

INTEGRATION

PLAN

I : Présentation

- 1) Bref historique
- 2) Fonctions en escalier
- 3) Approximation des fonctions continues
- 4) Fonctions continues par morceaux

II : Propriétés de l'intégrale

- 1) Linéarité
- 2) Majorations et encadrements
- 3) Relation de Chasles
- 4) Inégalités de Schwarz et Minkowski
- 5) Sommes de Riemann
- 6) Valeur moyenne d'une fonction

III : Intégrale fonction de la borne supérieure

- 1) Définition
- 2) Continuité
- 3) Dérivation
- 4) Intégration par parties
- 5) Changement de variable
- 6) Fonctions à valeurs complexes :

IV : Calcul de primitives

- 1) Tableau de primitives
- 2) Fractions rationnelles
- 3) Fractions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$
- 4) Fractions rationnelles en $\sin x$, $\cos x$ et e^x
- 5) Fonctions de la forme $P(x)e^{kx}$
- 6) Racines de trinômes ou de fonctions homogènes
- 7) Méthode des trapèzes

Annexe I : Calcul approché d'intégrales

- 1) Méthode des rectangles
- 2) Méthode des trapèzes
- 3) Méthodes de Newton–Cotes
- 4) Méthodes de Gauss
- 5) Divers
- 6) Accélération de Richardson–Romberg

Annexe II : les intégrales de Riemann, de Lebesgue et de Kurzweil–Henstock

I : Présentation

1– Bref historique

La calcul d'aire est remonte à la plus haute antiquité. Archimède sait comparer l'aire délimité par une parabole avec celle d'un triangle. Il sait également que :

- (i) Le périmètre d'un cercle est proportionnel à son diamètre.

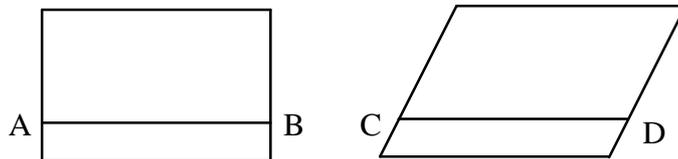
(ii) L'aire d'un disque est proportionnelle au carré de son rayon.

Or le coefficient de proportionnalité π est le même. Comment le démontrer ? Archimède compare un cercle avec un triangle rectangle dont l'un des côtés est le rayon du cercle, et dont l'autre a une longueur égale au périmètre du cercle. Il utilise pour cela une méthode dite par exhaustion.

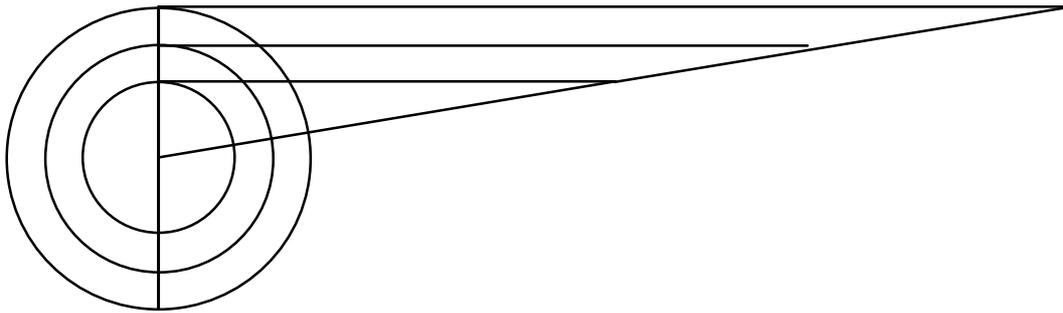
Appelons C l'aire du cercle et T celui du triangle. Pour montrer l'égalité (en tant qu'aire) de ces deux figures, il fait un double raisonnement par l'absurde, en supposant d'abord que le triangle est plus petit ($T < C$). Il construit alors un polygone d'aire P tel que $T < P < C$ en inscrivant dans le cercle une suite de polygones à 3×2^n côtés de façon que l'aire de l'un d'eux soit supérieure à l'aire du triangle. C'est possible car $T < C$. Il suffit de choisir un polygone dont l'aire est suffisamment proche de C . Il montre ensuite que ce polygone a une aire inférieure à T aboutissant ainsi à une contradiction. Il suffit de remarquer que ce polygone est constitué de triangles dont la somme des longueurs de base est inférieure au périmètre du cercle et dont la hauteur est inférieure au rayon. L'aire P du polygone est donc bien inférieure à T . Première contradiction.

Il suppose ensuite que le triangle a une aire supérieure à celle du cercle ($T > C$). Il circonscrit alors au cercle une suite de polygones réguliers de façon à ce que l'aire de l'un d'eux soit inférieure à l'aire du triangle ($T > P > C$). Il montre ensuite que ce polygone a une aire supérieure à T . En effet, la somme des longueurs des bases des triangles constituant le polygone est supérieure au périmètre du cercle, et la hauteur est égale à celle du rayon. L'aire P du polygone est donc supérieure à l'aire T du triangle. Deuxième contradiction. D'où la seule conclusion possible : $C = T$.

En 1635, Cavalieri (1598-1647), afin d'accélérer les démonstrations de la méthode par exhaustion développe la théorie des indivisibles. Pour prouver l'égalité de deux aires, il vérifie l'égalité des lignes constituant les deux surfaces. Donnons un exemple très simple qui permettra de comprendre le fonctionnement et l'intérêt de cette méthode. Considérons un rectangle et un parallélogramme de même base et même hauteur.



A chaque segment $[AB]$ du rectangle correspond un segment $[CD]$ du parallélogramme de même longueur. La méthode des indivisibles conclut alors que, les segments correspondants étant égaux, il en est de même des aires des deux figures. La démonstration du résultat d'Archimède, par la méthode des indivisibles, consiste par exemple à tracer un cercle de rayon R , ainsi que, pour tous les cercles de même centre de rayon r , inférieur à R , des segments parallèles entre eux, tangents à chaque cercle et de longueur la circonférence de chaque cercle. De même que les cercles vont remplir le disque de rayon R , de même, les segments vont remplir le triangle annoncé.



L'aire du triangle sera égale à l'aire du disque.

Cette méthode, bien artisanale comparée aux méthodes modernes, est cependant extrêmement efficace. On peut s'en faire une idée en lisant *Le traité de la Roulette* de Pascal (1623-1662), dans lequel Pascal calcule les centres de gravité de courbes, de surfaces, de volumes, choses que nous ne pourrions plus faire actuellement sans calcul intégral. Pascal fait un pas de plus que Cavalieri en disant qu'une surface est la somme de ses lignes. Il dit :

"Je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression, la somme des ordonnées, qui semble n'être pas géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes ; ce qui vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on entend autre chose par là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan, qui ne diffère de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée."

Les méthodes précédentes présentent le grave défaut de ne pouvoir donner une valeur à une aire, mais seulement de comparer deux aires entre elles. Ainsi, il faut connaître a priori la valeur d'une aire avant de prouver que cette aire possède effectivement la valeur désirée.

Les travaux de Pascal ont grandement influencé Leibniz (1646-1716), inventeur avec Newton (1642-1727) du calcul différentiel et intégral. Pour Leibniz et Newton, l'intégration est l'opération opposée à la dérivation. Pour calculer l'intégrale d'une fonction f , on cherche une primitive de f .

Cet aspect présente deux difficultés :

Au cours du XVIIIème, les travaux de Fourier (1768-1830) nécessitent un calcul intégral de plus en plus poussé, où la recherche de primitive et la limitation aux fonctions continues sont insuffisantes.

Pour l'enseignant d'aujourd'hui, cette présentation repose sur le fait que toute fonction continue admet une primitive, ce qu'il reste à prouver. (Une ébauche de preuve de l'existence des primitives sans utilisation du calcul intégral est donné dans le fichier SUITESF.PDF du cours de deuxième année, sur les suites et séries de fonctions).

A l'inverse, Cauchy (1789-1857) résout ce dernier point en définissant l'intégrale d'une fonction f continue indépendamment de l'existence d'une primitive, puis en prouvant que l'intégrale ainsi obtenue est effectivement une primitive de f . Pour définir son intégrale, Cauchy divise $[a, b]$ en n

intervalles et il considère la somme $\sum_{k=1}^n l_k f(t_k)$ où l_k est la longueur d'un petit intervalle et t_k une

extrémité de l'intervalle. Puis il fait tendre n vers $+\infty$. Cette démarche a été critiquée par la suite car

les démonstrations utilisées par Cauchy présentent quelques défauts. En outre, l'intégrale de Cauchy ne s'applique qu'aux fonctions continues.

Il revient à Riemann (1826-1866) d'introduire la première notion d'intégrale, reconnue encore valide de nos jours, en améliorant la démarche de Cauchy. L'intégrale de Riemann est suffisamment puissante pour définir une intégrale pour toutes les fonctions suivantes :

Les fonctions continues

Les fonctions monotones

La fonction $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

La fonction $x \rightarrow 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$

$$\frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q} \text{ irréductible, } q > 0$$

Elle n'est cependant pas complète car elle ne permet pas d'attribuer une valeur à l'intégrale de la fonction de Dirichlet :

$$x \rightarrow 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}$$

$$\rightarrow 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}$$

C'est d'autant plus étonnant que cette fonction ne semble guère différente de la dernière fonction intégrale au sens de Riemann donnée précédemment en exemple.

L'intégrale de Riemann pose également des problèmes délicats lorsqu'il s'agit de savoir si, étant donné une suite de fonctions (f_n) convergeant vers f (dans un sens à préciser), l'intégrale des f_n converge vers l'intégrale de f .

Ces défauts ont conduit Lebesgue (1875 – 1941) à introduire une nouvelle notion d'intégrale, telle que :

Toute fonction Riemann-intégrable est Lebesgue-intégrable, avec la même valeur d'intégrale.

