12. Calcul matriciel, systèmes linéaires

12. Calcul matriciel, systèmes linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, et en principe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

12.1. Matrices à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$

12.1.1. Généralités

Définition *(matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$)*

Soient n et p deux entiers strictement positifs.

Une *matrice* A de type (n,p) est une application de $\{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,p\}$ dans $\mathbb{K}$.

On note souvent $a_{i,j}$ l'image du couple (i,j) par l'application A.

Les a_{ij} sont appelés les *coefficients* de la matrice A.

On écrit alors $A = (a_{i,j})_{i=1..n,j=1..p}$, ou plus simplement $A = (a_{ij})$.

Notations

- On note $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Pour décrire un élément A de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on dispose les coefficients dans un tableau à n lignes et p colonnes, le coefficient $a_{i,j}$ venant se placer à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.
- Par exemple, la matrice A de type $(3,2)$ définie par :

  $a_{1,1}=5$, $a_{1,2}=3$, $a_{2,1}=0$, $a_{2,2}=7$, $a_{3,1}=4$ et $a_{3,2}=1$ se note $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
- Finalement, c'est ce tableau lui-même qu'on finit par appeler une matrice.

  On dit donc qu'un élément M de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est une matrice à n lignes et à p colonnes.

12.1.2. Matrices particulières

- **Matrice nulle**

  La *matrice nulle* $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est définie par : $\forall (i,j), a_{i,j} = 0$.
- **Matrices carrées**

  On appelle *matrice carrée* d'ordre n toute matrice de type (n,n).

  On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- **Diagonale d'une matrice carrée**

  Les coefficients $a_{i,i}$ (l'indice de colonne est égal à l'indice de ligne) d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont appelés *coefficients diagonaux*.

  Ils forment ce qu'on appelle la *diagonale* de A.

  Les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i > j$ sont donc *en dessous* de cette diagonale, alors que les coefficients $a_{i,j}$ tels que $j > i$ sont *au dessus* de celle-ci.

- **Matrices-ligne**

  Les éléments de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont appelés *matrices-ligne.*

  On peut identifier un élément $(a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_p)$ de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ avec le n-uplet correspondant $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ de $\mathbb{K}^p$.

- **Matrices-colonne**

  Les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelés *matrices-colonne.*

  On identifie parfois une telle matrice-colonne avec un élément de $\mathbb{K}^n$.

12.1.3. Matrices carrées particulières

- **Matrices diagonales**

  Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *diagonale* si pour tous indices distincts i et j, $a_{i,j} = 0$: seuls sont éventuellement non nuls les éléments diagonaux de A.

- **Matrice identité**

  La *matrice identité d'ordre* n est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ valent 1. Cette matrice est notée I_n.

  On remarque que pour tous indices i et j, $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ (notation de Kronecker).

- **Matrices scalaires**

  Les matrices de la forme $A = \lambda I_n$, c'est-à-dire les matrices diagonales dont tous les coefficients diagonaux sont égaux, sont dites *matrices scalaires.*

- **Matrices triangulaires**

  Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *triangulaire supérieure* si pour tous i et j tels que $i > j$, alors $a_{i,j} = 0$, c'est-à-dire si tous les coefficients en-dessous de la diagonale sont nuls.

  La matrice A est dite *triangulaire inférieure* si pour tout i, j tel que $i < j$ on a $a_{i,j} = 0$, c'est-à-dire si tous les coefficients situés au-dessus de la diagonale sont nuls.

  Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

- **Matrices strictement triangulaires**

  Une matrice carrée A est dite strictement triangulaire si elle est triangulaire et si de plus ses coefficients diagonaux sont nuls.

  Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est strictement triangulaire supérieure.

12.2. Opérations sur les matrices

12.2.1. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

Définition

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, et λ un scalaire.
On définit les matrices $C = A + B$ et $D = \lambda A$ de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, de la manière suivante :
Pour tous indices i et j, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ et $d_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Propriétés

- $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un groupe commutatif pour la loi $+$.

  L'élément neutre est la matrice nulle, notée 0.

  L'opposée de la matrice $A = (a_{ij})$ est la matrice $-A = (-a_{ij})$.
- $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension np.

  Une base de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, dite *base canonique*, est formée par les np matrices E_{ij} (tous les coefficients de E_{ij} sont nuls sauf celui d'indice i, j qui vaut 1).

  Plus précisément, si $M = (a_{ij})$, alors $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, E_{ij}$.

12.2.2. Produit des matrices

Définition

Soient $A = (a_{ik})$ une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{kj})$ une matrice de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$.
On définit la matrice $C = AB$, élément de $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$, de la manière suivante :
Pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$, pour tout j de $\{1, \ldots, q\}$, $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$.

Interprétation

Le terme de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de $C = AB$ est donc obtenu en sommant les produits des termes de même rang dans la i-ième ligne de A et dans la j-ième colonne de B, selon le schéma ci-dessous (on a représenté en gras les coefficients de A et de B utiles au calcul du coefficient c_{ij}) :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \ldots & \mathbf{a_{ik}} & \ldots & \mathbf{a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & \mathbf{b_{1j}} & \ldots & b_{1q} \\ b_{21} & \ldots & \mathbf{b_{2j}} & \ldots & b_{2q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \ldots & \mathbf{b_{kj}} & \ldots & b_{kq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \ldots & \mathbf{b_{pj}} & \ldots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1j} & \ldots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \ldots & \mathbf{c_{ij}} & \ldots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nj} & \ldots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

Remarque

On voit bien que le produit AB de deux matrices A et B n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

On obtient alors une matrice ayant autant de lignes que A et autant de colonnes que B.
On peut donc résumer en écrivant :
[matrice de type (n, p)] $\times$ [matrice de type (p, q)] $\Rightarrow$ [matrice de type (n, q)].

Propriétés du produit

Soient A, B et C trois matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$:

- Si les produits AB et AC sont possibles, on a : $A(B + C) = AB + AC$.
- Si les produits AC et BC sont possibles, on a : $(A + B)C = AC + BC$.
- Si les produits AB et BC sont possibles, on a : $A(BC) = (AB)C$.

Remarques

- Les produits AB et BA ne sont simultanément possibles que si A est de type (n, p) et B de type (p, n). Alors AB est carrée d'ordre n, tandis que BA est carrée d'ordre p.

  Si $n \neq p$, les matrices AB et BA, de formats différents, ne sauraient être égales.

  Si A et B sont toutes deux carrées d'ordre n, alors AB et BA sont carrées d'ordre n, mais on a en général $AB \neq BA$. Dans le cas contraire, on dit que A et B *commutent*.
- L'addition des matrices est une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, mais le produit n'est pas une loi sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sauf si $n = p$.

12.2.3. Structure d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) +, \times)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$, non commutative si $n \geq 2$.
Le neutre multiplicatif est la matrice identité I_n.

Remarque importante

Si $n \geq 2$, l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient des *diviseurs de zéro*.
L'égalité $AB = 0$ n'implique donc pas $A = 0$ ou $B = 0$.
De même, les égalités $AB = AC$ ou $BA = CA$ n'impliquent pas nécessairement $B = C$.

Proposition et définition *(Matrices inversibles)*

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour la loi produit, appelé *groupe linéaire* d'indice n, et noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Remarques

- Bien que le produit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne soit pas commutatif, l'une des deux égalités $AB = \mathrm{I}_n$ ou $BA = \mathrm{I}_n$ implique l'autre, et donc $B = A^{-1}$.
- Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

  Alors A est inversible $\Leftrightarrow$ A est simplifiable $\Leftrightarrow$ A n'est pas un diviseur de 0.

- Si A et B sont inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut utiliser la formule du binôme $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k\, A^k\, B^{p-k}$, mais à condition que les matrices A et B commutent!

  Les matrices scalaires $\lambda \mathrm{I}_n$ commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

12.2.4. Calcul des puissances d'une matrice

- **Utilisation de la formule du binôme**

  Pour calculer A^n, il est parfois possible d'écrire $A = B+C$, et d'utiliser la formule du binôme, à condition que B et C commutent, et que le calcul des puissances de B et C soit facile.

