MATRICES

PLAN

I : Matrice associée à une application linéaire

1– Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie p et F un espace vectoriel de dimension finie n. On choisit une base $(e_j)_{j=1..p}$ de E et $(\varepsilon_i)_{i=1..n}$. Dans cette base, un vecteur x de E s'écrit $\sum x_j e_j$. Son image $f(x)$ s'écrit $\sum y_i \varepsilon_i$. f est définie si l'on connaît les images des e_j.

Posons $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i$. On a alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j\, \varepsilon_i$ de sorte que $y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j$, ce qu'on note de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Matrice définissant l'application } f \\ \text{dans les bases } (e_j) \text{ et } (\varepsilon_i).}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1p}\, x_p \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \dots + a_{2p}\, x_p \\ \dots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \dots a_{np}\, x_p \end{pmatrix}$$

abrégé en Y = MX.

La $j^{\text{ème}}$ colonne est constituée des composantes de l'image de e_j

a_{ij} se situe à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j$$

La matrice associée à une application linéaire dépend de la base choisie.

On note $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes. Si $n = p$, on note cet ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On notera que les vecteurs sont en colonnes. Une ligne $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$ s'interprête comme la matrice de la forme linéaire $x \to \sum_{i=1}^{p} a_i x_i$.

2– Somme de matrices

On souhaite définir sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ une somme de sorte que $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),+)$ soit isomorphe à (L(E,F),+). Pour cela, il suffit de trouver quelle matrice associer à $f+g$, f et g étant deux applications linéaires de matrices A et B. Notons a_{ij} et b_{ij} les termes généraux des matrices M et N. On a :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i$$

$$g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\varepsilon_i$$

$$\Rightarrow (f+g)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})\varepsilon_i$$

Ainsi A+B = C avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Autrement dit, on ajoute les coefficients de même place.

$(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),+)$ est un groupe commutatif. Le neutre est la matrice nulle 0, associée à l'application identiquement nulle, constituée uniquement de 0.

3– Produit par un scalaire

On procède de même pour le produit par un scalaire. Si la matrice A est associée à l'application linéaire f, λA sera associée à λf. Or :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ \varepsilon_i$$

$$\Rightarrow \lambda f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ij}\ \varepsilon_i$$

Ainsi la matrice λA admet pour terme général λa_{ij}. $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),+,.)$ est alors un espace vectoriel isomorphe à L(E,F). Il est facile de voir que sa dimension vaut np, une base étant constituée des matrices E_{ij} dont tous les termes sont nuls sauf un qui vaut 1, à la ligne i et la colonne j. On en déduit que dim L(E,F) = dimE $\times$ dimF, une base étant constituée des applications Φ_{ij} définies par :

$\forall\ k \neq j,\ \Phi_{ij}(e_k) = 0$

$\Phi_{ij}(e_j) = \varepsilon_i$

ou encore $\Phi_{ij}(e_k) = \delta_{jk}\ \varepsilon_i$ où $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$

$= 0$ sinon (symbole de Kronecker)

4– Produit de matrices

Soit E de dimension q de base $(e_i)_{i=1..q}$, F de dimension p de base $(\varepsilon_k)_{k=1..p}$, G de dimension n de base $(\eta_j)_{j=1..n}$. Soit f une application linéaire de E dans F, de matrice B, élément de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$; Soit g une application linéaire de F dans G, de matrice A, élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Soit C la matrice élément de $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ associée à g o f. On pose AB = C. On a alors :

$$g \circ f(e_j) = g\left(\sum_{k=1}^{p} b_{kj}\varepsilon_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} b_{kj}\ g(\varepsilon_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} b_{kj}\ \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\ \eta_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\ b_{kj}\ \eta_i$$

La $i^{\text{ème}}$ composante de $g \circ f(e_j)$ est donc $\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\ b_{kj}$. Or cette composante n'est autre que le terme (i,j) de la matrice produit. Ainsi : $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\ b_{kj}$

On effectue le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B. (On remarque que A possède autant de colonnes que B possède de lignes). La disposition usuelle de calcul est la suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{ip} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \dots & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & | & & \\ & & | & & \\ — & — & c_{ij} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple : Soit $f : E_2 \to F_3$ et $g : F_3 \to G_4$

$e_1 \to 2\varepsilon_1+\varepsilon_2$ $\quad$ $\varepsilon_1 \to \eta_1+\eta_2$

$e_2 \to \varepsilon_1-\varepsilon_3$ $\quad$ $\varepsilon_2 \to \eta_3-\eta_4$

$\varepsilon_3 \to \eta_1-2\eta_2+\eta_4$

La matrice de f est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

La matrice de g est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

La matrice de $g \circ f$ est :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, $g \circ f(e_1) = 2\eta_1 + 2\eta_2 + \eta_3 - \eta_4$

$g \circ f(e_2) = 3\eta_2 - 4\eta_4$.

Les propriétés du produit sont analogues à celles du produit de composition, à savoir :

M(N + N') = MN + MN'

(M + M')N = MN + M'N

(MN)Q = M(NQ) que l'on note MNQ

M(λN) = λ(MN) = (λM)N que l'on note λMN

On notera que si M appartient à $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et n appartient à $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$, alors MN existe et appartient à $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$, mais que, si q est différent de n, NM n'existe pas.

On remarquera que chercher l'image d'un vecteur de composantes X par l'application de matrice A consiste exactement à effectuer le produit AX lorsque X est considéré comme matrice à une colonne. Lorsqu'on applique ce résultat au $j^{\text{ème}}$ vecteur de base, on retrouve évidemment la $j^{\text{ème}}$ colonne.

5– Rang d'une matrice

Le rang de la matrice A est le rang de l'application linéaire f associée. C'est le rang du système constitué des vecteurs colonnes de la matrice, puisque ces vecteurs colonnes engendrent Imf.

II : Anneau des matrices carrées

1– Définition

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes. Il s'agit des matrices associées aux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n, dans une base donnée. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau. On prendra garde que AB peut être nul alors que ni A ni B n'est nul (on dit que l'anneau n'est pas intègre), et que AB est en général différent de BA (on dit que l'anneau n'est pas commutatif).

NON INTEGRITE : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

NON COMMUTATIVITE : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

En particulier, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ sauf si A et B commutent.

2– Matrice identité

Elle est associée à l'application identique. Cette correspondance ne dépend pas de la base choisie. La matrice identité est le neutre du produit des matrices et vaut :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

de terme général δ_{ij} (symbole de Kronecker) et notée I ou I_n si l'on veut préciser le nombre de lignes.