La fonction de Dirichlet est Lebesgue-intégrable

Un exemple de fonction positive non Lebesgue-intégrable existe à condition d'utiliser un axiome (dit axiome du choix), et il ne peut donc pas être défini explicitement.

L'intégrale de Lebesgue est particulièrement adaptée au problème de convergence de suites de fonctions.

Malheureusement, l'intégrale de Lebesgue est jugée trop difficile à introduire en premier cycle d'enseignement supérieur. Dans les années 1950 à 1960, Kurzweil et Henstock ont proposé un troisième type d'intégrale, la KH-intégrale, aussi puissante que l'intégrale de Lebesgue, mais dont l'introduction pourrait être faite dès le premier cycle universitaire. Quelques précisions sont données sur ces diverses intégrales dans l'annexe II.

La KH-intégrale est encore peu répandue aujourd'hui, car le XXème siècle a bâti un édifice considérable de résultats à partir de l'intégrale de Lebesgue. On voit cependant se multiplier ces dernières années les articles et les livres sur la KH-intégrale et il n'est pas possible de dire aujourd'hui quelle théorie de l'intégration sera enseignée dans 30 ou 50 ans. En ce qui nous concerne, le programme prévoit une présentation de l'intégrale de Riemann, limitée aux fonctions continues par morceaux. Cela suffit pour une initiation, même si des difficultés peuvent concrètement être rencontrées. Par exemple, une suite convergente (f_n) de fonctions continues par morceaux peut avoir une limite f qui n'est pas continue par morceaux. Le lecteur aura compris que ce choix est motivé par un souci de simplicité aux dépens de la généralité.

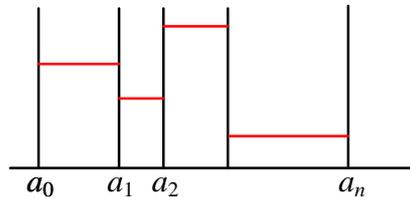
2- Fonctions en escaliers

DEFINITION :

Une fonction f définie sur $[a, b]$ est en escalier s'il existe une subdivision finie

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.



Les fonctions en escalier forment une algèbre sur \mathbb{R} . Seule la stabilité par la somme ou le produit n'est pas évidente. Il suffit de remarquer que, si l'on dispose de deux fonctions en escalier f et g , on peut prendre une subdivision plus fine que celle de f et de g , et compatible à la fois avec f et g , en prenant la réunion des deux subdivisions de f et g .

Il est facile de définir l'intégrale de fonctions en escalier. Soit f en escalier sur $[a, b]$, associée à une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Notons f_i la valeur de f sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. On pose :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f_k$$

On note aussi l'intégrale sous la forme $\int_I f$, où I désigne l'intervalle $[a, b]$. On s'assurera que cette

quantité ne dépend pas de la subdivision choisie, pourvue qu'elle soit compatible avec f . Pour cela, il suffit de voir qu'on peut ajouter un point à la subdivision sans changer la valeur de l'intégrale, puis qu'on peut ajouter plusieurs points ; enfin, pour comparer les valeurs données par deux subdivisions différentes, il suffit de passer par la subdivision obtenue en réunissant les deux subdivisions.

De même, il est trivial de vérifier les propriétés usuelles de l'intégrale :

$$\square \text{ linéarité : } \int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g \text{ et } \int_I \lambda f = \lambda \int_I f$$

$$\square f \geq 0 \Rightarrow \int_I f \geq 0 \text{ et } f \leq g \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g$$

$$\square \text{ relation de Chasles : } \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt \text{ pour } a \leq c \leq b.$$

Le but est maintenant d'approximer les fonctions continues par des fonctions en escalier.

3- Approximation des fonctions continues

Début de partie réservée aux MPSI

La définition de la continuité sur $[a, b]$ est :

$$\forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y, |y-x| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Dans cette définition, α dépend de x et de ε . Nous avons besoin d'une condition plus forte où α ne dépend pas de x .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, \forall y, |y-x| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Une fonction f vérifiant cette propriété est dite uniformément continue.

Exemple :

□ $f(x) = x^2$ est continue mais pas uniformément continue sur \mathbf{R} . En effet :

$$|x^2 - y^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-y| |x+y| < \varepsilon$$

or si cette inégalité était vérifiée pour tout x et y tels que $|x-y| < \alpha$ pour un certain α , elle serait vraie pour tout x et y tels que $|x-y| = \frac{\alpha}{2}$ et l'on aurait alors $|x+y| < \frac{2\varepsilon}{\alpha}$ borné. Or $|x+y|$ n'est pas borné.

□ $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$. En effet :

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x-y|}{2}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\alpha = 2\varepsilon$

□ Plus généralement, si f est k -lipschitzienne (par exemple dérivable, de dérivée bornée par k en utilisant l'inégalité des accroissements finis), alors f est uniformément continue. Il suffit de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$. On a ainsi les implications suivantes :

f dérivable à dérivée bornée
 $\Rightarrow f$ lipschitzienne
 $\Rightarrow f$ uniformément continue
 $\Rightarrow f$ continue

L'exemple x^2 prouve qu'une fonction continue n'est pas uniformément continue. On a cependant le résultat suivant.

THEOREME : (Heine 1821-1881)

Soit f continue sur un segment $[a, b]$. Alors f est uniformément continue.

Démonstration 1 :

Si f n'est pas uniformément continue, alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x, \exists y, |x - y| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Prenons $\alpha = \frac{1}{n}$ et appelons x_n et y_n les éléments x et y correspondants. Il existe une sous-suite $(x_{\Phi(n)})$ qui converge vers une limite C . La sous-suite $(y_{\Phi(n)})$ converge nécessairement vers la même limite C , puisque $|x_{\Phi(n)} - y_{\Phi(n)}|$ tend vers 0. On en déduit que $(f(x_{\Phi(n)}))$ et $(f(y_{\Phi(n)}))$ convergent vers $f(C)$, et donc que $|f(x_{\Phi(n)}) - f(y_{\Phi(n)})|$ tend vers 0, ce qui est contradictoire avec le fait que cette quantité reste supérieure à ε .

Démonstration 2 : cette démonstration utilise la propriété de Cousin énoncée dans l'annexe du chapitre *Suites*, dans le fichier SUITES.PDF.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout x , f étant continue en cet x , on peut associer un réel $\delta(x)$ strictement positif, tel que :

$$\forall y \in]x - \delta(x), x + \delta(x)[, |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

On définit ainsi une fonction δ strictement positive. La propriété de Cousin affirme qu'il existe une subdivision de $[a, b]$ $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, marquée par des points t_i éléments de $[x_{i-1}, x_i]$, qui est plus fine que $\frac{\delta}{2}$, c'est à dire que $[x_{i-1}, x_i] \subset]t_i - \frac{\delta(t_i)}{2}, t_i + \frac{\delta(t_i)}{2}[$. En particulier, pour tout x de $[x_{i-1}, x_i]$,

$|x - t_i| < \frac{\delta(t_i)}{2} < \delta(t_i)$, on aura $|f(x) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Choisissons α égal à la moitié du plus petit des nombres $\frac{\delta(t_i)}{2}$. Soient maintenant x et y deux réels vérifiant $|x - y| < \alpha$. x est dans l'un des intervalles

$[x_{i-1}, x_i]$. Nous avons déjà vu que $|f(x) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mais par ailleurs, $|x - y| < \alpha < \frac{\delta(t_i)}{2}$ et $|x - t_i| < \frac{\delta(t_i)}{2}$

implique que $|y - t_i| < \delta(t_i)$ de sorte que, également, $|f(y) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ d'où finalement $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

On a bien montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, \forall y, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.

Voici maintenant le théorème d'approximation d'une fonction continue par les fonctions en escalier

PROPOSITION :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, pour tout ε positif, il existe deux fonctions en escalier Φ et Ψ telle que :

$$\forall x \in [a, b], \Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x) \quad \text{et} \quad \Psi - \Phi \leq \varepsilon$$

Démonstration :

f est continue sur un segment, donc, d'après le théorème de Heine, uniformément continue. Il existe α tel que (*cette propriété sera admise par les PCSI et PTSI*) :

$$\forall x, \forall y, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Choisissons n entier tel que $\frac{b-a}{n} < \alpha$. On peut alors diviser l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de la

forme $I_k =]a + \frac{k(b-a)}{n}, a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}[$ de longueur inférieure à α , et sur chacun de ces intervalles I_k ,

on a :

$$\forall x \in I_k, \forall y \in I_k, |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Définissons Φ et Ψ sur chaque intervalle I_k par :

$$\forall x \in I_k, \Phi(x) = \min \{f(x) \mid x \in I_k\} \quad \text{et} \quad \Psi(x) = \max \{f(x), x \in I_k\}$$

Aux points $a + \frac{k(b-a)}{n}$, on peut prendre Φ et Ψ égale à f .

4- Fonctions continues par morceaux

Une fonction est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ telle que, pour tout i :

f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$

f admet une limite à droite strictement des x_i

f admet une limite à gauche strictement des x_i

Pour tout i , f peut être prolongée par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$. Le théorème d'approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier s'applique a fortiori pour les fonctions continues par morceaux. Il suffit en effet d'appliquer le théorème sur chaque intervalle où f est continue.

Voici comment on définit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux. Considérons les encadrements $\Phi \leq f \leq \Psi$, avec Φ et Ψ en escalier. Cet encadrement prouve que les intégrales des fonctions Φ sont majorées par l'intégrale de n'importe quelle Ψ , et que les intégrales des fonctions Ψ sont minorées par l'intégrale de n'importe quelle Φ . On peut donc définir :

$$S = \text{Sup} \left\{ \int_a^b \Phi(t) dt \mid \Phi \text{ en escalier et } \Phi \leq f \right\}$$

$$I = \text{Inf} \left\{ \int_a^b \Psi(t) dt \mid \Psi \text{ en escalier et } f \leq \Psi \right\}$$

On a $S \leq I$ puisque $\Phi \leq f \leq \Psi \Rightarrow \int_a^b \Phi(t) dt \leq \int_a^b \Psi(t) dt$. Mais, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe Φ et Ψ en escalier telles que $\Phi \leq f \leq \Psi$ et $\Psi - \Phi \leq \varepsilon$, de sorte que :

$$0 \leq I - S \leq \int_a^b \Psi(t) dt - \int_a^b \Phi(t) dt \leq \varepsilon(b-a)$$

Cette relation étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a nécessairement $I = S$. Cette valeur commune est par définition l'intégrale de f sur $[a, b]$. En particulier, si Φ et Ψ sont en escalier et vérifient $\Phi \leq f \leq \Psi$, on a $\int_a^b \Phi(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b \Psi(t) dt$. $\int_a^b f(t) dt$ s'interprète alors comme l'aire de la courbe comprise entre l'axe des abscisses et le graphe de f .

