11. Espaces vectoriels, homomorphismes, bases

11.6. Formes linéaires, hyperplans, dualité

11. Espaces vectoriels, homomorphismes, bases

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

11.1. Espaces vectoriels, algèbres

11.1.1. Structure d'espace vectoriel et d'algèbre

Définition

On dit que l'ensemble E est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, si :

- E est muni d'une loi interne $+$ pour laquelle E est un groupe commutatif.
- Il existe une application $(\alpha, u) \to \alpha u$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E, dite *loi externe* telle que :

$$\begin{array}{l}\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2\\ \forall(u,v)\in E^2\end{array}\ \begin{cases}(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u, & \alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v\\ \alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u, & 1u=u\end{cases}$$

Conventions

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Les éléments de E sont appelés *vecteurs* et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

Le neutre $\overrightarrow{0}$ de $(E,+)$ est appelé *vecteur nul*.

L'espace vectoriel E est parfois noté $(E, +, \cdot)$ pour rappeler les deux lois.

Proposition *(Règles de calcul dans un espace vectoriel)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour tout scalaire α et tous vecteurs u et v :

- $\alpha u = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad u = \overrightarrow{0}$.
- $\alpha(-u) = (-\alpha)u = -(\alpha u)$.
- $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$.

Remarque *(Dépendance relativement au corps des scalaires)*

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, c'en est également un sur tout sous-corps $\mathbb{K}'$ de $\mathbb{K}$.

Par exemple un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Si $\mathbb{K}' \neq \mathbb{K}$, ces deux espaces vectoriels doivent être considérés comme différents.

Définition *(Structure d'algèbre)*

On dit qu'un ensemble E est une *algèbre* sur $\mathbb{K}$ si :

- $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- E est muni d'une loi produit $\times$ pour laquelle $(E, +, \times)$ est un anneau.
- Pour tous u, v de E et tout λ de K :

  $\lambda(uv) = (\lambda u)v = u(\lambda v)$.

Si de plus la loi $\times$ est commutative, l'algèbre E est dite commutative.

11.1.2. Combinaisons linéaires

Définition *(Familles à support fini)*

Soit $(A, +)$ un monoïde additif, et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de A.
On dit que $(a_i)_{i\in I}$ est à *support fini* si l'ensemble des indices i tels que $a_i \neq 0$ est fini.
Pour une telle famille, on peut donc considérer $\sum_{i\in I} a_i$, qu'on appelle somme à support fini.
On note $A^{(I)}$ l'ensemble des familles à support fini d'éléments de A.

Définition *(Combinaisons linéaires)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille à support fini d'éléments de $\mathbb{K}$.
La somme $\sum_{i\in I} \lambda_i\, u_i$ est appelée *combinaison linéaire* des vecteurs u_i avec les coefficients λ_i.

11.1.3. Espaces vectoriels et algèbres classiques

Définition *(Espace vectoriel produit)*

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ une famille de n espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Soit E l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.
E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ quand on pose :

$$\begin{cases} \forall u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E, \forall v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \text{et } \lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n) \end{cases}$$

Cas particulier

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E^n est donc muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemples d'espaces vectoriels

- $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même, la loi externe étant ici le produit de $\mathbb{K}$.

  C'est même une algèbre commutative.
- On en déduit la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \text{les } x_i \in \mathbb{K}\}$.
- Soient X un ensemble non vide quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

  Soit $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble de toutes les applications f de X dans E.

  $\mathcal{F}(X, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, quand on pose :

  $$\begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}(X, E), \forall g \in \mathcal{F}(X, E), \forall \lambda \in K, \forall x \in E, \\ (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{cases}$$

  Le vecteur nul est ici l'*application nulle* ω définie par : $\forall x \in E, \omega(x) = \overrightarrow{0}$.

  Si E est une algèbre, on définit un produit dans $\mathcal{F}(X, E)$ en posant :

  $\forall f \in \mathcal{F}(X, E), \forall g \in \mathcal{F}(X, E), \forall x \in X, (fg)(x) = f(x)g(x)$.

  $\mathcal{F}(X, E)$ est alors muni d'une structure d'algèbre sur $\mathbb{K}$.
- L'ensemble $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.
- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes, p colonnes, et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si $n = p$, c'est une algèbre sur $\mathbb{K}$, non commutative dès que $n \geq 2$.

11.2. Sous-espaces vectoriels et sous-algèbres

11.2.1. Définitions et caractérisations

Définition *(Sous-espace vectoriel)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit F une partie de E.

On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E si :

- F est *stable* pour les deux lois : $\begin{cases} \forall (u,v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ u+v \in F \quad \text{et} \quad \lambda u \in F \end{cases}$
- Muni des lois *induites*, F est un espace vectoriel.

Remarques

- On dit souvent *sous-espace* plutôt que sous-espace vectoriel.
- $\{\overrightarrow{0}\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E, appelés sous-espaces *triviaux*.

Proposition *(Caractérisation)*

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et F une partie de E.

F est un sous-espace vectoriel de E

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset. \\ \forall (u,v) \in F^2, u+v \in F. \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda u \in F. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset. \\ \forall (u,v) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \\ \qquad \lambda u + \mu v \in F. \end{cases}$$

Remarques

- Dans les caractérisations précédentes, on n'oubliera pas la condition $F \neq \emptyset$.

  En général, on se contente de vérifier que le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ de E appartient à F.

  En effet, tous les sous-espaces vectoriels de E contiennent au moins $\overrightarrow{0}$.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E.