On pourra vérifier directement, en utilisant la définition du produit de matrices, que si A est élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, alors :

$$I_nA = AI_p = A$$

3– Matrices particulières

a) Matrices scalaires :

Ce sont les matrices de la forme λI. Tous les termes sont nuls sauf sur la diagonale, où ils sont tous égaux entre eux. Ce sont les matrices associées aux homothéties. Elles forment une sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, isomorphe à $\mathbb{K}$.

b) Matrices diagonales :

Ce sont les matrices dont tous les termes sont nuls en dehors de la diagonale. Ceux de la diagonale sont quelconques : $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Elles forment une sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ isomorphe à $\mathbb{K}^n$ (où l'on définit alors un produit composante par composante).

c) Matrices triangulaires :

On traitera des matrices triangulaires supérieures, le cas des matrices triangulaires inférieures se traitant de manière analogue. Elles sont de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et caractérisées par : $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Elles forment une sous-espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. La seule chose non évidente est de vérifier la stabilité pour le produit de matrices. Soient donc deux matrices A et B triangulaires supérieures et soit $i > j$. Le terme (i,j) du produit est donné par $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$ qui est nul car $a_{ik} = 0$ pour $i > k$ et $b_{kj} = 0$ pour $k > j$. Comme $i > j$, pour chaque k, il existe l'un des deux termes a_{ik} ou b_{kj} qui est nul.

d) Matrices nilpotentes :

Une matrice M est dite nilpotente s'il existe un entier n tel que $M^n = 0$. L'ensemble des matrices nilpotentes ne jouit d'aucune structure algébrique particulière.

e) Matrices inversibles :

Ce sont les matrices associées aux automorphismes. A priori, M est inversible si et seulement si il existe N tel que MN = NM = I. On note alors $N = M^{-1}$. On dispose cependant de la proposition suivante :

PROPOSITION :

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il y a équivalence entre :

i) M est inversible
ii) $\exists$ N, MN = I
iii) $\exists$ N, NM = I
iv) rgM = n

Démonstration :

Il est clair que i) entraîne les trois autres. Soit f endomorphisme associé à M dans une base donnée.
iv) signifie que M est associée à un endomorphisme de rang n, donc surjectif, donc bijectif puisque l'on est en dimension finie.
ii) $\Rightarrow \exists\, g \in L(E)$, $f \circ g = \mathrm{Id} \Rightarrow f$ surjective $\Rightarrow f$ bijective.
iii) $\Rightarrow \exists\, g \in L(E)$, $g \circ f = \mathrm{Id} \Rightarrow f$ injective $\Rightarrow f$ bijective

L'ensemble des matrices inversibles, muni du produit des matrices, forme un groupe isomorphe à GL(E), noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. On notera que :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

de même que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Le calcul de l'inverse d'une matrice se fait de la façon suivante :

❑ Pour la matrice 2 × 2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, elles sont inversibles si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et son inverse vaut $\dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

❑ S'il existe B tel que AB = I (ou BA = I) alors $B = A^{-1}$. Par exemple, une matrice A vérifiant la relation $A^3 + 3A^2 - A + I = 0$ est inversible puisque $I = -A^3 - 3A^2 + A = A \times (-A^2 - 3A + I)$ et $A^{-1} = -A^2 - 3A + I$.

❑ Méthode générale : on détermine f^{-1}, réciproque de l'application f associée à A. Autrement dit, on écrit :

AX = X' où X et X' sont des vecteurs colonnes à n lignes

⇒ $X = A^{-1}X'$ obtenu en résolvant le système dans lequel les composantes de X sont les inconnues.

EXEMPLE 1 : Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 4y - z = x' \\ x - 2y + 3z = y' \\ x + y + z/2 = z' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2y - 2z = x' - 2z' & L_1 - 2L_3 \to L_1 \\ 3y - 5z/2 = z' - y' & L_3 - L_2 \to L_2 \\ x + y + z/2 = z' & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x + y + z/2 = z' & L_3 \to L_1 \\ y - z = x'/2 - z' & L_1/2 \to L_2 \\ z = -3x' - 2y' + 8z' & 2L_2 - 3L_1 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4x' + 3y' - 10z' \\ y = -5x'/2 - 2y' + 7z' \\ z = -3x' - 2y' + 8z' \end{array}\right.$$

Donc la matrice inverse vaut $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -10 \\ -5/2 & -2 & 7 \\ -3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

EXEMPLE 2 : Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 9 & 10 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{array}{l} 10x + 9y + z = x' \\ 9x + 10y + 5z = y' \\ x + 5y + 9z = z' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 41y + 89z = 10z' - x' & 10L_3 - L_1 \to L_1 \\ 35y + 76z = 9z' - y' & 9L_3 - L_2 \to L_2 \\ x + 5y + 9z = z' & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 5y + 9z = z' & L_3 \to L_1 \\ 35y + 76z = 9z' - y' & \\ z = 19z' - 41y' + 35x' & 41L_2 - 35L_1 \to L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 65x' + 76y' + 35z' \\ y = -76x' + 89y' - 41z' \\ z = 35x' - 41y' + 19z' \end{cases}$$

Donc la matrice inverse vaut $\begin{pmatrix} 65 & 76 & 35 \\ -76 & 89 & -41 \\ 35 & -41 & 19 \end{pmatrix}$

III : Transposition

1– Définition

On considère l'application :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
$$A \longrightarrow {}^tA \text{ appelée transposée de A.}$$

définie par : $({}^tA)_{ij} = A_{ji}$, $1 \le i \le p$, $1 \le j \le n$

Exemple :

$${}^t\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2– Propriétés

Il est aisé de vérifier :

i) ${}^t({}^tA) = A$
ii) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
iii) ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$ la transposée est donc linéaire
iv) ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ pour A élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et B élément de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$
v) ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ pour A élément de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

Pour la relation iv), on a en effet :

$$[{}^t(AB)]_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{p} A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^{p} ({}^tA)_{kj}({}^tB)_{ik} = ({}^tB{}^tA)_{ij}$$

En ce qui concerne v), on a :

A inversible
$\Leftrightarrow$ $\exists$ B, AB = I
$\Leftrightarrow$ $\exists$ B, ${}^t(AB) = I$
$\Leftrightarrow$ $\exists$ B, ${}^tB{}^tA = I$
ce qui prouve que ${}^tA$ est inversible d'inverse ${}^tB$.

3– Matrices symétriques et antisymétriques

On considère maintenant des matrices carrées. On dit que A est symétrique si ${}^tA = A$. On dit que A est antisymétrique si ${}^tA = -A$. L'ensemble des matrices symétriques, égal à $\mathrm{Ker}({}^t - \mathrm{Id})$ et l'ensemble des matrices antisymétriques, égal à Ker(^{t} + Id) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le fait que $^t \circ {}^t$ = Id prouve que ^{t} est la symétrie par rapport aux matrices symétriques parallèlement aux matrices antisymétriques. On peut montrer directement que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires. En effet :

❑ Si A est à la fois symétrique et antisymétrique, ${}^tA = A = -A$ donc A est nulle. La somme est donc directe.

❑ Toute matrice carrée s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et antisymétrique :

$$M = \frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2}$$

Ainsi $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

La dimension du sous-espace des matrices symétriques est $\dfrac{n(n+1)}{2}$, une base étant $(E_{ij} + E_{ji})$, $i \leq j$; la dimension du sous-espace des matrices antisymétriques est $\dfrac{n(n-1)}{2}$, une base étant $(E_{ij} - E_{ji})$, $i < j$.

