SUITES

PLAN

I : Corps des réels

1– Propriétés

❑ Un réel peut être vu, sous forme numérique, comme un entier relatif constituant sa partie entière, suivie d'une infinité de chiffres constituant sa partie décimale.

EXEMPLE :

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937 51...$$

Nous préférons cependant partir de propriétés de $\mathbb{R}$ plutôt que de cette définition, qui pose par ailleurs un certain nombre de problèmes. Par exemple, les deux réels suivants (le premier étant suivis d'une infinité de 0 et le second d'une infinité de 9) sont égaux :

5,28000000000000000000... et 5,27999999999999999999.......

(la différence vaut en effet 0.00000000000000000000... et est nulle !!). D'autre part, les opérations sur deux réels ne sont pas si facilement définies qu'il n'y paraît. Pour connaître la $n^{\text{ème}}$ décimale d'une somme, par exemple, il faut connaître tous les chiffres qui suivent pour savoir si une retenue ne serait pas susceptible de se propager de droite à gauche jusqu'à la décimale considérée.

Nous supposerons donc plutôt qu'il existe un corps $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$, muni d'une relation d'ordre (inégalité) compatible avec les opérations de $\mathbb{R}$ dans le sens suivant :

$\forall a, \forall b, \forall c, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

$\forall a, \forall b, \forall c \geq 0, a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$

La relation d'ordre est dite totale, dans le sens où l'on peut toujours comparer deux réels entre eux. A noter qu'une relation jouissant des mêmes propriétés n'existe pas dans $\mathbb{C}$.

Soit x un réel.

ou bien x appartient à $\mathbb{Q}$. x est dit rationnel.

ou bien x n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. x est dit irrationnel. Exemples : $\sqrt{2}$, π, e, Ln(2) ...

Voici une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Si $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers, on peut choisir $\dfrac{p}{q}$ irréductible (c'est–à–dire p et q premiers entre eux). On a alors $p^2 = 2q^2$. p^2 est pair, donc p aussi (si p est impair, $p = 2k+1$ et $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair). Ainsi $p = 2k$. Donc $p^2 = 4k^2 = 2q^2$ donc $2k^2 = q^2$. Donc q est pair. Ce qui est impossible car la fraction est irréductible.

❑ La relation d'ordre total permet de définir la valeur absolue sur $\mathbb{R}$:

ou bien $x \geq 0$ et l'on pose $|x| = x$

ou bien $x \leq 0$ et l'on pose $|x| = -x$

La valeur absolue joue dans $\mathbb{R}$ le même rôle que le module dans $\mathbb{C}$. Elle permet en particulier de définir la distance de deux réels a et b comme étant $|b - a|$. L'inégalité triangulaire :

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

peut se montrer en élevant au carré, ce qui donne :

$x^2 + y^2 - 2|xy| \leq x^2 + y^2 + 2xy \leq x^2 + y^2 + 2|xy|$

$\Leftrightarrow \quad -|xy| \leq xy \leq |xy|$ ce qui est vrai.

Il existe bien des variantes de l'inégalité triangulaire, par exemple :

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$$

obtenue en changeant y en $-y$.

2– Borne supérieure et inférieure

a) Définition :

L'une des propriétés caractéristiques de $\mathbb{R}$ est l'existence de la borne supérieure. Il s'agit d'une propriété caractéristique dans le sens où cette propriété fait partie de la définition de $\mathbb{R}$ ou des axiomes régissant la relation d'ordre du $\mathbb{R}$. Il est donc hors de propos de la démontrer. On se reportera à l'annexe II *Caractérisations du corps des réels* pour avoir plus de détails.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. I est *la borne inférieure* de A si I est le plus grand minorant de A, c'est à dire si I est plus petit que tous les éléments de A (I minore A), mais que, parmi tous les minorants possibles, I est le plus grand. S est *la borne supérieure* de A si S est le plus petit majorant de A, c'est à dire si S est plus grand que tous les éléments de A (S majore A), mais que, parmi tous les majorant possibles, S est le plus petit.

EXEMPLE : Soit A =]0,1[. Tous les réels négatifs ou nuls minore A. Le plus grand de ces minorants est 0. On note Inf A = 0. Tous les réels supérieur ou égaux à 1 majore A. Le plus petit de ces majorants est 1. On note Sup A = 1. On notera qu'il ne s'agit ni de minimum ni de maximum, puisque ni Inf A ni Sup A n'appartiennent à A.

On peut écrire également :

$$\mathrm{S} = \mathrm{Sup}\ \mathrm{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, a \in \mathrm{A},\ a \leq \mathrm{S} \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in \mathrm{A},\ a > \mathrm{S}-\varepsilon \end{cases}$$

La première ligne signifie que S majore A, et la deuxième signifie que tout nombre inférieur à S (donc de la forme S – ε avec ε > 0) ne majore pas A. Donc S est le plus petit majorant de A. C'est la borne supérieure.

De même :

$$\mathrm{I} = \mathrm{Inf}\ \mathrm{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, a \in \mathrm{A},\ a \geq \mathrm{I} \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in \mathrm{A},\ a < \mathrm{I}+\varepsilon \end{cases}$$

AXIOME

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Comme dit plus haut, cette propriété est caractéristique de $\mathbb{R}$ et ne saurait être démontrée.

CONSEQUENCE

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Il suffit en effet d'effectuer une symétrie par rapport à 0 pour échanger les nombres positifs et négatifs, pour transformer une partie majorée en partie minorée et une borne supérieure en borne inférieure. Plus formellement, si B = $\{-a,\ a \in \mathrm{A}\}$ et si S = Sup A, alors on pourra vérifier que – S = Inf B.

Une utilisation courante de la borne supérieure est la suivante :

$$\forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leq \mathrm{M} \Rightarrow \mathrm{Sup}\ \mathrm{A} \leq \mathrm{M}$$

De même :

$$\forall\, x \in \mathrm{A},\ x \geq m \Rightarrow \mathrm{Inf}\ \mathrm{A} \geq m$$

b) Droite achevée :

On définit $\overline{\mathbb{R}}$ en ajoutant à $\mathbb{R}$ deux symboles, +∞ et –∞.

Sur le nouvel ensemble ainsi défini, on prolonge la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \text{ réel},\ -\infty < x < +\infty$$

On peut alors désigner le nouvel ensemble sous la forme d'intervalle $[-\infty,+\infty]$.

L'intérêt de la droite achevée réside dans le fait que nombre de résultats dans $\mathbb{R}$ est lié au fait d'être borné au pas. Ainsi, si A est majoré, on peut définir S = Sup A. Si A est non majoré, on posera Sup A = $+\infty$. $+\infty$ n'est autre que la borne supérieure de A, mais dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

Par ailleurs, on obtient, dans la droite achevée, des résultats plus concis :

Voici une liste de résultats dans $\mathbb{R}$, dont certains seront prouvés ultérieurement :

Toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.

Toute partie non vide minorée admet une borne inférieure.

Toute suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Toute suite décroissante minorée converge vers sa borne inférieure. Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

De toute suite bornée, on peut extraire une sous–suite convergente. De toute suite non bornée, on peut extraire une suite tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Ces résultats s'énoncent, dans la droite achevée :

Toute partie admet une borne supérieure.

Toute partie admet une borne inférieure.

Toute suite croissante converge vers sa borne supérieure.

Toute suite décroissante converge vers sa borne inférieure.

De toute suite, on peut extraire une sous–suite convergente.

c) Partie entière :

PROPOSITION :

Soit x un réel. Il existe un unique entier p, appelé partie entière de x tel que :

$$p \le x < p+1.$$

Démonstration :

Soit $x > 0$. Considérons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \le x\}$. Cet ensemble est une partie non vide (elle contient 0) majorée (par x lui-même). Elle admet donc une borne supérieure α. Montrons que α est entier et élément de A. En effet, $\alpha-1$ n'est pas un majorant de A donc il existe n élément de A tel que $\alpha-1 < n \le \alpha$. Les entiers supérieurs à n sont alors supérieurs à α et ne peuvent être dans A. n est donc le plus grand élément de A et est donc égal à α. α est donc non seulement la borne supérieure mais le maximum de la partie A. α n'est autre que l'entier p que nous cherchons. En effet, p est dans A donc $p \le x$, mais $p+1$ n'est pas dans A donc $x < p+1$. Ce qui prouve l'existence. On note $p = E(x)$.

Pour $x < 0$, posons $p = -E(-x)-1$ si x est non entier, et x si x est entier. Dans le premier cas, on a :

$$E(-x) < -x < E(-x) + 1$$
$$-E(-x) - 1 < x < E(-x)$$

Ainsi, $E(-3{,}5) = -4$.

On remarquera que cette définition utilisée en Mathématiques ne correspond pas toujours aux valeurs données par la plupart des calculatrices qui donne souvent comme partie entière de $x < 0$, la valeur $-E(-x)$.

Montrons l'unicité. Si $q < p$, avec p et q entiers, alors $q+1 \leq p \leq x$, et si $q > p$, alors $q \geq p+1 > x$, ce qui montre que aucun nombre inférieur ou supérieur à p ne peut vérifier la définition de la partie entière de x. Seul p convient.

Soit n un entier positif. Tout réel peut être encadré de manière unique sous la forme :

$$\underbrace{\mathrm{M} + \frac{d_1}{10} + \ldots + \frac{d_n}{10^n}}_{\text{valeur approchée par défaut}} \leq x < \underbrace{\mathrm{M} + \frac{d_1}{10} + \ldots + \frac{d_n + 1}{10^n}}_{\text{valeur approchée par excès}}$$

où M est un entier et les d_i des chiffres entre 0 et 9. Il suffit en effet de considérer l'encadrement $E(10^n x) \leq x < E(10^n x) + 1$.

3– Intervalles

Un intervalle s'écrit $|a,b|$ (*) où | remplaçe ici [ou]. a peut être fini ou valoir $-\infty$, b peut être fini ou valoir $+\infty$. L'intervalle est alors l'ensemble des réels compris entre a et b, éventuellement au sens large.

Début de partie réservée aux MPSI

PROPOSITION :

I est un intervalle si et seulement si :

$$\forall x \in I, \forall y \in I, x < z < y \Rightarrow z \in I$$

Une partie vérifiant cette propriété est dite convexe. Une autre formulation est :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \forall y \in \mathrm{I}, x < y \Rightarrow [x, y] \subset \mathrm{I}$$

Démonstration :

Il est évident qu'un intervalle vérifie la propriété de convexité. Montrons la réciproque. Soit I convexe. Montrons qu'il est de la forme (*). Si I est minoré, posons $a = \mathrm{Inf}\ \mathrm{I}$ sinon, $a = -\infty$. Si I est majoré, posons $b = \mathrm{Sup}\ \mathrm{I}$ sinon, $b = +\infty$. On a donc I inclus dans $[a, b]$.

Soit z tel que $a < z < b$. Dans tous les cas, il existe x et y éléments de I tels que :

$$a \leq x < z < y \leq b$$

Montrons le pour x :

Si $a = -\infty$, cela signifie que I n'est pas minoré, et donc que z ne minore pas I, et donc qu'il existe x élément de I tel que $x < z$.

Si a est fini, a est le plus grand des minorants, donc z ne minore pas I, et donc il existe x éléments de I tel que $a \leq x < z$.

La propriété de convexité prouve que z est élément de I. Ainsi, $]a, b[$ est inclus dans I. Le fait que a et b appartienne ou non à I fermera éventuellement l'une des bornes de l'intervalle ou les deux.

Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.

PROPOSITION

Soit $]a, b[$ un intervalle non vide. Alors $]a, b[$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\complement\mathbb{Q}$.

Démonstration :

Nous devons montrer que $]a, b[$ contient un rationnel et un irrationnel. Soient x et y deux éléments de $]a, b[$. Si l'un d'eux est rationnel et l'autre irrationnel, il n'y a rien à montrer.
S'ils sont tous deux rationnels, il suffit de montrer que :

i) Entre deux rationnels, il existe un irrationnel.

S'ils sont tous deux irrationnels, il suffit de montrer que :

ii) Entre deux irrationnels, il existe un rationnel.

i) Si x et y sont deux rationnels tels que $x < y$, alors posons :

$$z = x + \frac{(y-x)\sqrt{2}}{2}$$

z est un irrationnel compris entre x et y.

ii) Si x et y sont deux irrationnels tels que $x < y$, il existe q entier tel que :

$$0 < \frac{1}{q} < y - x$$

(prendre q supérieur à $\frac{1}{y-x}$, par exemple la partie entière de ce nombre augmenté de 1). Considérons maintenant $p = \mathrm{E}(qx)$. On a :

$$p \leq qx < p + 1 \leq qx + 1 < qx + q(y-x) = qy$$

$$\Rightarrow \qquad x < \frac{p+1}{q} < y$$

$\frac{p+1}{q}$ est un rationnel compris entre x et y.

Il résulte des propriétés précédentes que, pour tout x réel, il existe une suite (y_n) de rationnels et une suite (z_n) d'irrationnels ayant pour limite x. En effet, dans tout intervalle $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$, il existe un rationnel y_n et un irrationnel z_n. On a :

$$|x-y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |x-z_n| < \frac{1}{n}$$

donc $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = x$.

Si A est une partie de $\mathbb{R}$ telle que tout intervalle $]a, b[$ non vide rencontre A, on dit que A est dense dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, de même que $\complement\mathbb{Q}$. Voici d'autres exemples de partie denses dans $\mathbb{R}$:

L'anneaux $\mathbb{D}$ des nombres décimaux

L'anneau $\mathbb{Z}[1/2]$ des nombres dyadiques $\{p/2^n \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

L'ensemble $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z} = \{a + b\pi, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.

Dans ce dernier cas, il suffit de montrer qu'il est dense dans $[0,1]$. Considérons les parties fractionnaires des $n\pi$, notées également $n\pi$ mod 1. Tous ces nombres sont différents, car si $n\pi$ mod 1 est égal à $m\pi$ mod 1, cela signifie que $n\pi-m\pi$ est entier et que π est rationnel, or π est irrationnel. Les $n\pi$ mod 1 étant en nombre infini, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle de $[0,1]$ de longueur ε qui en possède 2. Par différence, il existe donc un nombre de la forme $y = k\pi$ mod 1 dans $[0,\varepsilon]$. Donc $0 \leq y \leq \varepsilon$. Des multiples de y se trouveront dans tout intervalle de longueur ε.

Une conséquence de ce qui précède est que $\{\sin(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ qui est l'image directe par sinus de l'ensemble $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$, est dense dans [0,1].