  Pour toute famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de F, et pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}$ à support fini, la combinaison linéaire $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i$ est encore un élément de F.

  On exprime cette propriété en disant que F est *stable par combinaisons linéaires*.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E et si G est un sous-espace vectoriel de F, alors G est un sous-espace vectoriel de E.
- Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels pour les mêmes lois, et si $F \subset E$, alors F est un sous-espace vectoriel de E.

Définition *(Sous-algèbre)*

Soit E une algèbre sur $\mathbb{K}$. Soit F une partie de E.

On dit que F est une *sous-algèbre* de E si :

- $(F, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.
- $(F, +, \times)$ est un sous-anneau de $(E, +, \times)$.

Muni des lois induites, F est donc effectivement une algèbre sur $\mathbb{K}$.

Proposition *(Caractérisation)*

Soient E une algèbre sur $\mathbb{K}$, de neutre multiplicatif 1_E, et F une partie de E.

F est une sous-algèbre de E si et seulement si : $\begin{cases} 1_E \in F \quad (\text{donc } F \neq \emptyset.) \\ \forall (u,v) \in F^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in F. \\ \forall (u,v) \in F^2, uv \in F. \end{cases}$

11.2.2. Exemples classiques

- Soit n un entier naturel. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, mais pas une sous-algèbre si $n \geq 1$.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

  Soit $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel de toutes les applications de I dans $\mathbb{K}$.

  Les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$:

  L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

  L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{K}$.

Proposition et définition *(Sous-espace engendré)*

Soit X une partie non vide d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

On note $\operatorname{Vect}(X)$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.

$\operatorname{Vect}(X)$ est un sous-espace vectoriel de E appelé *sous-espace engendré* par X.

Si par exemple $X = \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$, alors $\operatorname{Vect} X = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \in \mathbb{K}\right\}$.

11.2.3. Opérations entre sous-espaces vectoriels

Proposition *(Intersections de sous-espaces vectoriels)*

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E.

Alors $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque

Soit X une partie non vide d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

Le sous-espace $\operatorname{Vect}(X)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X.

C'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X.

Proposition *(Sommes de sous-espaces vectoriels)*

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E.

Soit F l'ensemble des sommes à support fini $\sum_{i\in I} u_i$, où pour tout i de I, $u_i \in F_i$.

F est un sous-espace vectoriel de E, appelé *somme* des F_i, et noté $F = \sum_{i\in I} F_i$.

Remarques

- Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, $F+G=\{u+v, u\in F, v\in G\}$.
- Si F et G sont deux sous-espaces de E, leur réunion $H=F\cup G$ n'est un sous-espace de E que si $F\subset G$ auquel cas $H=G$, ou $G\subset F$ auquel cas $H=F$.
- En général une réunion de sous-espaces de E n'est donc pas un sous-espace de E.

  La somme $F=\sum_{i\in I} F_i$ est en fait le plus petit sous-espace de E contenant tous les F_i.

  C'est donc le sous-espace vectoriel de E engendré par la réunion des F_i.

11.2.4. Sommes directes

Définition

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E.
On dit que la somme $F=\sum_{i\in I} F_i$ est *directe* si tout vecteur v de F s'écrit *de manière unique* sous la forme d'une somme à support fini $\sum_{i\in I} u_i$, où pour tout i de I, $u_i\in F_i$.

La somme F est alors notée $F=\bigoplus_{i\in I} F_i$.

Exemples des sommes finies

Dans le cas d'une famille finie $F_1, F_2, \cdots, F_n$ de sous-espaces vectoriels de E, on notera $F=\bigoplus_{i=1}^{n} F_i = F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_n$ la somme des F_i si elle est directe.

On dit également dans ce cas que $F_1, F_2, \cdots, F_n$ sont *en somme directe*.

Tout vecteur v de F s'écrit alors de manière unique : $v=\sum_{i=1}^{n} u_i$, où pour tout i, $u_i\in F_i$.

On dit que u_i est la *composante* de u sur F_i relativement à cette somme directe.

Proposition *(Caractérisation des sommes directes)*

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E.
La somme $F=\sum_{i\in I} F_i$ est directe si et seulement si :

Pour toute famille (u_i) à support fini ($u_i\in F_i$ pour tout i), $\sum_{i\in I} u_i=\overrightarrow{0} \Rightarrow \forall i\in I, u_i=\overrightarrow{0}$.

Proposition *(Cas d'une somme directe de deux sous-espaces)*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
La somme $F+G$ est directe si et seulement si $F\cap G=\{\overrightarrow{0}\}$.

Remarques

- Si la somme $\sum_{i\in I} F_i$ est directe, et si J est une partie de I, alors $\sum_{i\in J} F_i$ est directe.

  En particulier, pour tous indices distincts i et j, $F_i\cap F_j=\{\overrightarrow{0}\}$.

- La réciproque est fausse. Pour monter que $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont en somme directe, avec $n \geq 3$, il ne suffit pas de vérifier que pour tous indices distincts i et j, $F_i \cap F_j = \{\overrightarrow{0}\}$.

  Ce serait encore pire de se contenter de vérifier que $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n = \{\overrightarrow{0}\}$.

- Une bêtise classique consiste à écrire que la somme $F + G$ est directe si et seulement si l'intersection $F \cap G$ est vide! L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E n'est en effet *jamais* vide car elle contient toujours $\overrightarrow{0}$.

  Il faut en fait vérifier que l'intersection $F \cap G$ se *réduit* à $\{\overrightarrow{0}\}$.