II : Propriétés de l'intégrale

1- Linéarité

PROPOSITION :

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ forme un espace vectoriel. L'intégrale est une forme linéaire.

Démonstration :

i) Soit f continue par morceaux. Alors $-f$ est continue par morceaux.

Si l'on a $\Phi \leq f \leq \Psi$ alors $-\Psi \leq -f \leq -\Phi$. On a donc :

$$\int_a^b -\Psi(t) dt \leq \int_a^b -f(t) dt \leq \int_a^b -\Phi(t) dt$$

$$\Rightarrow - \int_a^b \Psi(t) dt \leq \int_a^b -f(t) dt \leq - \int_a^b \Phi(t) dt$$

Prenons la borne sup du membre de gauche et la borne inf du membre de droite sur l'ensemble des fonctions en escalier Φ et Ψ . On obtient :

$$\text{Sup} - \int_a^b \Psi(t) dt \leq \int_a^b -f(t) dt \leq \text{Inf} - \int_a^b \Phi(t) dt$$

$$\Rightarrow - \text{Inf} \int_a^b \Psi(t) dt \leq \int_a^b -f(t) dt \leq - \text{Sup} \int_a^b \Phi(t) dt$$

$$\Rightarrow -\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b -f(t) dt \leq -\int_a^b f(t) dt \text{ d'où l'égalité}$$

ii) Considérons le produit de f par un réel λ . Compte tenu du i), on peut supposer $\lambda > 0$. On a : $\Phi \leq f \leq \Psi \Leftrightarrow \lambda\Phi \leq \lambda f \leq \lambda\Psi$, de sorte que :

$$\int_a^b \lambda\Phi(t) dt \leq \int_a^b \lambda f(t) dt \leq \int_a^b \lambda\Psi(t) dt$$

$$\Rightarrow \lambda \int_a^b \Phi(t) dt \leq \int_a^b \lambda f(t) dt \leq \lambda \int_a^b \Psi(t) dt$$

Prenons la borne sup du membre de gauche et la borne inf du membre de droite sur l'ensemble des fonctions en escalier Φ et Ψ . On obtient :

$$\lambda \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b \lambda f(t) dt \leq \lambda \int_a^b f(t) dt \text{ d'où l'égalité}$$

iii) Considérons la somme de deux fonction f et g . Si on a :

$$\Phi \leq f \leq \Psi$$

$$\Phi' \leq g \leq \Psi'$$

Alors $\Phi + \Phi' \leq f + g \leq \Psi + \Psi'$, de sorte que :

$$\int_a^b (\Phi + \Phi')(t) dt \leq \int_a^b (f + g)(t) dt \leq \int_a^b (\Psi + \Psi')(t) dt$$

On sépare les intégrales des fonctions en escaliers en somme de deux intégrales et on prend la borne supérieure du membre de gauche et la borne inférieure du membre de droite. On obtient :

$$\int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b (f + g)(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

d'où l'égalité.

2- Majorations et encadrements

PROPOSITION :

Soient f et g continues par morceaux sur $[a, b]$. Alors :

$$\text{i) } f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \geq 0$$

$$\text{ii) } f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$$

$$\text{iii) } |f| \text{ est continue par morceaux et } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

$$\text{iv) } \left| \int_a^b (fg)(t) dt \right| \leq \text{Sup } |f| \int_a^b |g(t)| dt \text{ (inégalité de la moyenne)}$$

$$\text{v) } f \geq 0, f \text{ continue et } \int_a^b f(t) dt = 0 \Rightarrow f = 0$$

Démonstration :

i) Evident car 0 est une fonction en escalier minorant f .

L'intégrale est dite positive.

ii) Appliquer i) sur $f-g$

iii) On a $-|f| \leq f \leq |f|$
 et on applique ii)

iv) Il suffit de majorer $|fg|$ par $(\text{Sup } |f|) \times |g|$. En particulier, en prenant $g = 1$, on a :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b-a) \text{Sup } |f|$$

v) Si $f \neq 0$, il existe x_0 tel que $f(x_0) > 0$, et par continuité, un intervalle I de longueur l contenant x_0 tel que, pour tout x de ce voisinage, $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. On peut alors minorer f par la fonction en escalier φ valant $\frac{f(x_0)}{2}$ sur I et 0 ailleurs. L'intégrale de f est minorée par l'intégrale de I qui vaut $\frac{l f(x_0)}{2} > 0$ contrairement à l'hypothèse. On notera que l'énoncé devient faux si on supprime l'hypothèse de la continuité de f . Il suffit en effet de prendre f non nulle en un nombre fini de point et nulle ailleurs pour avoir un contre-exemple.

3- Relation de Chasles

PROPOSITION :

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$, et soit c élément de $]a,b[$. Alors f est continue par morceaux sur $[a,c]$ et $[c,b]$ et :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Il suffit de remarquer que l'intégrale de f est la valeur commune de la borne supérieure des intégrales de Φ en escalier inférieures à f , et de la borne inférieure des intégrales de Ψ en escalier supérieures à f . On applique la relation de Chasles sur chacune de ces intégrales. On obtient donc :

$$\int_a^b \Phi(t) dt = \int_a^c \Phi(t) dt + \int_c^b \Phi(t) dt \leq \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

donc, en prenant la borne supérieure, on obtient :

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

On obtient l'autre inégalité en raisonnant sur les fonctions Ψ .

Pour $b < a$, on pose :

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

Ce qui permet de rendre valide la relation de Chasles pour toutes les dispositions relatives des trois nombres a , b et c .

4- Inégalités de Cauchy-Schwarz

La suite du paragraphe est réservée aux MPSI, PCSI, et PTSI suivant l'option mathématiques

PROPOSITION :

Soit f et g continues par morceaux sur $[a,b]$. On a alors :

$$i) \left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$$

(Inégalité de Schwarz)

$$ii) \sqrt{\int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$$

(Inégalité triangulaire)

Démonstration :

Il suffit de remarquer que $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire, et appliquer les inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire correspondantes. (cf le chapitre *Espaces Euclidiens* dans le fichier ESPEUCL.PDF)

Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.

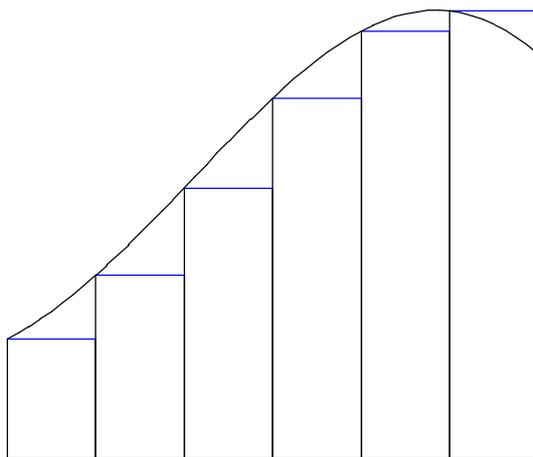
5- Sommes de Riemann

On appelle somme de Riemann une somme de la forme $\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1}-x_i)$ où (x_i) forme une subdivision

de $[a, b]$, et où c_i est élément de $[x_i, x_{i+1}]$. Nous nous limiterons au cas où l'intervalle $[a, b]$ a été divisé en n parties égales, et où c_i est la borne initiale de chaque intervalle. On obtient alors la somme :

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

R_n s'interprète comme l'aire des rectangles de longueur de base $\frac{b-a}{n}$ et de hauteur $f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$.



PROPOSITION :

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, R_n la somme de Riemann correspondant à une subdivision de $[a, b]$ en n intervalles de même longueur. Alors la suite (R_n) converge vers l'intégrale de f lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration :

Début de partie réservée aux MPSI

Pour simplifier un peu la démonstration, nous la donnerons dans le cas où f est continue. f étant continue sur $[a, b]$ est uniformément continue. Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, \forall y, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Choisissons N tel que $\frac{b-a}{N}$ soit inférieur à α . Pour tout n supérieur à N , on a, en

utilisant la relation de Chasles et en notant $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - R_n \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k) dt \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k) dt \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt \end{aligned}$$

Or $|t - x_k| \leq |x_{k+1} - x_k| = \frac{b-a}{n} \leq \frac{b-a}{N} \leq \alpha$. On a donc $|f(t) - f(x_k)| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(t) dt - R_n \right| \leq \varepsilon(b-a)$$

On a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \left| \int_a^b f(t) dt - R_n \right| \leq \varepsilon(b-a)$$

ce qui correspond à la définition de la convergence de (R_n) vers l'intégrale de f .

Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.

Dans le cas d'une fonction k -lipschitzienne, la démonstration est beaucoup plus simple. On a en effet, en notant $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - R_n \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k) dt \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k) dt \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} k(t - x_k) dt$$

$$\text{Or } \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} k(t - x_k) dt = \sum_{i=0}^{n-1} k \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \frac{k(b-a)^2}{2n}$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(t) dt - R_n \right| \leq \frac{k(b-a)^2}{2n} \text{ qui tend évidemment vers } 0.$$

APPLICATION :

Ce théorème permet de calculer certaines limites de suites. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$ est la somme de

Riemann $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$ correspondant à la fonction $\frac{1}{x}$, x variant entre 1 et 2. Sa limite est donc égale à

$\ln 2$.