  Cas fréquent : B est une matrice scalaire et C est nilpotente (telle que $C^m = 0$).

  On écrira alors, pour tout p : $A^p = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k\, C^k\, B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k\, \lambda^{p-k} C^k = \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_p^k\, \lambda^{p-k} C^k$.
- **Utilisation d'une récurrence**

  Il arrive que les coefficients des premières puissances de A satisfassent à une formule simple. Il reste à établir si cette formule est vraie pour toutes les puissances de A, à l'aide d'une récurrence.

- **Utilisation d'un polynôme annulateur**

  Supposons par exemple qu'une matrice A vérifie $A^3 - 4A^2 + 5A - I = 0 \quad (1)$

  On exprime cette situation en disant que $P = \mathrm{X}^3 - 4\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} - 1$ est un *polynôme annulateur* de A, l'égalité précédente s'écrivant $P(A) = 0$.

  (1) s'écrit $A(A^2 - 4A + 5I) = I$ et prouve que A est inversible avec $A^{-1} = A^2 - 4A + 5I$.

  (1) prouve l'existence de suites (α_n), (β_n), et (γ_n) telles que, $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I$ (par récurrence, ou bien en utilisant la division euclidienne $\mathrm{X}^n = Q_n P + R_n$ et en écrivant $A^n = Q_n(A)P(A) + R_n(A) = R_n(A)$, avec $\deg(R_n) \leq 2$.)

- **Résolution d'un système**

  Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et X, Y deux matrices colonnes inconnues de hauteur n.

  Si le système $AX = Y$ possède une solution unique X en fonction de Y, alors on peut dire que A est inversible.

  La solution doit s'exprimer sous la forme $X = BY$, ce qui donne $B = A^{-1}$.

- **Exposants négatifs**

  Supposons qu'on ait trouvé une formule donnant $A^n = \varphi(n)$ en fonction de l'entier $n \geq 0$.

  On peut chercher à prouver que cette formule est encore valable pour les exposants négatifs, à condition que A soit inversible.

  Il suffit alors de prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\varphi(n)\varphi(-n) = \mathrm{I}_n$.

12.2.5. Cas des matrices triangulaires ou diagonales

Proposition

Toute matrice A triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux a_{ii} sont non nuls.

A^{-1} est alors triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les inverses des a_{ii}.

(idem si on remplace *triangulaire supérieure* par *triangulaire inférieure* ou par *diagonale*.)

Proposition

Soit A une matrice triangulaire supérieure.

Alors pour tout entier naturel k (et pour tout entier relatif k si A est inversible) A^k est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les a_{ii}^k.

(idem si on remplace *triangulaire supérieure* par *triangulaire inférieure* ou par *diagonale*.)

Proposition

Toute matrice A strictement triangulaire est nilpotente.

Plus précisément, si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $A^n = 0$.

Remarques

- Une matrice nilpotente, n'est pas nécessairement strictement triangulaire.

  Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = 0$.
- Si une matrice carrée A d'ordre n est nilpotente, on est certain que $A^n = 0$.

  Inversement si A est carrée d'ordre n et si $A^n \neq 0$, toutes ses puissances sont non nulles.

12.2.6. Transposition

Définition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle *transposée* de A et on note ${}^{\mathrm{T}}A$ la matrice B de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ dont le terme général est $b_{ij} = a_{ji}$.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ alors ${}^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Propriétés

- La transposition est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$dans $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$.

  $\begin{cases} \forall (A,B) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, {}^{\mathrm{T}}(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^{\mathrm{T}}A + \mu {}^{\mathrm{T}}B \\ \forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), {}^{\mathrm{T}\mathrm{T}}A = A \end{cases}$
- Si on se restreint à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la transposition est donc un automorphisme involutif.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}), {}^{\mathrm{T}}(AB) = {}^{\mathrm{T}}B {}^{\mathrm{T}}A$ (Attention à l'ordre!)
- Si A est une matrice carrée inversible, alors ${}^{\mathrm{T}}A$ est inversible et $({}^{\mathrm{T}}A)^{-1} = {}^{\mathrm{T}}(A^{-1})$.
- Pour tout matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout entier naturel k, on a : ${}^{\mathrm{T}}(A^k) = ({}^{\mathrm{T}}A)^k$.

  Si A est inversible, cette égalité est valable pour tout entier relatif k.

12.2.7. Matrices symétriques ou antisymétriques

Définition

Une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *symétrique* si ${}^{\mathrm{T}}A = A$.
Cela équivaut à dire que pour tous indices i et j, $a_{ji} = a_{ij}$.
Autrement dit A est symétrique par rapport à sa diagonale.

Définition

Une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *antisymétrique* si ${}^{\mathrm{T}}A = -A$.
Cela équivaut à dire que pour tous indices i et j, $a_{ji} = -a_{ij}$.
Cela implique en particulier que les coefficients diagonaux de A sont nuls.

Exemples

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique. $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 0 & 7 \\ -6 & 4 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Propriétés

- Si A est inversible et symétrique alors A^{-1} est symétrique.
  Si A est inversible et antisymétrique alors A^{-1} est antisymétrique.
- Si A est symétrique alors, pour tout entier naturel k, A^k est symétrique.
  Si A est inversible, cette propriété est valable pour tout entier relatif k.
- Si A est antisymétrique, ses puissances paires sont symétriques et ses puissances impaires sont antisymétriques.

Notation

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont symétriques.
On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont antisymétriques.

Proposition

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est $\frac{1}{2}\,n(n+1)$ et celle de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est $\frac{1}{2}\,n(n-1)$.
Toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit donc de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique A.
S et A sont respectivement données par : $S = \frac{1}{2}\,(M + {}^{\mathrm{T}}M)$ et $A = \frac{1}{2}\,(M - {}^{\mathrm{T}}M)$.

12.3. Matrice d'une application linéaire

12.3.1. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dim $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$.
Soit $(v) = v_1, v_2, \ldots, v_p$ une famille de p vecteurs de E.
Pour tout entier j compris entre 1 et p, posons $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i$.
Soit A la matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ de terme général a_{ij}.
A est appelée matrice de la famille (v) dans la base (e).

Interprétation et exemple

Avec ces notations, la j-ième colonne de A est formée des composantes de v dans (e).
Supposons par exemple que $(e) = e_1, e_2, e_3$ soit une base de E (donc $\dim(E) = 3$).
Supposons également que les vecteurs v_1, v_2 soient donnés par : $\begin{cases} v_1 = 3e_1 + 5e_2 + e_3 \\ v_2 = 2e_1 + 4e_2 + 7e_3 \end{cases}$

Alors la matrice de la famille $(v) = v_1, v_2$ dans la base (e) est $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Notation dans un cas particulier

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, muni d'une base (e), on notera $[u]_e$ la matrice-colonne des coordonnées d'un vecteur u de E dans la base (e).

12.3.2. Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
On suppose que $\dim(E) = p \geq 1$, et que E est muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_p$.
On suppose que $\dim(F) = n \geq 1$, et que F est muni d'une base $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.
Soit f une application linéaire de E dans F.
On appelle matrice de f dans les bases (e) et (ε) la matrice A de la famille des vecteurs $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)$ dans la base (ε).
Cette matrice, élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, est notée $\mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon))$.

Interprétation et exemple

Pour tout indice j de $\{1, \ldots, p\}$, la j-ième colonne de $A = \mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon))$ est formée des composantes du vecteur $f(e_j)$ dans la base (ε).
Supposons qu'une base de E soit $(e) = e_1, e_2, e_3$, et qu'une base de F soit $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Soit f l'application linéaire de E dans F définie par $\begin{cases} f(e_1) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \\ f(e_2) = 7\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 \\ f(e_3) = 3\varepsilon_1 \end{cases}$

Alors la matrice de f dans les bases (e) et (ε) est $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Cas particulier: Matrice d'un endomorphisme dans une base

Soit f un endomorphisme de E, où $\dim(E) = n \geq 1$. Si on munit E de la même base (e) *au départ* et *à l'arrivée* on parle de la matrice de f dans la base (e).

Cette matrice, carrée d'ordre n, sera notée $\mathcal{M}(f, (e))$.