11.2.5. Sous-espaces supplémentaires

Définition

> Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
>
> On dit que F et G sont *supplémentaires* dans E si $E = F \oplus G$.
>
> Cela signifie que tout u de E s'écrit d'une manière unique $u = v + w$, avec $\begin{cases} v \in F \\ w \in G \end{cases}$

Théorème

> Soit F un sous-espace vectoriel de E.
>
> Alors F possède au moins un supplémentaire G dans E.

Remarques

- Ce résultat est admis pour l'instant. Il sera démontré dans le cas particulier des espaces vectoriels de dimension finie.

- Un même sous-espace F de E possède en général une infinité de supplémentaires dans E.

  Il y a cependant deux cas d'unicité :

  - Si $F = E$, le seul supplémentaire de F dans E est $\{\overrightarrow{0}\}$.
  - Si $F = \{\overrightarrow{0}\}$, le seul supplémentaire de F dans E est E lui-même.

- On ne confondra pas *supplémentaire* et *complémentaire*!

  Le complémentaire d'un sous-espace F de E est un ensemble sans grand intérêt : ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E car il ne contient pas le vecteur nul.

Exemples de sous-espaces vectoriels supplémentaires

- Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ formés respectivement des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires.

- Dans l'espace vectoriel $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les sous-espaces $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formés respectivement des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.

11.3. Applications linéaires

11.3.1. Définitions et notations

Définition *(Applications linéaires)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Une application f de E dans F est dite *linéaire* si :
$\forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v) \\ f(\lambda u) = \lambda f(u) \end{cases}$
On dit aussi que f est un *morphisme* d'espaces vectoriels.

Remarques

- f est linéaire de E dans F si et seulement si :

  $\forall (u,v) \in E^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$
- Si f est linéaire, alors $f\Big(\sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, u_i\Big) = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, f(u_i)$ pour toute combinaison linéaire.
- Si f est linéaire de E dans F, alors $f(\overrightarrow{0}_E) = \overrightarrow{0}_F$.

  Cette remarque est parfois utilisée pour montrer qu'une application n'est pas linéaire.

Notations et terminologie

- On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- Un *endomorphisme* de E est une application linéaire de E dans lui-même.

  On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective.
- Un *automorphisme* de E est un isomorphisme de E dans lui-même.

  On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
- Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

11.3.2. Exemples d'applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- L'application nulle de E dans F est linéaire.
- L'application *identité* id_E est un automorphisme de E.
- Pour tout scalaire λ, l'application $h_\lambda \;:\; u \;\to\; \lambda u$ est un endomorphisme de E.

  Pour tous scalaires λ et μ : $h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$.

  h_λ un automorphisme si $\lambda \neq 0$, et alors $h_\lambda^{-1} = h_{1/\lambda}$.

  Si $\lambda \neq 0$, on dit que h_λ est l'*homothétie* de rapport λ.
- Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.

  L'application $f \;\to\; \varphi(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur E.

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point. L'application qui à une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ associe sa dérivée f' est linéaire de $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

  La restriction de cette application à $E = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est un endomorphisme de E.
- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$.

  L'application $f \ : \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ \to \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, x_k$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

11.3.3. Opérations sur les applications linéaires

Proposition *(Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Soient f et g deux applications linéaires de E dans F, et α, β deux scalaires.
Alors $\alpha f + \beta g$ est linéaire de E dans F.
On en déduit que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition *(Composition d'applications linéaires*

Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Si $f : E \ \to \ F$ et $g : F \ \to \ G$ sont linéaires, alors $g \circ f$ est linéaire de E dans G.

Conséquence *(Structure d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$)*

Si f et g sont deux endomorphismes de E, alors $g \circ f$ est un endomorphisme de E.
On en déduit que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.
En général cette algèbre n'est pas commutative.

Remarque

- Soit f un endomorphisme de E et n un entier naturel.

  Alors $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois) est un endomorphisme de E.
- Dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$, on peut utiliser la formule du binôme $(f + g)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \, f^k \circ g^{n-k}$,

  à condition que les applications f et g commutent.
- Par exemple, les applications h_λ commutent avec tous les endomorphismes de E.

Proposition *(Isomorphisme réciproque)*

Soit f un isomorphisme de E sur F.
Sa bijection réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Conséquence *(Structure de groupe de $\mathcal{GL}(E)$)*

Soient f et g deux automorphismes de E.
Alors f^{-1} et $g \circ f$ sont encore des automorphismes de E.
On en déduit que $\mathcal{GL}(E)$ est un groupe pour la loi de composition des applications.
Ce groupe est en général non commutatif.

11.3.4. Noyau et image

Proposition *(Applications linéaires et sous-espaces vectoriels)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit f un morphisme de E dans F.

- Si E' est un sous-espace de E, alors $f(E')$ est un sous-espace de F.
- Si F' est un sous-espace de F, son image réciproque par f est un sous-espace de E.

Définition *(Noyau et image)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit f un morphisme de E dans F.

- L'ensemble $f(E) = \{v = f(u), u \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F.

  On l'appelle *image* de f et on le note $\mathrm{Im}(f)$.
- L'ensemble $\{u \in E, f(u) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

  On l'appelle *noyau* de f et on le note $\mathrm{Ker}(f)$.

Remarques

- On peut parfois montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel en l'interprétant comme le noyau ou l'image d'une application linéaire.
- Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E, et soit λ un scalaire.

  Notons E_λ l'ensemble des vecteurs u de E tels que $f(u) = \lambda u$.

  On constate que $f(u) = \lambda u \;\Leftrightarrow\; (f - \lambda\mathrm{id})(u) = \overrightarrow{0} \;\Leftrightarrow\; u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{id})$.

