DETERMINANTS

PLAN

I : Définition
- 1) Déterminant 2×2
- 2) Forme multilinéaire alternée
- 3) Déterminant 3×3
- 4) Déterminant $n \times n$

II : Calcul des déterminants :
- 1) Déterminant d'une matrice diagonale
- 2) Déterminant d'une matrice triangulaire
- 3) Déterminant de la transposée d'une matrice
- 4) Déterminant par blocs diagonaux
- 5) Développement par rapport à une colonne
- 6) Exemples de calculs
- 7) Déterminant d'un produit de matrices
- 8) Déterminant de l'inverse d'une matrice
- 9) Influence d'un changement de base

III : Applications des déterminants
- 1) Critère d'indépendance
- 2) Formules de Cramer
- 3) Inverse d'une matrice
- 4) Base directe et indirecte

Le corps $\mathbb{K}$ de référence considéré est un sous–corps de $\mathbb{C}$ (ou plus généralement, un corps) de caractéristique nulle. Il s'agit le plus souvent de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ eux–mêmes.

I : Définition

1–Déterminant 2×2

On cherche à quelle condition deux vecteurs de $\mathbb{K}^2$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont linéairement dépendants.

Si, par exemple $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ est non nul, il existe λ tel que :

$a = \lambda a'$
$b = \lambda b'$

D'où, en éliminant λ, $ab' - ba' = 0$. Inversement, si cette condition est réalisée, avec par exemple a non nul, on obtient :

$a' = a.a'/a$
$b' = b.a'/a$

On reconnaît dans la quantité $ab' - ba'$ le déterminant des deux vecteurs, noté $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$, déjà introoduit dans le chapitre *Géométrie élémentaire* qu'on trouvera dans le fichier GEOMELEM.PDF.
On parle aussi de déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$.

Les propriétés de l'application déterminant définie par $(V, V') \to \text{Det}(V,V')$ sont les suivantes :

i) Cette application est linéaire en V (V' fixé) et en V' (V fixé). Elle est dite bilinéaire.

ii) $\text{Det}(V,V') = -\text{Det}(V',V)$. Elle est dite alternée ou antisymétrique.

2– Forme multilinéaire alternée

Début de partie réservée aux MPSI

a) Considérons un espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et une application Φ de E^n dans $\mathbb{K}$. Cette application est dite multilinéaire si, pour tout V_1, V_2, ..., V_{i-1}, V_{i+1}, ... V_n, l'application portant sur la $i^{\text{ème}}$ composante V_i est linéaire ;

$$\Phi(V_1,\dots, \lambda V_i,\dots,V_n) = \lambda\Phi(V_1,\dots,V_i,\dots,V_n)$$
$$\Phi(V_1,\dots,V_i + V_i',\dots,V_n) = \Phi(V_1,\dots,V_i,\dots,V_n) + \Phi(V_1,\dots,V_i',\dots,V_n)$$

Ainsi le produit scalaire est bilinéaire. Le produit de n réels est multilinéaire. Plus généralement, le produit de n formes linéaires sur un espace vectoriel est une forme n–linéaire. En fait, la multilinéarité permet de développer une expression comme un produit.

On fera bien la différence entre application linéaire et multilinéaire. Dans le premier cas :

$$\Phi(\lambda V_1, \lambda V_2, \dots, \lambda V_n) = \lambda\Phi(V_1, V_2, \dots, V_n)$$
$$\Phi(V_1 + V_1', \dots, V_i + V_i', \dots, V_n + V_n') = \Phi(V_1, \dots, V_i, \dots, V_n) + \Phi(V_1', \dots, V_i', \dots, V_n')$$

alors que dans le second :

$$\Phi(\lambda V_1, \lambda V_2, \dots, \lambda V_n) = \lambda^n\, \Phi(V_1, V_2, \dots, V_n)$$
$$\Phi(V_1 + V_1', \dots, V_i + V_i', \dots, V_n + V_n') = \sum \Phi(W_1, \dots, W_i, \dots, W_n)$$

la somme étant prise sur tout les W, W_i décrivant le couple (V_i, V_i'). Il y a 2^n termes dans la somme.

b) Cette même application Φ est dite alternée ou antisymétrique si :

$$\forall\, i \neq j,\ \Phi(\dots,V_i,\dots,V_j,\dots) = -\Phi(\dots,V_j,\dots,V_i,\dots)$$

les autres variables restant égales.