4– Suites

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être vue comme une application $n \in \mathbb{N} \to u_n \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
On peut définir la somme $u + v$ de deux suites en posant $(u + v)_n = u_n + v_n$.
On peut de même définir le produit par un scalaire λ : $(\lambda u)_n = \lambda u_n$
Ces deux opérations confère à l'ensemble des suites une structure d'espace vectoriel (voir le chapitre *Espaces Vectoriels* dans le fichier ESPVECT.PDF)

On peut définir une relation d'ordre dans l'espace des suites réelles :

$$u \le v \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \le v_n$$

Une suite réelle u est majorée si :

$$\exists\, \mathrm{M},\ \forall\, n,\ u_n \le \mathrm{M}$$

Une suite réelle u est minorée si :

$$\exists\, m,\ \forall\, n,\ m \le u_n$$

Une suite réelle est bornée si elle est majorée et minorée. Cela peut s'écrire également sous la forme :

$$\exists\, \mathrm{M},\ \forall\, n,\ |u_n| \le \mathrm{M}$$

Cette dernière définition a l'intérêt de pouvoir s'appliquer également aux suites complexes.

Une suite réelle u est croissante si :

$$\forall\, n,\ u_n \le u_{n+1}$$

Une suite réelle u est décroissante si :

$$\forall\, n,\ u_n \ge u_{n+1}$$

Une suite réelle est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Une suite réelle u est strictement croissante si :

$$\forall\, n,\ u_n < u_{n+1}$$

Une suite réelle u est strictement décroissante si :

$$\forall\, n,\ u_n > u_{n+1}$$

Une suite réelle est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

II : Limite d'une suite

1– Préambule

On se posera les questions suivantes :

> Quand dit–on qu'une suite tend vers 0 ?
>
> Comment montre–t–on que a^n tend vers 0 quand n tend vers ∞, pour $|a| < 1$?
>
> Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
>
> > Si (x_n) est décroissante positive, (x_n) converge vers 0.
> > Si (x_n) tend vers $+\infty$, alors (x_n) est croissante à partir d'un certain rang.
> > Si (x_n) tend vers l, avec $l \ge 0$, alors (x_n) est positive à partir d'un certain rang.
> > Si (x_n) converge, alors (x_n) est bornée.
> > Si $(x_{n+1} - x_n)$ tend vers 0, alors (x_n) converge.

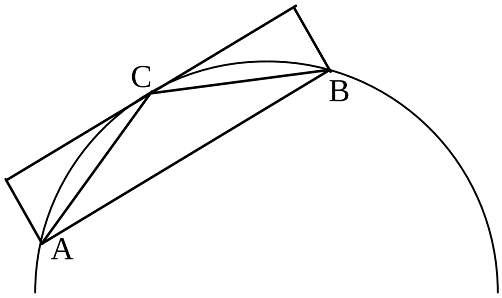
(Toutes les affirmations précédentes sont fausses, sauf une)

2– Un exemple historique

Archimède prouve que l'on peut approximer l'aire d'un disque d'aussi près que l'on veut par des polygones réguliers. Par encadrement d'un cercle par un polygone de 96 côtés, Archimède prouve que :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

et, par la même méthode, Al–Kashi, en 1424, utilise un polygone de 3×2^{28} côtés pour trouver 16 décimales de π. Ce record ne fut battu qu'en 1596 par Ludolph, avec 35 décimales. On améliore l'approximation donnée par un polygone en doublant le nombre de ses côtés.



Soient A et B deux sommets adjacents du premier polygone, et C le milieu de l'arc AB. On peut remarquer que le triangle ABC possède une aire moitié de celle du rectangle de coté AB, dont un autre côté est tangent au cercle en C. L'aire du triangle ABC est donc supérieure à la moitié de l'aire de la portion de cercle ABC. Ainsi, quand on double le nombre de côtés d'un polygone régulier, la différence d'aire entre le disque et le polygone est divisé par un rapport supérieur à 2.

Archimède ne dit pas que la différence des aires entre le disque et le polygine tend vers 0 lorsque le nombre de côtés tend vers $+\infty$, mais il conclut que cette différence pourra être rendue aussi petite que l'on veut en énonçant le principe suivant :

> *Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie supérieure à sa moitié, et si l'on retranche encore du reste une partie supérieure à sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que toute grandeur donnée de la même espèce.*

Nous pourrions traduire cet énoncé de la façon suivante :
Soit (u_n) une suite vérifiant :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall\, n,\ u_n \leq \frac{1}{2}\, u_{n-1},$$

alors : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n, u_n < \varepsilon$
En tenant compte du fait que la suite est ici décroissante, on pourra comparer cette dernière formulation (datant du IIIème siècle avant JC) avec la définition d'une suite convergeant vers 0 donnée ci-dessous (datant de la deuxième moitié du XIXème siècle). Il peut paraître étonnant de voir qu'il a fallu 2000 ans pour formaliser définitivement cette notion de limite.

3– Définition

La nécessité des définitions suivantes est apparue au cours du XIX^ème^ siècle. Elles se substituent aux concepts intuitifs qui avaient prévalu jusque là.

Les définitions ci–dessous s'appliquent aux suites réelles ou complexes.

DEFINITION :

i) Une suite $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ converge vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |x_n - l| < \varepsilon$$

ii) (Dans $\mathbb{R}$) Une suite $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A, \exists N, \forall n > N, x_n > A$$

iii) (Dans $\mathbb{R}$) Une suite $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A, \exists N, \forall n > N, x_n < A$$

iv) Une suite $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ tend vers ∞ si :

$$\forall A, \exists N, \forall n > N, |x_n| > A$$

On remarquera que les définitions ci–dessus correspondent dans tous les cas à la définition générale suivante :

DEFINITION :

Une suite $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ tend vers une limite L, finie ou non si :

$$\forall V \text{ voisinage de } L, \exists N, \forall n > N, x_n \in V$$

un voisinage désignant une partie contenant :

pour un réel l, un intervalle de la forme $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$
pour un complexe l, un disque de centre l de rayon ε
pour $+\infty$, un intervalle de la forme $]A,+\infty[$
pour $-\infty$, un intervalle de la forme $]-\infty,A[$
pour ∞, le complémentaire d'un disque (ou d'un intervalle) de centre 0, de rayon A.

Tous les termes de la suite, sauf un nombre fini, sont dans un voisinage quelconque de la limite.

Une suite qui converge est une suite qui tend vers une limite finie. Sinon, elle diverge. Il résulte de la définition que toute suite convergente est bornée. En effet, tous les termes, sauf un nombre fini, sont contenus dans l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ pour les suites réelles, ou le disque de centre l, de rayon $\varepsilon > 0$ pour les suites complexes.

La limite, finie ou non, si elle existe, est unique. S'il y avait deux limites L et L', il suffirait de choisir deux voisinages disjoint V et V' pour obtenir une contradiction.

Pour une suite complexe $u = v + iw$ avec $v_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et $w_n = \mathrm{Im}(u_n)$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = \mathrm{Re}(l) \text{ et } \lim_{n\to\infty} w_n = \mathrm{Im}(l)$$

En effet, si $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, alors $|v_n - \mathrm{Re}(l)| \leq |u_n - l|$ et $|w_n - \mathrm{Im}(l)| \leq |u_n - l|$ permettent de montrer l'implication $\Rightarrow$.

Réciproquement, si $\lim_{n\to\infty} v_n = \mathrm{Re}(l)$ et $\lim_{n\to\infty} w_n = \mathrm{Im}(l)$, on pourra utiliser le fait que :

$$|u_n - l| \leq |v_n - \mathrm{Re}(l)| + |w_n - \mathrm{Im}(l)|$$

Ainsi, on a la possibilité de raisonner globalement sur la suite u, ou bien de se ramener à l'étude des deux suites réelles v et w.

On appelle sous–suite ou suite extraite d'une suite (x_n) une suite que nous noterons $(x_{\Phi(n)})$ où $(\Phi(n))$ est une suite strictement croissante d'indice. Par exemple, si $\Phi(n) = 2n$, la suite extraite est celle des termes d'indices pairs. Si $\Phi(n) = 2n+1$, la suite extraite est celle des termes d'indices impairs.

On remarque aisément que, si une suite converge, alors toute sous–suite converge vers la même limite. En effet, soit l la limite de (x_n), et $(x_{\Phi(n)})$ une suite extraite. Φ étant strictement croissante, on a, par récurrence, $\Phi(n) \geq n$ pour tout n.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |x_n - l| < \varepsilon$$

Comme $\Phi(n) \geq n$, on a, a fortiori :

$$\forall n > N, |x_{\Phi(n)} - l| < \varepsilon$$

On se sert couramment de la contraposée pour montrer qu'une suite ne converge pas. On extrait deux sous–suites convergeant vers des limites différentes. Par exemple : $(-1)^n$ pour laquelle la sous-suite de rang pair converge vers 1 et celle de rang impair vers –1. La suite complète ne converge pas.

4– Opérations sur les limites

Les théorèmes qui suivent étaient jugés évidents au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Une tentative de démonstration aurait alors paru incongrue et superflue. Ces démonstrations nous sont cependant nécessaires pour plusieurs raisons :

Montrer l'efficacité de notre définition de limite.
Justifier la validité de notre intuition.
Servir de modèle de démonstration pouvant servir dans des cas plus complexes.

a) SOMME :

PROPOSITION :

Soient (a_n) et (b_n) deux suites.

i) Si (a_n) converge vers α et (b_n) vers β, alors (a_n+b_n) converge vers $\alpha+\beta$.
ii) Si (a_n) est bornée et (b_n) tend vers ∞, alors (a_n+b_n) tend vers ∞
iii) Dans $\mathbb{R}$, si (a_n) est minorée et (b_n) tend vers $+\infty$, alors (a_n+b_n) tend vers $+\infty$
iv) Dans $\mathbb{R}$, si (a_n) est majorée et (b_n) tend vers $-\infty$, alors (a_n+b_n) tend vers $-\infty$

Démonstration :

i) $\forall \varepsilon > 0, |a_n + b_n - (\alpha + \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$

Or, $\exists N, \forall n > N, |a_n - \alpha| < \varepsilon$ et $\exists M, \forall n > M, |b_n - \beta| < \varepsilon$.

Donc $\forall n > \text{Max}(N,M), |a_n + b_n - (\alpha + \beta)| < 2\varepsilon$.

En particulier, $\lim (C + a_n) = C + \lim a_n$

ii) $\forall A, |a_n + b_n| \geq |b_n| - |a_n|$

Or, $\exists M, \forall n, |a_n| \leq M$ et $\exists N, \forall n > N, |b_n| > A + M$

Donc, $\forall n > N, |a_n + b_n| > A$.

Les démonstrations pour iii et iv sont analogues à celles de ii.

On obtient une forme indéterminée lorsque l'une des suites tend vers $+\infty$, et l'autre vers $-\infty$.

b) PRODUIT :

PROPOSITION :

Soient (a_n) et (b_n) deux suites.

i) Si (a_n) converge vers α et (b_n) vers β, alors (a_nb_n) converge vers $\alpha\beta$.

ii) Si (a_n) est bornée et (b_n) converge vers 0, alors (a_nb_n) tend vers 0

iii) Si $(|a_n|)$ est minoré par un réel strictement positif et si (b_n) tend vers ∞ , alors (a_nb_n) tend vers ∞.

Démonstration :

i) $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}|a_nb_n - \alpha\beta| &= |a_n(b_n - \beta) + (a_n - \alpha)\beta| \\ &\leq |a_n||b_n - \beta| + |a_n - \alpha||\beta| \\ &\leq M|b_n - \beta| + |a_n - \alpha||\beta|\end{aligned}$$

où M est un majorant de la suite bornée (a_n).

Or, $\exists$ N, $\forall\ n >$ N, $|b_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$

$\exists$ K, $\forall\ n >$ K, $|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2|\beta|}$

Donc, $\forall\ n >$ Max(K,N), $|a_nb_n - \alpha\beta| < \varepsilon$.

En particulier, $\lim Ca_n = C \lim a_n$

ii) Soit M un majorant de $(|a_n|)$. On a, $\forall\ \varepsilon > 0$:

$|a_nb_n| \leq M|b_n|$

Or, $\exists$ N, $\forall\ n >$ N, $|b_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$

Donc, $\forall\ n >$ N, $|a_nb_n| < \varepsilon$.

iii) Soit $m > 0$ minorant $(|a_n|)$. On a, $\forall$ A > 0 :

$|a_nb_n| \geq |b_n|m$

Or, $\exists$ N, $\forall\ n >$ N, $|b_n| > \dfrac{A}{m}$

Donc, $\forall\ n >$ N, $|a_nb_n| > A$

On obtient une forme indéterminée lorsque l'une des suites tend vers 0, et l'autre vers ∞.

c) INVERSE :

PROPOSITION :

Soit (a_n) une suite.

i) Si (a_n) converge vers α non nul, alors $(\frac{1}{a_n})$ converge vers $\frac{1}{\alpha}$.

ii) Si (a_n) tend vers 0, alors $(\frac{1}{a_n})$ tend vers ∞.

iii) Si (a_n) tend vers ∞, alors $(\frac{1}{a_n})$ tend vers 0.

Démonstration :
i) $\forall\, \varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n\alpha|}$$

Or $\exists$ N, $\forall\, n >$ N, $|a_n| > \frac{|\alpha|}{2}$

Donc, $\forall\, n >$ N, $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| < C|a_n - \alpha|$, avec $C = \frac{2}{\alpha^2}$

Or $\exists$ M, $\forall\, n >$ M, $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{C}$

Donc, $\forall\, n >$ Max(N,M), $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| < \varepsilon$

ii) $\forall$ A > 0, $\exists$ N, $\forall\, n >$ N, $|a_n| < \frac{1}{A}$ donc $\left|\frac{1}{a_n}\right| > A$

La démonstration de iii) est analogue à celle de ii)

d) QUOTIENT :
PROPOSITION :
Soient (a_n) et (b_n) deux suites.

i) Si (a_n) converge vers α et (b_n) vers β non nul, alors $(\frac{a_n}{b_n})$ converge vers $\frac{\alpha}{\beta}$.

ii) Si (a_n) est bornée et (b_n) converge vers ∞, alors $(\frac{a_n}{b_n})$ tend vers 0.

iii) Si $(|a_n|)$est minoré par un réel strictement positif et si (b_n) tend vers 0 , alors $(\frac{a_n}{b_n})$ tend vers ∞.

iv) Si (a_n) converge vers ∞ et si (b_n) est bornée, alors $(\frac{a_n}{b_n})$ converge vers ∞.

v) Si (a_n) converge vers 0 et si $(|b_n|)$ est minorée par un réel strictement positif, alors $(\frac{a_n}{b_n})$ converge vers 0.