  On en déduit que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.

  C'est le cas en particulier pour $\mathrm{Inv}(f) = E_1$ (vecteurs *invariants*) et pour $\mathrm{Opp}(f) = E_{-1}$ (vecteurs changés en leur opposé par f).

Proposition *(Caractérisation de l'injectivité)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit f un morphisme de E dans F.
f est injective si et seulement si son noyau $\mathrm{Ker}(f)$ se réduit à $\{\overrightarrow{0}_E\}$.
Autrement dit, f est injective si et seulement si : $\forall u \in E, f(u) = \overrightarrow{0}_F \;\Rightarrow\; u = \overrightarrow{0}_E$.

11.3.5. Projections et symétries vectorielles

Définition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Pour tout vecteur u de E : $\exists! v \in F, \exists! w \in G$ tels que $u = v + w$.

- L'application $p : u \;\rightarrow\; p(u) = v$ est la *projection* sur F, parallèlement à G.
- L'application $s : u \;\rightarrow\; s(u) = v - w$ est la *symétrie* par rapport à F, parallèlement à G.

Avec les notations précédentes, on a :

Propriétés

- p est un endomorphisme de E, et il vérifie $p \circ p = p$.

  L'image de p est F et son noyau est G.

  F est aussi le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par p.

- s est un automorphisme de E, et $s \circ s = \mathrm{id}$. Ainsi s est involutif : $s^{-1} = s$.

  On a la relation $s = 2p - \mathrm{id}$, qui s'écrit encore $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id})$.

  F est le sous-espace des vecteurs invariants par s.

  G est le sous-espace des vecteurs changés en leur opposé par s.

- Si on note p' la projection sur G parallèlement à F, et s' la symétrie par rapport à G parallèlement à F, alors $\begin{cases} p + p' = \mathrm{id}, & p \circ p' = p' \circ p = 0 \\ s + s' = 0, & s \circ s' = s' \circ s = -\mathrm{id} \end{cases}$

Cas particulier

On considère la somme directe $E = E \oplus \{\overrightarrow{0}\}$.
La projection sur E parallèlement à $\{\overrightarrow{0}\}$ est l'application id_E. C'est le seul cas où une projection vectorielle est injective.
La projection sur $\{\overrightarrow{0}\}$ parallèlement à E est l'application nulle.
La symétrie par rapport à E parallèlement à $\{\overrightarrow{0}\}$ est l'application id_E.
La symétrie par rapport à $\{\overrightarrow{0}\}$ parallèlement à E est l'application $-\mathrm{id}_E$.

Définition *(Projecteur d'un espace vectoriel)*

> Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
> On appelle *projecteur* de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.

Proposition *(Projecteur $\Leftrightarrow$ projection)*

> Si p est un projecteur de E, alors $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
> L'application p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Remarque

On ne généralisera pas abusivement la propriété $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
Si f est un endomorphisme de E tout est en effet possible entre $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
Par exemple l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ équivaut à $f \circ f = 0$.
On montre que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ équivaut à $\begin{cases} \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f) \\ \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f) \end{cases}$
ce qui n'équivaut pas à $f^2 = f$.

Proposition *(Endomorphisme involutif $\Leftrightarrow$ symétrie)*

> Si s est un endomorphisme involutif de E, donc si $s \circ s = \mathrm{id}$, alors $E = \mathrm{Inv}(s) \oplus \mathrm{Opp}(s)$.
> L'application s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Inv}(s)$ parallèlement à $\mathrm{Opp}(s)$.

11.4. Familles libres, génératrices, bases

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les sommes considérées ici sont à support fini.

11.4.1. Familles libres

Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est *libre*, ou encore que les vecteurs de cette famille sont *linéairement indépendants* si :

Pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}^{(I)}$, $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, u_i = \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; \forall i \in I, \lambda_i = 0$.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires *non tous nuls* telle que $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, u_i = \overrightarrow{0}$, on dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est *liée*, ou encore que les vecteurs qui la composent sont *linéairement dépendants.*

Remarques et propriétés

- **(Cas d'une famille finie de vecteurs)**. La famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est libre si :

  $\forall(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, u_i = \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$

  Elle est liée s'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, l'un au moins étant non nul, tels que : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, u_i = \overrightarrow{0}$.
- On ne doit pas confondre *non tous nuls* et *tous non nuls.*
- Une famille réduite à un seul vecteur u est libre si et seulement si u est non nul.
- Une famille de deux vecteurs u et v est liée si et seulement si u et v sont *colinéaires*, ou encore *proportionnels*, c'est-à-dire s'il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

  Cela ne se généralise pas aux familles de plus de deux vecteurs.
- Une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs qui la compose peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

  Cela équivaut à dire que toute sur-famille d'une famille liée est liée.

  En particulier toute famille contenant $\overrightarrow{0}$, ou deux vecteurs colinéaires, est liée.
- Attention à ne pas dire que u et v sont liés si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda v$, car c'est faux si $v = \overrightarrow{0}$ et $u \neq \overrightarrow{0}$ (en revanche c'est vrai si $v \neq \overrightarrow{0}$).
- Dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute famille de polynômes non nuls dont les degrés sont différents deux à deux est libre.

  C'est le cas pour la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\deg P_0 < \deg P_1 < \cdots < \deg P_n < \cdots$: on parle alors de famille de polynômes à *degrés échelonnés.*

Proposition *(Applications linéaires et familles libres)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f un morphisme de E dans F.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.

- Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est liée, alors la famille $(f(u_i))_{i\in I}$ est liée.