IV : Changement de bases

1– Définition

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base d'un espace vectoriel E. On considère une nouvelle base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. On appelle matrice de changement de base de l'ancienne base à la nouvelle la matrice dont la colonne j est constituée des composantes de ε_j dans l'ancienne base $(e_1, ..., e_n)$. Cette matrice étant de rang n est donc inversible.

2– Expression d'un vecteur

Soit (e_i) et (ε_i) deux bases ; soit $P_{e\varepsilon}$ la matrice de changement de base de (e_i) à (ε_i). On considère un vecteur V dont les composantes dans l'ancienne base forment un vecteur colonne $(V)_e$, et l'on souhaite connaître les composantes de V dans la nouvelle base. On a :

$$V = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x_j' \varepsilon_j$$

avec $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ où a_{ij} est le terme général de $P_{e\varepsilon}$.

$$\Rightarrow \qquad V = \sum_{j=1}^{n} x_j' \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

$$\Rightarrow \qquad V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' \, e_i$$

Par identification des coefficients, on en déduit que :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j'$$

Donc : $(V)_e = P_{e\varepsilon}(V)_\varepsilon$

Pour connaître $(V)_\varepsilon$, il faudra donc résoudre un système ou inverser une matrice.

Autre démonstration :
Considérons l'application Id de E muni de la base (ε_i) dans E muni de la base (e_i). La matrice de cette application linéaire Id est la matrice $P_{e\varepsilon}$ précédemment définie. En effet, sa $j^{\text{ème}}$ colonne est constituée des composantes dans la base d'arrivée (e_i) des vecteurs de la base de départ (ε_j). La relation Y = MX donnant les composantes de l'image d'un vecteur à partir des composantes de ce vecteur et de la matrice de l'application linéaire donnera dans le cas présent :

$$(V)_e = P_{e\varepsilon}(V)_\varepsilon$$

❑ **Inverse de $P_{e\varepsilon}$** :
De $(V)_e = P_{e\varepsilon}(V)_\varepsilon$, on tire $(V)_\varepsilon = P_{e\varepsilon}^{-1}(V)_e$. Mais par ailleurs, en reprenant la formule initiale en inversant les rôles de e et ε, on a aussi :

$$(V)_\varepsilon = P_{\varepsilon e}(V)_e$$

Ces formules étant vraies pour tout V, on en déduit que :

$$P_{e\varepsilon}^{-1} = P_{\varepsilon e}$$

❑ **Produit de matrices de passage** :
Si l'on dispose de trois bases e, e', e'', on a

$$(V)_e = P_{ee'}(V)_{e'}$$
$$(V)_{e'} = P_{e'e''}(V)_{e''}$$
$$\Rightarrow \quad (V)_e = P_{ee'}P_{e'e''}(V)_{e''}$$

or, par ailleurs, on a :

$$(V)_e = P_{ee''}(V)_{e''}$$

ces relations étant vraies pour tout vecteur V, on en déduit que :

$$P_{ee'}P_{e'e''} = P_{ee''}$$

3– Applications linéaires

Soit E muni de deux bases e et e', et F muni de deux bases ε et ε'. e et ε sont considérées comme les anciennes bases, e' et ε' comme les nouvelles. Soit P la matrice de passage de e à e', et Q la matrice de passage de ε à ε'. Soit f une application linéaire de E dans F, de matrice M dans les anciennes bases. Si dimE = p et dimF = n, alors :

$$M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$
$$P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$$
$$Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$$

On souhaite déterminer l'expression de la matrice de f dans les nouvelles bases. Notons $W = f(V)$. On a :

$$(W)_\varepsilon = M(V)_e$$
$$(W)_\varepsilon = Q(W)_{\varepsilon'}$$
$$(V)_e = P(V)_{e'}$$

$\Rightarrow \quad (W)_{\varepsilon'} = Q^{-1}MP(V)_{e'}$

Ainsi, la matrice de f dans la nouvelle base est M' = $Q^{-1}MP$. (On vérifiera la possibilité d'effectuer un tel produit). Les matrices M et M' sont dites équivalentes.

Dans le cas d'un endomorphisme où l'on effectue le même changement de base P dans le même espace de départ et d'arrivée, la formule se réduit à M' = $P^{-1}MP$. Les matrices M et M' sont dites semblables.

PROPOSITION :

Soit M, élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r. Alors M est de la forme UJ_rV, avec U et V carrée inversible et J_r la matrice par bloc définie par :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_1 \\ O_2 & O_3 \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice identité de dimension r, O_1 la matrice nulle à r ligne et $p-r$ colonnes, O_2 la matrice nulle à $n-r$ lignes et r colonnes, O_3 la matrice nulle à $n-r$ lignes et $p-r$ colonnes.

Démonstration :

On considère que M est associée à une application linéaire f d'un espace vectoriel E de dimension p dans un espace vectoriel F de dimension n dans des bases données (on peut prendre par exemple E = $\mathbb{K}^p$ et F = $\mathbb{K}^n$ munis des bases canoniques). On construit alors une base $(e_1, ..., e_p)$ de E et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ... \varepsilon_n)$ de F dans lesquelles la matrice de f est donnée par la matrice ci-dessus, à savoir :

$$f(e_1) = \varepsilon_1,\ f(e_2) = \varepsilon_2,\ ...,\ f(e_r) = \varepsilon_r,\ f(e_{r+1}) = 0,\ ...,\ f(e_n) = 0$$

On remarque que, d'après le théorème du rang, dim Ker$f$ = $p - r$. On choisit donc $e_{r+1}, ..., e_p$ base de Ker$f$, que l'on complète en $e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_p$ base de E. On pose $\varepsilon_1 = f(e_1), ..., \varepsilon_r = f(e_r)$. Dans la démonstration du théorème du rang, nous avons montré que cette famille constitue une base de Imf. On la complète en $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, ..., \varepsilon_n$ base de F. U et V sont alors les matrices de changement de bases ainsi définies.

Cela signifie que ce qui caractérise une application linéaire, c'est son rang. On peut classifier les applications linéaires au moyen de leur rang. Par exemple, il existe trois types d'applications linéaires d'un espace vectoriel de dimension 3 dans un espace vectoriel de dimension 2, à savoir, les applications dont la matrice est, dans des bases bien choisies :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

COROLLAIRE :

$rg\,{}^tA = rgA$

Démonstration :

Soit A de rang r. Alors A est équivalente à J_r définie plus haut. Donc il existe P, élément de $\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et Q élément de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que :

$\quad A = Q^{-1}J_rP$

$\Rightarrow \quad {}^tA = {}^t(Q^{-1}J_rP) = {}^tP\,{}^tJ_r\,{}^tQ^{-1}$

$\Rightarrow \quad {}^tA$ est équivalente à ${}^tJ_r$

et il est clair que rg ${}^tJ_r = r$.

4- Annexe : composition des vitesses et des accélérations

Dérivation relativement à une base

La présentation ci-dessous n'est pas la plus courante, mais fait le lien avec les formules de changement de base.