6- Valeur moyenne d'une fonction

Il s'agit de la quantité $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$. On remarquera qu'elle est la limite de la somme de Riemann

$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n})$ qui est un bon candidat pour estimer une valeur moyenne de f , d'autant meilleur que

n est grand, d'où l'intérêt de prendre la limite lorsque n tend vers l'infini.

On peut citer les exemples suivants :

EXEMPLE 1 : Considérons les températures prises au cours d'une journée. On découpe une journée

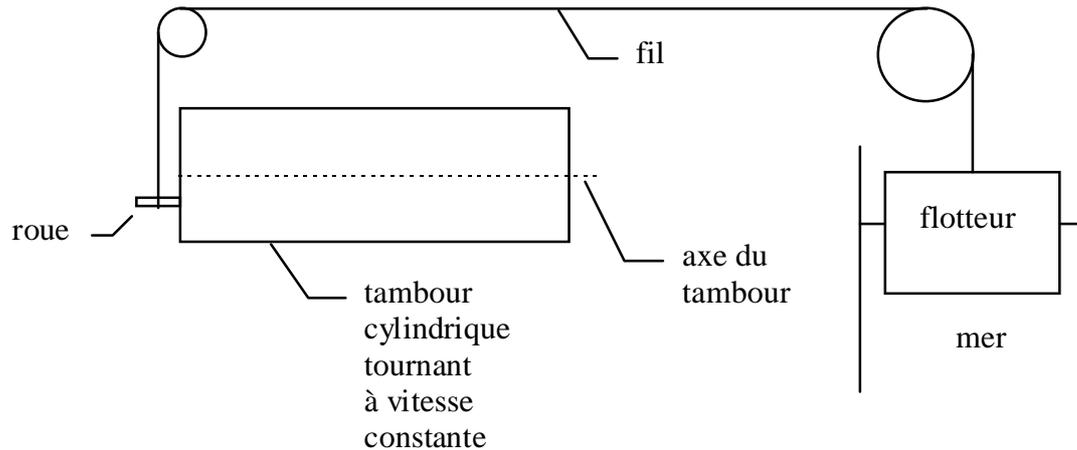
en n intervalles égaux. La température moyenne est $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T(h_k)$, où h_k est le $k^{\text{ème}}$ instant de mesure,

par exemple, $h_k = \frac{k}{n}$, si l'unité est la journée. Plus n est grand et plus la fonction T est précise. A la

limite, on peut modéliser T par une fonction continue. Sa valeur moyenne est $\int_0^1 T(t) dt$ qui n'est

autre que la limite de la somme de Riemann $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T(k/n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXEMPLE 2 : le marégraphe de Marseille est chargé de mesurer la hauteur de la mer. Un puits communique avec la mer pour amortir les vagues. Dans ce puits se trouve un flotteur. On mesure à quelle hauteur se trouve ce flotteur par rapport à un repère fixe. Un fil relié au flotteur possède un curseur qui permet de déterminer cette hauteur. Mais un mécanisme astucieux, en marche depuis un siècle, permet en outre de calculer la hauteur moyenne de la mer. En voici la description simplifiée :



Une petite roue, reliée par un fil tendu au flotteur, roule par frottement contre un cylindre tournant à vitesse constante. Soit x la distance de la roue à l'axe du cylindre. x correspond à la hauteur du flotteur. Plus le flotteur est haut, plus la roue est loin de l'axe du tambour et plus x est grand. Plus le flotteur est bas, plus la roue est proche de l'axe du tambour et plus x est petit. La hauteur du flotteur ainsi que x dépend de t . La hauteur moyenne sur un intervalle de temps $[a,b]$ est calculé par $\frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt$. Or la vitesse de rotation de la roue est proportionnelle à x . Plus x est grand, plus la roue tourne vite. Si le tambour tourne à la vitesse constante Ω et si le rayon de la roue est R , sa vitesse de rotation ω est $\omega = \frac{\Omega x}{R}$. Le nombre de tours dont tourne la petite roue est une primitive de ω et est donc proportionnelle à une primitive de x . Ce nombre de tours indique donc à une constante multiplicative près, la valeur moyenne de x et donc la hauteur moyenne de la mer.

Depuis peu, ce système est couplé avec un système électronique, calculant, à intervalle régulier, la hauteur de la mer. Ce système somme également les données recueillies et procède donc à une somme de Riemann. Il permet donc également de calculer une valeur moyenne de la hauteur d'eau.

EXEMPLE 3 : La puissance dissipée par effet Joule en courant alternatif est RI^2 , avec $I = I_0 \sin(\omega t)$. La puissance moyenne peut se mesurer sur une période est vaut :

$$\int_0^{2\pi/\omega} RI_0^2 \sin^2(\omega t) dt \times \frac{\omega}{2\pi}$$

Le calcul donne $\frac{1}{2}RI_0^2$.

Dans un dipôle soumis à une tension $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, la puissance moyenne vaut :

$$\int_0^{2\pi/\omega} I_0 U_0 \sin(\omega t) \sin(\omega t + \varphi) dt \times \frac{\omega}{2\pi}$$

qui donne $\frac{1}{2}I_0 U_0 \cos \varphi$.

III : Intégrale fonction de la borne supérieure

1- Définition

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$. f est donc continue par morceaux sur $[a, x]$, pour tout x élément de $[a, b]$. On pose :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Cette fonction s'appelle intégrale fonction de la borne supérieure.

2- Continuité

PROPOSITION :

L'intégrale fonction de la borne supérieure est une fonction continue.

Démonstration :

Nous allons utiliser la relation de Chasles.

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t)| dt \text{ si } h > 0 \text{ ou } \int_{x+h}^x |f(t)| dt \text{ si } h < 0$$

$$\Rightarrow |F(x+h) - F(x)| \leq M |h| \text{ où } M \text{ est un majorant de } |f|.$$

F est lipschitzienne de rapport M, donc est continue.

3- Dérivation

PROPOSITION :

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, F l'intégrale fonction de la borne supérieure correspondante. Si f est continue en un point x , alors F est dérivable en x , de dérivée $f(x)$.

Démonstration :

Soit x un point de continuité de f .

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) - f(x) dt \right| \leq \sup_{t \in [x, x+h]} |f(t) - f(x)|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout y élément de $]x-\alpha, x+\alpha[$, on ait $|f(y)-f(x)| < \varepsilon$. Pour h appartenant à cet intervalle, on en déduit que $\sup_{t \in [x, x+h]} |f(t) - f(x)|$, t compris entre x et $x+h$, est lui-même inférieur à ε . On a donc montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α positif tel que, pour tout h appartenant à $]x-\alpha, x+\alpha[$, la différence entre le taux d'accroissement de F entre x et $x+h$, et la valeur $f(x)$ est inférieure à ε . Cela est la définition même de la convergence du taux d'accroissement vers $f(x)$. Ce taux admettant une limite, F est dérivable, de dérivée $f(x)$.

Si f n'est pas continue en x_0 , rien ne permet de dire que F y est dérivable.

EXEMPLE :

Soit $f(x) = 1$ sur $]0,1[$ et $f(x) = 0$ sur $]1,2[$. On a alors $F(x) = x$ sur $[0,1]$ et $F(x) = 1$ sur $[1,2]$. F est bien continue, mais n'est pas dérivable en $x = 1$.

COROLLAIRE :

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .

Si G est une autre primitive, alors $G' - F' = 0$, donc $G - F$ est constante, et $G = F + Cte$. Cette constante vaut $G(a)$. Ainsi :

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a) \text{ pour une primitive quelconque}$$

4- Intégration par parties

PROPOSITION :

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Démonstration :

On considère les deux fonctions suivantes :

$$F : x \rightarrow \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

et $G : x \rightarrow u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t) dt$

On a : $F(a) = G(a) = 0$ et $F'(x) = G'(x) = u'(x)v(x)$ donc $F = G$.

5- Changement de variable

PROPOSITION :

Soit Φ de classe C^1 de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$ et f continue sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)} f(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\Phi(t)) \Phi'(t) dt$$

Démonstration :

On considère les deux fonctions suivantes, définies sur $[\alpha, \beta]$:

$$F : x \rightarrow \int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(x)} f(u) du$$

$$G : x \rightarrow \int_{\alpha}^x f(\Phi(t)) \Phi'(t) dt$$

On a $F(\alpha) = G(\alpha) = 0$ et $F'(x) = G'(x) = f(\Phi(x))\Phi'(x)$

Donc $F = G$.

Si Φ est bijective de $[\alpha, \beta]$ sur $[a, b]$, on peut écrire :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\Phi^{-1}(a)}^{\Phi^{-1}(b)} f(\Phi(t)) \Phi'(t) dt$$

EXEMPLE 1 :

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \text{ en posant } x = \sin t$$

Il suffit alors de linéariser $\cos^2 t$ pour trouver $\frac{\pi}{4}$.

EXEMPLE 2 :

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = \int_0^{\operatorname{argsh}(1)} \operatorname{ch}^2 t dt \text{ en posant } x = \operatorname{sh} t$$

On linéarise $\operatorname{ch}^2 t$ en $\frac{1 + \operatorname{ch} 2t}{2}$. On rappelle que $\operatorname{argsh} t = \ln(t + \sqrt{t^2+1})$ et que $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} t) = \sqrt{1+t^2}$ pour conclure que l'intégrale vaut :

$$\frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t \right]_0^{\operatorname{argsh}(1)} = \frac{1}{2} \operatorname{argsh}(1) + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(1)) = \frac{1}{2} [\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}]$$

Le changement de variable $x = \tan \theta$ est également possible, mais il se trouve que l'intégrale est plus difficile à intégrer. Elle sera revue lors du paragraphe suivant.