Proposition *(Interprétation matricielle de l'égalité $v = f(u)$)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

E est muni d'une base $(e) = e_1, \ldots, e_p$ et F est muni d'une base $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.

Soit f une application linéaire de E dans F, de matrice A dans les bases (e) et (ε).

Pour tout u de E, l'égalité vectorielle $v = f(u)$ équivaut à l'égalité matricielle $[f(u)]_\varepsilon = A[u]_e$.

Remarque

Réciproquement, si une application $f : E \to F$ est telle qu'il existe une matrice A telle que pour tout vecteur u de E, $[f(u)]_\varepsilon = A[u]_e$, alors f est linéaire et $A = \mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon))$.

Exemples

Avec l'exemple précédent, si (x', y') sont les coordonnées dans (ε) de $v = f(u)$, le vecteur u ayant lui-même pour coordonnées (x, y, z) dans (e), on a les équivalences suivantes :

$$v = f(u) \Leftrightarrow [v]_\varepsilon = A[u]_e \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 7y + 3z \\ y' = 2x + 5y \end{cases}$$

Réciproquement, soit g l'application qui envoie tout vecteur $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ sur le vecteur $v = x'\varepsilon_1 + y'\varepsilon_2$ avec $\begin{cases} x' = x + 2y + 3z \\ y' = 9x + 8y + 7z \end{cases}$

Alors g est linéaire et sa matrice dans les bases (e) et (ε) est $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Cela signifie par exemple que $g(e_1) = \varepsilon_1 + 9\varepsilon_2$.

Remarques

- Une application linéaire est déterminée par sa matrice dans un couple de bases donné.

  En supposant toujours que $\dim(E) = p \geq 1$ et $\dim(F) = n \geq 1$, l'application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ qui à une application linéaire f associe sa matrice dans un couple de bases donné est donc une bijection.

- Soit f une application linéaire de E dans F.

  Quand on change de base dans E ou dans F, la matrice de f est en général modifiée.

  On analysera plus loin cette dépendance en fonction du couple de bases.

- Cas particulier : la matrice de l'application nulle de E dans F est la matrice nulle, et ceci quelque soit le couple de bases.

- La matrice de Id_E dans une base (e) de E est la matrice identité, quelque soit la base (e).

  Mais attention, la matrice de Id_E n'est pas la matrice identité si on utilise une certaine base *au départ* et une autre base *à l'arrivée*.

- A toute application linéaire f de E (de dimension $p \geq 1$) vers F (de dimension $n \geq 1$) correspond une matrice unique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ dans un couple de bases donné.

  Inversement, A dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ peut représenter une infinité d'applications linéaires :

  - On a en effet le choix des espaces E (de dimension p) et F (de dimension n).

  - On a ensuite le choix d'une base de E et d'une base de F.

  Si rien n'est imposé, on prend $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$, munis de leur base canonique.

12.3.3. Propriétés opératoires

Proposition *(Matrice de $\lambda f + \mu g$)*

On suppose que $\dim(E) = p \geq 1$ et que $\dim(F) = n \geq 1$.
L'application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ qui à f associe sa matrice dans un couple de bases est linéaire (c'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels) :
$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$
$$\mathcal{M}(\alpha f + \beta g, (e), (\varepsilon)) = \alpha \mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon)) + \beta \mathcal{M}(g, (e), (\varepsilon)).$$

Proposition *(Matrice de la composée $g \circ f$)*

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, munis des bases (α), (β), et (γ).
Soit $f : E \rightarrow F$, linéaire, de matrice A dans les bases (α) et (β).
Soit $g : F \rightarrow G$, linéaire, de matrice B dans les bases (β) et (γ).
Alors la matrice de $g \circ f$, dans les bases (e) et (ε), est BA.
Autrement dit : $\mathcal{M}(g o f, (\alpha), (\gamma)) = \mathcal{M}(g, (\beta), (\gamma)) \times \mathcal{M}(f, (\alpha), (\beta))$.

Proposition *(Matrice de f^{-1})*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension $n \geq 1$.
On suppose que E est muni de la base (e), et que F est muni de la base (ε).
Soit f une application linéaire de E dans F, de matrice A dans les bases (e) et (ε).
f est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.
La matrice de f^{-1} dans les bases (ε) et (e) est alors A^{-1}.

Proposition *(Matrice de f^n)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base (e).
Soit f un endomorphisme de E, de matrice A dans la base (e).
Pour tout entier naturel k, la matrice de f^k dans la base (e) est A^k.
Cette propriété s'étend aux exposants k négatifs si f est un automorphisme de E, c'est-à-dire si A est inversible.

Remarque *(Matrice d'une application nilpotente)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base (e).
Soit f un endomorphisme de E, de matrice A dans la base (e).
Alors f est nilpotente si et seulement si A est nilpotente.
Si f est nilpotente, il existe même une base (ε) de E dans laquelle la matrice de f est strictement triangulaire supérieure.

12.4. Changements de bases

12.4.1. Matrices de passage

Proposition *(Inversibilité de la matrice d'une famille de vecteurs)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base (e).

Soit v une famille de n vecteurs de E (autant donc que la dimension de E).

Soit A la matrice de la famille (v) dans la base (e). C'est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors la famille (v) est une base de E si et seulement si la matrice A est inversible.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni de deux bases (e) et (ε).

La matrice de la famille (ε) dans la base (e) est appelée *matrice de passage* de la base (e) à la base (ε), et notée P_e^ε. D'après ce qui précède, cette matrice est inversible.

Deux interprétations d'une matrice de passage

Avec les notations précédentes, la matrice de passage de (e) à (ε) est :

- La matrice de l'identité, de E muni de (ε) vers E muni de (e) : $P_e^\varepsilon = \mathcal{M}(\mathrm{Id}_E, (\varepsilon), (e))$.
- La matrice dans (e) de l'automorphisme f défini par : $\forall j \in \{1, \ldots, n\}, f(e_j) = \varepsilon_j$, c'est-à-dire qui transforme la base (e) en la base (ε).

Conséquences

- L'inverse de la matrice de passage P_e^ε est la matrice de passage P_ε^e de (ε) à (e).
- Si (α), (β) et (γ) sont trois bases de E, alors on a la relation : $P_\alpha^\gamma = P_\alpha^\beta\, P_\beta^\gamma$.

12.4.2. Changements de matrice pour une application linéaire

Proposition *(Matrices de passage et coordonnées)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni de deux bases (e) et (e').

Soit P la matrice de passage de (e) à (e'). Pour tout u de E : $\boxed{[u]_e = P\,[u]_{e'}}$

Interprétation : la matrice de passage de l'*ancienne* base (e) à la *nouvelle* base (e') donne les *anciennes* coordonnées de u en fonction des *nouvelles*.

Proposition *(Changement de base pour une application linéaire)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, de dimensions respectives $p \geq 1$ et $n \geq 1$.

On suppose que E est muni d'une *ancienne* base (e) et d'une *nouvelle* base (e').

De même soient (ε) l'*ancienne* base de F et (ε') la *nouvelle* base de F.

Soit P la matrice de passage de (e) à (e'). Soit Q la matrice de passage de (ε) à (ε').

Soit f une application linéaire de E dans F.

Soit A la matrice de f dans les bases (e) et (ε) (*ancienne* matrice).

Soit B la matrice de f dans les bases (e') et (ε') (*nouvelle* matrice).

Alors on a l'égalité : $\boxed{B = Q^{-1}\,A\,P}$.

Conséquence dans un cas particulier

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension $n \geq 1$.
Soient (e) l'*ancienne* base de E et (e') la *nouvelle* base de E.
Soit f un endomorphisme de E, de matrice A dans (e) et de matrice B dans (e').
Soit P la matrice de passage de (e) à (e').
Alors on a l'égalité : $\boxed{B = P^{-1}\,A\,P}$.

12.4.3. Matrices équivalentes et matrices semblables

Définition *(Matrices équivalentes)*

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes* s'il existe une matrice inversible Q d'ordre n et une matrice inversible P d'ordre p telles que : $B = QAP$.

Définition *(Matrices semblables)*

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible P d'ordre n telle que : $B = P^{-1}AP$.