PROPOSITION :

Soit Φ une forme multilinéaire. Φ est alternée si et seulement si :

$$\Phi(\dots,V_{i-1},V,V_{i+1},\dots,V_{j-1},V,V_{j+1},\dots) = 0$$

pour toute valeur des vecteurs et des indices i et j.

Démonstration :

Si Φ est alternée, en prenant $V_i = V_j = V$ dans la définition, on obtient le résultat demandé.
Inversement : Prenons $V = V_i + V_j$. En utilisant la multilinéarité, on obtient :

$$\Phi(\dots,V_i,\dots,V_i,\dots) + \Phi(\dots,V_i,\dots,V_j,\dots) + \Phi(\dots,V_j,\dots,V_i,\dots) + \Phi(\dots,V_j,\dots,V_j,\dots) = 0$$

qui se réduit à : $\Phi(\dots,V_i,\dots,V_j,\dots) + \Phi(\dots,V_j,\dots,V_i,\dots) = 0$. Ce qui prouve que Φ est alternée.

EXEMPLE : Cherchons les formes bilinéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension 2, de base (e_1, e_2). Posons $C = \Phi(e_1, e_2)$.

On a alors :

$$\Phi(ae_1 + be_2, a'e_1 + b'e_2) = aa'\Phi(e_1, e_1) + ab'\Phi(e_1, e_2) + ba'\Phi(e_2, e_1) + bb'\Phi(e_2, e_2)$$

en utilisant la multilinéarité

$\Rightarrow$ $\quad \Phi(ae_1 + be_2, a'e_1 + b'e_2) = \mathrm{C}(ab' - ba')$

en utilisant l'alternance.

Ainsi toutes les formes bilinéaires alternées sont proportionnelles au déterminant.

PROPOSITION :

Soit σ une permutation de n éléments. Alors :

$\Phi(\mathrm{V}_{\sigma(1)}, \mathrm{V}_{\sigma(2)}, \dots, \mathrm{V}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\, \Phi(V_1, V_2, \dots, V_n)$ *où* $\varepsilon(\sigma)$ *désigne la signature de* σ.

Démonstration :

Elle se fait immédiatement par récurrence sur le nombre de transpositions qui compose σ.

Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.

3– Déterminant 3 × 3

Soit (e_1, e_2, e_3) une base d'un espace vectoriel de dimension 3. Cherchons $\Phi(ae_1 + be_2 + ce_3, a'e_1 + b'e_2 + c'e_3, a''e_1 + b''e_2 + c''e_3)$, avec Φ trilinéaire alternée. Posons $\mathrm{C} = \Phi(e_1, e_2, e_3)$. On a alors :

$$\Phi(ae_1 + be_2 + ce_3, a'e_1 + b'e_2 + c'e_3, a''e_1 + b''e_2 + c''e_3) =$$
$$ab'c''\, \Phi(e_1,e_2,e_3) + ab''c'\, \Phi(e_1,e_3,e_2) + a'bc''\, \Phi(e_2,e_1,e_3) +$$
$$a'b''c\, \Phi(e_2,e_3,e_1) + a''bc'\, \Phi[e_3,e_1,e_2] + a''b'c\, \Phi[e_3,e_2,e_1]$$

Remarquons maintenant que :

$$\Phi(\mathrm{V},\mathrm{V}',\mathrm{V}'') = -\Phi(\mathrm{V}',\mathrm{V},\mathrm{V}'') = \Phi(\mathrm{V}',\mathrm{V}'',\mathrm{V}) = \dots\ \Phi(\mathrm{V}'',\mathrm{V},\mathrm{V}')$$

(Ceci est un cas particulier du résultat montré en 2°, relatif aux permutations).