6- Fonctions à valeurs complexes

Pour le calcul de primitive, il nous faut introduire les notions suivantes :

□ Intégrale d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes, $h = f + ig$, où f et g sont les parties réelles et imaginaires de h :

$$\int_a^b h(t) dt = \int_a^b f(t) dt + i \int_a^b g(t) dt$$

Ainsi : $\int_a^b \operatorname{Re}(h)(t) dt = \operatorname{Re} \int_a^b h(t) dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(h)(t) dt = \operatorname{Im} \int_a^b h(t) dt$

□ Dérivée d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes, $h = f + ig$, où f et g sont les parties réelles et imaginaires de h : $h' = f' + ig'$

On vérifie que les règles usuelles de dérivation et d'intégration s'étendent au cas complexe. Il suffit pour cela de séparer partie réelle et partie imaginaire. Seule l'inégalité

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

n'est pas évidente. Soit θ l'argument de $\int_a^b f(t) dt$, de sorte que $e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt$ soit réel, égal à

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right|. \text{ Posons } F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ et } G(x) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} F(x)) \text{ de sorte que :}$$

$$G(b) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} F(b)) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt) = e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt = \left| \int_a^b f(t) dt \right|$$

G est une fonction à valeur réelles. On a également :

$$G(b) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} F(b)) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt) = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t)) dt$$

$$\Rightarrow G(b) \leq \int_a^b |\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t))| dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt \text{ d'où le résultat annoncé.}$$

IV : Calcul de primitives

1- Tableau de primitives

f	$\int f(t) dt$ à une constante près
x^r pour $r \neq -1$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\ln x $	$x \ln x - x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$a>0 \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+h}}$	$\ln x+\sqrt{x^2+h} $
$\frac{1}{x^2-1}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right $
$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right $
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\tan x}$
$\tan x$	$-\ln \cos x $
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \left \tan \frac{x}{2} \right $
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $

2- Fractions rationnelles

Les fractions rationnelles de polynômes jouent un rôle essentiel, dans le sens où elles font partie d'une catégorie de fonctions pour lesquelles on peut en calculer des primitives. Il faut savoir en effet que toute fonction élémentaire (obtenue à partir de sommes, produits, quotients, logarithmes, exponentielles, extractions de racines) n'admet pas forcément une primitive sous forme de fonction élémentaire. On peut prouver par exemple que, si f et u sont des fractions rationnelles et si $\int f(t)e^{u(t)} dt$

est une fonction élémentaire, elle est nécessairement elle-même de la forme $g(t)e^{u(t)}$ avec g fraction rationnelle. De plus, si f et u sont des polynômes, il en est de même de g . Il est donc illusoire de

chercher une primitive de $\int \exp(t^2) dt$ sous forme de fonction élémentaire : sa primitive devrait être de la forme $g(t) \exp(t^2)$, avec g polynôme, donc $g'(t) + 2tg(t) = 1$ ce qui est impossible (le membre de droite est de degré nul alors que le membre de gauche serait de degré strictement positif). Il en est de même de $\int \frac{e^x}{x} dx$ dont une primitive devrait être de la forme $g(x)e^x$ avec $g' + g = \frac{1}{x}$ et g fraction rationnelle. Si $g = \frac{P}{Q}$, on aurait $X(P'Q - Q'P) + XPQ = Q^2$. Si k est la valuation de Q (i.e. le degré le plus bas du monôme ayant un coefficient non nul), k est strictement positif (car $Q(0) = 0$ d'après l'égalité précédente), la valuation de $XQ'P$ est k mais celle de XPQ est $k+1$ et celle de $XP'Q$ est au moins de $k+1$, de sorte que la valuation du membre de gauche est k alors que celle de Q^2 est $2k$, ce qui est impossible.

Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes $\frac{A}{B}$. On factorise B sur le corps \mathbb{C} , de sorte que la fraction s'écrit :

$$\frac{A}{(X-a_1)^{k_1}(X-a_2)^{k_2}\dots(X-a_n)^{k_n}}$$

On peut supposer que les a_i ne sont pas racines du numérateur A , sinon, on simplifie les facteurs correspondants $(X-a_i)$ de façon à obtenir une fraction irréductible. Nous admettrons qu'une fraction rationnelle se décompose de manière unique sous la forme suivante (voir le chapitre *Polynômes* dans le fichier POLYNOME.PDF pour plus de détails) :

$$\frac{A}{B} = \underbrace{E}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\lambda_{ij}}{(X-a_i)^j}}_{\text{partie polaire}}$$

E n'est autre que le quotient de la division euclidienne de A par B .

□ La partie entière, polynomiale, s'intègre sans difficulté.

□ Il en est de même de la partie polaire :

$$\frac{1}{x-a} \text{ s'intègre en } \ln|x-a| \text{ si } a \text{ est réel}$$

$$\frac{1}{(x-a)^n} \text{ s'intègre en } -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} \text{ pour } n > 1$$

Dans le cas où a est complexe, il se pose le problème de la primitive de $\frac{1}{x-a}$, puisque \ln n'est pas définie sur \mathbb{C} . Posons $a = b + ic$, avec b et c réels.

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x-b-ic} = \frac{x-b+ic}{(x-b)^2 + c^2} = \frac{x-b}{(x-b)^2 + c^2} + i \frac{c}{(x-b)^2 + c^2}$$

Une primitive de cette fraction est :

$$\frac{1}{2} \ln [(x-b)^2 + c^2] + i \arctan \frac{x-b}{c} + \text{Cte} = \ln |x-a| + i \arg(x-a) + \text{Cte}'$$

Il n'est pas toujours nécessaire de décomposer une fraction rationnelle sur \mathbb{C} . On notera que les fractions sur \mathbb{R} de la forme suivante s'intègrent :

- $\frac{x}{x^2 + a^2}$ en $\frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2)$
- $\frac{x}{(x^2 + a^2)^n}$ en $\frac{\text{Cte}}{(x^2 + a^2)^{n-1}}$ (trouver la valeur de Cte en dérivant)
- $\frac{1}{x^2 + a^2}$ en $\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$
- $\frac{1}{(x^2 + a^2)^n}$: faire le changement de variable $x = a \tan(\theta)$

EXEMPLE 1 : $I = \int \sqrt{1+t^2} dt$ (pour une primitive en général, on ne précise pas de borne. Il faut avoir conscience qu'elle est définie à une constante près).

Posons $t = \text{sh}(u)$. On a alors :

$$\begin{aligned} I &= \int \text{ch}^2(u) du = \int \frac{1 + \text{ch}(2u)}{2} du = \frac{u}{2} + \frac{1}{2} \text{sh}(u) \text{ch}(u) + \text{Cte} \\ &= \frac{\text{argsh}(t)}{2} + \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \text{Cte} \end{aligned}$$

Autre méthode. Posons $t = \tan(\theta)$, $\theta \in]-\infty, +\infty[$. On a :

$$I = \int \frac{1}{\cos^3(\theta)} d\theta$$

Posons $u = \sin(\theta)$. (La raison pour laquelle on choisit ce changement de variable sera expliqué plus bas) On obtient :

$$I = \int \frac{1}{(1-u^2)^2} du$$

Il suffit ☺ de décomposer $\frac{1}{(1-u^2)^2}$ en éléments simples. On trouve :

$$\frac{1}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{(1-u)^2(1+u)^2} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{(1-u)^2} + \frac{c}{1+u} + \frac{d}{(1+u)^2} \quad \text{avec } a = c \text{ et } b = d \text{ car la fonction est}$$

paire. $b = \frac{1}{4}$ (multiplier par $(1-u)^2$ et faire $u = 1$) et $a = \frac{1}{4}$ (faire ensuite $u = 0$).

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1-u} + \frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{1+u} + \frac{1}{(1+u)^2} \right]$$

Donc :

$$I = \frac{1}{4} \left[\ln \frac{1+u}{1-u} + \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} \right] + \text{Cte} \quad \text{or } u = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4} \left[\ln \frac{\sqrt{1+t^2} + t}{\sqrt{1+t^2} - t} + 2t\sqrt{1+t^2} \right] + \text{Cte}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \text{Cte}$$

valeur déjà trouvée au paragraphe précédent.

EXEMPLE 2 :

Il n'est pas toujours nécessaire de décomposer en éléments simples.

$$J = \int \frac{1}{(t^2+t+1)^2} dt$$

Posons $u = t + \frac{1}{2}$. D'où :

$$J = \int \frac{1}{(u^2 + 3/4)^2} du$$

Posons maintenant $u = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan(\theta) \Rightarrow du = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2(\theta)) d\theta$

$$\begin{aligned} J &= \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \cos^2(\theta) d\theta = \frac{4\sqrt{3}}{9} \int (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \frac{4\sqrt{3}}{9} [\theta + \sin(\theta)\cos(\theta)] + \text{Cte} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \left[\arctan \frac{2u}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{u}{1 + 4u^2/3} \right] + \text{Cte} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \frac{2t+1}{3(t^2+t+1)} + \text{Cte} \end{aligned}$$

EXEMPLE 3 :

$$K = \int \frac{1}{x(x^2+x+1)} dx$$

Si on cherche à écrire $\frac{1}{x(x^2+x+1)}$ sous la forme $\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$, on trouve $a = 1$ (multiplier par x puis faire $x = 0$) et $bx+c = -x-1$ (multiplier par x^2+x+1 et faire $x = j$).

$$\begin{aligned} \Rightarrow K &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \text{Cte} \end{aligned}$$

Si on décompose la fraction en éléments simples sur \mathbb{C} , on obtient :

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{1}{x(x-j)(x-j^2)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(j^2-1)(x-j)} + \frac{1}{(j-1)(x-j^2)}$$

Une primitive est donnée, à une constante près, par :

$$\ln|x| + \frac{1}{j^2-1} [\ln|x-j| + i \arg(x-j)] + \frac{1}{j-1} [\ln|x-j^2| + i \arg(x-j^2)]$$

x étant réel, $|x-j| = |x-j^2|$ et $\arg(x-j) = -\arg(x-j^2)$. On obtient donc :

$$\ln|x| + \left(\frac{1}{j^2-1} + \frac{1}{j-1} \right) \ln|x-j| + \left(\frac{i}{j^2-1} - \frac{i}{j-1} \right) \arg(x-j) = \ln|x| - \ln|x-j| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arg(x-j) =$$

avec $x-j = x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

On obtient finalement :