  Bien entendu, si la famille $(f(u_i))_{i\in I}$ est libre, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre.
- Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre et si f est injective, alors la famille $(f(u_i))_{i\in I}$ est libre.

Interprétation

Toute application linéaire transforme une famille liée en une famille liée.

Une application linéaire *injective* transforme une famille libre en une famille libre.

11.4.2. Familles génératrices

Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est génératrice, ou encore que les vecteurs de cette famille *engendrent* E si $\text{Vect}\left(\{u_i, i \in I\}\right) = E$, c'est-à-dire :

$\forall u \in E, \quad \exists (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \quad u = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, u_i.$

Remarques

- *(Cas d'une famille finie de vecteurs)*

  La famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est génératrice dans E si :

  Pour tout vecteur v de E, il existe n scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que : $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, u_i$.
- Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice.
- Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-espace vectoriel strict de E.

  Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Le caractère libre ou non de cette famille ne dépend pas de l'espace vectoriel, F ou E, auxquels ils sont censés appartenir. En revanche, si cette famille est génératrice dans F, elle ne l'est pas dans E. Quand il y a un risque d'ambiguité, on précisera donc dans quel espace vectoriel telle famille de vecteurs est génératrice.

Proposition *(Applications linéaires et familles génératrices)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f un morphisme de E dans F.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E.

- La famille $(f(u_i))_{i\in I}$ est génératrice de $\text{Im} f$.
- En particulier, si f est surjective, alors la famille $(f(u_i))_{i\in I}$ est génératrice de F.

Interprétation

On peut donc dire qu'une application linéaire surjective transforme une famille génératrice en une famille génératrice.

11.4.3. Bases

Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est une *base* de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Théorème *(Existence de bases)*

Dans tout espace vectoriel E non réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$, il y a des bases.

Remarques

- Ce théorème sera démontré dans les cas particulier des espaces vectoriels de dimension finie.
- On a précisé $E \neq \{\overrightarrow{0}\}$ car dans l'espace $\{\overrightarrow{0}\}$ il n'y a même pas de famille libre!

Proposition et définition

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur v de E peut s'écrire, *et de manière unique*, comme une combinaison linéaire des vecteurs u_i : $v = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, u_i$.

Les coefficients λ_i sont appelés *coordonnées*, de v dans la base $(u_i)_{i\in I}$.

Remarques et exemples

- *(Cas d'une famille finie de vecteurs)*

  La famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de E si pour tout v de E, il existe un n-uplet unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tel que : $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, u_i$.
- Si i, j, k forment une base de E, et si les coordonnées d'un vecteur v dans cette base sont a, b, c, (c'est-à-dire si $v = ai + bj + ck$), alors j, k, i forment une base de E dans laquelle les coordonnées de v sont b, c, a.

  Conclusion : deux bases se déduisant l'une de l'autre par modification de l'ordre des vecteurs doivent être considérées comme distinctes.
- La famille $(\mathrm{X}^k)_{k\in\mathbb{N}} = 1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \ldots$ est une base (dite *base canonique*) de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Proposition *(Applications linéaires et bases)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, E étant muni d'une base $(e_i)_{i\in I}$.

Pour toute famille $(v_i)_{i\in I}$ de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que : $\forall i \in I, f(e_i) = v_i$:

- f est injective si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.
- f est surjective si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice dans F.
- f est bijective si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de F.

Interprétation

Un morphisme est défini de manière unique par les images des vecteurs d'une base.

Un morphisme f de E vers F est un isomorphisme si et seulement si f transforme une base de E en une base de F. Il transforme alors toute base de E en une base de F.

11.5. Espaces vectoriels de dimension finie

11.5.1. Notion de dimension finie

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On dit que E est *de dimension finie* si E possède une famille génératrice finie.

Remarques

- Avec cette définition, l'espace réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$ est de dimension finie.
- Si un espace vectoriel n'est pas de dimension finie il est dit de dimension infinie.

  C'est le cas de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Soit $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E.

- Si (e) est génératrice dans E, toute famille contenant plus de n vecteurs est liée.
- Si (e) est libre, aucune famille de moins de n vecteurs n'est génératrice dans E.

Théorème *(Théorème de la base incomplète)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit (e) une famille génératrice finie de E.

Soit $(u) = u_1, \ldots, u_p$ une famille libre de E, non génératrice.

Alors il est possible de compléter la famille (u) à l'aide de vecteurs de la famille (e), de manière à former une base de E.

Conséquence

Dans tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$, il existe des bases.

Théorème et définition *(Dimension d'un espace vectoriel)*

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$, toutes les bases de E sont finies et elles ont le même nombre d'éléments.

Ce nombre est appelé *dimension* de E et est noté $\dim(E)$.

Par convention, on pose $\dim\{\overrightarrow{0}\} = 0$.

Remarques

- On appelle *droite vectorielle* tout espace vectoriel E de dimension 1.

  Tout vecteur non nul u constitue alors une base de E, et $E = \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{K}\}$.
- On appelle *plan vectoriel* tout espace vectoriel E de dimension 2.

  Deux vecteurs u et v non proportionnels en forment une base : $E = \{\lambda u + \mu v, \lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K}\}$.

- La dimension d'un espace vectoriel E dépend du corps de base.

  Si E est un espace de dim n sur $\mathbb{C}$, c'est un espace de dimension $2n$ sur $\mathbb{R}$.

  Par exemple, $\mathbb{C}$ est une droite vectorielle sur $\mathbb{C}$ et un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$.