Remarques

- Deux matrices semblables sont équivalentes (choisir $Q = P^{-1}$), et la réciproque est fausse.
- Dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ la relation "A est équivalente à B" est une relation … d'équivalence :

  - Toute matrice A est équivalente à elle-même (réflexivité.)

  - Si A est équivalente à B, alors B est équivalente à A (symétrie.)

  - (A équivalente à B et B équivalente à C) $\Rightarrow$ A équivalente à C (transitivité.)
- De même, "A est semblable à B" définit une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si $B = P^{-1}AP$, alors pour tout entier naturel n on a : $B^n = P^{-1}A^nP$.

  Cette relation s'étend aux exposants négatifs si A et donc B sont inversibles.

  On peut donc calculer B^n si A^n est plus facile à obtenir, notamment si A est diagonale.

Proposition

Soient A et B deux matrices de $f : E \to F$, dans deux couples de bases.
Alors les matrices A et B sont équivalentes.
Réciproquement toute matrice équivalente à A (donc à B) est la matrice de f dans un certain couple de bases.

Interprétation

Deux matrices A, B sont équivalentes $\Leftrightarrow$ elles peuvent représenter une même application linéaire $f : E \to F$, chacune dans un couple de bases de E et F.

Proposition

Soint f un endomorphisme de E. Soit A la matrice de f dans une base (α) de E.

Soit B la matrice de f dans une base (β) de E. Alors A et B sont semblables.

Réciproquement, soit C une matrice semblable à A (donc à B). Alors il existe une base (γ) de E dans laquelle la matrice de f est C.

Interprétation

Deux matrices A et B, carrées d'ordre n, sont semblables $\Leftrightarrow$ elles peuvent représenter un même endomorphisme f de E, avec $\dim(E) = n$, chacune dans une certaine base de E.

12.5. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme

12.5.1. Trace d'une matrice

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, de terme général a_{ij}.

On appelle *trace* de A, et on note $\operatorname{tr}(A)$, la somme des coefficients diagonaux de A.

Autrement dit, $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Propriétés et remarques

- L'application "trace" est une *forme linéaire* sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

  Ainsi pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tous scalaires α, β :

  $\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B)$.

- Soient A une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$.

  La matrice AB est donc carrée d'ordre n, tandis que BA est carrée d'ordre p.

  Dans ces conditions, AB et BA ont la même trace : $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

- L'égalité $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ est vraie en particulier pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On ne doit pas généraliser abusivement à des produits de plus de deux matrices.

  Par exemple, il n'y a aucune raison pour qu'on ait l'égalité $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CBA)$.

  En revanche, on peut écrire $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}(BCA)$.

- Deux matrices semblables ont la même trace. Plus précisément, si A, P appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si P est inversible, alors $B = P^{-1}AP$ et B a la même trace que A.

  En effet : $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}((P^{-1}A)P) = \operatorname{tr}(P(P^{-1}A)) = \operatorname{tr}(A)$.

  Pour reprendre la remarque précédente on n'écrira pas : $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(P^{-1}PA) = \operatorname{tr}(A)$!

12.5.2. Trace d'un endomorphisme

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit f un endomorphisme de E.

On appelle *trace* de f et on note $\operatorname{tr}(f)$ la trace de la matrice de f dans une base quelconque de l'espace vectoriel E.

Propriétés et exemples

- Compte tenu de la dernière remarque du paragraphe précédent, la trace de f ne dépend pas de la base (e) choisie dans E pour représenter matriciellement f.
- Si f et g sont deux endomorphismes de E, on a : $\operatorname{tr}(g \circ f) = \operatorname{tr}(f \circ g)$.
- Si p est la projection de E sur un sous-espace F de dimension r, alors $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p) = r$.

  Pour s'en persuader, il suffit de choisir un supplémentaire G de F dans E et de se placer dans une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$. La matrice de p dans cette base est diagonale, les r premiers coefficients diagonaux valant 1 et les $n - r$ derniers valant 0.
- On considère un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3.

  Soit r la rotation vectorielle d'angle θ autour d'un vecteur w.

  Alors la trace de r est $1 + 2\cos\theta$.

  Il suffit en effet de se placer dans une base orthonormée directe u, v, w.

  La matrice de r dans cette base est $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{tr}(A) = 1 + 2\cos\theta$.

  Si on connait la matrice B de r dans une base quelconque (même non orthonormée), on peut donc en écrivant $\operatorname{tr}(B) = 1 + 2\cos\theta$ trouver rapidement le cosinus de l'angle de la rotation r (pour pouvoir calculer son sinus il faut orienter l'axe de la rotation).

12.6. Opérations élémentaires, calcul du rang

12.6.1. Rang d'une famille de vecteurs

Définition

Soit $(u) = u_1, u_2, \ldots, u_p$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

On appelle *rang* de la famille (u) la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille : $\operatorname{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \dim(\operatorname{Vect}\{u_1, u_2, \ldots, u_p\})$.

Remarques

- On a $\operatorname{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p) \leq p$, avec égalité si et seulement si la famille (u) est libre.
- Si $\dim(E) = n$, alors $\operatorname{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p) \leq n$, avec égalité si et seulement si la famille (u) est génératrice dans E.

12.6.2. Rang d'une application linéaire

Définition

Soit f une application linéaire de E dans F. On suppose que E est de dimension finie.
On appelle *rang* de f la dimension du sous-espace $\mathrm{Im}\,(f)$ de F. On le note $\mathrm{rg}\,(f)$.

Remarques

- Le théorème du rang s'écrit : $\dim(E) = \mathrm{rg}\,(f) + \dim(\mathrm{Ker}\,(f))$.
- On a $\mathrm{rg}\,(f) \leq \dim(E)$ avec égalité si et seulement si l'application f est injective.
- Si F est de dimension finie, on a $\mathrm{rg}\,(f) \leq dim(F)$ avec égalité si et seulement si f est surjective.
- Les notions de rang d'une application linéaire et de rang d'une famille de vecteurs se rejoignent. Pour toute base $e_1, e_2, \ldots, e_p$ de E, $\mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{rg}\,(f(e_1), \ldots, f(e_p))$.

12.6.3. Rang d'une matrice

Définition *(Rang d'une matrice)*

Soit A une matrice, élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
On appelle *rang* de A, et on note $\mathrm{rg}\,(A)$, le rang de la famille des p vecteurs-colonne de A, considérés comme éléments de $\mathbb{K}^n$.

Remarques

- $\mathrm{rg}\,(A)$ est nul si et seulement si A est la matrice nulle.

  $\mathrm{rg}\,(A)$ est égal à 1 si et seulement si les différentes colonnes de A sont proportionnelles deux à deux, l'une d'elles au moins n'étant pas nulle.
- Le rang de la matrice A est égal au rang de toute application linéaire susceptible d'être représentée par A.

12.6.4. Matrices échelonnées

Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
On note $\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n$ les lignes successives de A.
Pour chaque ligne L_i de A, soit $d(i)$ le plus petit indice j, s'il existe, tel que $a_{ij} \neq 0$.
On dit que A est *échelonnée* supérieurement s'il existe un entier r de $\{0, \ldots, n\}$ tel que :

- Pour tout indice i inférieur ou égal à r, la ligne L_i est non nulle.
- Pour tout indice i strictement supérieur à r, la ligne L_i est nulle.
- La suite $d(1), d(2), \ldots, d(r)$ est strictement croissante.

Une telle matrice est de rang r.
Les r coefficients non nuls situés aux positions $(i, d(i))$ sont appelés les *pivots* de A.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 3 & 4 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{9} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est échelonnée, avec quatre pivots : } \operatorname{rg}(A) = 4.$$

Proposition

Soient n, p, r trois entiers tels que $1 \leq r \leq \min(n, p)$.
On note $J_r(n, p)$ la matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, de coefficients a_{ij}, définie par :

- Pour tout indice i compris entre 1 et r, $a_{ii} = 1$.
- Les autres coefficients de $J_r(n, p)$ sont nuls.

Exemples

Les matrices $J_r(n, p)$ sont bien sûr des cas particuliers de matrices échelonnées.