Démonstration :
Il suffit d'utiliser les résultats démontrés pour le produit et l'inverse

On obtient une forme indéterminée lorsque les suites tendent vers ∞, ou vers 0.

Dans certaines propositions relatives à l'inverse et au quotient, il est possible que certains termes du dénominateur s'annulent. Cependant, il résultera du paragraphe 4 qu'ils sont non nuls à partir d'un certain rang. On considèrera donc seulement les termes des suites à partir de ce rang.

5– Inégalités et limites

Ce paragraphe n'est valable que sur $\mathbb{R}$.

PROPOSITION :

Soit (x_n) une suite qui converge vers l. Alors :

i) $l > a \Rightarrow \exists N, \forall n > N, x_n > a$

ii) $\exists N, \forall n > N, x_n \geq a \Rightarrow l \geq a$

On a des résultats analogues avec < et ≤.

Démonstration :

i) résulte de la définition de la convergence en prenant $\varepsilon = l-a$.

ii) : Si $l < a$, alors il existe M tel que, pour tout n supérieur à M, $x_n < a$. Alors , pour $n > \text{Max}(N,M)$ on devrait avoir simultanément $x_n \geq a$ et $x_n < a$, ce qui est impossible.

Ce résultat s'appelle passage à la limite dans une inégalité. On remarquera qu'elle se pratique avec des inégalités larges.

PROPOSITION :

i) Si (a_n) converge vers α, (b_n) vers β, alors :

$$\alpha < \beta \Rightarrow \exists N, \forall n > N, a_n < b_n$$

ii) Si (a_n) converge vers α, (b_n) vers β, alors :

$$\exists N, \forall n > N, a_n \leq b_n \Rightarrow \alpha \leq \beta$$

iii) Si (a_n) et (c_n) convergent vers l, et si :

$$\exists N, \forall n > N, a_n \leq b_n \leq c_n$$

alors (b_n) converge vers l.

iv) Si (b_n) tend vers $+\infty$, alors :

$$\forall n, a_n \geq b_n \Rightarrow \lim a_n = +\infty$$

Démonstration :

i) et ii) se montrent en appliquant la proposition précédente à la suite $a_n - b_n$.

iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists M, \forall n > M, l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$. $\exists K, \forall n > K, l-\varepsilon < c_n < l+\varepsilon$.

Donc, $\forall n > \text{Max}(N,M,K), l-\varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l+\varepsilon$

Le iv est laissé en exercice.

6– Suites monotones

Ce paragraphe n'est valable que sur $\mathbb{R}$.

PROPOSITION :

Soit (x_n) une suite croissante. Alors :

i) Ou bien (x_n) est majorée et alors (x_n) converge.
ii) Ou bien (x_n) n'est pas majorée et alors (x_n) tend vers $+\infty$.

<u>Démonstration</u> :
i) Soit $l = \mathrm{Sup}(x_n)$. Nous allons montrer que (x_n) converge vers l. On a :
(*) $\forall n, x_{n+1} \geq x_n$
(**) $\forall n, x_n \leq l$
(***) $\forall \varepsilon > 0, \exists N, l-\varepsilon < x_N$

Soit $\varepsilon > 0$ et considérons le n donné par (***). Par récurrence, (*) permet de montrer que :

$$\forall n > N, x_n \geq x_N$$

Donc, en utilisant (**) $\forall n > N, l-\varepsilon < x_N \leq x_n \leq l < l+\varepsilon$

ii) On a :
(*) $\forall n, x_{n+1} \geq x_n$
(**) $\forall A, \exists N, x_N > A$

Soit A donné, et considérons le n donné par (**). Par récurrence, (*) permet de montrer que :

$$\forall n > N, x_n \geq x_N$$

Donc, $\forall n > N, A < x_N \leq x_n$

On a évidemment la proposition duale :
PROPOSITION :
Soit (x_n) une suite décroissante. Alors :
i) Ou bien (x_n) est minorée et alors (x_n) converge.
ii) Ou bien (x_n) n'est pas minorée et alors (x_n) tend vers $-\infty$.

Dans le cas i), la limite est la borne inférieure de la suite.

EXEMPLE 1 :
Soit $x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. (x_n) est évidemment croissante. On prouve par récurrence que $(n+1)! > 2^n$ pour $n \geq 1$. Donc la suite est majorée par :

$$x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 2[1 - 1/2^n] < 3$$

Etant croissante majorée, elle converge. (On prouvera ultérieurement qu'elle converge vers e).

EXEMPLE 2 :
Soit $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. La suite est croissante. On a :

$$x_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}) + \ldots + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n})$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}$$

$$\geq 1 + \frac{n}{2}$$

Donc la suite n'est pas majorée. Elle tend vers $+\infty$.

7– Suites adjacentes

Ce paragraphe n'est valable que sur $\mathbb{R}$.

Avant de définir les suites adjacentes, nous allons d'abord étudier les suites vérifiant les propriétés suivantes.

PROPOSITION :

Soit (a_n) et (b_n) deux suites vérifiant :

(a_n) *est croissante*

(b_n) *est décroissante*

$\forall n, a_n \leq b_n$

Alors ces deux suites convergent vers des limites α *et* β *telles que* $\alpha \leq \beta$.

Démonstration :

Montrons d'abord que : $\forall n, \forall m, a_n \leq b_m$. En effet :

Si $n \leq m$, on a $a_n \leq a_m \leq b_m$

Si $n > m$, on a $a_n \leq b_n \leq b_m$

Donc (a_n) est une suite croissante majorée par n'importe quel terme de la suite (b_m). Elle converge donc vers une limite α. α étant la borne supérieure de la suite (a_n), elle est inférieure à tout majorant de la suite. On a donc :

$$\forall m, \alpha \leq b_m.$$

La suite (b_m) est décroissante minorée. Elle converge donc vers une limite β vérifiant :

$$\alpha \leq \beta.$$

Cette proposition admet comme corollaire la propriété des segments emboîtés, démontrée dans un autre chapitre. Soit $(I_n) = ([a_n, b_n])$ une suite décroissante de segments, alors il existe un élément commun à tous les segments. La proposition permet de montrer que l'intersection de tous les segments est égale à $[\alpha, \beta]$, où α est la limite des a_n et β la limite des b_n.

Définissons maintenant les suites adjacentes :

DEFINITION :

On appelle suites adjacentes deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

i) (a_n) *est croissante*

ii) (b_n) *est décroissante*

iii) $\lim\limits_{n \to \infty} b_n - a_n = 0$

On dispose de la proposition suivante :

PROPOSITION :

Soit (a_n) et (b_n) deux suites adjacentes. Alors ces deux suites admettent la même limite.

Démonstration :

Il suffit de prouver que

$$\forall n, a_n \leq b_n$$

et d'appliquer la proposition vue plus haut. Or ,si l'on avait $a_N > b_N$ pour un certain N, alors posons $\varepsilon = a_N - b_N > 0$. On a alors :

$$\forall n > N, a_n - b_n \geq a_N - b_N > \varepsilon$$

ce qui est contradictoire avec iii)

Une formulation équivalente est la suivante :

Soit (I_n) une suite décroissante de segments dont la longueur tend vers 0. Alors l'intersection des I_n est réduite à un point.

EXEMPLE : les suites babyloniennes.

Les babyloniens (2000 avant JC) donnent comme approximation de $\sqrt{a}$ la quantité $\frac{1}{2}(b + \frac{a}{b})$ où b est un nombre arbitraire, en pratique proche de $\sqrt{a}$, par exemple sa partie entière. Le procédé peut être itéré. Soit a un réel strictement positif. On définit les deux suites :

b_0 est arbitraire, élément de $]\sqrt{a}, +\infty[$

$$a_n = \frac{a}{b_n}$$

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Montrons que les deux suites sont convergent vers $\sqrt{a}$.

i) $\forall\, n,\ a_n \leq \sqrt{a} \leq b_n$

Cette relation est vraie pour $n = 0$. Par ailleurs :

$$b_{n+1} \geq \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b_n} + b_n \geq 2\sqrt{a} \Leftrightarrow b_n^2 - 2b_n\sqrt{a} + a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (b_n - \sqrt{a})^2 \geq 0$$

$$a_{n+1} = \frac{a}{b_{n+1}} \leq \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

ii) (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a}{b_{n+1}} - \frac{a}{b_n} \geq 0$$

iii) Il en résulte que (a_n) converge vers une limite α et (b_n) vers une limite β. En passant à la limite dans les relations définissant a_n et b_n, on obtient :

$$\alpha = \frac{a}{\beta} \text{ et } \alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \alpha\beta = a \text{ et } \alpha = \beta \Rightarrow \alpha = \beta = \sqrt{a}$$

Prenons l'exemple de $a = 2$, en partant de $b_0 = 2$. On obtient successivement :

a_n = 1, 1.333333333, 1.411764706, 1.414211438, 1.414213562

b_n = 2, 1.500000000, 1.416666667, 1.414215686, 1.414213562

La convergence est très rapide. Le nombre de décimales exactes croît exponentiellement avec n.

8– Théorème de Bolzano–Weierstrass

La suite du paragraphe est réservée aux MPSI

Nous avons vus deux théorèmes de convergence des suites :

celui des suites croissantes majorées

celui des suites adjacentes

En voici un troisième :

De toute suite bornée, on peut extraire une sous–suite convergente.

Par exemple, si $x_n = (-1)^n$, alors la suite extraite (x_{2n}) converge vers 1 et la suite extraite (x_{2n+1}) converge vers –1. En outre, si une suite n'est pas bornée, il existe une sous–suite qui tend vers ∞.

Démonstration 1 :
Nous procéderons par dichotomie. Soit (x_n) une suite bornée, contenue dans le segment $[a, b]$. On va définir une suite d'intervalles emboîtés I_n tels que :

Pour tout n, I_n contient une infinité de termes de la suite (c'est-à-dire qu'il existe une infinité d'indices p tels que x_p appartienne à I_n.

La suite (I_n) est décroissante.

La longueur des I_n est égale à $\dfrac{b-a}{2^n}$.

On choisit $I_0 = [a, b]$. Supposons I_n choisi, $I_n = [a_n, b_n]$. Par récurrence, I_n possède une infinité de termes de la suite. Donc il existe nécessairement une infinité de termes dans au moins l'un des deux intervalles $[a_n, \dfrac{b_n+a_n}{2}]$ ou $[\dfrac{b_n+a_n}{2}, b_n]$. On choisit pour I_{n+1} cet intervalle. Il résulte des propriétés des I_n que (a_n) et (b_n) forment deux suites adjacentes, convergeant vers la même limite l.

Définissons maintenant la sous-suite. On choisit $\Phi(0) = 0$. Si $\Phi(1)$, $\Phi(2)$, ... $\Phi(n-1)$ sont choisis, on choisit $\Phi(n)$ tel que $\Phi(n) > \Phi(n-1)$ et $x_{\Phi(n)}$ appartiennent à I_n, ce qui est possible puisque I_n contient une infinité de termes de la suite.

On en conclut que : $\forall\ n,\ a_n \leq x_{\Phi(n)} \leq b_n$ et donc que $x_{\Phi(n)}$ converge vers l. l s'appelle valeur d'adhérence de la suite.

Démonstration 2 :
Voyons les entiers n comme des individus situés à une hauteur x_n.
On dit que n a "vue sur la mer" si : $\forall\ p > n,\ x_n > x_p$. ($n$ est plus haut que tous les entiers qui viennent après lui).
On dit que n a "la vue bouchée" si : $\exists\ p > n,\ x_p \geq x_n$. (Il existe un entier p supérieur à n et situé plus haut que lui).
Il y a alors deux cas :
Ou bien il y a une infinité d'entiers ayant vue sur la mer. Dans ce cas, les x_n correspondant forment une sous-suite décroissante. Etant minorée, elle converge.
Ou bien il n'y a qu'un nombre fini d'entiers ayant vue sur la mer. Se plaçant au-delà de ce nombre fini, tous les termes ont la vue bouchée. On en choisit un d'indice p_0. Il existe un indice $p_1 > p_0$ tel que $x_{p_1} > x_{p_0}$ puis $p_2 > p_1$ tel que $x_{p_2} > x_{p_1}$, etc... On construit ainsi une sous-suite croissante. Etant majorée, elle converge. Etant bornée par a et b, la limite est dans $[a,b]$.

Le résultat précédent s'applique également aux suites complexes. Il suffira en effet d'extraire une première sous–suite telle que les parties réelles convergent, puis de cette première sous–suite, on extrait une deuxième sous–suite telle que les parties imaginaires convergent également.
Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.

III : Suites particulières

1– Suites arithmétiques

Une suite arithmétique est donnée par son premier terme u_0 et sa raison r :

$$\forall\ n,\ u_{n+1} = u_n + r$$

On a alors $u_n = u_0 + nr$

et $u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)u_0 + r\,\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$

2– Suites géométriques

Une suite géométrique est donnée par son premier terme u_0 et sa raison q (non nulle en général) :

$$\forall\ n,\ u_{n+1} = q.u_n$$

On a alors $u_n = q^n.u_0$

et $u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)u_0$ si $q = 1$

$= u_0\,\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ si $q \neq 1$

Cette somme converge si et seulement si $|q| < 1$. La limite de la somme vaut alors $\dfrac{u_0}{1-q}$.

EXEMPLE :

Une utilisation courante des suites géométriques intervient dans les prêts à crédits. Un prêteur dispose d'une somme M qu'il consent à prêter au taux d'intérêt mensuel t. Un emprunteur demande à recevoir cette somme M en contrepartie d'un paiement mensuel d'une somme a, pendant n mensualités. Quelle est la valeur de a en fonction de M, t et n ?

Du point de vue de prêteur, le taux d'intérêt correspond à ce qu'il pourrait gagner par ailleurs en plaçant son argent. Ainsi, le capital M deviendrait $M(1+t)$ au bout du premier mois, $M(1+t)^2$ au bout du deuxième, ..., $M(1+t)^n$ au bout de n mois. Il ne peut consentir à prêter la somme M que si les remboursements réguliers lui permettent d'obtenir un capital équivalent à $M(1+t)^n$ au bout de n mois, en plaçant ces remboursements dans des conditions comparables. Ainsi, recevant une somme a au bout d'un mois, et plaçant cette somme au taux t, il aura $a(1+t)^{n-1}$ au bout des n–1 mois restants. Recevant une autre somme a au bout de deux mois, il aura $a(1+t)^{n-2}$ au bout des n–2 mois restants, etc... La dernière somme reçue, au $n^{\text{ème}}$ mois, est a et ne rapporte aucun intérêt. Son capital final sera donc :

$$a(1+t)^{n-1} + a(1+t)^{n-2} + ... + a(1+t) + a = a\,\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

qui doit être égal à $M(1+t)^n$, d'où la relation :

$$a = \frac{Mt}{1 - (1+t)^{-n}}$$

Une autre explication de cette formule sera donnée au paragraphe suivant.