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 muni de deux bases orthonormées directes, (e_1, e_2, e_3) et (ε_1, ε_2, ε_3). Ces deux bases sont susceptibles de varier au cours du temps. Il est d'usage de considérer une base fixe (la première) et une base variable (la deuxième), mais nous nous y refusons, car la seule chose qui importe, c'est la relation d'une base par rapport à l'autre. La matrice de changement de base $P_{e\varepsilon}$ (ou son inverse $P_{\varepsilon e}$) sera donc une matrice dépendant du temps t sans que la connaissance de cette matrice puisse en aucune façon définir s'il y a une base fixe ou non. Le caractère variable de la matrice de passage exprime seulement comment une base varie par rapport à l'autre.

Considérons maintenant la relation de changement de base $(U)_e = P_{e\varepsilon}(U)_\varepsilon$, où $\boldsymbol{U}$ est un vecteur dépendant lui aussi du temps. $(U)_e$ sont les composantes de $\boldsymbol{U}$ dans la base (e). $(U)_\varepsilon$ sont les composantes de $\boldsymbol{U}$ dans la base (ε). Ces composantes dépendantes elles aussi du temps. Dérivons la relation de changement de base. On obtient, en notant P pour abréger $P_{e\varepsilon}$:

$$\frac{d(U)_e}{dt} = P\,\frac{d(U)_\varepsilon}{dt} + \frac{dP}{dt}\,(U)_\varepsilon$$

❑ Interprétons cette égalité. Considérons $\frac{d(U)_e}{dt}$. Si $\boldsymbol{U} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ avec x_1, x_2, x_3 dépendant du temps, alors $(U)_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, et $\frac{d(U)_e}{dt} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$. Ces composantes représentent un vecteur dans la base (e), à savoir $x_1'e_1 + x_2'e_2 + x_3'e_3$. IL NE S'AGIT PAS DE LA DERIVEE DE $\boldsymbol{U}$, puisque la dérivée de $\boldsymbol{U}$ ferait intervenir les dérivées des vecteurs e_i. Or, on s'est contenté de dériver les composantes. Nous dirons qu'il s'agit de la dérivée de $\boldsymbol{U}$ par rapport à la base (e). Elle correspond à la dérivée de $\boldsymbol{U}$ pour un observateur lié à la base (e) et qui observe l'évolution de $\boldsymbol{U}$ dans cette base. Nous la noterons $\boldsymbol{U}'|_{(e)}$.

❑ De même, $\frac{d(U)_\varepsilon}{dt}$ représente, dans la base (ε) les composantes de la dérivée de $\boldsymbol{U}$ par rapport à la base (ε), notée $\boldsymbol{U}'|_{(\varepsilon)}$. Quant à $P\,\frac{d(U)_\varepsilon}{dt}$, en vertu de la formule de changement de base, ce sont les composantes, dans la base (e) cette fois-ci, du même vecteur $\boldsymbol{U}'|_{(\varepsilon)}$.

❑ Reste la dernière partie, $\frac{dP}{dt}\,(U)_\varepsilon = \frac{dP}{dt}\,P^{-1}\,(U)_e$. Dans la base ($e$), il s'agit des composantes de l'image de $\boldsymbol{U}$ par une application linéaire Φ de matrice $\frac{dP}{dt}\,P^{-1}$. La relation trouvée s'écrit donc :

$$\boldsymbol{U}'|_{(e)} = \boldsymbol{U}'|_{(\varepsilon)} + \Phi(\boldsymbol{U})$$

❑ Etudions de plus près l'endomorphisme Φ. P, matrice de changement de base d'une base orthonormée directe à une autre, est une matrice de rotation, et vérifie :

$P \times {}^tP = I$ (cf le chapitre *Espaces euclidiens* dans le fichier ESPEUCL), ou encore ${}^tP = P^{-1}$

En dérivant cette relation, on obtient :

$$P' \times {}^tP + P \times {}^tP' = 0$$

$$\Rightarrow \quad P' \times {}^tP = -\,P \times {}^tP' = -\,{}^t(P' \times {}^tP)$$

Ainsi, $P' \times {}^tP$ (ou $P'P^{-1}$), matrice de Φ, est antisymétrique, donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$. Si on note $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base (e), on a $\Phi(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{U}$. Ainsi :

$$\boldsymbol{U}'\,|_{(e)} = \boldsymbol{U}'\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{U}$$

$\boldsymbol{\Omega}$ s'appelle vecteur instantané de rotation de la base (ε) par rapport à la base (e). Il dépend lui aussi du temps. Par contre, puisque $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} = 0$, on a $\dfrac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\,|_{(e)} = \dfrac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\,|_{(\varepsilon)}$, ce que nous abrègerons en $\dfrac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}$, étant entendu que cette dérivée sera calculée relativement à l'une ou l'autre base et pas à une troisième.

Composition des vitesses

Les considérations qui précèdent sont largement utilisées en cinématique. Soit (O, e_1, e_2, e_3) et $(O', \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ deux repères affines orthonormés directs d'un espace affine de dimension 3, tous deux dépendants du temps. Soit M un point variable de cet espace. Un observateur lié à (O, e_1, e_2, e_3) verra se déplacer le point M dans son référentiel, avec une vitesse $\boldsymbol{V}\,|_{(e)} = \dfrac{d\boldsymbol{OM}}{dt}\,|_{(e)}$. Un observateur lié à $(O', \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ verra se déplacer le même point M dans son référentiel avec une vitesse $\boldsymbol{V}\,|_{(\varepsilon)} = \dfrac{d\boldsymbol{O'M}}{dt}\,|_{(\varepsilon)}$. On cherche le rapport entre ces deux vitesses. On applique le résultat qui précède-dessus avec $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{OM}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}\,|_{(e)} &= \frac{d\boldsymbol{OM}}{dt}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM} \\ &= \frac{d\boldsymbol{O'M}}{dt}\,|_{(\varepsilon)} + \frac{d\boldsymbol{OO'}}{dt}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM} \\ &= \boldsymbol{V}\,|_{(\varepsilon)} + \frac{d\boldsymbol{OO'}}{dt}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM} \end{aligned}$$

Le vecteur $\dfrac{d\boldsymbol{OO'}}{dt}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM}$ serait la vitesse dans le référentiel (O, e_1, e_2, e_3) d'un point coïncidant avec M à l'instant considéré, mais fixe dans $(O', \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. On l'appelle vitesse d'entraînement de M à l'instant considéré. On peut l'écrire également sous la forme :

$$\boldsymbol{V}_{\text{entr.}} = \frac{d\boldsymbol{OO'}}{dt}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM} = \frac{d\boldsymbol{OO'}}{dt}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M} = \frac{d\boldsymbol{OO'}}{dt}\,|_{(e)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M}$$

La formule de composition des vitesses s'écrit donc :

$$\boldsymbol{V}\,|_{(e)} = \boldsymbol{V}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{V}_{\text{entr.}}$$

