frac{\text{nombre de résultats de l'expérience pouvant réaliser l'évènement}}{\text{nombre de tous les résultats possibles de l'expérience}}.$$

Exemple 1 : **la pièce de monnaie équilibrée**

Soit l'expérience qui consiste à lancer une pièce de monnaie. Elle a deux issues F ou P (face ou pile).

Les événements liés à cette expérience sont les parties de $\Omega = \{F, P\}$.

$$\emptyset,\ \{F\},\ \{P\},\ \Omega.$$

Alors

$$P(\emptyset) = 0;\ P(\{F\}) = 1/2;\ \ P(\{P\}) = 1/2;\ P(\Omega) = 1.$$

Probabilité des événements contraires

Soit A un événement, et $\overline{A}$ son événement contraire.
Nous avons : $\overline{A}$ et A sont incompatibles et $A \cup \overline{A} = \Omega$. ALors

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$$

Donc

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Disjonction de deux événements

Si A et B sont deux événements quelconques

$$A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$$

A et $B \cap \overline{A}$ sont incompatibles, donc :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A).$$

De plus

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$$

$B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ sont incompatibles, donc

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$

Donc s'écrit

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A comme réunion des événements élémentaires qui le composent

Soit (W , P (W), P) un espace probabilisé, A1 , A2 , ... , An n événements de P (W) , deux à deux incompatibles.
On démontre par récurrence sur n, que :
P (A1 È A2 È ... È An) = P (A1) + P (A2) + ... + P (An)
En particulier, si A est un événement constitué des issues w1 , w2 , ... , wpA = w1 È w2 È ... È wp et P (A) = P (w1) È P (w2) È .... È P (wp)
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires, dont il est la réunion.

Comment définir une probabilité à partir des probabilités des événements élémentaires

Exemple 1 : un dé équilibré
Si l'on suppose le dé parfaitement équilibré, on peut supposer que tous les numéros ont la même probabilité de se trouver sur la face supérieure du dé quand il s'immobilisera.
On posera :
pi =
où pi est la probabilité pour que le numéro i, (1 £ i £ 6) se trouve sur la face supérieure du dé.
On a : p1 + p2 + p3 + p4 + p5 + p6 = 1
Soit maintenant l'événement A : "le numéro est multiple de 3".
Quelle est la probabilité de A ?
P (A) =

Exemple

Exemple 2 : un dé truqué

Considérons maintenant un dé truqué, lesté de telle manière que le numéro 1 ne puisse pas figurer sur la face supérieure, mais que tous les autres numéros puissent y figurer avec la même probabilité.

Compléter le tableau suivant :p1 p2 p3 p4 p5 p6

où pi désigne la probabilité que le numéro i figure sur la face supérieure.

Soit A l'événement "le numéro est un multiple de 3".

Calculer P (A) =

Dans le cas du dé truqué et dans celui du dé parfaitement équilibré, l'ensemble W des issues de l'expérience était le même :

W = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6

Mais les probabilités des événements liées à ces deux expériences aléatoires sont différentes.

La probabilité d'un événement dépend de l'expérience aléatoire.

Hypothèse d'équiprobabilité - Probabilité uniforme

Exemple introductif

Parmi les 100 employés d'une entreprise,

Exemple introductif

Parmi les 100 employés d'une entreprise,

- il y a 60 hommes (A)

Exemple introductif

Parmi les 100 employés d'une entreprise,

- il y a 60 hommes (A)
- 50 diplômés (B)

Exemple introductif

Parmi les 100 employés d'une entreprise,

- il y a 60 hommes (A)
- 50 diplômés (B)
- 40 hommes diplômés ($A \cap B$).

Exemple introductif

Parmi les 100 employés d'une entreprise,

- il y a 60 hommes (A)
- 50 diplômés (B)
- 40 hommes diplômés ($A \cap B$).

Compléter le tableau suivant, où l'on place à l'intersection d'une ligne et d'une colonne le nombre d'employés ayant les caractères liés à cette ligne et à cette colonne.

	A	$\bar{A}$	
B	40	?	50
$\bar{B}$	?	?	?
	60		100

Tirage sans remise

On considère une urne contenant 7 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement deux boules de l'urne sans remise. Cherchons quelle est la probabilité d'avoir tiré deux boules de la même couleur.

Exemple introductif

Exemple introductif : le publicitaire à la recherche d'un public
Un publicitaire lance une campagne pour un nouveau produit. Il passera des annonces à la télévision.
30 % des annonces passeront pendant des émissions sur la météo (B_1) ;
5 % des annonces passeront pendant des émissions de jeux (B_2) ;
30 % des annonces passeront pendant des talk-shows (B_3) ;
30 % des annonces passeront pendant des matchs de football (B_4) ;
5 % des annonces passeront pendant des magazines d'actualité (B_5).
Les événements B_1, B_2, B_3 ,B_4 , B_5 constituent-ils un système complet d'événements ?

Définition d'une probabilité conditionnelle

Soit A l'événement : "le public cible est atteint par l'annonce".
$P(A|B1) = 0.6$.
La probabilité pour qu'une personne appartenant au public cible regarde l'annonce si l'émission concerne la météo est 0.6.
De même :
P(A — B2) = 0.3 P(A — B3) = 0.4 P(A — B4) = 0.4 P(A — B5) = 0.2

Evénements indépendants

Evénements mutuellement indépendants

Exemple introductif

On considère une urne qui contient 4 boule rouges, 6 boules noires, 16 boules vertes et 23 boules blanches. On tire au hasard une boule de l'urne. L'ensemble fondamental associé à l'experience "tirer une boule" est

$$\Omega = \{\text{Rouge}, \qquad , \text{Verte}, \text{noire}\}.$$

kfkkf kkkf fjjjf fjjjf