Indiquons par ailleurs qu'il existe deux méthodes pour passer du temps mensuel t au taux annuel T :

❑ La méthode exacte du taux actuariel (tenant compte des intérêts cumulés) :

$$1 + T = (1 + t)^{12}$$

Ainsi, un taux annuel de 6% correspond à un taux mensuel de 0,4868 %.

❑ La méthode du taux proportionnel consistant à annoncer la formule $t = \dfrac{T}{12}$ (tout en pratiquant quand même des intérêts cumulés). Ainsi, un taux proportionnel annoncé de 6% correspond à un taux mensuel de 0,5 %, et donc à un taux annuel actuariel réel de 6,17 % = $1{,}005^{12} - 1$. Le prêteur a avantage à parler de taux proportionnel. A charge pour l'emprunteur de le convertir en taux actuariel qui lui sera vraiment appliqué.

Application numérique : emprunt de 40 000 Euros au taux annuel de 6% sur 10 ans. Le montant mensuel des remboursements est de 440,90 Euros au taux actuariel, et de 444,08 au taux proportionnel. La différence est minime, mais, sur 120 mois, cela représente quand même 381,60 Euros.

3– Suites arithmético–géométriques

Une telle suite est de la forme :

$$\forall\ n,\ u_{n+1} = au_n + b$$

avec $b \neq 0$ et $a \neq 1$, sinon on retrouve les suites précédentes.

Une solution particulière est obtenue pour la suite constante l telle que $l = al + b$. Cette valeur l est d'ailleurs la limite éventuelle de la suite si elle converge. Soit (v_n) la suite auxiliaire définie par :

$$\forall\ n,\ v_n = u_n - l.$$

On a alors : $\forall\ n,\ v_{n+1} = a.v_n$ autrement dit, la suite (v_n) est la solution générale de l'équation homogène. On a $v_n = a^n\ v_0$ et $u_n = l + a^n\ (u_0 - l)$

La suite converge donc si et seulement si $|a| < 1$ ou $u_0 = l$.

EXEMPLE :

Un prêteur dispose d'une somme M qu'il consent à prêter au taux d'intérêt mensuel t. Un emprunteur demande à recevoir cette somme M en contrepartie d'un paiement mensuel d'une somme a, pendant n mensualités. Quelle est la valeur de a en fonction de M, t et n ?

Au moment de payer la $k^{\text{ème}}$ mensualité, l'emprunteur a déjà remboursé une partie du capital. Soit C_{k-1} le capital restant à rembourser après le k–$1^{\text{ème}}$ versement, de sorte que $C_0 = M$ et $C_n = 0$. Le paiment de la mensualité a consiste d'une part à rembourser la partie du capital $C_{k-1} - C_k$, d'autre part à payer des intérêts sur le capital C_{k-1} pendant un mois, de sorte que :

$$a = C_{k-1} - C_k + tC_{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad C_k = (1+t)C_{k-1} - a$$

On reconnaît dans (C_k) une suite arithmético-géométrique, de point fixe $l = (1+t)l - a$, soit $l = \dfrac{a}{t}$

$$\Rightarrow \quad C_k - \frac{a}{t} = (1+t)(C_{k-1} - \frac{a}{t})$$

$$\Rightarrow \quad C_k - \frac{a}{t} = (1+t)^k(C_0 - \frac{a}{t}) = (1+t)^k(M - \frac{a}{t})$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{a}{t} = (1+t)^n(M - \frac{a}{t}) \text{ puisque } C_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{Mt}{1 - (1+t)^{-n}}$$

4– Suites récurrentes linéaires

Une telle suite est de la forme :

$$\forall\ n,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\ (*)$$

avec $b \neq 0$.

<u>Méthode 1)</u>

Les suites géométriques r^n non nulles solution de cette récurrence vérifient :

$$r^2 = ar + b$$

Soit r solution (éventuellement complexe). Cherchons les autres solutions sous la forme : $u_n = v_n r^n$. On obtient :

$$v_{n+2}\, r^2 = ar\, v_{n+1} + b\, v_n$$
$$\Leftrightarrow \quad v_{n+2}(ar+b) = ar\, v_{n+1} + b\, v_n$$
$$\Leftrightarrow \quad (ar+b)(v_{n+2}-v_{n+1}) = -b(v_{n+1} - v_n)$$

Donc la suite $v_{n+2} - v_{n+1}$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{b}{ar+b}$ ou $-\dfrac{b}{r^2}$ ou enfin r'/r si r' est l'autre racine. On a donc :

$$v_n - v_{n-1} = \mathrm{C}\,(\frac{r'}{r})^n, \text{ où C est une constante.}$$

On en déduit que $v_n = \mathrm{C}(\frac{r'}{r})^n + \mathrm{C}(\frac{r'}{r})^{n-1} + \ldots + \mathrm{C}(\frac{r'}{r}) + v_0$

Si $r = r'$, alors v_n est de la forme $\alpha n + \beta$, et u_n est combinaison des suites r^n et nr^n.

Si $r \neq r'$, alors v_n est de la forme $\alpha(\frac{r'}{r})^n + \beta$, et u_n est combinaison de r^n et de r'^n.

Méthode 2)

Posons $S = \{(u_n) \mid (u_n) \text{ vérifie } (*)\}$

S est un sous–espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites. Cet espace est de dimension 2. En effet, considérons les deux suites particulières U et V éléments de S, définies par $\mathrm{U}_0 = 1$ et $\mathrm{U}_1 = 0$, $\mathrm{V}_0 = 0$ et $\mathrm{V}_1 = 1$. On prouve facilement par récurrence que toute suite u de S s'écrit :

$$u = u_0\mathrm{U} + u_1\mathrm{V}$$

Cette décomposition est unique. Ceci prouve que (U,V) constitue une base de S. Cette base est malheureusement de peu d'utilité car elle ne permet pas de calculer le terme général de la suite. Cherchons donc une autre base. Cherchons les éléments de S qui sont des suites géométriques (r^n). r doit alors vérifier :

$$r^2 = ar + b$$

Cette équation s'appelle équation caractéristique associée à la suite.

Plusieurs cas sont à considérer :

❑ sur $\mathbb{C}$:

Si le discriminant est non nul, il y a deux suites différentes de raison r_1 et r_2. Il n'est pas difficile de montrer que ces deux suites forment un système libre et donc une base de S. Cette base permet de calculer le terme général de toute suite de S.

Si le discriminant est nul, alors il y a une racine unique r, égale à $\dfrac{a}{2}$, et $b = -\dfrac{a^2}{4}$. Cherchons une autre suite sous la forme $v_n.r^n$. On obtient alors :

$$v_{n+2}.r^2 = a.v_{n+1}.r + b.v_n$$
$$\Leftrightarrow \quad v_{n+2}.\frac{a^2}{4} = a^2.\frac{v_{n+1}}{2} - a^2.\frac{v_n}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$$
$$\Leftrightarrow \quad v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1} - v_n.$$

Ainsi $v_{n+1} - v_n$ est constante. On peut prendre par exemple comme solution particulière $v_{n+1} - v_n = 1$ ou $v_n = n$.

Les deux suites (r^n) et (nr^n) sont indépendantes. Elles forment une base de S.

❑ sur $\mathbb{R}$.

Si le discriminant est positif, cf ci–dessus

Si le discriminant est nul, cf ci–dessus

Si le discriminant est négatif, alors, en tant que sous–espace vectoriel complexe, on peut prendre comme base les suites géométriques de raison complexe r_1 et r_2, nécessairement conjuguées si a et b sont réels. Mais on peut également prendre $Re(r_1^n)$ et $Im(r_2^n)$ qui, étant combinaison linéaires de r_1^n et r_2^n sont bien élément de S, sont réelles, et engendrent S.

PROPOSITION :

Soit la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On associe à cette relation l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$. L'ensemble des suites solutions forme un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est :

Si le discriminant est non nul : $(r1^n)$ et (r_2^n) où r_1 et r_2 sont solution de l'équation caractéristique. Dans le cas d'un discriminant négatif sur $\mathbb{R}$, on prend $(Im(r_1^n))$ et $(Re(r_1^n))$.

Si le discriminant est nul : (r^n) et (nr^n) où r est racine double de l'équation caractéristique.

EXEMPLES :

$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \quad \Rightarrow \quad u_n = \lambda + 2^n\mu$

$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci) $\quad \Rightarrow \quad u_n = \lambda(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \mu\,(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \quad \Rightarrow \quad u_n = \lambda 2^n + \mu n2^n$

5– Suites récurrentes

La suite du paragraphe est réservée aux MPSI

On s'intéresse aux suites de la forme $u_n = f(u_{n-1})$ où f est une fonction continue définie sur un intervalle I. De façon que la suite soit définie pour tout n, nous supposerons que f(I) est inclus dans I.

a) *limite éventuelle* :

Si l est une limite possible de la suite, alors, en passant à la limite dans la relation de récurrence, $l = f(l)$. De tels points sont appelés points fixes de f.

Dans toutes les études qui suivent, un graphique est de la plus grande utilité.

b) *f croissante* :

Une fois que l'on a trouvé les limites éventuelles, on partage I en intervalles de la forme $[a, b]$, où a et b sont des limites éventuelles ou $+\infty$ ou $-\infty$, ce qui est possible le plus souvent, sauf cas d'une fonction f pathologique. Commençons par supposer $[a, b]$ borné. On a alors :

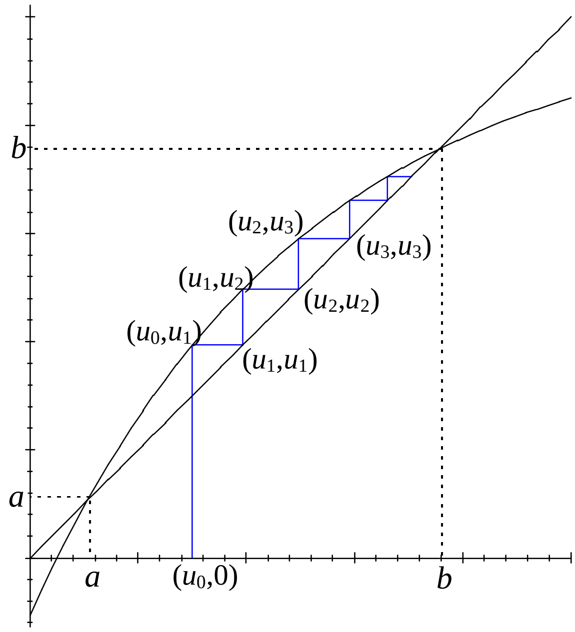
$f(a) = a$

$a < x < b \Rightarrow f(a) \le f(x) \le f(b) \Rightarrow a \le f(x) \le b$

$f(b) = b$

$f(x) - x$ est de signe constant sur $[a, b]$.

Traitons d'abord le cas ou $f(x) - x \ge 0$ sur $]a, b[$. La construction suivante permet d'utiliser un graphique pour conjecturer le comportement de la suite. On trace le graphe de f, ainsi que la droite $y = x$.



On a indiqué sur "l'escalier" qui est dessiné les coordonnées des points anguleux. La suite (u_n) apparaît aussi bien comme suite des abscisses que comme suite des ordonnées. On voit immédiatement que la suite est croissante majorée par b. Vérifions-le :

Soit u_0 élément de $]a, b[$. On a alors :

i) $\forall\ n,\ u_n \in [a, b]$.

Cette propriété est vraie pour $n = 0$. Si elle est vraie pour $n-1$, alors on a :

$a \leq u_{n-1} \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(u_{n-1}) \leq f(b)$ car f est croissante

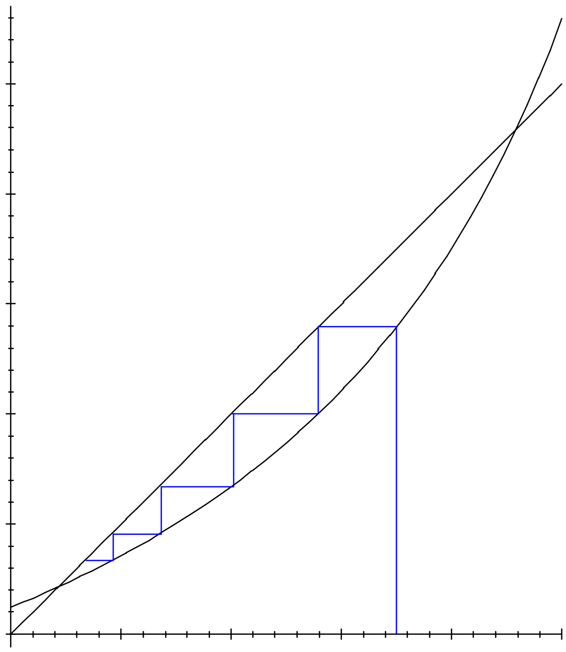
$\Rightarrow a \leq u_n \leq b$ car $f(a) = a$, $f(u_{n-1}) = u_n$ et $f(b) = b$.

ii) (u_n) est croissante.

En posant $x = u_{n-1}$, on a en effet $f(x) \geq x \Rightarrow u_n \geq u_{n-1}$.

iii) (u_n) est croissante majorée par b, donc est convergente. Sa limite éventuelle est l, point fixe supérieur ou égal à u_0 et inférieur ou égal à b. Le seul qui convienne est b. Ainsi la suite converge vers b.

Dans le cas où $f(x) - x \leq 0$ sur $]a, b[$, on montre de même que la suite est décroissante, convergente vers a.



Ainsi, le sens de variation de la suite n'est pas lié à celui de f, mais seulement à la position de $f(x)$ par rapport à x. On a le résultat suivant :

f croissante sur I $\Rightarrow (u_n)$ monotone.

qui peut d'ailleurs se montrer directement par récurrence.

Considérons maintenant le cas d'un intervalle partitionnant I non borné, par exemple $[a, +\infty[$ et $f(x) - x > 0$ sur $[a, +\infty[$. On montre comme précédemment que la suite reste dans $[a, +\infty[$, et est croissante. Si elle convergeait, ce serait vers un point fixe l supérieur à a, ce qui est contraire à notre hypothèse. On en conclut donc que la suite ne converge pas, et qu'elle tend donc vers $+\infty$. Si $f(x) - x < 0$, la suite est décroissante et converge vers a. On traitera de même le cas $]-\infty, b]$.