Par exemple, dans $\mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{K})$: $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition

Une matrice A de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est de rang r $\Leftrightarrow$ elle est équivalente à la matrice $J_r(n, p)$.

Proposition

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont équivalentes $\Leftrightarrow$ elles ont le même rang.

Proposition

Le rang d'une matrice A est égal au rang de la matrice transposée ${}^{\mathrm{T}}A$.

Conséquence et conclusion

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Le rang de A est inférieur ou égal au minimum de n et de p.
Il est égal au nombre maximum de colonnes libres dans A.
Il est aussi égal au nombre maximum de lignes libres dans A.

12.6.5. Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes

Définition *(Opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille)*

Soit $(v) = v_1, v_2, \ldots, v_n$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^p$. On appelle *opération élémentaire* sur les vecteurs de cette famille l'une des opérations suivantes :

- Multiplier un des vecteurs de la famille par un scalaire non nul.
- Ajouter à l'un des vecteurs un multiple d'un autre vecteur de la famille.
- Echanger deux vecteurs de la famille.

Proposition

Soit (v') la famille de vecteurs obtenue en appliquant une opération élémentaire à (v).

Les deux familles (v) et (v') ont le même rang.

Remarque

On ne modifie donc pas le rang d'une famille de vecteurs en lui appliquant une succession d'opérations élémentaires.

Il en est ainsi quand on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Définition *(Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice)*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Notons $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \ldots, \mathrm{L}_n$ les lignes de A.

On appelle opération élémentaire sur les lignes de A l'une des opérations suivantes :

- Multiplier une ligne L_i par un scalaire non nul α.

  Cette opération est notée : $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha \mathrm{L}_i$.
- Ajouter à l'une des lignes L_i un multiple d'une autre ligne L_j.

  Cette opération est notée : $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \beta \mathrm{L}_j$.
- Echanger deux lignes L_i et L_j.

  Cette opération est notée : $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$.

Remarques

- On définit de même les opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice A.

  Ces opérations sont notées : $\mathrm{C}_i \leftarrow \alpha \mathrm{C}_i$, $\mathrm{C}_i \leftarrow \mathrm{C}_i + \beta \mathrm{C}_j$, et $\mathrm{C}_i \leftrightarrow \mathrm{C}_j$.
- Toute opération élémentaire (ou toute suite d'opérations élémentaires) transforme une matrice A en une matrice de même rang.
- Dans toute opération $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha \mathrm{L}_i$, il est absolument indispensable que α soit non nul.

  On veillera notamment au cas où α dépend d'un paramètre : pour les valeurs de celui-ci qui annuleraient α, l'opération se traduit par $\mathrm{L}_\mathrm{i} \leftarrow 0$ et modifie en général le rang de A.
- On note souvent $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha \mathrm{L}_i + \beta \mathrm{L}_j$ la composée de $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha \mathrm{L}_i$ puis de $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \beta \mathrm{L}_j$.

  Ici il est nécessaire que α soit non nul!

Proposition *(Interprétation par des produits matriciels)*

> Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, transformée en une matrice B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes.
>
> Alors il existe une matrice inversible P telle que $B = PA$.
>
> De même si C est obtenue à partir de A par une ou plusieurs opérations élémentaires sur les colonnes, alors il existe une matrice inversible Q telle que $B = AQ$.

Interprétation

On peut interpréter ces résultats en disant que :

- Toute opération élémentaire sur les *lignes* équivaut à une multiplication à *gauche* par une matrice inversible.
- Toute opération élémentaire sur les *colonnes* équivaut à une multiplication à *droite* par une matrice inversible.

12.6.6. Calcul du rang par la méthode du pivot

Le calcul du rang d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire peut toujours se ramener au calcul du rang d'une matrice.

Proposition

> On peut transformer une matrice quelconque A en une matrice échelonnée B, par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes de A.

Conséquence

Les opérations élémentaires ne modifiant pas le rang de la matrice initiale, on peut ainsi calculer le rang de A : c'est celui de la matrice échelonnée finale, c'est-à-dire le nombre de ses pivots non nuls.

Exemple de calcul du rang d'une matrice

On veut calculer le rang de la matrice A ci-dessous :

$$A = \begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 3 & 7 & 11 & 15 & 19 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 14 & 21 & 16 \end{array} \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - \mathrm{L}_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & -32 \\ 0 & -4 & -17 & -26 & -23 \\ 0 & -2 & 5 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow 2\mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow 4\mathrm{L}_4 - \mathrm{L}_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & -32 \\ 0 & 0 & 18 & 28 & 14 \\ 0 & 0 & -36 & -56 & -28 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 + 2\mathrm{L}_3 \end{array} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & \boxed{-8} & -16 & -24 & -32 \\ 0 & 0 & \boxed{18} & 28 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice initiale A est donc de rang 3.

12.6.7. Calcul de l'inverse par la méthode du pivot

Proposition

La matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si il est possible, par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, de passer de A à I_n.

La même suite d'opérations, dans le même ordre, permet de passer de I_n à A^{-1}.

Principe de la méthode

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on veut calculer l'inverse.

On place A et I_n côte à côte dans un tableau à n lignes et $2n$ colonnes.

On procède ensuite à une succession d'opérations élémentaires sur les lignes de ce tableau, de manière à transformer A (la partie gauche du tableau) en I_n.

Le tableau $(A \mid \mathrm{I}_n)$ est alors tranformé en $(\mathrm{I}_n \mid A^{-1})$.

Dans la pratique

- On part du tableau $(A \mid \mathrm{I}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Supposons que le coefficient a_{11} soit non nul.

  Si ce n'est pas le cas, on commence par échanger la ligne L_1 avec une ligne L_i telle que $a_{i1} \neq 0$: il y a nécessairement au moins un coefficient non nul sur la première colonne du tableau sinon A ne serait pas inversible.
- On applique les opérations élémentaires : $\mathrm{L}_i \leftarrow a_{11}\mathrm{L}_i - a_{i1}\mathrm{L}_1$, pour $i = 2, \ldots, n$.

  Dans cette succession d'opérations, le coefficient non nul a_{11} est appelé le *pivot*.

  Le tableau se présente alors sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & \vdots & b_{2p} & -a_{21} & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & b_{n2} & \ldots & b_{np} & -a_{n1} & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On poursuit alors avec le coefficient b_{22} qui permet d'annuler tous les coefficients de la deuxième colonne (sauf lui-même).

  Là encore si $b_{22} = 0$, on commence par échanger L_2 avec l'une des lignes L_i $(i \geq 3)$.
- On continue ainsi jusqu'à obtenir à la place de A une matrice diagonale.

  On termine en divisant chaque ligne par le coefficient diagonal obtenu.

  A la place qu'occupait I_n se trouve maintenant A^{-1}.
- Il n'est pas utile (au contraire) de rendre égaux à 1 les coefficients diagonaux de la moitié gauche du tableau avant que d'y avoir obtenu une matrice diagonale.

  Cela a en effet souvent pour conséquence d'introduire des coefficients fractionnaires difficiles à manipuler : puisqu'on demande souvent d'inverser des matrices à coefficients entiers, autant garder les coefficients entiers le plus longtemps possible!

12.7. Systèmes d'équations linéaires

Dans cette partie, $\mathbb{K}$ désigne un corps. En principe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

12.7.1. Définitions

- On appelle *système linéaire* de n équations, à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout système d'équations de la forme :

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1j}\,x_j + \cdots + a_{1p}\,x_p = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2j}\,x_j + \cdots + a_{2p}\,x_p = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \cdots + a_{ij}\,x_j + \cdots + a_{ip}\,x_p = b_i \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nj}\,x_j + \cdots + a_{np}\,x_p = b_n \end{cases}$$

- Les a_{ij} sont appelés les *coefficients du système.*

  La matrice $A = (a_{ij})$, élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, est appelée *matrice du système.*

  Le rang de A est appelé le *rang du système.*

  Les coefficients $b_1, \ldots, b_n$ sont les *seconds membres.*

- La système (S) est dit *triangulaire* (ou “en escaliers”, ou “en cascades”) si la matrice A est triangulaire.