  Pour éviter toute ambiguité, on note parfois $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Proposition *(Bases en dimension finie)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
Soit $(u) = u_1, u_2, \ldots, u_n$ une famille de n éléments de E.
(u) est une base $\Leftrightarrow$ elle est libre $\Leftrightarrow$ elle est génératrice.

Remarque *(Une interprétation de la dimension)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension $n \geq 1$.
Toute famille libre est constituée d'au plus n vecteurs, ou encore : toute famille de plus de n vecteurs est liée.
Toute famille génératrice est formée d'au moins n vecteurs, ou encore : toute famille de moins de n vecteurs n'est pas génératrice.
La dimension n de E est donc :

- Le nombre mimimum d'éléments d'une famille génératrice.
- Le nombre maximum d'éléments d'une famille libre.

11.5.2. Sous-espaces de dimension finie

Proposition *(Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
On a l'égalité $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$.

Proposition *(Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels)*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- Si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.
- Dans le cas général, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Généralisation

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ une famille de p sous-espaces vectoriels de E.

- On a toujours $\dim\Bigl(\sum_{i=1}^{p} F_i\Bigr) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.
- On a l'égalité $\dim\Bigl(\sum_{i=1}^{p} F_i\Bigr) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i) \Leftrightarrow$ la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

Proposition *(Base adaptée à une somme directe)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces de E, de dimension finie, en somme directe.

Pour tout j de $\{1, \ldots, p\}$, soit $(e)_j$ une famille de vecteurs de F_j.

On forme la famille $(e) = (e)_1 \cup (e)_2 \cup \cdots \cup (e)_p$ en *juxtaposant* les familles $(e)_j$.

- Si chaque famille $(e)_j$ est libre, la famille (e) est libre.
- Si chaque $(e)_j$ engendre le sous-espace F_j correspondant, (e) engendre $\bigoplus F_j$.
- Si chaque $(e)_j$ est une base du sous-espace F_j correspondant, (e) est une base de $\bigoplus F_j$.

Ceci est particulièrement intéressant si $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$, car on obtient alors une base de E, qui est dite *adaptée* à la somme directe.

11.5.3. Exemples d'espaces vectoriels de dimension finie

- **n-uplets**

  $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension n.

  Une base de $\mathbb{K}^n$ est la famille $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$, où, pour tout entier k de $\{1, \ldots, n\}$:

  $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$,..., $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

  On l'appelle la *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.

  Les coordonnées de $u = (x_1, \ldots, x_n)$ dans cette base sont $x_1, \ldots, x_n$, car $u = \sum_{k=1}^{n} x_k \, e_k$.

- **Polynômes de degré inférieur ou égal à n**

  l'ensemble $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension $n + 1$.

  Une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ est : $1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \ldots, \mathrm{X}^n$.

- **Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$**

  L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension np. Une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est formée des matrices $E_{i,j}$ où pour tous indices i dans $\{1, \ldots, n\}$ et j dans $\{1, \ldots, p\}$ tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls sauf celui situé en ligne i et colonne j qui vaut 1.

  Cette base est dite canonique.

  Par exemple une base de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ est formée des matrices :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Morphismes d'espaces vectoriels**

  Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, alors l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires de E dans F est de dimension np.

- **Produits d'espaces vectoriels de dimension finie**

  Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension fine. Alors $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

  Plus généralement : $\dim(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m) = \sum_{i=1}^{m} \dim(E_i)$, et $\dim(E^m) = m \dim(E)$.

11.5.4. Applications linéaires et dimension finie

Proposition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, E étant de dimension finie.

Alors E et F sont isomorphes (c'est-à-dire il existe un isomorphisme de E sur F) si et seulement si F est de dimension finie avec $\dim(F) = \dim(E)$.

Conséquence *(Importance de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$)*

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$, est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Si $(u)_{1 \leq k \leq n}$ est une base de E, l'application φ définie par $\varphi((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \sum_{k=1}^{n} x_i\, u_i$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur E.

L'existence d'un tel isomorphisme fait de $\mathbb{K}^n$ l'exemple-type du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, sa base canonique étant la base la plus naturelle.

Théorème *(Théorème de la dimension)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, E étant de dimension finie.

Soit f une application linéaire de E dans F.

Alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de F.

De plus on a l'égalité : $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Remarque

Le théorème précédent est très souvent utilisé. On appelle *rang* de f la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. C'est pourquoi ce résultat est souvent appelé *théorème du rang*.

Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, de même dimension n.

Soit f une application linéaire de E dans F.

f est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective.

11.6. Formes linéaires, hyperplans, dualité

11.6.1. Formes linéaires, espace dual

Définition *(Formes linéaires)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
On note E^* l'ensemble de toutes les formes linéaires sur E, c'est-à-dire $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
E^* est appelé le *dual* de E : il possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exemples

- Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'application $\varphi : f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur E.
- Sot $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications d'un ensemble X non vide vers $\mathbb{K}$.

  Soit x_0 est un élément particulier de X.

  L'application $\varphi : f \mapsto f(x_0)$ en x_0 est une forme linéaire sur E.
- Si $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, l'application *trace* qui à tout M de E associe $\mathrm{tr}(M)$ est une forme linéaire sur E.

Remarque

Soit f une forme linéaire sur E. Alors f est soit identiquement nulle, soit surjective.

Proposition *(Expression des formes linéaires en dimension finie)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $(e) = e_1, \ldots, e_n$.

- Soit $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$.

  L'application f_a qui à $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k$ associe $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\, x_k$ est une forme linéaire sur E.