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

3- Fractions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

Dans le cas d'une intégrale de la forme $\int f(\sin(x), \cos(x)) dx$ où f est une fraction rationnelle en $\sin(x)$ et $\cos(x)$, on tente un changement de variable $u = \sin(x)$ ou $u = \cos(x)$ ou $u = \tan(x)$ ou $u = \tan(x/2)$.

a) $u = \sin(x)$

On remarque que $u = \sin(x) = \sin(\pi-x)$. On fera donc ce changement de variable lorsque :

$$\int f(\sin(x), \cos(x)) dx = \int f(\sin(\pi-x), \cos(\pi-x)) d(\pi-x) = - \int f(\sin(x), -\cos(x)) dx$$

EXEMPLE :

$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$ vu plus haut se calcule en effectuant le changement de variable $u = \sin(x)$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos(x)} dx &= \int \frac{\cos(x)}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{1-u^2} du \text{ avec } u = \sin(x) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + \text{Cte} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin t}{1-\sin t} \right| + \text{Cte} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos(t + \pi/2)}{1 + \cos(t + \pi/2)} \right| + \text{Cte} \\ &= \ln \left| \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \text{Cte} \end{aligned}$$

b) $u = \cos(x)$

On remarque que $u = \cos(x) = \cos(-x)$. On fera donc le changement de variable lorsque :

$$\int f(\sin(x), \cos(x)) dx = \int f(\sin(-x), \cos(-x)) d(-x) = - \int f(-\sin(x), \cos(x)) dx$$

EXEMPLE :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin t} dt &= \int \frac{\sin t}{\sin^2 t} dt = - \int \frac{1}{1-u^2} du \text{ avec } u = \cos(t) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| + \text{Cte} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos t}{1+\cos t} \right| + \text{Cte} = \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + \text{Cte} \end{aligned}$$

Si on fait le changement de variable $t = x + \frac{\pi}{2}$, on obtient $\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \ln \left| \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \text{Cte}$

c) $u = \tan(x)$

On remarque que $u = \tan(x) = \tan(\pi+x)$. On effectuera donc le changement de variable lorsque :

$$\int f(\sin(x), \cos(x)) dx = \int f(\sin(\pi+x), \cos(\pi+x)) d(\pi+x) = \int f(-\sin(x), -\cos(x)) dx$$

EXEMPLE :

$$\int \frac{1}{2 - \cos^2 t} dt$$

Posons $u = \tan t$, soit $du = (1+u^2) dt$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{1+2u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}u) + Cte = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan t) + Cte$$

On remarquera que la constante est en fait une constante par intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, +\frac{\pi}{2} + k\pi [$, de façon à pouvoir définir une primitive continue de la fonction initiale sur \mathbb{R} .

d) $u = \tan(x/2)$

Dans tous les autres cas, ce changement de variables donne une fraction rationnelle en u . En effet, $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\tan(x) = \frac{2u}{1-u^2}$, $du = \frac{1}{2}(1+u^2)dx$. Il faut cependant s'y résoudre en dernier recours, car en général, les degrés des polynômes intervenant dans la fraction rationnelle sont doublés, ce qui complique les calculs. Parfois, il est cependant bien commode :

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + Cte = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + Cte$$

plus facilement qu'au a).

4- Fractions rationnelles en $\text{sh}(x)$, $\text{ch}(x)$ et e^x

Il suffit de faire le changement de variable $u = e^x$.

Exemple :

$$\int \frac{1}{\text{sh}(x)} dx = \int \frac{2}{u^2-1} du = \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + Cte = \ln \left| \frac{e^x-1}{e^x+1} \right| + Cte = \ln \left| \text{th} \frac{x}{2} \right| + Cte$$

expression qu'il convient de rapprocher de $\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$, primitive de $\frac{1}{\sin(x)}$.

$$\int \frac{1}{\text{ch}(x)} dx = \int \frac{2}{u^2+1} du = \arctan(u) + Cte = \arctan(e^x) + Cte$$

Cette expression semble, quant à elle, fort éloignée de la primitive de $\frac{1}{\cos(x)}$ donnée par

$\ln \left| \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$. Cependant, cette dernière fonction peut s'écrire $\ln \left| \frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)} \right| = 2 \operatorname{argth}[\tan \frac{x}{2}]$, ce

qui nous conduit à considérer la fonction $2 \operatorname{arctan}[\text{th} \frac{x}{2}]$. Si on la dérive, on trouve $\frac{1}{\text{ch}(x)}$. On peut

également vérifier directement que $2 \operatorname{arctan}[\text{th} \frac{x}{2}] = 2 \operatorname{arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}$.

5- Fonctions de la forme $P(x)e^{\alpha x}$

P désigne un polynôme et α un nombre réel ou même complexe, ce qui permet de traiter le cas des cos et sin.

Lorsque $\deg P$ est faible (inférieur ou égal à 2), on peut intégrer par parties. Cependant, le nombre d'intégration par parties à effectuer est égal au degré de P .

EXEMPLE :

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + \int 2e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + Cte$$

On remarque que la primitive est de la forme $Q(x)e^{\alpha x} + Cte$ avec $\deg Q = \deg P$. Ce résultat est général. On trouve Q en dérivant, ce qui donne :

$$\alpha Q + Q' = P$$

L'existence de Q est assurée, car il n'est pas difficile de vérifier que l'équation ci-dessus donne un système triangulaire dont les inconnues sont les coefficients de Q .

EXEMPLE :

$$\int x^2 e^x \cos(2x) dx = \operatorname{Re} \int x^2 e^{(1+2i)x} dx$$

$\int x^2 e^{(1+2i)x} dx$ est la primitive d'une fonction complexe qui est de la forme $(ax^2 + bx + c) \cdot e^{(1+2i)x} + Cte$

D'où, en dérivant :

$$\begin{cases} (1+2i)a = 1 \\ 2a + (1+2i)b = 0 \\ b + (1+2i)c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5} \\ b = -\frac{2}{(1+2i)^2} = \frac{2}{3-4i} = \frac{6+8i}{25} \\ c = \frac{2}{(1+2i)^3} = -\frac{2}{11+2i} = \frac{-22+4i}{125} \end{cases}$$

Il suffit maintenant de prendre la partie réelle de la primitive. On obtient :

$$\left(\frac{x^2}{5} + \frac{6x}{25} - \frac{22}{125}\right) e^x \cos(2x) + \left(\frac{2x^2}{5} - \frac{8x}{25} - \frac{4}{125}\right) e^x \sin(2x)$$

6- Racines de trinômes ou de fonctions homographiques

$\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ se calcule de la façon suivante : on réduit le trinôme en $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$.

Plusieurs cas se présentent alors :

□ $a = \alpha^2$ et $c - \frac{b^2}{4a} = \beta^2$. On obtient une expression du type :

$$\sqrt{\alpha^2 X^2 + \beta^2}$$

Poser $X = \frac{\beta}{\alpha} \tan(\theta)$ ou $\frac{\beta}{\alpha} \operatorname{sh}(t)$ pour profiter du fait que $1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$ ou

$$1 + \operatorname{sh}^2(t) = \operatorname{ch}^2(t)$$

□ $a = \alpha^2$ et $\frac{c - b^2}{4a} = -\beta^2$. On obtient une expression du type :

$$\sqrt{\alpha^2 X^2 - \beta^2}$$

Poser $X = \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{ch}(t)$ (ou $-\frac{\beta}{\alpha} \operatorname{ch}(t)$ suivant le signe de x) ou $X = \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\cos(\theta)}$, pour profiter du fait que $\operatorname{ch}^2(t) - 1 = \operatorname{sh}^2(t)$ ou $\frac{1}{\cos^2(\theta)} - 1 = \tan^2(\theta)$

□ $a = -\alpha^2$ et $c - \frac{b^2}{4a} = \beta^2$. On obtient une expression du type :

$$\sqrt{\beta^2 - \alpha^2 X^2}$$

Poser $X = \frac{\beta}{\alpha} \sin(\theta)$ ou $\frac{\beta}{\alpha} \operatorname{th}(t)$ pour profiter du fait que $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$ ou $1 - \operatorname{th}^2(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)}$.

EXEMPLE :

$$\int \sqrt{x^2 - 1} \, dx$$

Posons $x = \varepsilon \operatorname{cht}$ avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant le signe de x . On obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon \int \operatorname{sh}^2(t) \, dt &= \varepsilon \int \frac{\operatorname{ch}(2t) - 1}{2} \, dt = \varepsilon \left[\frac{1}{2} \operatorname{sh}(t) \operatorname{ch}(t) - \frac{t}{2} \right] + \text{Cte} \\ &= \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + \text{Cte} \end{aligned}$$

$\int f(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}) \, dx$ se calcule en posant $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} = u$

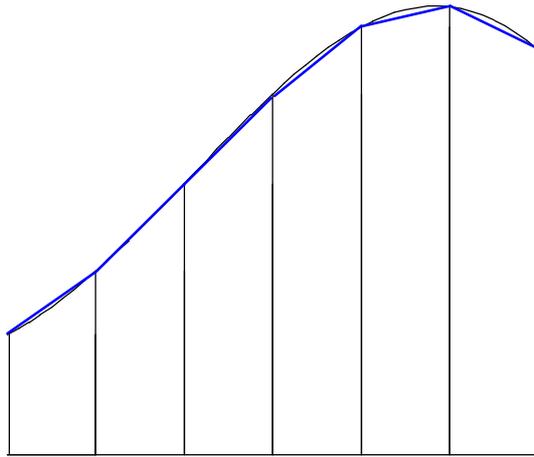
En particulier, $\int f(x, \sqrt{ax+b}) \, dx$ se calcule en posant $u = \sqrt{ax+b}$.