  Il est dit *carré* si $n = p$. La matrice A est alors un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

  Un système carré est dit *de Cramer* si sa matrice A est inversible.

- On dit que l'élément $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$ est le p-uplet des *inconnues* du système.

  On dit que $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est une *solution* du système si les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ satisfont à chacune des égalités figurant dans (S).

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire peut être vide ou non vide. S'il est non vide, on verra qu'il est soit réduit à un seul élément de $\mathbb{K}^p$, soit infini.

  Deux systèmes linéaires sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

- Un système linéaire est dit *homogène* si ses seconds membres b_i sont nuls.

  A un système (S) on *associe* un système homogène (H) en annulant les seconds membres.

  Un système homogène possède au moins la solution $(0, 0, \ldots, 0)$ dite *solution triviale.*

12.7.2. Interprétations d'un système linéaire

On reprend le système (S) défini au paragraphe précédent.

- **Interprétation matricielle**

  Soit $A = (a_{ij})$, élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, la matrice du système (S).

  Soient $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ (seconds membres) et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ (inconnues).

(S) s'écrit $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $AX = B$.

Le système homogène (H) associé à (S) s'écrit : $AX = 0$.

Si A est carrée inversible (système de Cramer), (S) a une solution unique $X = A^{-1}B$.

- **Interprétation en termes d'applications linéaires**

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ vers $\mathbb{K}^n$, de matrice A dans les bases canoniques.

Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Le système (S) équivaut alors à l'égalité vectorielle $f(x) = b$.

Résoudre (S), c'est donc chercher l'image réciproque du vecteur b de $\mathbb{K}^n$ par l'application linéaire f.

Le système (S) admet au moins une solution si et seulement si b est dans l'image de f.

Le système homogène associé (H) équivaut à $f(x) = \overrightarrow{0}$.

Résoudre (H), c'est donc trouver $\operatorname{Ker} f$.

- **Interprétation en termes de combinaisons linéaires**

Pour tout j de $\{1, \dots, p\}$, notons $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ le j-ième vecteur colonne de A.

Soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des seconds membres.

Le système (S) s'écrit : $x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} + \dots + x_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,

c'est-à-dire $x_1C_1 + \dots + x_jC_j + \dots + x_pC_p = B$.

Résoudre le système (S), c'est trouver toutes les manières d'écrire, dans $\mathbb{K}^n$, la colonne B comme combinaison linéaire des colonnes $C_1, C_2, \dots, C_p$.

Le système (S) admet au moins une solution si et seulement si B est dans le sous-espace engendré par les colonnes $C_1, C_2, \dots, C_p$.

Résoudre (H), c'est trouver tous les p-uplets $(x_1, \dots, x_p)$ tels que $\sum_{k=1}^{p} x_kC_k = \overrightarrow{0}$.

Le système (H) possède d'autres solutions que la solution triviale si et seulement si les vecteurs-colonne $C_1, C_2, \dots, C_p$ sont liés.

12.7.3. Structure de l'ensemble des solutions

- **Solutions du système homogène**

  Utilisons l'interprétation de (S) en termes d'applications linéaires.

  $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est solution du système homogène associé (H) si et seulement si $f(x) = \overrightarrow{0}$ c'est-à-dire si et seulement si x est élément de $\mathrm{Ker}\,(f)$.

  Or $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p - \mathrm{rg}\,(f)$, où $\mathrm{rg}\,(f)$ est le rang de l'application linéaire f c'est-à-dire le rang de la matrice A.

  On peut donc énoncer :

  L'ensemble des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension $p - \mathrm{rg}\,(A)$.

- **Solutions du système (S)**

  Supposons que (S) possède au moins une solution x_0. Soit x un vecteur de $\mathbb{K}^p$.

  x est une solution de (S) $\Leftrightarrow f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x - x_0) = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire si et seulement si $x - x_0$ est solution de (H), ou encore si et seulement si x peut s'écrire $x = x_0 + h$ où h est une solution quelconque de (H).

  On peut donc énoncer : *L'ensemble des solutions de (S), s'il n'est pas vide, s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (S) la solution générale de (H).*

Remarques

- Le système (S) possède *au moins* une solution (autrement dit il existe au moins un x de $\mathbb{K}^p$ tel que $f(x) = b$) si et seulement si b appartient à $\mathrm{Im}\, f$.

  Cela dépend bien sûr de b, mais si f est surjective (c'est-à-dire si la matrice du système est de rang n), alors (S) possède au moins une solution quelque soit le second membre.
- Si f est injective, c'est-à-dire si le rang de A est ègal à p, alors le système (S) possède *au plus* une solution quelque soit le second membre b. Le système homogène (H), quant à lui possède alors uniquement la solution triviale.
- Si l'ensemble des solutions de (S) est non vide, il est soit réduit à un seul élément (cas où f est bijective), soit infini si $\dim \mathrm{Ker}\, f > 0$.

12.7.4. Systèmes de Cramer

- **Retour au trois interprétations possibles de (S)**

  Rappelons qu'un système carré (S) est dit *de Cramer* si sa matrice est inversible, et qu'un tel système possède une solution unique.

  En termes d'applications linéaires, (S) s'écrit $f(x) = b$ et équivaut à $x = f^{-1}(b)$.

  Avec l'interprétation matricielle : $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

  En termes de combinaisons linéaires, l'unique solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de (S) est le p-uplet des coordonnées de B (colonne des seconds membres) dans la base de $\mathbb{K}^n$ formée par les colonnes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de la matrice A.

- **Systèmes de Cramer triangulaires**

  On sait qu'une matrice A triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

  Un système de Cramer triangulaire se présentera donc sous l'une des deux formes suivantes avec dans chaque cas $a_{ii} \neq 0$ pour tout i de $\{1,\ldots,n\}$:

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1j}\,x_j + \cdots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ \qquad\quad a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2j}\,x_j + \cdots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\ \qquad\qquad a_{n-1,n-1}\,x_{n-1} + a_{n-1,n}\,x_n &= b_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}\,x_n &= b_n \end{cases}$$

ou

$$(2)\quad \begin{cases} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{11}\,x_1 &= b_1 \\ \qquad\qquad\qquad a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 &= b_2 \\ \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nj}\,x_j + \cdots + a_{nn}\,x_n &= b_n \end{cases}$$

Dans le premier cas, l'unique solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s'obtient en écrivant successivement :

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}, \qquad x_{n-1} = \dfrac{1}{a_{n-1,n-1}}\left[b_{n-1} - a_{n-1,n}\,x_n\right], \\ \text{Et plus généralement, une fois connus } x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1} : \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left[b_i - a_{i,i+1}\,x_{i+1} - \cdots - a_{ij}\,x_j - \cdots - a_{in}\,x_n\right] \end{cases}$$

Dans le second cas, on trouve x_1, puis $x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}, \qquad x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}\,x_1\right], \\ \text{Et plus généralement, une fois connus } x_1, x_2, \ldots, x_{i-1} : \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left[b_i - a_{i1}\,x_1 - \cdots - a_{ij}\,x_j - \cdots - a_{i,i-1}\,x_{i-1}\right] \end{cases}$$

Le cas le plus simple est évidemment celui où la matrice du système est diagonale, car il suffit d'écrire, pour tout i de $\{1,\ldots,n\}$: $x_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$.

12.8. Résolution des systèmes linéaires

12.8.1. Opérations élémentaires sur les lignes d'un système

Définition

Soit (S) un système linéaire de n équations, à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Notons $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n$ les équations successives de (S).

On appelle *opération élémentaire* sur les lignes de (S) l'une des opérations suivantes :

- Multiplier une équation E_i par un scalaire *non nul* α.

  Cette opération est notée : $\mathrm{E}_i \leftarrow \alpha\mathrm{E}_i$.
- Ajouter à l'une des équations E_i un multiple d'*une autre* équation E_j.

  Cette opération est notée : $\mathrm{E}_i \leftarrow \mathrm{E}_i + \beta\mathrm{E}_j$.
- Echanger deux équations E_i et E_j : cette opération est notée : $\mathrm{E}_i \leftrightarrow \mathrm{E}_j$.