On peut alors exprimer toutes les quantités en fonction de C. On obtient :

$$\Phi(ae_1 + be_2 + ce_3, a'e_1 + b'e_2 + c'e_3, a''e_1 + b''e_2 + c''e_3) =$$
$$(ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c)\mathrm{C}$$

On peut vérifier que la partie entre parenthèse est effectivement trilinéaire alternée. Il s'agit du déterminant 3 × 3. On le note $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$

4– Déterminant *n* × *n*

Début de partie réservée aux MPSI

Cherchons les formes n–linéaires alternées sur un espace de dimension n muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$.

On considère n vecteurs $\mathrm{V}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i$. On a :

$$\Phi(\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_n) = \Phi\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\, e_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}\, e_i\Big)$$
$$= \sum_{\sigma} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}\, \Phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

On ne garde dans la somme de droite que les termes pour lesquels $\sigma(1)$, ..., $\sigma(n)$ prennent des valeurs distinctes, les autres valeurs de Φ étant nulles. σ est donc une permutation de $\{1, ..., n\}$. Les termes restant peuvent s'exprimer en fonction de $\Phi(e_1, ..., e_n)$. On arrive à :

$$\Phi(V_1, ..., V_n) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}...a_{\sigma(n)n}\, \Phi(e_1, ..., e_n) \text{ où } \sigma \text{ décrit } \mathsf{S}_n.$$

Toute forme n–linéaire alternée est donc proportionnelle à la forme fondamentale : $\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}...a_{\sigma(n)n}$

Cette expression s'appelle déterminant des vecteurs $(V_1, ..., V_n)$ ou déterminant de la matrice (a_{ij}). On peut également parler de déterminant d'un endomorphisme, celui–ci étant égal au déterminant d'une matrice associée dans une base donnée. Le problème se pose de savoir si ce déterminant dépend de la base choisie, et sera examiné dans la partie III.

On peut vérifier que cette expression est effectivement n–linéaire alternée. Voici comment on peut montrer qu'elle est alternée :

$$\det(V_1, ..., V_n) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}...a_{\sigma(n)n}$$

$\det(V_1, ...\, V_{i-1}\,, V_j, V_{i+1}, ..., V_{j-1}, V_i, V_{j+1}, ..., V_n)$ se calcule en intervertissant les vecteurs V_i et V_j. On calcule la somme de termes de la forme $\varepsilon(\sigma)...\ a_{\sigma(i)j}\ ...\ a_{\sigma(j)i}$ ... (Les numéros de ligne sont les mêmes, mais on a permuté les numéros de colonnes). Posons τ la transposition échangeant i et j. Le terme en question s'écrit, en permutant les deux termes $a_{\sigma(i)j}$ et $a_{\sigma(j)i}$:

$$\varepsilon(\sigma)a_{\sigma\tau(1)1}...a_{\sigma\tau(i)i}...a_{\sigma\tau(j)j}...a_{\sigma\tau(n)n}$$

ou encore à $-\ \varepsilon(\sigma\tau)a_{\sigma\tau(1)1}...a_{\sigma\tau(i)i}...a_{\sigma\tau(j)j}...a_{\sigma\tau(n)n}$
car $\varepsilon(\tau) = -1$.

La somme est prise pour toute les valeurs de l'indice σ parcourant le groupe symétrique. Mais si l'on change d'indice, en prenant cette fois $\sigma\tau$, $\sigma\tau$ décrit également le groupe symétrique, et l'on reconnaît alors le déterminant initial, précédent du signe –. Le déterminant est bien alterné.

La formule proposée n'est guère pratique. Elle possède $n!$ termes. Nous verrons plus tard des moyens rapides de calculer cette expression.

Le déterminant se note $\begin{vmatrix} a11 & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$

Nous retiendrons que :

PROPOSITION :

Toute forme n–linéaire Φ alternée dans un espace de dimension n muni d'une base donnée $(e_1,...,e_n)$ est proportionnelle au déterminant des coefficients des vecteurs dans cette base. Le coefficient de proportionnalité est $\Phi(e_1, ..., e_n)$.

Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.

Dans toute la suite du chapitre, les étudiants de PCSI et de PTSI se limiteront au cas n = 2 ou n = 3, les démonstrations se faisant par calcul direct sur les expressions de ces déterminants. Les propos les concernant seront indiqués en bleu. Ils sauteront donc les démonstrations prévues pour le cas général et qui ne concernent que les étudiants de MPSI.

II : Calcul des déterminants

1– Déterminant d'une matrice diagonale

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

En effet, le seul terme non nul dans la définition du déterminant est obtenu pour $\sigma = \mathrm{Id}$.
En utilisant la multilinéarité, on en déduit que :

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_n$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3$$

2– Déterminant d'une matrice triangulaire

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & \dots & \dots \\ 0 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3$$

En effet, en utilisant la définition du déterminant, le seul terme de la somme $\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$ pouvant être non nul est celui pour lequel $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 2$, ..., $\sigma(n) = n$. $\sigma = \mathrm{Id}$ et $\varepsilon(\sigma) = 1$. Le résultat est identique si la matrice est triangulaire inférieure.

On se ramène à une matrice triangulaire au moyen des techniques suivantes :

i) Multiplier une colonne (ou une ligne) par λ multiplie le déterminant par λ

ii) Remplacer la colonne V_j par $V_j + \lambda V_k$ ne change pas la valeur du déterminant.

iii) Plus généralement, ajouter d'autres colonnes à une colonne donnée ne change pas la valeur du déterminant.

iv) Si l'une des colonnes ou l'une des lignes est nulle, le déterminant est nul.

v) Si deux colonnes ou deux lignes sont proportionnelles, le déterminant est nul.

vi) Si l'on permute deux colonnes ou deux lignes, le déterminant change de signe.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -2 & -8 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ en effectuant } \begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \end{cases}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & -8 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ en effectuant } C_2 \leftrightarrow C_3 \text{ et en mettant 2 en facteur}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ en effectuant } \begin{cases} C_3 \leftarrow C_3 + 5C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 8C_2 \end{cases}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{vmatrix} \text{ en effectuant } C_4 \leftarrow C_4 - \frac{4}{3}C_3$$

$$= 2 \times 1 \times 1 \times 3 \times \frac{2}{3} = 4$$

3– Déterminant de la transposée d'une matrice

PROPOSITION

$\det({}^tA) = \det(A)$

Démonstration :

(Faire un calcul direct pour $n = 2$ ou 3)

Nous utiliserons la définition du déterminant :

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

Le terme général du produit $a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$ est $a_{i\sigma(i)}$. Posons $\theta = \sigma^{-1}$. On a $a_{i\sigma(i)} = a_{\theta(j)j}$ en posant $\sigma(i) = j$. Quand i varie de 1 à n, il en est de même de j. La somme précédente est donc égale à :

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{\theta(1)1} \ldots a_{\theta(n)n}$$

Comme $\varepsilon(\theta) = \varepsilon(\sigma)$ et qu'à chaque σ correspond un et seul θ, on peut écrire :

$$\det({}^tA) = \sum_{\theta} \varepsilon(\theta)\, a_{\theta(1)1} \ldots a_{\theta(n)n}$$

qui n'est que l'expression du déterminant de A. Ainsi : $\det({}^tA) = \det(A)$. Cette propriété est importante car elle signifie que tout ce que nous disons ou dirons sur les colonnes d'un déterminant est également vrai pour les lignes. Par exemple, le déterminant est une forme multilinéaire alternée des lignes qui le composent.

4– Déterminant par blocs diagonaux

Début de partie réservée aux MPSI

Il s'agit de calculer un déterminant de la forme $D = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}$

où A est une matrice carrée $p \times p$, B une matrice carrée $(n-p) \times (n-p)$, C une matrice $p \times (n-p)$ et O la matrice $(n-p) \times p$ nulle.