Exemple 1 :
$f(x) = \sqrt{2x+3}$. Le point fixe est 3. Toutes les suites convergent vers 3.

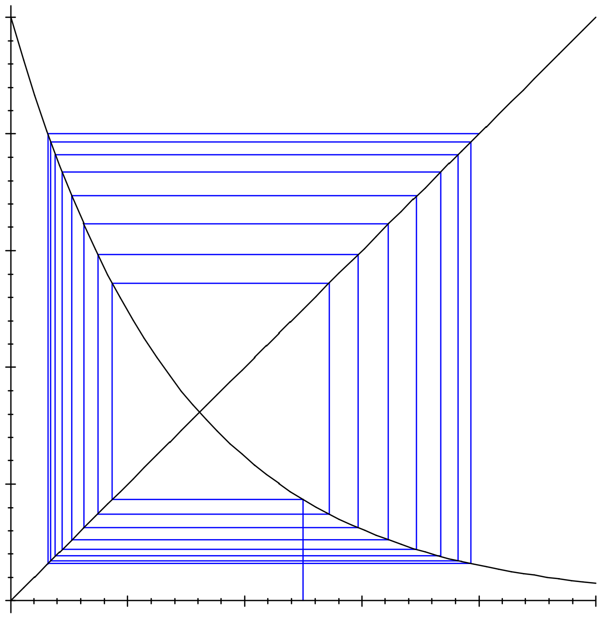
Exemple 2 :
$f(\text{x}) = 2\exp(x-2)$. Il existe deux points fixes, l'un attractif, l'autre répulsif.

c) *f décroissante* :
On peut distinguer le cas de la sous–suite de rang pair (u_{2n}) et de rang impair (u_{2n+1}) car :

$u_{2n} = f \circ f(u_{2n-2}) = g(u_{2n-2})$

$u_{2n+1} = f \circ f(u_{2n-1}) = g(u_{2n-1})$

avec $g = f \circ f$ croissante. On peut donc appliquer à g l'étude précédente. Chacune des deux suites est donc monotones, et de monotonie opposée car $u_{2n+1} = f(u_{2n})$, donc si (u_{2n}) croît par exemple, (u_{2n+1}) décroît. Il se peut que la suite admette une limite, mais aussi que (u_{2n}) tende vers l et (u_{2n+1}) vers l' avec $l = f(l')$ et $l' = f(l)$. C'est le cas dans l'illustration ci-dessous :



Il peut aussi ne pas y avoir de limite, la suite (u_n) tendant vers l'infini.

On peut aussi essayer de majorer $\left|u_n - l\right|$ où l est une limite éventuelle.
D'une manière générale, on montrera par récurrence que, si l est point fixe de f, $u_n - l$ change de signe à chaque incrémentation de n.

EXEMPLE 1 :

$f(x) = \sqrt{\dfrac{4-3x}{10}}$

On montrera que la suite n'est définie que pour $u_0 \in [-\dfrac{124}{27}, \dfrac{4}{3}]$. Le point fixe est $\dfrac{1}{2}$. On a, en multipliant par la quantité conjuguée :

$$\left|u_{n+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3\left|\dfrac{1}{2} - u_n\right|}{10\sqrt{\dfrac{4-3x}{10}} + 5}$$

$$\Rightarrow \qquad \left|u_{n+1} - \frac{1}{2}\right| \le \frac{3}{5}\left|u_n - \frac{1}{2}\right|$$

Donc la suite converge vers $\dfrac{1}{2}$.

EXEMPLE 2 :
$f(x) = \dfrac{3}{2x^2 + 1}$

Le point fixe est 1. La méthode de l'exemple 1 ne donne pas grand chose. On étudie les suites de rang pair, et de rang impair. On pose g = f o f. Le signe de g(x) – x est celui de :

$$3(2x^2+1)^2 - (2x^2+1)^2x - 18x = (x-1)(2x^2+2x+3)(-2x^2+6x-1)$$

g admet deux points fixes supplémentaires : $\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{2}$. On a alors l'une des deux sous–suites qui tend vers l'un des points fixes, et l'autre qui tend vers l'autre, sauf dans le cas particulier où $u_0 = 1$, auquel cas la suite est constante.

d) *f quelconque* :

?

L'étude peut se révéler extrêmement complexe, et fait l'objet actuellement de recherches très poussées. Les suites que l'on obtient sont liées aux notions de fonctions chaotiques, de fractals, de sensibilité aux valeurs initiales, d'effet papillon... On se reportera à l'annexe I, *Fonctions chaotiques*.
Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.

6– Suites homographiques

Un cas particulier de suite récurrente est :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} = f(u_n)$$

avec $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

On se place sur $\mathbb{C}$. Afin d'éviter le cas de suite dont un terme est non défini à cause du dénominateur qui s'annule, on prolonge parfois la fonction à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en posant f(∞) = $\dfrac{a}{c}$ et $f(-\dfrac{d}{c}) = \infty$. On cherche les points fixes de f, c'est-à-dire les réels x tels que $f(x) = x$ (ce sont les limites potentielles de la suite), ce qui conduit à une équation du second degré.

S'il existe deux racines distinctes (éventuellement complexes) α et β, on étudie la suite auxiliaire :

$$v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$$

On vérifie que cette suite est géométrique, ce qui permet de trouver le terme général de la suite initiale. On remarquera que si les racines sont non réelles, la suite initiale ne peut pas converger, puisqu'il n'existe pas de points fixes dans $\mathbb{R}$.

S'il existe une racine double α, on considère la suite auxiliaire :

$$v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$$

On vérifie que cette suite est arithmétique. On en déduit que v_n tend vers ∞ et donc que u_n tend vers α, dans tous les cas.

EXEMPLES :

❑ $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$

Les points fixes vérifient :

$$x = \frac{x}{3 - 2x} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Considérons la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$. Alors $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{u_n}{3u_n - 3} = \dfrac{1}{3} v_n$.

Donc $v_n = \dfrac{v_0}{3^n}$ et $u_n = \dfrac{v_n}{v_n - 1} = \dfrac{v_0}{v_0 - 3^n} = \dfrac{u_0}{u_0 - 3^n(u_0 - 1)}$

❑ $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$

Les points fixes vérifient :

$$x = \frac{x + 1}{x - 1} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Notons les deux racines $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ et $\beta = 1 - \sqrt{2}$. On a donc $\alpha = \dfrac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$, $\beta = \dfrac{\beta + 1}{\beta - 1}$, $\alpha\beta = -1$.

Considérons la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$. Alors $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \dfrac{(1-\alpha)\, u_n + 1 + \alpha}{(1-\beta)\, u_n + 1 + \beta} = \dfrac{1 - \alpha}{1 - \beta} v_n$

avec $\dfrac{1 - \alpha}{1 - \beta} = -1$. Donc $v_{n+1} = -v_n$ et $v_n = (-1)^n v_0$.

Donc $u_n = \dfrac{\beta v_n - \alpha}{v_n - 1} = \dfrac{\beta(-1)^n v_0 - \alpha}{(-1)^n v_0 - 1}$ = etc...

❑ $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{1 - u_n}$

Les points fixes vérifient :

$$x = \frac{1 + x}{1 - x} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm i.$$

Considérons la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n - i}{u_n + i}$. Alors $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - i}{u_{n+1} + i} = \dfrac{(1+i)\, u_n + 1 - i}{(1-i)\, u_n + 1 + i} = \dfrac{1+i}{1-i} v_n$ avec $\dfrac{1+i}{1-i} = i$

. Donc $v_{n+1} = i\, v_n$ et $v_n = i^n v_0$.

Donc $u_n = \dfrac{iv_n + i}{1 - v_n} = \dfrac{i^{n+1} v_0 + i}{1 - i^n v_0}$ = etc...

❑ $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$

Les points fixes vérifient :

$$x = \frac{3x - 2}{2x - 1} \Leftrightarrow x = 1$$

Considérons la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. Alors $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 1} = 2 + v_n$. Donc $v_n = 2n + v_0$

et $u_n = \dfrac{1 + v_n}{v_n} = \dfrac{2n + v_0 + 1}{2n + v_0} = \dfrac{2n(u_0 - 1) + u_0}{2n(u_0 - 1) + 1}$

IV : Comparaison des suites numériques

1– Suites équivalentes

DEFINITION :

i) Une suite (x_n) est négligeable devant une suite (y_n) s'il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que $x_n = y_n\varepsilon_n$ pour tout n.

ii) Une suite (x_n) est équivalente à une suite (y_n) s'il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que $x_n = y_n.(1+\varepsilon_n)$ pour tout n.

iii) Une suite (x_n) est dominée par une suite (y_n) s'il existe une constante C telle que, pour tout n, $|x_n| \leq C|y_n|$.

Pour des suites non nulles, cela signifie :

i) $\dfrac{x_n}{y_n}$ tend vers 0. On note $x_n = o(y_n)$

ii) $\dfrac{x_n}{y_n}$ tend vers 1. On note $x_n \sim y_n$.

iii) $(\dfrac{x_n}{y_n})$ est bornée. On note $x_n = O(y_n)$

Les propriétés suivantes résultent directement des définitions :

Si $x_n = y_n + z_n$ et si (z_n) est négligeable devant (y_n), alors (x_n) et (y_n) sont équivalentes.

Si $x_n \sim x_n'$ et $y_n \sim y_n'$, alors $x_n x_n' \sim y_n y_n'$ et $\dfrac{x_n}{x_n'} \sim \dfrac{y_n}{y_n'}$

2– Suites de références

On a :

Suites tendant vers $+\infty$: Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $k > 1$, on note ci-dessous les suites par ordre de dominance. Une suite est négligeable devant les suites situées à sa droite.

$(\ln n)^\alpha \qquad n^\beta \qquad k^n \qquad n!$

Suites tendant vers 0 : Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $k < 1$

$\dfrac{1}{n!} \qquad k^n \qquad \dfrac{1}{n^\beta} \qquad \dfrac{1}{(\ln n)^\alpha}$

Le cas des suites tendant vers 0 se déduit du cas des suites tendant vers l'infini par inversion. Il suffit donc de montrer le permier cas :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\beta/\alpha}} = 0$ qu'il suffit d'élever à la puissance α.

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^\beta}{k^n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^\beta}{e^{n\ln(k)}} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n^{\beta/\ln(k)}}{e^n}\right)^{\ln(k)} = 0$ car $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^{\beta/\ln(k)}}{e^n} = 0$

Enfin, pour le calcul de $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{k^n}{n!}$, posons K un entier supérieur à k, prenons n supérieur à K et écrivons :

$$\frac{k^n}{n!} = \frac{k^n}{1 \times 2 \times ... \times K \times (K+1) \times ... \times n} = \frac{k^K}{1 \times 2 \times ... \times K} \times \frac{k^{n-K}}{(K+1) \times (K+2) \times ... \times n}$$

$$\leq \frac{k^K}{1 \times 2 \times \ldots \times K} \times \left(\frac{k}{K+1}\right)^{n-K}$$ dont la limite est nulle puisque $\left(\frac{k}{K+1}\right)^{n-K}$ est une suite géométrique de raison inférieure à 1.

Annexe I : fonctions chaotiques

le 1- est lisible dès la première année. Le 2- est beaucoup plus difficile. Les points exposés ci-dessous ont fait l'objet de recherches actives lors des dernières décennies, comme le montre la bibliographie suivante :

- A. N. Sharkovski, Coexistence of cycles of a continuing map of a line into itself, *Ukrainian Math. J.*, **16** (1964), p.61-71
- R. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd ed. Addison-Wesley, Redwood City, CA, (1989)
- T. Li & J. Yorke, Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly*, **82** (1975), p.985-992
- C.-H. Hsu & M.-C. Li, Transitivity implies period six, a simple proof, *Amer. Math. Monthly*, **109** (2002), p.840-843

1– Etude d'une suite récurrente

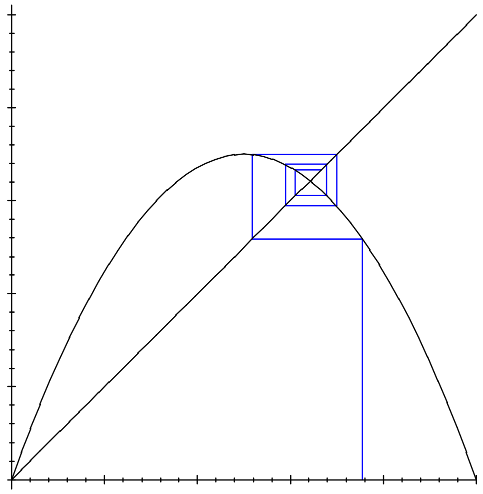
Considérons une fonction polynôme $4\mu x(1-x)$ du second degré (le type de fonction le plus simple qui soit, après les fonctions affines) et considérons la suite récurrente définie par :

$$x_{n+1} = 4\mu x_n(1 - x_n)$$

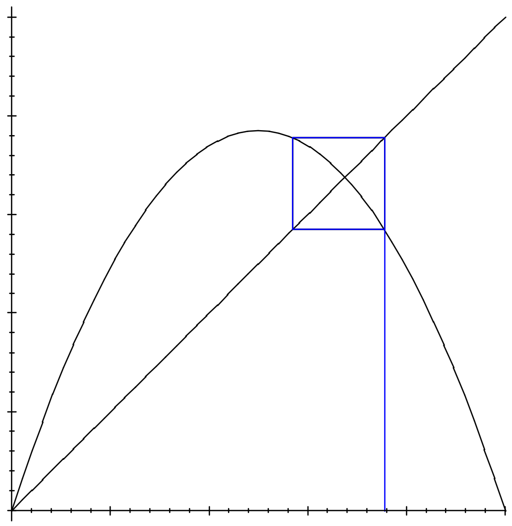
où $x_0 \in [0,1]$ et $\mu \in [0,1]$

Cette suite particulière est caractéristique de phénomènes tout à fait généraux, relatifs à de nombreuses suites, et que l'on pourra tester numériquement sur une simple calculatrice :

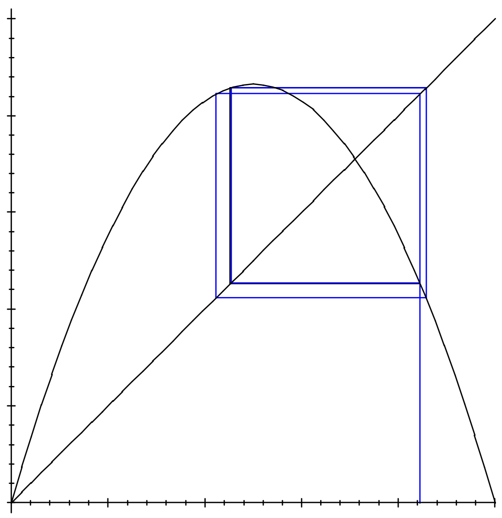
❑ convergence vers une limite pour $\mu < 0,75$, avec (x_n) monotone ou non. Ci-dessous, $\mu = 0,7$. La suite converge vers l'unique point fixe positif.