Proposition

Une opération élémentaire sur les lignes de (S) transforme le système (S) en un système (Σ) équivalent, c'est-à-dire ayant exactement les mêmes solutions que (S).

Remarque

On peut enrichir la panoplie des opérations élémentaires des opérations suivantes :

- Remplacer l'équation E_i par $\alpha\mathrm{E}_i + \beta\mathrm{E}_j$, avec $\alpha \neq 0$ et $j \neq i$.

  Il s'agit en fait de la composée des deux opérations $\mathrm{E}_i \leftarrow \alpha\mathrm{E}_i$ puis $\mathrm{E}_i \leftarrow \mathrm{E}_i + \beta\mathrm{E}_j$.
- Ajouter à l'équation E_i une combinaison linéaire des autres équations du système.

  Une telle opération peut s'écrire $\mathrm{E}_i \leftarrow \mathrm{E}_i + \sum\limits_{j\neq i} \beta_j \mathrm{E}_\mathrm{j}$.
- On peut supprimer de (S) toute équation E_i qui serait combinaison linéaire des autres équations du système.

  En effet si $\mathrm{E}_i = \sum\limits_{j\neq i} \beta_j \mathrm{E}_j$, l'opération $\mathrm{E}_i \leftarrow \mathrm{E}_i - \sum\limits_{j\neq i} \beta_j \mathrm{E}_j$ remplace E_i par l'équation $0 = 0$, qui peut bien sûr être éliminée du système (S).
- Même si c'est moins fréquent, on peut adjoindre au système (S) une nouvelle équation obtenue par combinaison linéaire des équations initiales.

  On peut interpréter cette modification de (S) en disant qu'on adjoint à (S) la nouvelle équation $0 = 0$ (on ne modifie pas l'ensemble des solutions) puis qu'on ajoute à celle-ci une combinaison linéaire des équations initiales.

12.8.2. Méthode du pivot de Gauss

- **Principe de la méthode**

  Par une suite d'opérations élémentaires, on transforme le système (S) en un système (Σ) équivalent et dont la matrice est échelonnée supérieurement. La résolution de (Σ) nous donne alors les solutions de (S).

- **Mise en œuvre de la méthode**

Considérons le système :

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{llll} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1j}\,x_j + \cdots + a_{1p}\,x_p & = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2j}\,x_j + \cdots + a_{2p}\,x_p & = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & = \vdots \\ a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \cdots + a_{ij}\,x_j + \cdots + a_{ip}\,x_p & = b_i \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & = \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nj}\,x_j + \cdots + a_{np}\,x_p & = b_n \end{array}\right.$$

Supposons dans un premier temps que a_{11} est non nul.

On effectue alors les opérations élémentaires suivantes, où a_{11} est le *pivot*, pour annuler les coefficients de x_1 dans les équations $\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3, \ldots, \mathrm{E}_n$:

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{lll} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1j}\,x_j + \cdots + a_{1p}\,x_p & = b_1 & \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2j}\,x_j + \cdots + a_{2p}\,x_p & = b_2 & \mathrm{E}_2 \leftarrow a_{11}\mathrm{E}_2 - a_{21}\mathrm{E}_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & = \vdots & \qquad\vdots \\ a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \cdots + a_{ij}\,x_j + \cdots + a_{ip}\,x_p & = b_i & \mathrm{E}_i \leftarrow a_{11}\mathrm{E}_i - a_{i1}\mathrm{E}_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & = \vdots & \qquad\vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nj}\,x_j + \cdots + a_{np}\,x_p & = b_n & \mathrm{E}_n \leftarrow a_{11}\mathrm{E}_n - a_{n1}\mathrm{E}_1 \end{array}\right.$$

Ce qui conduit à un système (S') s'écrivant :

$$(\mathrm{S}')\left\{\begin{array}{rl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1j}\,x_j + \cdots + a_{1p}\,x_p & = b_1 \\ a'_{22}\,x_2 + \cdots + a'_{2j}\,x_j + \cdots + a'_{2p}\,x_p & = b'_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots & = \vdots \\ a'_{i2}\,x_2 + \cdots + a'_{ij}\,x_j + \cdots + a'_{ip}\,x_p & = b'_i \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots & = \vdots \\ a'_{n2}\,x_2 + \cdots + a'_{nj}\,x_j + \cdots + a'_{np}\,x_p & = b'_n \end{array}\right.$$

Supposons maintenant que le pivot a'_{22} soit non nul.

Les opérations élémentaires $\mathrm{E}_i \leftarrow a'_{22}\mathrm{E}_i - a'_{i2}\mathrm{E}_2$ (avec $3 \leq i \leq n$) conduisent à :

$$(\mathrm{S}'')\left\{\begin{array}{rl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \cdots + a_{1p}\,x_p & = b_1 \\ a'_{22}\,x_2 + a'_{23}\,x_3 + \cdots + a'_{2p}\,x_p & = b'_2 \\ a''_{33}\,x_3 + \cdots + a''_{3p}\,x_p & = b''_3 \\ \vdots \qquad\quad \vdots & = \vdots \\ a''_{n3}\,x_3 + \cdots + a''_{np}\,x_p & = b''_n \end{array}\right.$$

On poursuit ainsi la mise sous forme échelonnée de la matrice du système.

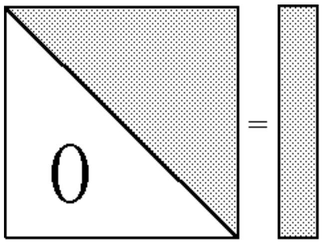
A un moment donné, il est possible qu'un pivot soit nul : on échange alors l'équation concernée avec l'une des équations suivantes de manière à obtenir un pivot non nul.

Il est également possible que tous les pivots potentiels pour passer à l'étape suivante soient nuls. C'est le cas dans le système (S'') par exemple, si tous les coefficients $a''_{33}, a''_{43}, \ldots, a''_{n3}$ sont nuls : dans cette situation particulière, on s'intéressera au coefficient a''_{34} (s'il est non nul) ou à défaut aux coefficients $a_{44}, \ldots, a_{n4}$ etc.

- **Forme finale du système**

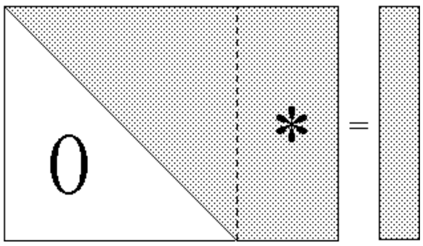
  A la fin de la méthode, (S) a été transformé en un système échelonné supérieurement (Σ), et qui peut se présenter sous trois formes suivantes, dont voici les représentations symboliques.

  Premier cas. Le système (Σ) s'écrit :



  Dans cette représentation symbolique, on voit bien la diagonale des pivots non nuls. Le cas évoqué ici est donc celui d'un système de Cramer, ramené à une forme triangulaire supérieure, qu'on résout "en cascades", ce qui donne la solution unique de (S).

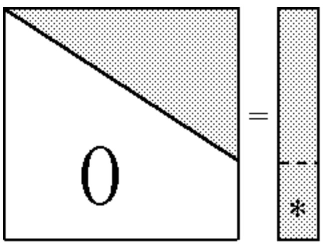
  Deuxième cas. Le système (Σ) s'écrit :



  Il y a ici des inconnues en surnombre (c'est la zone marquée du symbole $*$). Ces inconnues excédentaires (ou *non principales*) sont alors reportées au second membre, où elles jouent le rôle de paramètres arbitraires.

  On résout le système par rapport aux inconnues *principales*. C'est alors un système de Cramer, dont l'unique solution s'exprime en fonction des inconnues non principales. La présence de ces valeurs arbitraires fait que (S) possède une infinité de solutions.

  Troisième cas. Le système (Σ) s'écrit :



  Ici il y a des équations en surnombre, dites *non principales*. Leurs premiers membres sont nuls. Tout dépend alors de leurs seconds membres (c'est la zone marquée d'un $*$) :

  - Si l'un d'eux est non nul, alors (Σ) et donc (S) n'ont pas de solution.
  - Si tous ces seconds membres sont nuls, (Σ) se réduit à ses équations *principales*, qui forment un système de Cramer. (S) admet donc une solution unique, obtenue en résolvant ce système "en cascades".