7- Méthode des trapèzes

Dans le cas où l'on ne peut calculer une primitive, il existe des méthodes numériques approchées de calcul d'intégrale. La méthode la plus simple est de prendre une somme de Riemann, mais la convergence est lente. Dans le cas d'une fonction lipschitzienne, nous avons vu que l'erreur est en $O(\frac{1}{n})$. Nous exposons ici la méthode des trapèzes, renvoyant le lecteur intéressé à l'annexe I qui développe un cadre plus général sur ces méthodes.

La méthode des trapèzes consiste à approximer f par une fonction affine. L'intégrale s'approxime par l'aire d'un trapèze de bases $f(a)$ et $f(b)$, et de hauteur $b-a$. On obtient donc : $\frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$. Si on opère sur une subdivision régulière de $[a, b]$, on obtient :

$$T_n = \frac{b-a}{n} \left[\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) + \frac{f(a) + f(b)}{2} \right]$$



Un excellent travail d'algorithmique consiste à programmer cette somme sur votre calculatrice. On montre, dans l'annexe II, que pour une fonction C^2 , l'erreur commise est en $O(\frac{1}{n^2})$.

La fin du chapitre est réservée aux MPSI

Nous supposons que l'erreur dans la méthode des trapèzes, qui est en $O(\frac{1}{n^2})$ pour une fonction C^2 est de la forme $\frac{a}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$, de sorte que :

$$T_n = \int_1 f + \frac{a}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Appliquons la même méthode des trapèzes, mais en doublant le nombre de subdivision ($2n$ au lieu de n). On obtient :

$$T_{2n} = \int_1 f + \frac{a}{4n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

On voit qu'en calculant $\frac{4T_{2n} - T_n}{3}$, on élimine le terme en $\frac{a}{n^2}$, de sorte que :

$$S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{3} = \int_1 f + o(\frac{1}{n^2})$$

qui converge beaucoup plus rapidement. On obtient la méthode de Simpson. On peut évidemment itérer la méthode. On a alors intérêt à prendre $n = 2, 4, 8, \dots$

EXEMPLE :

Un logiciel donne comme valeur numérique approchée de $\int_0^1 \exp(x^2) dx$ la quantité 1,46265175.

Comparons cette valeur avec celles obtenues par les sommes de Riemann, la méthode des trapèzes, la méthode de Simpson :

n	2	4	8	16	32	64
Riemann $R(n)$	1.14201271	1.27589363	1.36231966	1.41072400	1.43624595	1.44933827
Trapèzes $T(n)$	1.57158317	1.49067886	1.46971228	1.46442031	1.46309410	1.46276235
Simpson $S(n)$	1.46371076	1.46272341	1.46265632	1.46265203	1.46265176	1.46265175

On constate donc que, pour $n = 64$, la méthode de Riemann ne donne que deux décimales exactes, la méthode des trapèzes en donne quatre, et la méthode de Simpson en donne huit ou neuf.

Annexe I : Calcul approché d'intégrales

La méthode générale consiste à approximer $\int_a^b f(t) dt$ par une somme finie $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$, où les λ_i et les

x_i sont bien choisis. Le plus souvent, on applique la méthode non sur $[a, b]$, mais sur une subdivision de $[a, b]$, afin d'obtenir une précision plus grande.

1- Méthode des rectangles

Elle consiste à prendre comme valeur approchée de l'intégrale le produit de la valeur de f en un point de cet intervalle par la longueur de l'intervalle, par exemple $(b-a)f(a)$ (méthode des rectangles à gauche) ou $(b-a)f(b)$ (méthode des rectangles à droite). Ces deux méthodes sont très imprécises et ne sont exactes que pour les fonctions constantes. On obtient une meilleure précision en choisissant la méthode du point milieu, à savoir $(b-a)f(\frac{a+b}{2})$. Cette méthode est en effet exacte pour f de degré

1.

La méthode des rectangles à gauche, appliquée sur une subdivision de $[a,b]$ conduit aux sommes de Riemann :

$$S = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Estimons l'erreur commise pour une fonction de classe C^1 . Considérons d'abord le cas $n = 1$. On approxime l'intégrale de f par $(b-a)f(a)$. Notons M un majorant de $|f'|$ et utilisons l'inégalité des accroissements finis. L'erreur est :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - (b-a)f(a) \right| = \left| \int_a^b f(t) - f(a) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - f(a)| dt \leq \int_a^b M (t-a) dt = \frac{M(b-a)^2}{2}$$

On obtient la même majoration en considérant F primitive de f , avec l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - (b-a)f(a) \right| = |F(b) - F(a) - (b-a)F'(a)| \leq \frac{M(b-a)^2}{2}$$

avec M majorant de $|F''|$.

Si maintenant, on divise $[a, b]$ en n , on commet sur chaque intervalle de longueur $\frac{(b-a)}{n}$ une erreur

de la forme $\frac{M(b-a)^2}{2n^2}$, de sorte que l'erreur totale est $\frac{M(b-a)^2}{2n}$.

On peut prendre la méthode des rectangles à droite (l'erreur commise est analogue) :

$$S' = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Dans le cas d'une fonction monotone, S et S' encadrent l'intégrale de f.

Quant à la méthode du point milieu, elle donne :

$$S'' = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left[a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right]$$

Cherchons l'erreur commise pour une fonction de classe C^2 . Soit M un majorant de $|f''|$. Dans le cas $n=1$, on approxime l'intégrale par $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, qui est aussi l'intégrale de la fonction affine g dont le graphe est la tangente au graphe de f au point $\frac{a+b}{2}$. Majorons $f(t) - g(t)$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange en $\frac{a+b}{2} = x_0$ sur f. On a :

$$|f(t) - f(x_0) - (t-x_0)f'(x_0)| \leq \frac{M(t-x_0)^2}{2}$$

or $f(x_0) + (t-x_0)f'(x_0)$ n'est autre que $g(t)$. L'erreur commise sur l'intégrale est donc majorée par :

$$\int_a^b \frac{M(t-x_0)^2}{2} dt = \frac{M}{6} [(t-x_0)^3]_a^b = \frac{M(b-a)^3}{24}$$

Dans le cas d'une subdivision en n intervalles, l'erreur sur chaque intervalle de longueur $\frac{b-a}{n}$ est majorée par $\frac{M(b-a)^3}{24n^3}$, de sorte que l'erreur totale est majorée par $\frac{M(b-a)^3}{24n^2}$.

2- Méthode des trapèzes

Elle consiste à approximer f par une fonction affine. L'intégrale s'approxime par l'aire d'un trapèze de bases f(a) et f(b), et de hauteur b-a. On obtient donc : $\frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$. Si on opère sur une subdivision régulière de [a, b], on obtient :

$$\frac{b-a}{n} \left[\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) + \frac{f(a) + f(b)}{2} \right]$$

où l'on reconnaît $\frac{1}{2}(S + S')$, où S et S' sont les sommes de Riemann à gauche et à droite. Cette méthode est exacte pour f de degré 1. Estimons l'erreur de la méthode pour f de classe C^2 . Appelons M un majorant de $|f''|$. Pour $n = 1$, on approxime l'intégrale par $(b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$ qui représente l'intégrale de la fonction affine Φ qui coïncide avec f en a et b. Montrons que pour une telle fonction, on a :

$$|f(t) - \Phi(t)| \leq \frac{1}{2} (t-a)(b-t)M$$

ou encore

$$-\frac{1}{2} (t-a)(b-t)M + \Phi(t) \leq f(t) \leq \frac{1}{2} (t-a)(b-t)M + \Phi(t)$$

Il suffit pour cela de constater que la fonction $f(t) - \frac{1}{2}(t-a)(b-t)M$ est de dérivée seconde positive, donc est convexe et est inférieure à $\Phi(t)$, fonction représentative de la corde reliant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$. De même, $f(t) + \frac{1}{2}(t-a)(b-t)M$ est de dérivée seconde négative, donc est concave et est supérieure à $\Phi(t)$, fonction représentative de la corde reliant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$. L'erreur commise est donc majorée par :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{2}(t-a)(b-t)M dt &= \frac{1}{2} M \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{(a+b)t^2}{2} - abt \right]_a^b \\ &= \frac{1}{2} M \left[-\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3} + \frac{(a+b)^2(b-a)}{2} - ab(b-a) \right] \\ &= \frac{M(b-a)}{12} [-2b^2 - 2ab - 2a^2 + 3a^2 + 6ab + 3b^2 - 6ab] = \frac{M(b-a)^3}{12} \end{aligned}$$

Dans le cas d'une subdivision de n intervalles, l'erreur sur chaque intervalle de longueur n est $\frac{M(b-a)^3}{12n^3}$ et l'erreur totale est majorée par $\frac{M(b-a)^3}{12n^2}$.

3- Méthodes de Newton-Cotes

Dans la méthode dite de rang l , on subdivise $[a, b]$ en $l+1$ points équidistants (y compris a et b). Les coefficients λ_i sont choisis de façon que la formule soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à l . (On peut d'ailleurs montrer que, si l est pair, la formule est encore exacte pour les polynômes de degré $l+1$, d'où une préférence pour les méthode de rang pair). On approxime f par le polynôme de degré inférieur ou égal à l qui coïncide avec f en les $l+1$ points choisis.

EXEMPLES :

Les valeurs des λ_i sont données pour l'intervalle $[a, b] = [0, 1]$, auquel on peut se ramener par changement de variable.

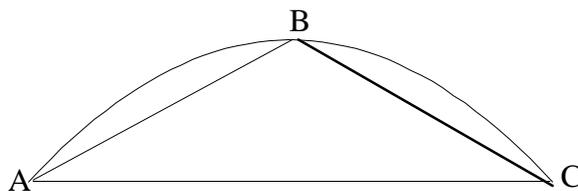
$l = 1$. On approxime f par une fonction affine. Il s'agit de la méthode des trapèzes. $\lambda_0 = \lambda_1 = \frac{1}{2}$

$l = 2$. On approxime f par une parabole, qui coïncide avec f en a , en b , et en $\frac{a+b}{2}$. $\lambda_0 = \lambda_2 = \frac{1}{6}$, $\lambda_1 = \frac{2}{3}$.