  On note qu'avec cette définition on a : $a_i = f(e_i)$ pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$.
- Réciproquement, soit f une forme linéaire sur E.

  Alors il existe un vecteur a unique de $\mathbb{K}^n$ tel que $f = f_a$.

Exemple

Les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ sont les applications qui s'écrivent $(x, y, z) \rightarrow ax + by + cz$, où (a, b, c) est un triplet quelconque de $\mathbb{R}^3$.

11.6.2. Hyperplans et formes linéaires

Proposition et définition *(Hyperplans)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit H un sous-espace vectoriel de E.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- Il existe un vecteur u dans $E \setminus H$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}u$.
- Pour tout vecteur u de $E \setminus H$, on $E = H \oplus \mathbb{K}u$.
- Il existe une forme linéaire non nulle f telle que $H = \mathrm{Ker} f$.

Si ces conditions sont réalisées, on dit que H est un *hyperplan* de E.

Remarques et propriétés

- Les hyperplans de E sont donc les sous-espaces vectoriels de E qui supplémentaires d'une droite vectorielle, ou encore les noyaux des formes linéaires non nulles sur E.
- Si $\dim E = n \geq 1$, les hyperplans de E sont les sous-espaces de E de dimension $n - 1$.
- Deux formes linéaires non nulles f et g sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même hyperplan noyau.
- Si H est un hyperplan de E et si f est une forme linéaire non nulle telle que $H = \mathrm{Ker} f$, alors l'égalité $f(x) = 0$ (où x est quelconque dans E) est appelée *équation* de l'hyperplan H.

  Cette équation est unique à un facteur multiplicatif près.
- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = e_1, \ldots, e_n$.

  Soit H un hyperplan de E. L'équation de H s'écrit de manière unique (à un coefficient multiplicatif non nul près) $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, en notant $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordonnées dans (e) d'un vecteur x quelconque de E.

11.6.3. Bases duales

Proposition et définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = e_1, \ldots, e_n$.

Pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$, on note e_i^* la forme linéaire définie sur E par :

- $e_i^*(e_i) = 1$.
- $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, avec $i \neq j$, $e_i^*(e_j) = 0$.

La famille $(e^*) = e_1^*, \ldots, e_n^*$ est une base de E^*, appelée *base duale* de la base (e).

Remarques

- On peut résumer la définition de e_i^* en notant, avec les notations de Kroneker :

  $\forall j \in \{1, \ldots, n\}, e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$
- Si $\dim E = n$, la proposition précédente montre que $\dim E^* = n$, ce qui découle en fait d'une propriété plus générale, à savoir :

  Si E, F sont de dimensions finies, alors $\dim \mathcal{L}(E, F) = (\dim E)(\dim F)$.

  En particulier $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, K) = (\dim E)(\dim K) = \dim E$.

- Pour tout indice i dans $\{1,\ldots,n\}$, et pour tout vecteur $x=\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, on a $e_i^*(x)=x_i$.

  e_i^* est donc la forme linéaire qui envoie tout x de E sur sa i-ième coordonnée dans (e).

  C'est pourquoi on désigne souvent les formes linéaires $e_1^*,\ldots,e_n^*$ de la base duale (e^*) comme les *formes linéaires coordonnées* dans la base (e).
- Les coordonnées d'une forme linéaire dans la base duale (e^*) sont les images par f des vecteurs $e_1,e_2,\ldots,e_n$ de la base (e) : $f=\sum_{k=1}^{n} f(e_k)\,e_k^*$.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\geq 1$.
Tout base de E^* est d'une manière unique la base duale d'une base de E.

Conséquence

Si (e) est une base de E et si (e^*) est sa base duale, alors la base (e) est déterminée de manière unique par la donnée de e^*.
C'est pourquoi on pourra dire que les bases (e) et (e^*) sont duales l'une de l'autre.

11.6.4. Exemples de bases duales

- **Lien avec la formule de Taylor pour les polynômes**

  Soit a un élément de $\mathbb{K}$. Les $A_k=(\mathrm{X}-a)^k$ $(0\leq k\leq n)$ forment une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

  La base duale est formée des applications $A_k^*: P\ \rightarrow\ \dfrac{1}{k!}P^{(k)}(a)$.

  L'égalité $P=\sum_{k=0}^{n} A_k^*(P)A_k$ n'est autre que la formule de Taylor :

  $P=P(a)+P'(a)(\mathrm{X}-a)+\dfrac{1}{2!}P''(a)(\mathrm{X}-a)^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}P^{(n)}(a)(\mathrm{X}-a)^n.$
- **Lien avec l'interpolation de Lagrange**

  Soient $a_0,a_1,\ldots,a_n$ une famille de $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.

  Pour tout k de $\{0,\ldots,n\}$, notons $L_k=\prod_{j\neq k}\dfrac{\mathrm{X}-a_j}{a_k-a_j}$.

  La famille $(L)=L_0,L_1,\ldots,L_n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

  La base duale de (L) est formée des formes linéaires $L_k^*: P\ \rightarrow\ P(a_k)$.

  L'égalité $P(\mathrm{X})=\sum_{k=0}^{n} L_k^*(P)L_k(\mathrm{X})=\sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k(\mathrm{X})$ est appelée formule d'interpolation de Lagrange pour les points $a_0,a_1,\ldots,a_n$.

  Plus généralement, et pour tout $(n+1)$-uplet $(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)$, le polynôme $P(\mathrm{X})=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k L_k(\mathrm{X})$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n qui prend les valeurs $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ aux points $a_0,a_1,\ldots,a_n$.