❑ bifurcation à partir de $\mu_1 = 0,75$ de la suite vers deux valeurs, ci-dessous, pour $\mu = 0,77$. Le point fixe s'est scindé en deux valeurs s'éloignant peu à peu au fur et à mesure que μ augmente. On a pris x_0 proche d'une des deux valeurs.

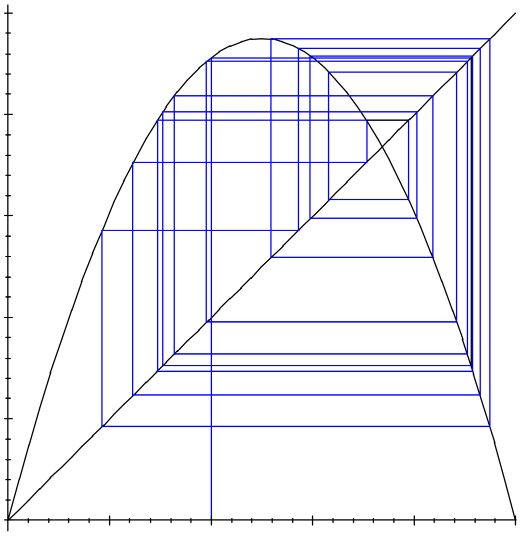


puis bifurcation vers quatre valeurs pour une certaine valeur du paramètre μ_2, ci-dessous pour $\mu = 0{,}865$. Les deux valeurs précédentes se scindent à nouveau en deux.



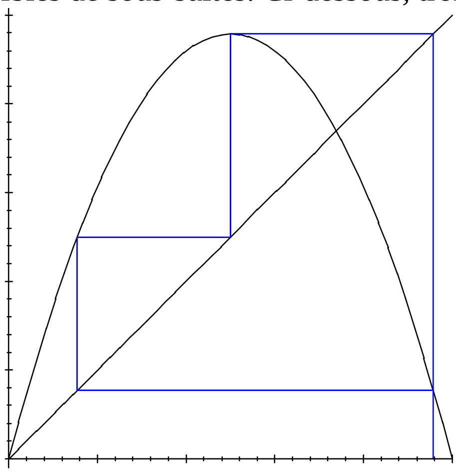
puis vers huit valeurs pour une valeur μ_3 du paramètre, ... Les μ_i convergent vers μ_∞. Feigenbaum a montré que $\dfrac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n}$ convergeait vers une limite appelée depuis nombre de Feigenbaum. Cette limite est une constante universelle dans le sens où elle n'est pas propre à la fonction $4\mu x(1-x)$, mais s'applique également aux fonctions de même forme, telles $\mu\sin(\pi x)$.

❑ comportement chaotique de la suite (x_n) lorsque $\mu > \mu_\infty$. Ci-dessous pour $\mu = 0.95$.

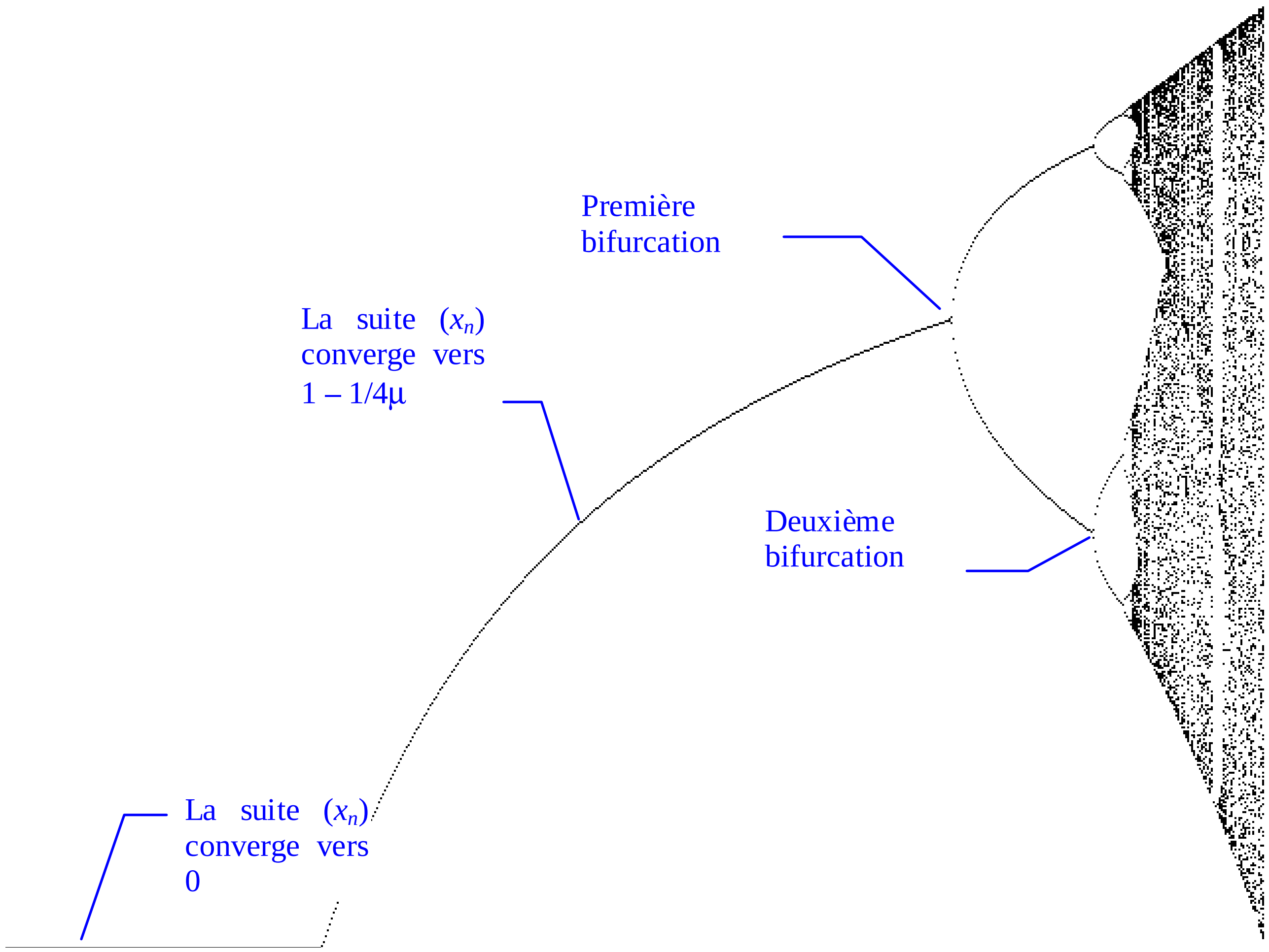


Cela ne signifie pas seulement que la suite ne converge pas, mais aussi qu'il est impossible d'être certains de la valeur de la suite au bout de quelques termes. Toujours pour μ = 0.95, en partant de x_0 = 0.4, on obtient un résultat x_{50} différent suivant la calculatrice utilisée (par exemple 0.5804900348 pour ma calculatrice et 0.2966295248 pour MAPLE). L'itération est ici extrêmement sensible aux erreurs d'arrondis. Par exemple, MAPLE donne x_{50} = 0.2247101979 si on part de x_0 = 0.400000001. Si votre calculatrice donne un résultat encore différent, c'est **normal**. Cette sensibilité rend toute prévision à long terme impossible. Une telle sensibilité a été mise en évidence dans les calculs relatifs aux prévisions météorologiques et explique la limitation à huit jours de ces prévisions. Une infime variation des données initiales donnera au bout de ce délai un temps prévu totalement différent. L'image illustrant ce phénomène est passée dans le grand public sous le nom d'effet papillon (un battement d'aile de papillon suffira à provoquer un cyclône) et est en passe de figurer à côté du mythe de la pomme de Newton et de la baignoire d'Archimède.
A noter cependant qu'il y a vingt ans, les prévisions météorologiques étaient limitées à un ou deux jours. Les progrès sont dûs d'une part à la prise en compte des données mondiales et non plus seulement des données nationales pour le calcul du climat, et à l'augmentation de vitesse des ordinateurs. Nul intérêt de prévoir le temps sur une semaine s'il faut un mois de calcul pour cela !! Il n'en reste pas moins vrai que, quels que soient les progrès techniques réalisés, il reste une barrière inhérente au problème et à son instabilité.

Revenons à notre suite récurrente. Il existe certaines valeurs de μ dans la zone $\mu > \mu_\infty$ pour laquelle le comportement redevient régulier, et en particulier des valeurs du paramètre pour lesquelles la suite (x_n) admet 3, 5, 7, ... limites possibles de sous-suites. Ci-dessous, trois valeurs pour μ = 0,9580.

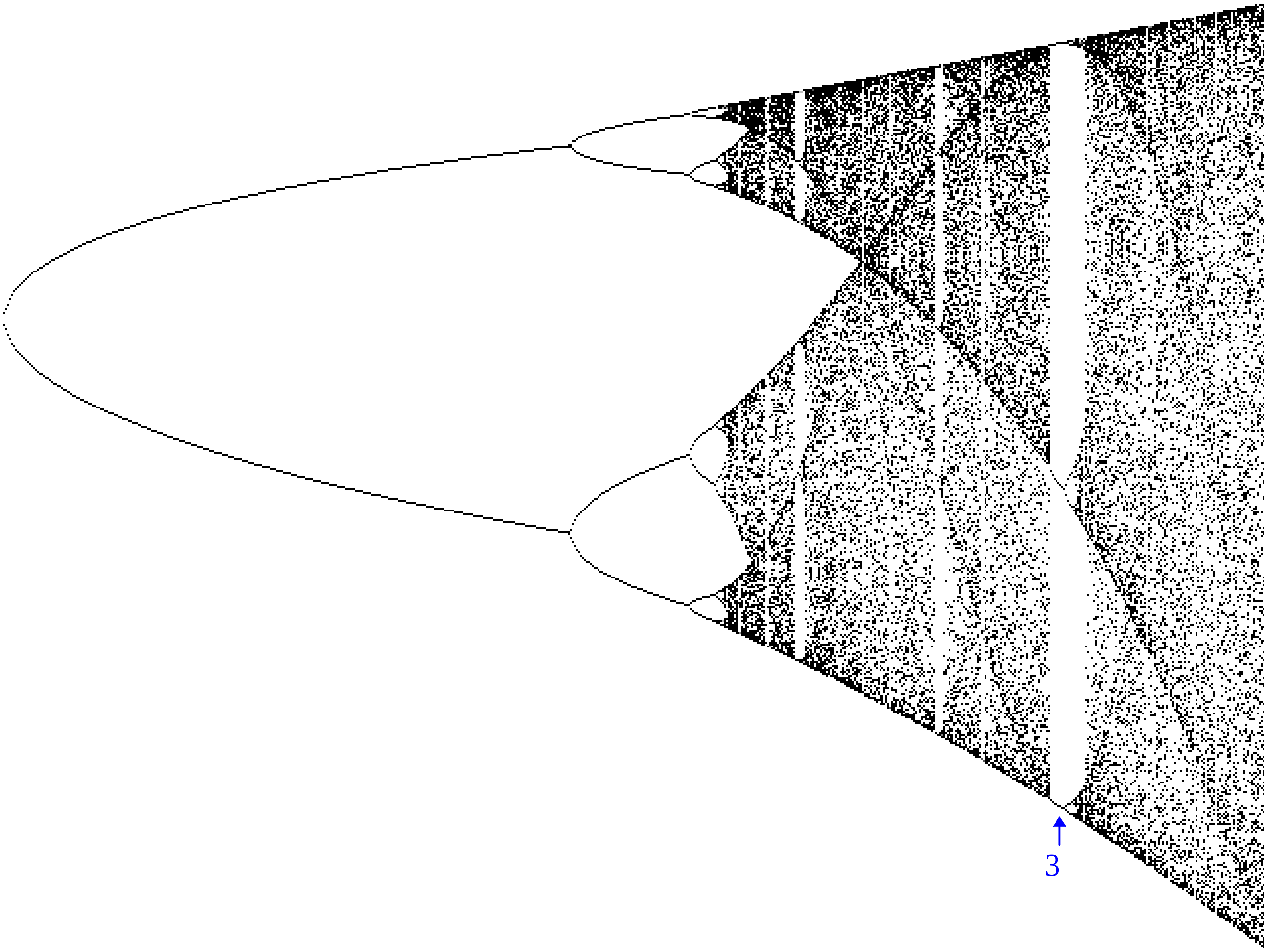


Ci-dessous, le graphe est construit de la façon suivante : en abscisse on porte μ, et en ordonnées, on porte des valeurs x_n de la suite pour n grand.



Lorsque μ est inférieur à $\frac{1}{4}$, la suite tend vers 0. Pour μ compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, la suite tend vers le point fixe $x = 4\mu x(1 - x)$, soit $x = 1 - \frac{1}{4\mu}$, ce qui correspond à la branche d'hyperbole. Ensuite, la suite se scinde en deux, la sous-suite de rang pair convergeant vers une limite et celle de rang inpair vers une autre, puis chacune se scinde à nouveau en deux, etc...

Au dela de μ_∞ apparaît une nuage de points. Si on agrandit cette zone, on verra apparaître une bande de valeurs de μ où la suite admet trois valeurs d'adhérence.



D'autres bandes apparaissent, correspondant à cinq, sept... valeurs.

L' ordre dans lequel apparaissent ces valeurs lorsque μ croît est décrit de la façon suivante. Considérons la suite S d'entiers (ordre de Sarkovski) :

3 5 7 9 11 ...∞ 6 10 14 18 22 ...∞ 12 20 28 36 44 ...∞ ...∞ ... 32 16 8 4 2 1

Si un cycle de période *p* apparaît dans la suite (x_n) pour une valeur μ du paramètre, la suite a dû avoir, pour des valeurs du paramètre inférieures à μ, des cycles de périodes *q*, où *q* suit *p* dans la suite S. Ainsi, la période 7 apparaît APRES les périodes 9, 11...6...4, 2, 1. Autrement dit, les périodes apparaissent dans l'ordre :

1 2 4 8 16 32 ... ∞ ... ∞... 44 36 28 20 12 ∞... 22 18 14 10 6 ∞... 11 9 7 5 3

Ainsi, à gauche de la bande indiquée par le chiffre 3 dans le dessin précédent, ***toutes*** les périodes sont déjà apparues.