Il s'agit de la méthode de Simpson. A noter que la formule :

$$\int_a^b f(t) dt = (b-a) \left[\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b) \right]$$

est équivalente au fait que l'aire du segment de parabole est égale à $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle ABC, propriété de la parabole déjà connue d'Archimède.



La formule de Simpson est en fait exacte pour les polynômes de degré 3.

Sur une subdivision, on obtient la formule :

$$\frac{b-a}{6n} [f(a) + 4f(a_1) + 2f(a_2) + 4f(a_3) + 2f(a_4) + \dots + 4f(a_{2n-1}) + f(b)]$$

où $a_k = a + \frac{k(b-a)}{2n}$. L'erreur est majorée, pour f de classe C^4 , par $\frac{M(b-a)^5}{2880n^4}$, où M est un majorant de $|f^{(4)}|$.

$l = 4$. Il s'agit de la méthode de Boole–Villarceau. On approxime f par un polynôme de degré 4.

$$\lambda_0 = \lambda_4 = \frac{7}{90}, \lambda_1 = \lambda_3 = \frac{16}{45}, \lambda_2 = \frac{2}{15}$$

$l = 6$. Il s'agit de la méthode de Weddle–Hardy. On approxime f par un polynôme de degré 6.

$$\lambda_0 = \lambda_6 = \frac{41}{840}, \lambda_1 = \lambda_5 = \frac{9}{35}, \lambda_2 = \lambda_4 = \frac{9}{280}, \lambda_3 = \frac{34}{105}$$

Pour $l \geq 8$ apparaît des coefficients λ_i négatifs, ce qui les rend plus sensibles aux erreurs d'arrondis. Elles ne sont donc pas utilisées.

4– Méthodes de Gauss

w étant une fonction donnée, on considère :

$$\int_a^b f(t)w(t) dt$$

qu'on cherche à approximer par $\sum_i \lambda_i f(x_i)$. S'il y a $l+1$ points à choisir, il existe un choix unique tel

que la méthode soit exacte pour f polynomiale de degré $2l + 1$. Pour le même nombre de points, la méthode est donc plus précise que celle de Newton–Cotes. On montre que les x_i sont les racines du $l+1$ ^{ème} polynôme orthogonal pour le produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t) dt$$

On choisit souvent, sur $[-1, 1]$:

$w(x) = 1$, ce qui donne les polynômes de Legendre.

$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ce qui donne les polynômes de Tchebychev.

EXEMPLE : GAUSS–LEGENDRE

Voici un tableau donnant le polynôme de Legendre, ses racines x_i , les coefficients λ_i correspondants.

l	polynôme	x_i	λ_i
0	x	0	2
1	$x^2 - \frac{1}{3}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1, 1
2	$x^3 - \frac{3}{5}x$	$0, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$

3	$x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} \pm \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}$
---	---------------------------------------	--	---

GAUSS–TCHEBYCHEV :

On montre que les x_i et λ_i valent :

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2l+2}\pi\right) \quad \lambda_i = \frac{\pi}{l+1} \quad 0 \leq i \leq l$$

5– Divers

Voici également d'autres formules, sur $[-1,1]$:

$$\frac{46}{75}f(0) + \frac{26-6\sqrt{5}}{75}[f(x_1) + f(-x_1)] + \frac{26+6\sqrt{5}}{75}[f(x_2) + f(-x_2)]$$

avec $x_1 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ et $x_2 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$

6– Accélération de Richardson–Romberg

Considérons la méthode des rectangles avec un intervalle découpé en n . La valeur obtenue est notée $I(n)$. L'erreur est de l'ordre $\frac{1}{n}$. On accélère donc la convergence en supprimant ces termes. Il suffit pour cela de calculer $2I(2n) - I(n)$. On vérifiera que $2I(2n) - I(n)$ est égal à $J(n)$, obtenue par la méthode du point milieu, dont la vitesse de convergence est de l'ordre de $1/n^2$.

De même, si on accélère la méthode des trapèzes $T(n)$, en calculant $\frac{4T(2n) - T(n)}{3}$, qui élimine le terme en $\frac{1}{n^2}$, on obtient la méthode de Simpson. On peut évidemment itérer la méthode.

Annexe II : les intégrales de Riemann, de Lebesgue et de Kurzweil-Henstock

Nous avons introduit l'intégrale de Riemann d'une fonction par encadrement par des fonctions en escalier. On peut également trouver dans la littérature une autre définition possible de l'intégrale de Riemann, équivalente à celle que nous avons donnée, et utilisant les sommes de Riemann. La voici :

Une subdivision marquée D d'un intervalle $[a, b]$ est la donnée d'une subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ et pour chaque $[x_{i-1}, x_i]$, d'une valeur t_i dans cet intervalle. A cette

subdivision et à une fonction f , on associe la somme de Riemann $S_D = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$. La quantité

Max $\{x_i - x_{i-1}\}$ est appelé la pas de la subdivision. Une fonction f bornée sur un segment $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann ou R-intégrable, d'intégrale I , si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que, pour toute subdivision marquée D de pas inférieur à δ , on a :

$$|S_D - I| < \epsilon$$

Dans les sommes de Riemann $S_D = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ rencontrées précédemment, on majore les $x_i - x_{i-1}$

par une constante δ . L'idée de Kurzweil et Henstock est de remplacer cette constante par une fonction strictement positive δ , calculée au point t_i . Une subdivision marquée est plus fine que δ si, pour tout i , $x_i - x_{i-1} < \delta(t_i)$. Le lemme de Cousin, présenté dans le chapitre REELS montre que, pour

toute fonction δ , il existe des subdivisions marquées plus fines que δ . L'intégrale de Kurzweil et Henstock est définie comme suit :

Une fonction f bornée ou non sur un segment $[a, b]$ est intégrable au sens de Kurzweil et Henstock ou KH-intégrable, d'intégrale I , si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction strictement positive δ , telle que, pour toute subdivision marquée D plus fine que δ , on a :

$$|S_D - I| < \varepsilon$$

On constate que la différence de définition par rapport à l'intégrale de Riemann est minime. Cependant, la KH-intégrale est beaucoup plus puissante.

- Toute fonction R-intégrable est KH-intégrable avec la même intégrale. Mais la réciproque est fautive. La fonction de Dirichlet est KH-intégrable mais pas R-intégrable.
- f et $|f|$ sont KH-intégrables si et seulement si f est Lebesgue-intégrable. Nous n'avons pas donné de définition de l'intégrale de Lebesgue, mais cette propriété montre que la dite définition pourrait être ignorée au profit de la KH-intégrale.
- Si F est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors F' est KH-intégrable mais pas nécessairement R-intégrable et $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt$. Réciproquement, si f est KH-intégrable, on peut définir

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$. F est alors dérivable en tout point où f est continue, et $F'(t) = f(t)$ en un tel point.

- Il n'existe pas de KH-intégrale généralisée dans le sens où $\int_a^b f(t) dt = \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(t) dt$ pour une fonction définie sur un intervalle $]a, b]$. Si f est KH-intégrable sur $[a, b]$, alors elle l'est sur tout $[c, b]$ avec $c > a$ et les deux membres sont égaux (comme pour l'intégrale de Riemann : c'est la continuité de l'intégrale fonction de la borne inférieure). Mais inversement, si f est KH-intégrable sur tout $[c, b]$ avec $c > a$ et si le membre de droite existe, alors f est KH-intégrable sur $[a, b]$ et les deux membres sont égaux. Pour l'intégrale de Riemann, le membre de droite sert à définir le membre de gauche dans les cas dits impropres ou généralisés (cf cours de deuxième année)

Nous nous bornerons à considérer comme exemple la fonction de Dirichlet sur $[0, 1]$, valant 0 sur les irrationnels et 1 sur les rationnels. Cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann, car si Φ et Ψ sont des fonctions en escaliers vérifiant $\Phi \leq f \leq \Psi$, alors $\Phi \leq 0$ et $\Psi \geq 1$, de sorte que :

$$S = \text{Sup} \left\{ \int_0^1 \Phi(t) dt \mid \Phi \text{ en escalier et } \Phi \leq f \right\} = 0$$

$$I = \text{Inf} \left\{ \int_0^1 \Psi(t) dt \mid \Psi \text{ en escalier et } f \leq \Psi \right\} = 1$$

S et I ayant des valeurs différentes, l'intégrale de f n'est pas définie au sens de Riemann. Elle est pourtant définie au sens de Kurzweil et Henstock, et vaut 0. Pour cela, nous avons besoin de savoir que les rationnels peuvent être dénombrés et numérotés sous la forme $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ (cf ENSEMBLE.PDF - Annexe 1). Soit $\varepsilon > 0$. On définit $\delta(q_n) = \frac{\varepsilon}{2^n}$ et pour x irrationnel, $\delta(x) = 1$. Soit

une subdivision D définie par $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ marquée par des points t_i éléments de $[x_{i-1}, x_i]$

plus fine que δ . Dans la somme de Riemann associée $S_D = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$, seuls les t_i rationnels ont

une contribution puisque les t_i irrationnels vérifient $f(t_i) = 0$. D'où $S_D = \sum x_i - x_{i-1}$, la somme étant prise sur les indices i tels que t_i soient rationnels. Mais alors on a :

$$x_i - x_{i-1} < \delta(t_i) = \frac{\varepsilon}{2^n} \text{ pour le } n \text{ tel que } t_i = q_n.$$

Il en résulte que $0 \leq S_D = \sum x_i - x_{i-1} < \sum \frac{\varepsilon}{2^n}$, la dernière somme étant prise sur les indices n tels que q_n

soit égal à l'un des t_i . On peut majorer cette somme par $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$. On a ainsi prouvé

que :

$$|S_D - 0| < \varepsilon$$

et que la KH-intégrale de f est nulle.