Notons $V_1, \ldots, V_p$ les colonnes de A, constituées de p composantes, et considérons D comme une fonction $f(V_1, \ldots, V_p)$. Il n'est pas difficile de montrer que f est une forme p-multilinéaire alternée de $(V_1, \ldots, V_p)$. Par exemple, multiplier V_i par un scalaire λ revient dans D à multiplier par λ la colonne entière i (i.e. la colonne V_i de A et les zéros situés en dessous). En utilisant la linéarité de D par rapport à cette colonne, on peut mettre λ en facteur.

On utilise alors la propriété caractéristique des formes multilinéaires alternées :

$$f(V_1, \ldots, V_p) = \det(V_1, \ldots, V_p)\, f(e_1, \ldots, e_p)$$

où $e_1, \ldots, e_p$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$ pour conclure que :

$$D = \det(A) \begin{vmatrix} I_p & C \\ O & B \end{vmatrix}$$

avec I_p matrice identité.

On raisonne de même sur B, mais en considérant cette fois $\begin{vmatrix} I_p & C \\ O & B \end{vmatrix}$ comme forme $(n-p)$-linéaire des lignes de B, de sorte que l'on obtient :

$$\begin{vmatrix} I_p & C \\ O & B \end{vmatrix} = \det(B) \begin{vmatrix} I_p & C \\ O & I_{n-p} \end{vmatrix}$$

(On utilise les lignes de B et non les colonnes car on a besoin que les $n-p$ vecteurs utilisés dans B soient complétés par des 0 pour montrer le caractère multilinéaire alterné de la fonction de B, comme on l'a fait pour A avec les colonnes).

Enfin $\begin{vmatrix} I_p & C \\ O & I_{n-p} \end{vmatrix} = 1$ puisqu'il s'agit d'une matrice triangulaire à termes diagonaux égaux à 1.

On a donc bien $\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$

Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.

5– Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Début de partie réservée aux MPSI

Considérons $\det(V_1, ..., V_j, ..., V_n)$ où $V_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i$. On a, utilisant la multilinéarité et le caractère alterné du déterminant :

$$\det(V_1, ..., V_j, ..., V_n) = \det(V_1, ..., \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i, ..., V_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(V_1, ..., V_{j-1}, e_i, V_{j+1}, ..., V_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(V_1, ..., V_{j-1}, e_i, V_{j+1}, ..., V_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} \ldots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \ldots \\ & \ldots & & \ldots & \\ a_{i-11} \ldots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \ldots \\ a_{i1} \ldots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \ldots \\ a_{i+11} \ldots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \ldots \\ & \ldots & & \ldots & \\ a_{n1} \ldots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{ij} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & a_{i-11} \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots \\ 1 & a_{i1} \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots \\ 0 & a_{i+11} \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & a_{n1} \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots \end{vmatrix}$$

en permutant la colonne *j* avec toutes celles qui précèdent

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & a_{i1} \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots \\ 0 & a_{11} \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & a_{i-11} \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots \\ 0 & a_{i+11} \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & a_{n1} \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots \end{vmatrix}$$

en permutant la ligne *i* avec toutes celles qui précèdent

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots \\ & \dots & & \dots \\ a_{i-11} \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots \\ a_{i+11} \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots \\ & \dots & & \dots \\ a_{n1} \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots \end{vmatrix}$$

en remarquant qu'on avait un déterminant par blocs 1×1 et $(n-1) \times (n-1)$

Notons M_{ij} le déterminant $(n-1) \times (n-1)$ $\begin{vmatrix} a_{11} \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots \\ & \dots & & \dots \\ a_{i-11} \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots \\ a_{i+11} \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots \\ & \dots & & \dots \\ a_{n1} \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots \end{vmatrix}$. On remarque qu'il est constitué des lignes 1, 2, ..., $i-1$, $i+1$, ... n de la matrice initiale. Autrement dit, M est obtenu à partir du déterminant initial en supprimant la colonne *j* et la ligne *i*. Ce déterminant s'appelle mineur du terme (i,j). On a alors :

$$\det(V_1, \dots, V_j, \dots, V_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

La quantité $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ s'appelle cofacteur du terme (i,j), de sorte qu'on écrit également :

$$\det(V_1, \dots, V_j, \dots, V_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$ en développant par rapport à la troisième colonne

$= (4 + 2 - 2 - 2) - (-2 + 6 - 8 + 2) =$
$= 2 + 2 = 4$

On choisit évidemment de préférence des colonnes possédant un grand nombre de 0.