Composition des accélérations

En dérivant la relation de compositions des vitesses, on fait apparaître les accélérations de M relativement à chaque repère, à savoir $\boldsymbol{a}\,|_{(e)} = \dfrac{d\boldsymbol{V}\,|_{(e)}}{dt}\,|_{(e)}$ et $\boldsymbol{a}\,|_{(\varepsilon)} = \dfrac{d\boldsymbol{V}\,|_{(\varepsilon)}}{dt}\,|_{(\varepsilon)}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\,|_{(e)} &= \frac{d\boldsymbol{V}\,|_{(e)}}{dt}\,|_{(e)} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{V}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{V}_{\text{entr.}}\right)\,|_{(e)} \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)}}{\mathrm{d}t}|_{(e)}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{\text{entr.}}}{\mathrm{d}t}|_{(e)}}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)}}{\mathrm{d}t}|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t}|_{(e)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M}\Big)|_{(e)}$$

$$= \boldsymbol{a}|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t^2}|_{(e)} + \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{O'M} + \Omega \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{O'M}}{\mathrm{d}t}|_{(e)}$$

$$= \boldsymbol{a}|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t^2}|_{(e)} + \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{O'M} + \Omega \wedge \Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{O'M}}{\mathrm{d}t}|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M}\Big)$$

$$= \boldsymbol{a}|_{(\varepsilon)} + 2\,\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t^2}|_{(e)} + \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M})$$

Si on considère un point fixe dans le référentiel (O', ε_1, ε_2, ε_3), coïncidant avec M à l'instant considéré, sa vitesse et son accélération dans ce référentiel seraient nulles, de sorte que son accélération dans le référentiel (O, e_1, e_2, e_3) serait égale au vecteur suivant, appelé accélération d'entraînement :

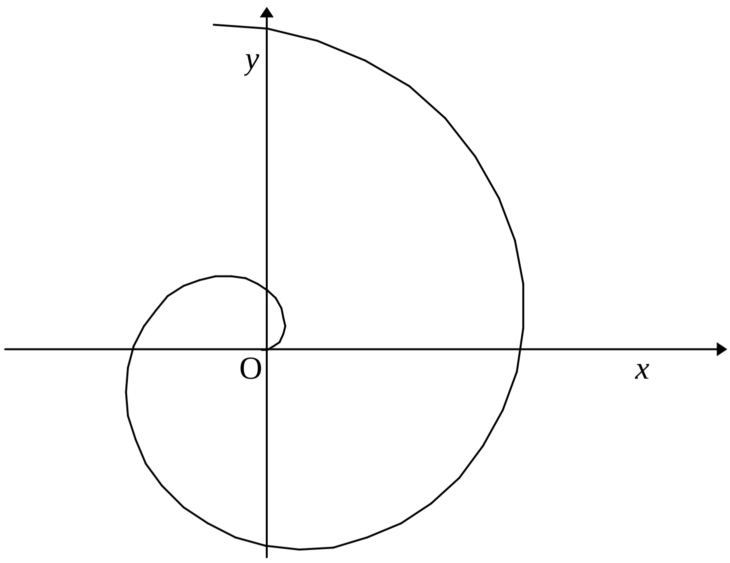
$$\boldsymbol{a}_{\text{entr.}} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t^2}|_{(e)} + \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}|_{(e)} \wedge \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M})$$

Il reste enfin un terme supplémentaire, à savoir $2\,\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)}$, qualifié d'accélération de Coriolis $\boldsymbol{a}_{\text{Cor.}}$.
La formule de composition des accélérations s'écrit donc :

$$\boldsymbol{a}|_{(e)} = \boldsymbol{a}|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{a}_{\text{entr.}} + \boldsymbol{a}_{\text{Cor.}}$$

EXEMPLE :

Considérons une spirale d'Archimède d'équation polaire $\begin{cases} \rho = \mathrm{V}t \\ \theta = \omega t \end{cases}$, soit $\rho = \dfrac{\mathrm{V}}{\omega}\,\theta$.



Il s'agit de la trajectoire dans le repère Oxy d'un point M se déplaçant à vitesse constante V sur une droite passant par O, qui elle-même tourne à vitesse constante de ω autour de O. Dans un repère lié à la droite, on voit ce point s'éloigner à la vitesse constante V de O, et donc avec une accélération nulle. Dans le repère Oxy au contraire, on le voit avec une vitesse $\begin{pmatrix} \mathrm{V}\cos(\omega t) - \mathrm{V}\omega t\sin(\omega t) \\ \mathrm{V}\sin(\omega t) + \mathrm{V}\omega t\cos(\omega t) \end{pmatrix}$. Cette vitesse peut se décomposer en la somme de $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}\cos(\omega t) \\ \mathrm{V}\sin(\omega t) \end{pmatrix}$, vitesse du point par rapport à la droite,

et de $\begin{pmatrix} -V\omega t\sin(\omega t) \\ V\omega t\cos(\omega t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{OM}$, vitesse d'entraînement (on rajoute une troisième direction orthogonale au plan et portant $\boldsymbol{\omega}$ pour effectuer le produit vectoriel).
Quant à l'accélération de M dans Oxy, elle vaut :

$$\begin{pmatrix} -2\omega V\sin(\omega t) - V\omega^2 t\cos(\omega t) \\ 2\omega V\cos(\omega t) - V\omega^2 t\sin(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega V\sin(\omega t) \\ 2\omega V\cos(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -V\omega^2 t\cos(\omega t) \\ -V\omega^2 t\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{2\,\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}}_{\text{accélération de Coriolis}} - \underbrace{\omega^2\,\boldsymbol{OM}}_{\text{accélération d'entraînement centripète}}$$

V : Résolution de systèmes

1– Méthode de Gauss

Cette méthode ressemble à celle utilisée pour le calcul du rang d'un système de vecteurs ; soit un système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad\ldots \\ a_{n1}x_2 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Si tous les a_{i1} sont nuls, alors x_1 n'intervient pas et on passe à la deuxième colonne. Si l'un des a_{i1} est non nul, par exemple a_{11}, on remplace, pour $2 \leq i \leq n$, la ligne L_i par $L_i' = a_{11}L_i - a_{i1}L_1$. On obtient un nouveau système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad a_{22}'\, x_2 + \ldots + a_{2p}'\, x_p = b_2' \\ \quad\ldots \\ \qquad a_{n2}'\, x_2 + \ldots + a_{np}'\, x_p = b_n' \end{cases}$$

et on itère le procédé sur les n–1 dernières lignes. Ce système est équivalent au précédent. En effet, connaissant L_i' et L_1, il est possible de reconstituer L_i ; on remarquera pour cela qu'il est essentiel que a_{11} soit non nul.

EXEMPLE :

$$\begin{cases} 2x + 4y - z + t = 2 \\ x - 2y + 3z - t = 1 \\ x + y + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y - z + t = 2 \\ 8y - 5z + 3t = 0 \quad L_1 - 2L_2 \to L_2 \\ 2y - 2z = 2 \quad L_1 - 2L_3 \to L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z + 1/3 \\ t = -z - 8/3 \\ y = z + 1 \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de solution.