L'ordre de Sarkovski apparaît également dans le résultat suivant, démontré en 1964. Si *f* est une fonction continue admettant un cycle de période *p*, (i.e. il existe *x* tel que $f \circ f \circ f \ldots \circ f(x) = x$ où *f* est composée *p* fois), alors *f* admet des cycles de période *q*, où *q* suit *p* dans l'ordre de Sarkovski. En particulier, si *f* admet un cycle de période 3, *f* admet des cycles de n'importe quelle période.
Par ailleurs, pour tout *n*, il existe une fonction continue admettant un cycle d'ordre *n* mais aucun cycle d'ordre *m* pour *m* précédant *n*.

Enfin, il existe une fonction continue admettant des cycles d'ordre 2^n et eux seulement. On peut montrer qu'un tel exemple est donné par la fonction suivante :

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 2x + \frac{1}{2} && \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\
&= -\,2x + \frac{3}{2} && \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\
&= 2x - \frac{3}{2} && \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1
\end{aligned}
$$

Dans l'expression $f(x) = 4\mu x(1 - x)$, μ est choisi entre 0 et 1 de façon que [0,1] soit stable par f. Ce n'est plus le cas si $\mu > 1$. Dans ce cas, [0,1] se divise en trois intervalles, symétriques par rapport à $\frac{1}{2}$, I, J et K tels que $f(\mathrm{I}) = f(\mathrm{K}) = [0,1]$ et $f(\mathrm{J})$ soit inclus dans $]1,+\infty[$. Si on s'intéresse aux points dont les itérés restent dans [0,1], il faut donc enlever J au segment [0,1], mais également un segment à I et à K, etc... de sorte que l'ensemble des points dont l'orbite est dans [0,1] forme un ensemble dit ensemble de Cantor.

2– Fonctions chaotiques

Soit E l'ensemble des suites $s = (s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ formées de 0 ou de 1. E est muni de la distance suivante :

$$d(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

Deux suites "proches" coïncident sur un certain nombre de termes. Elles sont d'autant plus proches que le nombre de termes pour lesquelles elles coïcident est grand. On pose $\sigma : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$

$s \to \sigma(s) = s_1 s_2 \ldots s_n \ldots$

$\sigma(s)$ est la suite s dont on a supprimé le terme initial. On peut vérifier que :

❑ σ est continue. (Pour que $\sigma(s)$ et $\sigma(t)$ coïncident sur n termes, il suffit que s et t coïncident sur n+1 termes)

❑ *L'ensemble des points périodique de σ est dense (*).* (Toute suite s peut être approchée d'aussi près que l'on veut par une suite périodique de période suffisamment grande)

❑ Il en est a fortiori de même de l'ensemble des points x ultimement périodiques (i.e. $\exists$ N tq $(\sigma^n(x))_{n>\mathrm{N}}$ est périodique).

❑ Il en est également de même des points non ultimement périodiques.

❑ Il existe un point de E dont l'orbite est dense. Prendre par exemple le point 0100011011000001... constitué de 0 1 00 01 10 11 000 001 ... mis bout à bout.

❑ σ *est topologiquement transitive (**)*, ce qui signifie que, pour tout ouvert U et V, il existe n entier et x dans U tel que $\sigma^n(x)$ soit dans V. (Ainsi, on peut passer de tout ouvert U à tout ouvert V par l'intermédiaire de σ, à condition de bien choisir son point initial et d'itérer suffisamment σ). Ce point résulte du précédent, car on montre que toutes les fonctions possédant une orbite dense sont topologiquement transitives.

❑ σ *possède une dépendance sensible aux conditions initiales (***)*, ce qui signifie que :

$$\exists\, \delta > 0, \forall\, x, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, y, \exists\, n \in \mathbb{N}, d(x,y) < \varepsilon \text{ et } d(\sigma^n(x),\sigma^n(y)) > \delta$$

(Si on bouge un peu le point initial de n'importe quelle quantité ε, le point final peut se trouver plus loin que prévu d'une certaine distance δ, à condition d'itérer suffisamment σ).

Une fonction vérifiant (*), (**) et (***) est dite chaotique (au sens de Devaney). Si une fonction est définie sur un ensemble infini, alors (*) et (**) entraîne (***). Voici des exemples de fonctions chaotiques :

EXEMPLE 1 : σ est chaotique. σ sert de modèle de fonction chaotique et, pour montrer qu'une fonction est chaotique, on tente souvent de la relier à σ.

EXEMPLE 2 : Soit $U = \{ z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et soit $f : U \to U$ définie par $f(z) = z^2$. Alors f est chaotique. De même, la fonction $D(\theta) = 2\theta$ est chaotique sur $S_1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Si on décompose un élément de S_1 par un développement non pas décimal, mais binaire, D n'est autre que σ. f est identique à D en considérant l'argument θ de z.

EXEMPLE 3 : Soit $T : [0,1] \to [0,1]$, définie par $T(x) = 2x$ si $x < \frac{1}{2}$ et $T(x) = 2-2x$ si $x \geq \frac{1}{2}$. Alors T est chaotique.

EXEMPLE 4 : Soit $h(x) = 4\mu x(1-x)$. Pour $\mu > 1$, $[0,1]$ n'est pas stable par h. $[0,1]$ est la réunion de deux intervalle I_0 et I_1, dont l'image par h est $[0,1]$. Posons $L = \{x, \forall\ n, h^n(x) \in [0,1]\}$. L est un ensemble de Cantor, stable par h. En outre, pour tout x de L, on peut définir la suite de E $s_0s_1...s_n...$ de façon que $\forall\ n, h^n(x) \in I_{s_n}$. On définit ainsi un homéomorphisme (bijection bicontinue) Φ de L dans E. En outre, l'application h correspond à σ ; en effet, $h = \Phi^{-1} \circ \sigma \circ \Phi$, de sorte que h est chaotique.

EXEMPLE 5 : Soit $N(x)$ définie sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par :

$$N(x) = \frac{x^2-1}{2x} \text{ (avec } N(0) = \infty \text{ et } N(\infty) = \infty)$$

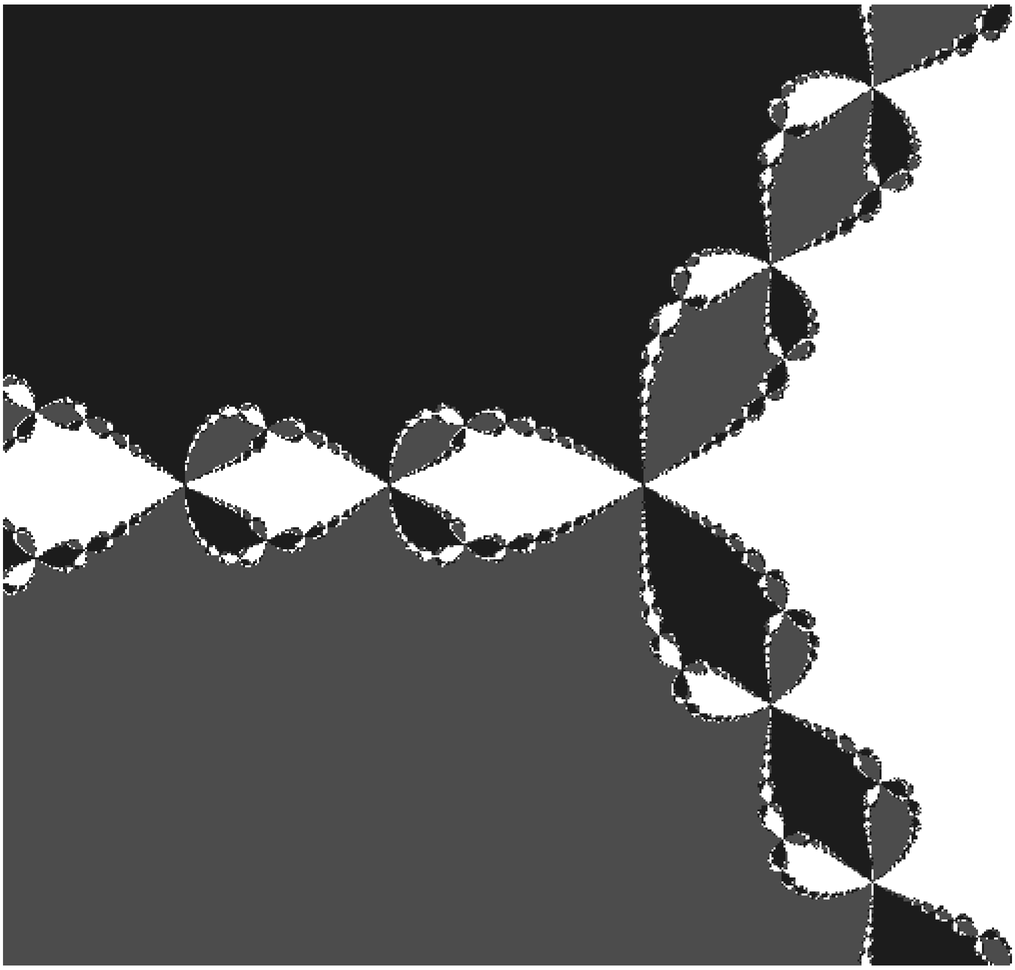
N est la fonction relative à la méthode de Newton pour la recherche des racines du polynôme $P(x) = x^2+1$, à savoir $N(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$. Ces racines étant complexes, la suite $x_{n+1} = N(x_n)$ ne peut converger si on part de x_0 réel. Posons $\Phi(\theta) = \text{cotan}(\theta/2)$, avec $\theta \in S_1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. $\Phi(0) = \infty$. Définissons sur S_1, la fonction $D(\theta) = 2\theta$. On a alors :

$$N = \Phi \circ D \circ \Phi^{-1}$$

de sorte que N est chaotique. Plus généralement, la méthode de Newton dans $\mathbb{C}$ appliquée à un polynôme de degré 2 ayant des racines distinctes est chaotique sur la médiatrice de ces racines.

On montre que la suite $z_{n+1} = N(z_n)$ converge vers i si on part de z_0 ayant une partie imaginaire strictement positive. Elle converge vers $-i$ si on part de z_0 ayant une partie imaginaire strictement négative. Elle a un comportement chaotique si on part de z_0 réel. Le plan complexe est donc divisé en deux zones (les deux demi-plans) où le comportement de la suite est parfaitement prévisible, avec une frontière commune (la droite réelle), où le comportement est chaotique.

Si on applique cette fois la méthode de Newton à la recherche des racines du polynôme $P(z) = z^3 - 1$, à savoir : $N(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2} = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}$, alors la suite peut converger vers 1, $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$ ou j^2. Le plan complexe est divisé en trois zones (qui se déduisent les unes des autres par des rotations de $\frac{2\pi}{3}$), chaque zone étant le domaine de convergence de la suite $z_{n+1} = N(z_n)$ vers chacune des limites possibles. Ces trois zones partagent une frontière commune, ce qui signifie que tout disque de rayon aussi petit soit-il, pris en un point quelconque de la frontière passe par les trois régions. Il va de soi que, si le terme initial z_0 appartient à la frontière, la suite y reste et que son comportement est hautement imprévisible. Une variation infime de la valeur initiale fera converger la suite vers l'une des trois valeurs limites, sans qu'on puisse vraiment savoir a priori laquelle. Ci-après, la zone blanche est le domaine de convergence vers 1.



Annexe II : Caractérisations du corps des réels

Jusqu'au XIXème, les réels ne sont pas définis (comme dans le I-1). Certaines propriétés sont utilisées implicitement. Les mathématiciens du XIXème se sont employés à les mettre à jour explicitement. Ainsi, Cauchy utilise-t-il vers 1820 une propriété analogue à celle que nous appelons propriété des segments emboîtés. Plus tard, voici ce que Dedekind (1831–1916) écrit sur la droite réelle (*Continuité et nombres irrationnels* – 1872) :

> *La comparaison entre le domaine $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et une droite induit à reconnaître que le premier est lacunaire, incomplet ou discontinu, tandis que la droite doit être dite complète, non lacunaire ou continue. Mais en quoi consiste en fait cette continuité ?[...] J'y ai réfléchi longtemps en vain, mais finalement j'ai trouvé ce que je cherchais. Les avis sur cette découverte seront peut–être partagés ; je crois cependant que la plupart des gens en trouveront le contenu bien trivial. Il consiste en ceci. [...] Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes, telles que tout point de la*

première classe soit situé à gauche de tout point de la seconde classe, il existe un point et un seul qui opère cette partition de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions.

La propriété précédente est appelée propriété des coupures de Dedekind. Cependant, la plupart des cours de premier cycle universitaire (et en particulier le programme de CPGE) fait reposer les propriétés de $\mathbb{R}$ sur l'existence d'une borne supérieure. L'objet de ce paragraphe est de montrer que les diverses présentations (existence d'une borne supérieure, coupures de Dedekind, segments emboîtés de Cauchy, Propriété de Cousin) sont équivalentes.

La lecture du paragraphe est assez difficile et ne saurait intéresser en priorité que des étudiants de MPSI ou MP s'intéressant particulièrement aux mathématiques.

Considérons les propriétés suivantes, où $\mathbb{K}$ désigne un corps muni d'une relation d'ordre total compatible avec les opérations du corps (entre autres $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) :

(P_1) ***(Propriétés des coupures de Dedekind)** Si (A,B) forme une partition de $\mathbb{K}$ de façon que :*

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$$

alors il existe un élément x_0 de $\mathbb{K}$ tel que :

ou bien $A = \{ a \in K / a \leq x_0 \}$ et $B = \{ b \in K / b > x_0 \}$
ou bien $A = \{ a \in K / a < x_0 \}$ et $B = \{ b \in K / b \geq x_0 \}$

(P_2) ***(Propriété de la borne supérieure)** Toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.*

(P_3) ***(Propriété de la borne inférieure)** Toute partie non vide minorée admet une borne inférieure.*

(P_4) *a) **(Propriété des segments emboîtés)** Si (a_n) est une suite croissante et (b_n) une suite décroissante telles que :*

$$\forall n, a_n \leq b_n$$

alors il existe un élément x de $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$\forall n, a_n \leq x \leq b_n$$

(x appartient à tous les segments $[a_n, b_n]$).