12.8.3. Trois exemples

• **(1) Résoudre le système (S) :** $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 \\ 3x + 4y + z + 2t = 13 \\ 4x + y + 2z + 3t = 14 \end{cases}$

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 & \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 & \mathrm{E}_2 \leftarrow \mathrm{E}_2 - 2\mathrm{E}_1 \\ 3x + 4y + z + 2t = 13 & \mathrm{E}_3 \leftarrow \mathrm{E}_3 - 3\mathrm{E}_1 \\ 4x + y + 2z + 3t = 14 & \mathrm{E}_4 \leftarrow \mathrm{E}_4 - 4\mathrm{E}_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 & \\ -y - 2z - 7t = -10 & \\ -2y - 8z - 10t = -20 & \mathrm{E}_3 \leftarrow \mathrm{E}_3 - 2\mathrm{E}_2 \\ -7y - 10z - 13t = -30 & \mathrm{E}_4 \leftarrow \mathrm{E}_4 - 7\mathrm{E}_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 & \\ -y - 2z - 7t = -10 & \\ -4z + 4t = 0 & \\ 4z + 36t = 40 & \mathrm{E}_4 \leftarrow \mathrm{E}_4 + \mathrm{E}_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ -y - 2z - 7t = -10 \\ -4z + 4t = 0 \\ 40t = 40 \end{cases}$$

D'où on tire : $\begin{cases} t = 1 \\ z = t = 1 \\ y = -2z - 7t + 10 = 1 \\ x = 11 - 2y + 3z + 4t = 2 \end{cases}$

Le système (S) possède donc l'unique solution $(2, 1, 1, 1)$.

• **(2) Résoudre (S)** $\begin{cases} x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3 \\ 3x + y + z - 2t - u = 1 \\ 2x - y - 3z + 7t + 5u = 2 \\ 3x - 2y - 5z + 7t + 8u = \lambda \end{cases}$ (λ un paramètre réel)

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3 & \\ 3x + y + z - 2t - u = 1 & \mathrm{E}_2 \leftarrow \mathrm{E}_2 - 3\mathrm{E}_1 \\ 2x - y - 3z + 7t + 5u = 2 & \mathrm{E}_3 \leftarrow \mathrm{E}_3 - 2\mathrm{E}_1 \\ 3x - 2y - 5z + 7t + 8u = \lambda & \mathrm{E}_4 \leftarrow \mathrm{E}_4 - 3\mathrm{E}_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3 & \\ -8y - 14z + 4t + 20u = -8 & \\ -7y - 13z + 11t + 19u = -4 & \mathrm{E}_3 \leftarrow 8\mathrm{E}_3 - 7\mathrm{E}_2 \\ -11y - 20z + 13t + 29u = \lambda - 9 & \mathrm{E}_4 \leftarrow 8\mathrm{E}_4 - 11\mathrm{E}_2 \end{cases}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & 3y & + & 5z & - & 2t & - & 7u & = & 3 \\ & & -8y & - & 14z & + & 4t & + & 20u & = & -8 \\ & & & & -6z & + & 60t & + & 12u & = & 24 \\ & & & & -6z & + & 60t & + & 12u & = & 8\lambda+16 \end{array}\right. \qquad \mathrm{E}_4 \leftarrow \mathrm{E}_4 - \mathrm{E}_3$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & 3y & + & 5z & - & 2t & - & 7u & = & 3 \\ & & -8y & - & 14z & + & 4t & + & 20u & = & -8 \\ & & & & -6z & + & 60t & + & 12u & = & 24 \\ & & & & & & & & 0 & = & 8\lambda-8 \end{array}\right.$$

On constate que si $\lambda \neq 1$, alors (S) n'a pas de solution.

Supposons donc $\lambda = 1$. Le système (S) se réduit au trois premières équations ci-dessus.

On constate qu'on obtient un système de Cramer par rapport aux inconnues x, y, z, à condition de traiter t, u comme des paramètres arbitraires.

Voici comment se termine la résolution de (S) :

$$(\mathrm{S}) \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 3y & + & 5z & = & 3 & + & 2t & + & 7u \\ & & 4y & + & 7z & = & 4 & + & 2t & + & 10u \\ & & & & z & = & -4 & + & 10t & + & 2u \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \mathrm{E}_1 \leftarrow \mathrm{E}_1 - 5\mathrm{E}_3 \\ \mathrm{E}_2 \leftarrow \mathrm{E}_2 - 7\mathrm{E}_3 \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 3y & & & = & 23 & - & 48t & - & 3u \\ & & 4y & & & = & 32 & - & 68t & - & 4u \\ & & & & z & = & -4 & + & 10t & + & 2u \end{array}\right. \qquad \mathrm{E}_2 \leftarrow \mathrm{E}_2/4$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 3y & & & = & 23 & - & 48t & - & 3u \\ & & y & & & = & 8 & - & 17t & - & u \\ & & & & z & = & -4 & + & 10t & + & 2u \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \mathrm{E}_1 \leftarrow \mathrm{E}_1 - 3\mathrm{E}_2 \\ \\ \end{array}$$

Et on arrive finalement à : $\left\{\begin{array}{rrrcrcrcr} x & & & = & -1 & + & 3t & & \\ & y & & = & 8 & - & 17t & - & u \\ & & z & = & -4 & + & 10t & + & 2u \end{array}\right.$

Les solutions de (S) sont les 5-uplets $A = (x, y, z, t, u)$ qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} A &= (-1 + 3t, 8 - 17t - u, -4 + 10t + 2u, t, u) \\ &= (-1, 8, -4, 0, 0) + t(3, -17, 10, 1, 0) + u(0, -1, 2, 0, 1) \end{aligned}$$

où t et u ont des valeurs arbitraires.

On voit bien ici la structure de l'ensemble des solutions : à la solution particulière $A_0 = (-1, 8, -4, 0, 0)$ (qui est obtenue pour $t = u = 0$), on ajoute la solution générale du système homogène (H) associé à (S).

On constate que la solution générale de (H) est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $(3, -17, 10, 1, 0)$ et $(0, -1, 2, 0, 1)$.

- **(3) Résoudre le système (S)** $\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = -2 \\ x + y + \lambda z + t = 0 \\ x + y + z + \lambda t = 3 \end{cases}$

On a ici un exemple où il est rentable d'adjoindre à (S) une nouvelle équation combinaison linéaire des équations initiales.

Plus précisément on va lui adjoindre l'équation $E_1 + E_2 + E_3 + E_4$.

On obtient : $\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = -2 \\ x + y + \lambda z + t = 0 \\ x + y + z + \lambda t = 3 \\ \big[(\lambda+3)(x+y+z+t) = 2\big] \end{cases}$

On voit tout de suite que le système n'a pas de solution si $\lambda = -3$.

Supposons donc $\lambda \neq -3$. Voici comment on termine la résolution.

$$(S) \begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 & E_1 \leftarrow E_1 - E_5 \\ x + \lambda y + z + t = -2 & E_2 \leftarrow E_2 - E_5 \\ x + y + \lambda z + t = 0 & E_3 \leftarrow E_3 - E_5 \\ x + y + z + \lambda t = 3 & E_4 \leftarrow E_4 - E_5 \\ \left[x + y + z + t = \dfrac{2}{\lambda+3}\right] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (\lambda-1)x = \dfrac{\lambda+1}{\lambda+3} \\ (\lambda-1)y = -2\dfrac{\lambda+4}{\lambda+3} \\ (\lambda-1)z = \dfrac{-2}{\lambda+3} \\ (\lambda-1)t = \dfrac{3\lambda+7}{\lambda+3} \end{cases}$$

Si $\lambda = 1$ on voit que (S) n'a pas de solution.

On suppose donc que λ n'est ni égal à -3 ni égal à 1.

Le système (S) possède alors une solution unique (x, y, z, t) donnée par :

$$(x, y, z, t) = \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda+3)}\,(\lambda+1, -2\lambda-8, -2, 3\lambda+7)$$