11.6.5. Équations d'un sous-espace en dimension finie

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = e_1, \ldots, e_n$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension p, avec $0 \leq p < n$.
Il existe une famille de $n-p$ formes linéaires indépendantes $f_1, \ldots, f_{n-p}$ telles que :
$x \in F \iff f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_{n-p}(x) = 0$.
Réciproquement, un tel système de $n-p$ équations indépendantes définit un sous-espace de dimension p de E.

Remarques

- (S) : $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \cdots, f_{n-p}(x) = 0$ est appelé un système d'équations de F.
- On suppose que E est rapporté à une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$.

  Si on exprime les formes linéaires f_i dans la base duale (e^*) c'est-à-dire en fonction des formes linéaires coordonnées dans (e), alors (S) prend la forme d'un système linéaire homogène de $n-p$ équations aux n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (les coordonnées dans (e) d'un vecteur quelconque x de E.)
- Si on note $H_1, H_2, \ldots, H_{n-p}$ les hyperplans noyaux des formes linéaires $f_1, f_2, \ldots, f_{n-p}$, le résultat précédent s'écrit $F = \bigcap_{k=1}^{n-p} H_k$.

  Autrement dit, tout sous-espace de dimension p dans un espace vectoriel de dimension n peut être considéré comme l'intersection de $n-p$ hyperplans *indépendants*.
- **Un premier exemple**

  On suppose que $\dim E = 5$, et on considère le système suivant :

$$\text{(S)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

  où $x_1, x_2, \ldots, x_5$ sont les coordonnées d'un vecteur x quelconque de E dans la base (e).

  La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ de ce système est de rang 3 comme on peut le voir avec la méthode du pivot.

  L'ensemble F des solutions de (S) est donc un sous-espace de dimension $5-3=2$ de E.

  Les solutions de ce système peuvent être considérées comme formant l'intersection des trois hyperplans H_1, H_2 et H_3 d'équations respectives :

$$\begin{cases} (H_1) : x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ (H_2) : 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ (H_3) : x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

H_1, H_2 et H_3 sont les noyaux respectifs des formes linéaires f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} f_1 & = & e_1^* & - & 2e_2^* & + & 3e_3^* & - & e_4^* & + & e_5^* \\ f_2 & = & 2e_1^* & - & e_2^* & + & e_3^* & + & e_4^* & - & e_5^* \\ f_3 & = & e_1^* & + & 2e_2^* & - & 2e_3^* & - & e_4^* & + & 3e_5^* \end{array}\right.$$

La matrice de f_1, f_2, f_3 dans la base duale (e^*) est : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = ^{\mathrm{T}} A$

Cette matrice est de rang 3.

Cela prouve l'indépendance des formes linéaires f_1, f_2, f_3.

On en déduit que $F = \mathrm{Ker} f_1 \cap \mathrm{Ker} f_2 \cap \mathrm{Ker} f_3$ est de dimension $5 - 3 = 2$.

Pour trouver une base de E, on peut appliquer la méthode du pivot à (S) :

$$(\mathrm{S}) \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 0 \qquad \mathrm{E}_2 \leftarrow \mathrm{E}_2 - 2\mathrm{E}_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \qquad \mathrm{E}_3 \leftarrow \mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \qquad \mathrm{E}_1 \leftarrow 3\mathrm{E}_1 + 2\mathrm{E}_2 \\ & & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\ & & 4x_2 & - & 5x_3 & & & + & 2x_5 & = & 0 \qquad \mathrm{E}_3 \leftarrow 3\mathrm{E}_3 - 4\mathrm{E}_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \qquad \mathrm{E}_1 \leftarrow 5\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_3 \\ & & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \qquad \mathrm{E}_2 \leftarrow \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_3 \\ & & & & 5x_3 & - & 12x_4 & + & 18x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 15x_1 & & & & & & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ & & 3x_2 & & & & -9x_4 & + & 15x_5 & = & 0 \\ & & & & 5x_3 & - & 12x_4 & + & 18x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{1}{5}(x_4 + x_5) \\ x_2 = 3x_4 - 5x_5 \\ x_3 = \dfrac{1}{5}(12x_4 - 18x_5) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{x_4}{5}(-1, 15, 12, 5, 0) - \frac{x_5}{5}(1, 25, 18, 0, -5).$$

Puisqu'on peut donner des valeurs arbitraires à x_4 et à x_5, on voit qu'une base de F est formée des deux vecteurs $(-1, 15, 12, 5, 0)$ et $(1, 25, 18, 0, -5)$.

- **Un deuxième exemple**

  Etant donnée une base d'un sous-espace vectoriel F de E, il peut être utile de trouver un système d'équations de F : c'est le probème inverse du précédent.

  Supposons par exemple que E soit de dimension 4 et qu'une base de F soit formée des vecteurs $u = (1, -1, 2, 1)$ et $v = (1, 1, 3, -2)$.

  Soit $a = (x, y, z, t)$ un vecteur quelconque de E.

  Pour exprimer que a appartient à F il faut écrire que la famille (u, v, a) est de rang 2.

  On applique donc la méthode du pivot à la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 2 & 3 & z \\ 1 & -2 & t \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{lr|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & -2x+z \\ 0 & -3 & -x+t \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & -5x-y+2z \\ 0 & 0 & x+3y+2t \end{array}\right)$$

  Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice précédente soit de rang 2 est que les coordonnées x, y, z, t vérifient le système : $\begin{cases} -5x - y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2t = 0 \end{cases}$

  On a ainsi obtenu un système d'équations de F.