2– Rang d'un système

C'est le rang r de la matrice des coefficients A = (a_{ij}). Le système peut s'interpréter de la façon suivante. Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ de matrice A. Soit B le vecteur de composantes $(b_1, \ldots, b_n)$ et V le vecteur de composantes $(x_1, \ldots, x_p)$. Le système est équivalent à trouver V tel que $f(V) = B$.

On voit que l'existence des solutions est lié au fait que B appartient à l'image ou non. En particulier, si $r = n$ (rang égal au nombre d'équations), alors f est surjective et il y a toujours une solution.

L'unicité de la solution, si elle existe, est liée à l'injectivité de f, donc à son noyau. La dimension du noyau est, d'après le théorème du rang, égal à $p-r$. En particulier, si $p = r$ (rang égal au nombre d'inconnues), il y a unicité de la solution, si elle existe.

Le cas $r = n = p$ (autant d'inconnues que d'équations, ce nombre étant égal au rang) permet de conclure à l'existence et à l'unicité de la solution. On dit que le système est de Cramer. On voit qu'il ne suffit pas d'avoir $n = p$ pour conclure ainsi. Le rang du système joue un rôle essentiel. $r = n = p$ signifie qu'on dispose d'une matrice carrée inversible, donc que f est bijective.

Dans le cas général d'un système de rang r homogène (dont les seconds membres sont nuls), l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de dimension $p-r$. Il s'agit du noyau de f. Dans la pratique, la méthode de Gauss conduit à $n-r$ équations du type 0 = 0. On les élimine du système.

EXEMPLE :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 4x + 7y + z = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x + 3y + z = 0 & L_2 \to L_1 \\ 5y + 3z = 0 & 2L_2 - L_1 \to L_2 \\ 5y + 3z = 0 & 4L_2 - L_3 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4z/5 \\ y = -3z/5 \end{array}\right.$$

Dans le cas d'un système avec second membre de rang r, si B appartient à Imf, on obtient là aussi $n-r$ équations du type 0 = 0. Le système est dit compatible. Par contre, si B n'appartient pas à Imf, la méthode du pivot de Gauss conduit à des équations incompatibles, du type 0 = 1.Dans ce cas, il n'y a pas de solution.

EXEMPLE :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y + z = 3 \\ 4x + 7y + z = 7 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x + 3y + z = 3 & L_2 \to L_1 \\ 5y + 3z = 5 & 2L_2 - L_1 \to L_2 \\ 5y + 3z = 5 & 4L_2 - L_3 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4z/5 \\ y = -3z/5 + 1 \end{array}\right.$$

Mais :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y + z = 3 \\ 4x + 7y + z = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x + 3y + z = 3 & L_2 \to L_1 \\ 5y + 3z = 5 & 2L_2 - L_1 \to L_2 \\ 5y + 3z = 7 & 4L_2 - L_3 \to L_3 \end{array}\right.$$

L_2 et L_3 sont incompatibles (5 = 7). Il n'y a pas de solution.

3– Ensemble des solutions

On cherche donc à résoudre $f(V) = B$. Si B n'appartient pas à Imf, l'ensemble des solutions est vide. Si B appartient à Imf, soit V_0 un antécédent particulier de B. On vérifie alors facilement que l'ensemble des solutions est de la forme $\{V_0 + W \mid W \in \mathrm{Ker}f\}$. Ainsi, la solution générale de l'équation avec second membre s'obtient en ajoutant une solution particulière de l'équation avec second membre à la solution générale de l'équation homogène.

Une partie d'un espace vectoriel E de la forme $\{V_0 + W \mid W \in F\}$ avec F sous-espace vectoriel de E s'appelle sous-espace affine de E passant par V_0 de direction F.

EXEMPLE :
$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ avec l'un des a_i non nul est l'équation d'un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^n$, sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.
$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ est l'équation d'un hyperplan affine.

4– Inversion de matrices

Nous avons déjà donné une méthode pour inverser une matrice M, à savoir la résolution du système Y = MX. En voici une deuxième. Considérons une matrice A $n \times n$ constituée des colonnes C_1, C_2, ..., C_n. On vérifiera que :

❑ Multiplier la $j^{\text{ème}}$ colonne de A par λ est équivalent à multiplier A à droite par la matrice :

$$\begin{array}{cl} \begin{matrix} & & & j & & \\ & & & \downarrow & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & & \dots & & 0 \\ & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j \text{ (matrice de dilatation)} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

❑ Retrancher la colonne i à la colonne j est équivalent à multiplier A à droite par la matrice :

$$\begin{array}{cl} \begin{matrix} & & & j & & \\ & & & \downarrow & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ & & \dots & -1 & \dots & \\ & \dots & & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \quad \text{(matrice de transvection } t_{ij}(-1)\text{)} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

❑ Permuter les colonnes i et j est équivalent à multiplier A à droite par la matrice :

$$\begin{array}{cl} \begin{matrix} & & i & & j & \\ & & \downarrow & & \downarrow & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ & \dots & 0 & \dots & 1 & \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots \\ & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Ainsi, toutes les opérations élémentaires sur les colonnes de A sont équivalentes à des produits de matrices à droite de A. (On vérifiera que les produits à gauche donne les opérations élémentaires sur les lignes de A). On peut alors inverser une matrice de la façon suivante : on choisit une fois pour toutes d'effectuer les mêmes opérations sur les lignes, ou (strictement) sur les colonnes, et ceci à la fois sur A et sur la matrice Identité. Cela revient à multiplier A et I par la même matrice B. En cours de calcul, on dispose des matrices AB et IB = B. Si l'on parvient finalement à AC et IC avec AC = I, alors nécessairement IC = C = A^{-1}.

EXEMPLE 1 : Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_2 \leftarrow 2C_1 - C_2$
$C_3 \leftarrow C_1 + 2C_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$C_3 \leftarrow 4C_3 - 7C_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 2 & -1 & 0 \\ -10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 0 & -8 & 7 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2/4$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -10 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3/2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & -10 \\ -5/2 & -2 & 7 \\ -3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice inverse vaut $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -10 \\ -5/2 & -2 & 7 \\ -3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

EXEMPLE 2 : Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 9 & 10 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 9 & 10 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_2 \leftarrow 10C_2 - 9C_1$
$C_3 \leftarrow 10C_3 - C_1$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 9 & 19 & 41 \\ 1 & 41 & 89 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -9 & -1 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$C_3 \leftarrow -41C_2 + 19C_3$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 9 & 19 & 0 \\ 1 & 41 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -9 & -350 \\ 0 & 10 & -410 \\ 0 & 0 & 190 \end{pmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3/10$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 9 & 19 & 0 \\ 1 & 41 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -9 & -35 \\ 0 & 10 & -41 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - 41C_3$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 9 & 19 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1444 & -35 \\ 0 & 1691 & -41 \\ 0 & -779 & 19 \end{pmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2/19$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -76 & -35 \\ 0 & 89 & -41 \\ 0 & -41 & 19 \end{pmatrix}$$

$C_1 \leftarrow (C_1 - 9C_2 - C_3)/10$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 65 & -76 & -35 \\ -76 & 89 & -41 \\ 35 & -41 & 19 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice inverse vaut $\begin{pmatrix} 65 & -76 & -35 \\ -76 & 89 & -41 \\ 35 & -41 & 19 \end{pmatrix}$

EXEMPLE 3 : Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On obtient directement la matrice I au moyen des opérations $C_i \leftarrow C_i - C_{i+1}$. En appliquant les mêmes règles sur I, on obtient A^{-1}, à savoir $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Annexe : utilisation des matrices en physique

Toutes ces utilisations ne font pas nécessairement partie du programme de CPGE de physique.