*b) **(Propriété d'Archimède)** $\forall x > 0, \forall y > 0, \exists n \in \mathbb{N}, x < ny$.*

(P_5) ***(Propriété de Cousin)** Si $a \leq c < d \leq b$ et si δ est une fonction définie sur [a,b] à valeurs strictement positives, alors il existe une sudvivision $c = x_0 < x_1 < \dots < x_n = d$ et des nombres $t_1, \dots, t_n$ tels que, pour tout i, $t_i - \delta(t_i) < x_{i-1} \leq t_i \leq x_i < t_i + \delta(t_i)$. On dit que t_i marque le segment $[x_{i-1}, x_i]$.On dit que la subdivision $\{x_i\}$ marquée par les points t_i est plus fine que δ.*

La propriété (P_5) est peu répandue dans les ouvrages d'analyse. Si jamais elle est utilisée dans une autre partie de ce cours, une démonstration plus classique sera toujours donnée. Le lecteur est donc libre de l'oublier complètement. Elle intervient cependant dans certaines théories modernes de l'intégration et son champ d'application est peut-être amené à se développer dans les années qui viennent.

$\mathbb{Q}$ ne vérifie aucune de ces propriétés. Voici des contre–exemples :

(P_1) : A = $\{\frac{p}{q} \mid \frac{p}{q} < 0$ ou $[\frac{p}{q} \geq 0$ et $\frac{p^2}{q^2} < 2]\}$ et B = $\mathbb{Q}$ – A.La coupure devrait être $\sqrt{2}$ mais c'est un irrationnel.

(P_2) : La partie A précédente, bien que majorée, n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Sa borne supérieure existe dans $\mathbb{R}$, mais c'est un irrationnel : $\sqrt{2}$.

(P_3) : La partie B précédente, bien que minorée, n'admet pas de borne inférieure dans $\mathbb{Q}$. Sa borne inférieure existe dans $\mathbb{R}$, mais c'est un irrationnel : $\sqrt{2}$.

(P_4) : Si (a_n) est une suite croissante de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, et (b_n) une suite décroissante de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, alors il n'existe aucun rationnel x vérifiant :

$$\forall n, a_n \leq x \leq b_n$$

x existe dans $\mathbb{R}$, mais c'est l'irrationnel $\sqrt{2}$.

(P_5) Si $a = c$ est un rationnel inférieur à $\sqrt{2}$ et $b = d$ un rationnel supérieur, alors, définissons δ sur les rationnels de $[a,b]$ de la façon suivante. Si x est un rationnel inférieur à $\sqrt{2}$, on choisit $\delta(x)$ strictement positif tel que $x + \delta(x) < \sqrt{2}$. Si y est un rationnel supérieur à $\sqrt{2}$, on choisit $\delta(y)$ strictement positif tel que $y - \delta(y) > \sqrt{2}$. Il n'existe pas de subdivision de rationnels telle que décrite dans la propriété de Cousin. Si i est l'indice tel que $x_{i-1} < \sqrt{2} < x_i$, alors ou bien $t_i < \sqrt{2}$ mais dans ce cas $t_i - \delta(t_i) < x_{i-1} \leq t_i \leq x_i < t_i + \delta(t_i) < \sqrt{2}$ ce qui est contradictoire avec $\sqrt{2} < x_i$, ou bien $t_i > \sqrt{2}$ mais alors $\sqrt{2} < t_i - \delta(t_i) < x_{i-1} \leq t_i \leq x_i < t_i + \delta(t_i)$ ce qui est contradictoire avec $x_{i-1} < \sqrt{2}$. Si on se plaçait dans $\mathbb{R}$, δ serait définie en $\sqrt{2}$ et on pourrait prendre $t_i = \sqrt{2}$.

$\mathbb{R}$ vérifie toutes ces propriétés. Nous allons d'abord montrer que, si l'une de ces propriétés est vraie, les autres aussi. Elles sont équivalentes.

Démonstration :

❑ (P_1) ⇒ (P_2)

Soit E une partie non vide, majorée par m. Appelons B l'ensemble des majorants de E et A = $\mathbb{K}$–B. Alors :

B est non vide, car m appartient à B.

A est non vide, car il existe un élément x dans E, et x–1 ne majorant pas x se trouve donc dans A.

$\forall a \in$ A, $\forall b \in$ B, $a < b$. En effet, $a \in$ A signifie que a ne majore pas E, et donc qu'il existe x élément de E tel que $a < x$. $b \in$ B signifie que b majore E et donc que $x \leq b$. Donc $a < b$.

{A,B} forme une partition de $\mathbb{K}$. C'est évident puisque A = $\mathbb{K}$–B.

Les hypothèses de (P_1) sont vérifiées. Il existe donc m_0 élément de $\mathbb{K}$ tel que :

(α) ou bien A = $\{ a \in \mathbb{K} / a \leq m_0 \}$ et B = $\{ b \in \mathbb{K} / b > m_0 \}$

(β) ou bien A = $\{ a \in K / a < m_0 \}$ et B = $\{ b \in K / b \geq m_0 \}$

Dans le cas (β), m_0 est le plus petit élément de B. m_0 est donc le plus petit majorant de E. La borne supérieure de E existe donc.

Montrons que le cas (α) est impossible. Dans le cas (α), m_0 est élément de A et ne majore donc pas E. Il existe x élément de E tel que $m_0 < x$.

On a alors $m_0 < \frac{m_0 + x}{2} < x$. $\frac{m_0+x}{2}$ étant supérieur à m_0 est élément de B, donc majore E. Il est cependant inférieur à x élément de E. La contradiction est ainsi prouvée.

❑ $(P_2) \Leftrightarrow (P_3)$
Supposons (P_2). On peut donner deux démonstrations de (P_3).
<u>dém 1 :</u>
Soit E une partie non vide minorée par m. Posons $E' = \{x \mid -x \in E\}$. Alors E' est non vide est majorée par $-m$. Elle admet donc une borne supérieure S.

$\forall x \in E', x \leq S$

$\forall \beta < S, \exists x \in E', x > \beta$

Donc :

$\forall y \in E, -S \leq y$ (poser $x = -y$)

$\forall \beta > -S, \exists y \in E, y < \beta$ (car il existe x élément de E' tel que $-\beta < x$, et l'on pose $y = -x$)

–S est donc la borne inférieure de E.
Une démonstration symétrique prouve que $(P_3) \Rightarrow (P_2)$

<u>dém 2 :</u>
Soit E une partie non vide minorée. Soit F l'ensemble non vide des minorants. Alors :

$$\forall x \in F, \forall y \in E, x \leq y$$

Donc F est majoré par n'importe quel élément de E. Il admet donc une borne supérieure S, qui, en tant que plus petit majorant de F, est plus petit que n'importe quel élément de E (qui sont tous des majorants de F). On a donc :

$$\forall y \in E, S \leq y$$

Cela montre que S minore E ; il appartient donc lui-même à l'ensemble F des minorants. Il s'agit donc, non seulement d'une borne supérieure, mais aussi d'un maximum. Ce maximum S est donc le plus grand des minorants de E. Mais cela est la définition même de la borne inférieure de E. Ainsi, S = Inf E.

❑ $(P_2) \Rightarrow (P_4)$
(La raison pour laquelle nous préférons montrer (P_4) à partir de (P_2) et non de (P_3) est que (P_2) est traditionnellement choisi comme axiome vérifié par $\mathbb{R}$, plutôt que (P_3)).
Montrons a)

On a : $\forall n, a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$

Donc (a_n) est majorée par b_0. Soit x la borne supérieure des a_n. x répond à la question. On a en effet $a_n \leq x$. Montrons que :

$$\forall n, x \leq b_n$$

Si $n < m$, on a : $a_n \leq a_m \leq b_m$
Si $n > m$, on a : $a_n \leq b_n \leq b_m$
On a donc :

$$\forall n, \forall m, a_n \leq b_m$$

Donc tous les b_m majore les a_n. x étant le plus petit majorant, on en déduit que :

$$\forall m, x \leq b_m.$$

Montrons b)
Soit $E = \{ny \mid n \in \mathbb{N}, ny \leq x\}$. E est non vide (il contient 0) et majoré par x. Il admet donc une borne supérieure S. S–y n'est donc pas un majorant de E, puisqu'il est inférieur à S, plus petit majorant. Donc il existe ny élément de E tel que :

$S - y < ny$

$\Leftrightarrow$ $S < (n+1)y$. Donc $(n+1)y$ ne peut être élément de E, donc $(n+1)y > x$.

Une autre formulation de (P_4) a) est la suivante :
On appelle segment [a,b] l'ensemble des x de $\mathbb{K}$ *vérifiant :* $a \le x \le b$. *Soit* (I_n) *une suite décroissante de segments. Alors l'intersection de tous les* I_n *est non vide.*

❑ $(P_4) \Rightarrow (P_1)$
(La démonstration de cette implication a pour but de montrer l'équivalence des propriétés (P_1) à (P_4) sans utiliser la propriété de Cousin.
Choisissons a et b arbitraires respectivement dans A et B. Posons $\mathrm{I}_0 = [a, b]$ et définissons par récurrence une suite décroissante de segment (I_n). Supposons I_{n-1} défini, avec $\mathrm{I}_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$, $a_{n-1} \in$ A, $b_{n-1} \in$ B. On peut définir l'élément $\dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, et l'on a :

$$a_{n-1} < \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} < b_{n-1}$$

{A,B} formant une partition de $\mathbb{K}$, l'élément $\dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ appartient soit à A, soit à B.

S'il appartient à A, on pose $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ et $b_n = b_{n-1}$.

S'il appartient à B, on pose $b_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ et $a_n = a_{n-1}$.

Dans tous les cas, on a I_n inclus dans I_{n-1}, et de plus :

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

D'après la propriété a) de (P_4), il existe x_0 tel que :

$$\forall\ n,\ a_n \le x_0 \le b_n$$

Il suffit alors de montrer que x_0 majore A et minore B. Pour cela, on raisonne par l'absurde. Si x_0 ne majore pas A, il existe α élément de A tel que $x_0 < \alpha$.
Puisque $0 < \alpha - x_0$ et $0 < b_0 - a_0$, il existe, d'après la propriété b) de (P_4) un entier n tel que :

$$0 < b_0 - a_0 < n(\alpha - x_0)$$

Or $n < 2^n$ donc

$$0 < b_0 - a_0 < n(\alpha - x_0) < 2^n\,(\alpha - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < b_n - a_n < \alpha - x_0.$$

Par ailleurs, $a_n \le x_0 \Leftrightarrow b_n - x_0 \le b_n - a_n$.
$\Rightarrow b_n - x_0 < \alpha - x_0 \Leftrightarrow b_n < \alpha$ or ceci est impossible car tout élément de B est supérieur à tout élément de A.

On montre de même que x_0 minore B. Enfin il appartient à A ou B puisque {A,B} réalise une partition de $\mathbb{K}$.

On notera l'intérêt de la propriété d'Archimède pour conclure.

❑ $(P_4) \Rightarrow (P_5)$
Posons $a_0 = c$ et $b_0 = d$. Nous raisonnons par l'absurde. Si la propriété de Cousin est fausse sur $[a_0, b_0]$ alors ou bien elle est fausse sur $[a_0, \dfrac{a_0 + b_0}{2}]$, ou bien elle est fausse sur $[\dfrac{a_0 + b_0}{2}, b_0]$ car s'il existait une sudvision adéquate sur chacun de ces intervalles, la réunion de ces deux subdivisions répondrait à la question sur $[a_0, b_0]$. Nous notons $[a_1, b_1]$ l'intervalle sur laquelle la propriété de

Cousin est fausse et itérons le procédé. Si $[a_n, b_n]$ est défini de façon que la propriété de Cousin soit en défaut sur cet intervalle, alors ou bien la propriété est également fausse sur $[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}]$ ou bien elle est fausse sur $[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n]$. Notons $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ l'intervalle sur lequel elle est fausse. On définit ainsi une suite croissante (a_n) et une suite décroissante (b_n), avec pour tout n $a_n < b_n$. Soit x un point commun à tous les segments $[a_n, b_n]$. Soit ε le nombre strictement positif $\delta(x)$. On a :

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} < \frac{b_0 - a_0}{n} \text{ et } \frac{b_0 - a_0}{n} < \varepsilon \text{ pour un certain } n \text{ d'après la propriété d'Archimède.}$$

On a construit $[a_n, b_n]$ de façon que la propriété de Cousin soit fausse sur cet intervalle, mais pourtant la subdivision de ce segment formée des deux seuls points a_n et b_n vérifie bien la propriété de Cousin si on prend x comme marqueur du segment, puisque :

$$x - \delta(x) = x - \varepsilon < a_n < b_n < x + \varepsilon = x + \delta(x)$$

D'où une contradiction. L'hypothèse était donc fausse, et la propriété de Cousin est vraie sur $[c, d]$.

❑ $(P_5) \Rightarrow (P_1)$

Soit (A,B) est une coupure. Raisonnons par l'absurde et supposons que A n'admet pas de maximum et B pas de minimum. On définit δ de la façon suivante. Si a est élement de A, on choisit $\delta(a)$ strictement positif tel que $a + \delta(a)$ soit élément de A, ce qui est possible puisque a n'est pas le maximum de A. Si b est élément de B, on choisit $\delta(b)$ strictement positif tel que $b - \delta(b)$ soit élément de B, ce qui est possible puisque b n'est pas le minimum de b.

Si $a = c$ est dans A et $b = d$ dans B, il ne peut exister aucune subvivision vérifiant la propriété de Cousin contrairement à l'hypothèse. En effet, si i est le premier indice tel que x_i soit dans B et x_{i-1} encore dans A, alors ou bien t_i est dans A mais dans ce cas $t_i - \delta(t_i) < x_{i-1} \le t_i \le x_i < t_i + \delta(t_i)$, éléments tous dans A, ce qui est contradictoire avec x_i dans B, ou bien t_i est dans B mais alors $t_i - \delta(t_i) < x_{i-1} \le t_i \le x_i < t_i + \delta(t_i)$, éléments tous dans B, ce qui est contradictoire avec x_{i-1} dans A. D'où une contradiction. L'existence d'un maximum pour A ou d'un minimum pour B permet de définir un point supplémentaire de la subvision levant l'impossibilité.

$\mathbb{R}$ vérifie ces propriétés car cela résulte de la définition de $\mathbb{R}$.

DEFINITION :

$\mathbb{R}$ *est un corps totalement ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure.*

Il vérifie donc également les autres propriétés.

On montre qu'un tel corps existe. On le construit par exemple à partir des coupures de $\mathbb{Q}$. Par ailleurs, on montre qu'il est unique à isomorphisme près.

REMARQUE : Dans l'article "*Calcul infinitésimal*" de l'Encyclopedia Universalis, R. Godement définit les réels à partir de leur développement décimal et prouve la propriété de la borne supérieure à partir de ce développement. Dans notre démarche, nous caractérisons $\mathbb{R}$ par la propriété de la borne supérieure et nous montrons que les réels admettent un développement décimal.