1– Matrice d'inertie

Soit M un point de masse m se déplaçant à la vitesse $\boldsymbol{V}$ par rapport à un référentiel et O un point de ce référentiel. On appelle moment cinétique de M par rapport à O le vecteur :

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{OM} \wedge m\boldsymbol{V}$$

L'intérêt du moment cinétique tient dans le fait que sa dérivée est égale aux moments des forces appliquées en M par rapport à O (y compris les forces d'inertie si le référentiel n'est pas galiléen), lorsque O est fixe dans le référentiel considéré.

Supposons que M effectue un mouvement de rotation autour d'un axe passant par O. La vitesse $\boldsymbol{V}$ est alors de la forme $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{OM}$, où $\boldsymbol{\omega}$ est un vecteur appelé vecteur instantané de rotation. L'axe $(O,\boldsymbol{\omega})$ est l'axe de rotation. On a alors :

$$\boldsymbol{L}_O = m\, \boldsymbol{OM} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{OM})$$

On introduit alors un opérateur, appelé opérateur d'inertie, qui, à tout vecteur $\boldsymbol{u}$, associe le vecteur $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) = m\, \boldsymbol{OM} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OM}) = m\, OM^2\boldsymbol{u} - m <\boldsymbol{u},\boldsymbol{OM}> \boldsymbol{OM} = m\, (\boldsymbol{OM} \wedge \boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{OM}$, de sorte que $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\omega})$.

En ce qui concerne un solide, on opère de même en sommant au moyen d'une intégrale triple sur tous les points du solide. L'opérateur d'inertie prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) &= \iiint_V \boldsymbol{OM} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OM})\, dm \\ &= \iiint_V OM^2\boldsymbol{u} - <\boldsymbol{u},\boldsymbol{OM}> \boldsymbol{OM}\, dm \end{aligned}$$

$\boldsymbol{J}$ est clairement linéaire et est donc représenté par une matrice 3×3 dont on montre qu'elle est symétrique. La matrice de $\boldsymbol{J}$ s'écrit donc $\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$ avec :

$A = <\boldsymbol{J}(\boldsymbol{i}),\boldsymbol{i}> = \iiint_V OM^2 - (\boldsymbol{i}.\boldsymbol{OM})^2\, dm = \iiint_V (y^2+z^2)\, dm$, moment d'inertie par rapport à l'axe $(O,\boldsymbol{i})$

$B = \iiint_V (x^2+z^2)\, dm$, moment d'inertie par rapport à l'axe $(O,\boldsymbol{j})$

$C = \iiint_V (x^2+y^2)\, dm$, moment d'inertie par rapport à l'axe $(O,\boldsymbol{k})$

$D = -<\boldsymbol{J}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{j}> = \iiint_V yz\, dm$, quantité appelée produit d'inertie.

$$E = \iiint_V xz \, dm$$

$$F = \iiint_V xy \, dm$$

Etant symétrique, on montre qu'elle est diagonalisable dans un repère orthonormé dont les axes sont appelés axes principaux d'inertie. (cf le fichier PREHILB.PDF dans le chapitre *Espaces préhilbertiens* du cours de deuxième année pour plus de détails).

2– Réseaux de conducteurs électriques

On considère un réseau électrique formé de n mailles. On attribue à chaque maille un courant électrique dit courant de maille (ou courant de Maxwell). Il y a donc n courants de maille I_1, ..., I_n. Le courant observé dans un conducteur commun à plusieurs mailles est la somme algébrique des courants des mailles auxquelles il appartient. Si chaque maille dispose d'une force électromotrice E_1, ..., E_n, alors on dispose d'une relation matricielle :

$$(E) = (R)(I)$$

où R est une matrice $n \times n$. Dans le cas de mailles extérieures les unes aux autres, toutes orientées dans le même sens (par exemple le sens trigonométrique), on montre que :

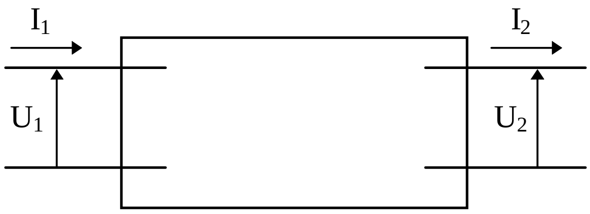
❑ R_{ii} est la somme des résistances totales de la maille i

❑ R_{ij} est l'opposé de la somme des résistances communes aux mailles i et j.

En particulier, cette matrice est symétrique. Pour connaître les intensités connaissant les forces électromotrices, il suffit d'inverser la matrice R.

3– Quadripôles

On considère le système électrique suivant, appelé quadripôle :



Le cadre contient un réseau électrique purement passif. Dans ce cas, les courants I_1 et I_2 dépendent linéairement de U_1 et U_2. En effet, on peut les considérer comme les courants des mailles extérieures de sorte que l'on a :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = (R)^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ -U_2 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

avec $(R)^{-1}$ inverse de la matrice (R) définie au paragraphe précédent. Le signe de U_2 provient de l'orientation positive choisie pour U_2 ici, en sens contraire du courant. $(R)^{-1}$ est symétrique. On obtient donc, en introduisant le signe de $-U_2$ dans la matrice :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

(Si le réseau n'est pas passif, la dépendance est affine.)

On en déduit une expression :

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$$

dont on peut vérifier, en l'exprimant à partir de *a*, *b*, *c* que le déterminant est égal à 1. La dernière matrice utilisée s'appelle matrice de transfert. Cette disposition permet le calcul aisé d'une suite de quadripôles en séries. Il apparaît alors un produit de matrices.

4– Electrostatique

On considère *n* conducteurs électriques de charges Q_1, Q_2, ..., Q_n. Ces conducteurs sont portés aux potentiels V_1, V_2, ..., V_n. L'expérience prouve que la dépendance des charges en fonction des potentiels est linéaire, et donc qu'il existe une matrice (C) telle que :

$$(Q) = (C)(V)$$

où (Q) est la matrice colonne de composantes Q_i et (V) la matrice colonne de composantes V_i.

Les éléments diagonaux valent C_{ii}, capacité du conducteur *i*, en présence des autres conducteurs, et sont positifs. Les éléments C_{ij}, pour *i* différent de *j*, s'appellent coefficient d'influence du conducteur *i* sur le conducteur *j*. Ils sont négatifs. Cette matrice est par ailleurs symétrique. Cette propriété repose sur le principe de conservation de l'énergie. En effet, on montre que, si l'on charge d'abord le conducteur *j* d'une charge Q_j, puis le conducteur *i* d'une charge Q_i, l'énergie nécessaire vaut $(C^{-1})_{ij}Q_{ii}^2 + (C^{-1})_{ij}Q_jQ_i + \frac{1}{2}(C^{-1})_{jj}Q_j^2$. Si l'on commence d'abord par le conducteur *i* puis par le conducteur *j*, l'énergie vaut $(C^{-1})_{ij}Q_{ii}^2 + (C^{-1})_{ji}Q_jQ_i + \frac{1}{2}(C^{-1})_{jj}Q_j^2$. On a donc $(C^{-1})_{ij} = (C^{-1})_{ji}$. La matrice C^{-1} et donc la matrice C est symétrique. Indiquons enfin que l'énergie électrostatique nécessaire pour charger les conducteurs *i* à la charge Q_i vaut :

$$E = \frac{1}{2}\,{}^tQ\,C^{-1}\,Q \text{ où Q est la matrice colonne de composantes } Q_i$$

$$= \frac{1}{2}\,{}^tV\,C\,V \quad \text{où V est la matrice colonne de composantes } V_i.$$

$$= \frac{1}{2}\,{}^tQ\,V$$

5– Inductance mutuelle

De même, considérons *n* circuits électriques parcourus par les courants I_i. Ils créent un champ magnétique ***B*** dont le flux à travers le circuit *i* est Φ_i. On a une relation du type :

$$(\Phi) = (L)(I)$$

où (Φ) est le vecteur colonne dont les composantes sont Φ_i et (I) le vecteur colonne dont les composantes sont I_i. (L) est une matrice carrée $n \times n$ de terme général L_{ij} avec :

❑ L_{ii} inductance propre du circuit *i*

❑ L_{ij} inductance mutuelle du circuit *i* sur le circuit *j*.

Cette matrice est elle aussi symétrique. L'énergie magnétostatique du système s'exprime sous la forme :

$$E = \frac{1}{2}\,{}^t\Phi\,I$$

$$= \frac{1}{2}\,{}^tI\,L\,I$$

$$= \frac{1}{2}\,{}^t\Phi\,L^{-1}\,\Phi$$

6– Polarisation

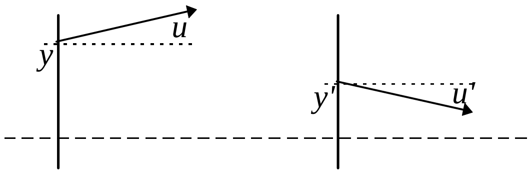
Considérons un corps, par exemple, un cristal plongé dans un champ électrique $\boldsymbol{E}$. Les atomes de ce corps subissent en général une polarisation. Il en résulte une polarisation globale $\boldsymbol{P}$, qui n'est pas en général colinéaire à $\boldsymbol{E}$. Il existe une transformation linéaire M telle que :

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{M}.\boldsymbol{E}$$

En considérant l'énergie nécessaire à une polarisation d'abord suivant l'axe des x, puis suivant l'axe des y, ou d'abord suivant l'axe des y puis suivant l'axe des x, on peut montrer là aussi que M est symétrique. Le fait qu'une matrice symétrique soit diagonalisable dans une base orthonormée signifie qu'il existe trois directions de polarisation privilégiée, pour lesquelles $\boldsymbol{P}$ est colinéaire à $\boldsymbol{E}$. L'énergie de polarisation est $\frac{1}{2}\,{}^{t}\boldsymbol{E}.\mathrm{M}.\boldsymbol{E}$

7– Optique matricielle

On définit en chaque point de l'axe optique le couple (y,u) où y est la distance du rayon à l'axe et u l'angle du rayon lumineux et de l'axe.



Entre deux points, on a une transformation linéaire de (y,u) en (y',u'), obtenue en confondant u, sin$u$ et tan$u$ (autrement dit, on considère que la direction du rayon lumineux est très proche de celle de l'axe [approximation de Gauss]). La matrice de cette transformation est dite matrice de transfert. Par exemple, les matrices sont :

❑ milieu transparent de longueur L : u est invariant, mais y augmente de Lu

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{L} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❑ dioptre sphérique de rayon R, du milieu d'indice n au milieu d'indice n' : y est invariant, mais le rayon change de direction :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n-n')}{n'\mathrm{R}} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix}$$

❑ dioptre plan, du milieu d'indice n au milieu d'indice n' : idem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{pmatrix}$$

obtenu comme cas particulier du dioptre shérique lorsque R tend vers l'infini.

❑ miroir sphérique de rayon R : idem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{\mathrm{R}} & -1 \end{pmatrix}$$

obtenu comme cas particulier du dioptre shérique lorsque $n' = -n$.

❑ miroir plan : idem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

obtenu comme cas particulier du dioptre plan, lorsque $n' = -n$, ou du miroir sphérique lorsque R tend vers l'infini.

Disposer successivement plusieurs dioptres ou miroirs séparés les uns des autres revient à construire un système optique dont la matrice est le produit des matrices de ses éléments.

Deux plans sont conjugués lorsque $y = 0$ correspond à $y' = 0$ et ceci, quel que soit u. Cela signifie qu'un objet disposé sur l'axe dans le premier plan aura son image sur l'axe dans le second plan. On a alors nécessairement $a_{12} = 0$. Si la matrice est $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, on a $y' = ay$ de sorte que a est l'agrandissement transversal. Si $y = 0$, on a $u' = cu$ et c est l'agrandissement angulaire. Les plans conjugués sont dits principaux lorsque l'agrandissement vaut $a = 1$.

Le foyer objet est atteint lorsque $a_{22} = 0$, le foyer image, lorsque $a_{11} = 0$. Dans le premier cas, $y = 0 \Rightarrow u' = 0$, autrement dit les rayons issus d'un objet placé sur l'axe au foyer objet ressorte parallèle à l'axe. Dans le second cas, $u = 0 \Rightarrow y' = 0$, autrement dit des rayons incidents parallèles à l'axe se concentre sur l'axe au foyer image. La matrice entre les deux foyers vaut $\begin{pmatrix} 0 & -f \\ -\frac{1}{f'} & 0 \end{pmatrix}$.

8– Transformation de Lorentz

En relativité restreinte, on suppose qu'un repère O' se déplace à la vitesse V par rapport à O. Alors le quadrivecteur (x',y',z',ct') se déduit du quadrivecteur (x,y,z,ct) par une tranformation linéaire. En particulier, si les axes sont alignés, et si le déplacement se fait suivant Ox, on a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} & -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

où $\gamma = \frac{\mathrm{V}}{c}$, c vitesse de la lumière. De même, le quadrivecteur impulsion-energie $(\boldsymbol{P}, \frac{\mathrm{E}}{c})$ se transforme avec le même opérateur, avec $\boldsymbol{P} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} m_0\boldsymbol{V}$ et $\frac{\mathrm{E}}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} m_0 c$

On transforme de même les quadrivecteurs densité de courant $(\boldsymbol{J}, c\rho)$ ou le quadrivecteur potentiel $(\boldsymbol{A}, \frac{\Phi}{c})$.