Comme $\det(A) = \det {}^tA$, le calcul peut se faire également en considérant les lignes. On développe suivant une ligne d'une manière analogue à une colonne.

Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.

6– Exemples de calculs

Début de partie réservée aux MPSI

Exemple 1 : Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{vmatrix} = D$$

On développe par rapport à la première colonne :

$$D = x\begin{vmatrix} x & -t & z \\ t & x & -y \\ -z & y & x \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} y & z & t \\ t & x & -y \\ -z & y & x \end{vmatrix} - z\begin{vmatrix} y & z & t \\ x & -t & z \\ -z & y & x \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} y & z & t \\ x & -t & z \\ t & x & -y \end{vmatrix}$$

$$= x\,[x^3 + x(t^2 + y^2 + z^2)] + y\,[y(x^2 + t^2 + z^2) + y^3] + z\,[z^3 + (t^2 + y^2 + x^2)z] + t[t(y^2 + x^2 + z^2) + t^3]$$
$$= x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2(x^2y^2 + x^2z^2 + x^2t^2 + y^2t^2 + y^2z^2 + z^2t^2)$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$$

Exemple 2 : Calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ n-2 & n-3 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On remarque que la colonne C_j s'obtient à partir de la colonne C_{j-1} de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} j-1 \\ j-2 \\ \dots \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ n-j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j-2 \\ j-3 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ n-j+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix}$$

$D = \det(C_1,\dots,C_n) = \det(C_1 - C_2, C_2 - C_3, \dots, C_{n-1} - C_n, C_n)$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & \dots & -1 & n-2 \\ & \dots & & \dots & \\ 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \det(C_1', \dots, C_n')$$

$= \det(C_1'-C_2', \dots, C_{n-2}'-C_{n-1}', C_{n-1}', C_n')$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & n-1 \\ 2 & 0 & 0 & \dots & -1 & n-2 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & -1 & n-3 \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.2^{n-2}.(n-1)$$

Exemple 3 : Calculer $D = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

On ajoute les deux dernières lignes à la première :

$$D = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

On retranche la première colonne aux autres :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Exemple 4 : Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne. On obtient :

$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ suite récurrente linéaire

En utilisant $D_1 = a+b$, $D_2 = a^2+b+b^2$ et donc $D_0 = 1$, on obtient :

si $a = b$: $D_n = (n+1)a^n$

si $a \neq b$: $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$

Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.

7– Déterminant d'un produit de matrices

PROPOSITION

Soient A et B deux matrices carrées. Alors det(AB) = det(A) × det(B)

Démonstration :

(Faire un calcul direct pour $n = 2$ ou 3)

Considérons A et B deux matrices $n \times n$. On peut les considérer comme les matrices de deux endomorphismes de $\mathbb{K}^n$, f et g. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de A est égale à $f(e_j)$; celle de B est égale à $g(e_j)$; celle de AB est égale à $f \circ g(e_j)$. La fonction définie par :

$\Phi(V_1, \dots, V_n) = \det(f(V_1), \dots, f(V_n))$

est une forme n–linéaire alternée. Elle est donc proportionnelle à $\det(V_1, \dots, V_n)$, le coefficient de proportionnalité étant $\Phi(e_1, \dots, e_n)$. On a donc :

$\Phi(V_1, \dots, V_n) = \Phi(e_1, \dots, e_n).\det(V_1, \dots, V_n)$

$\Leftrightarrow$ $\det(f(V_1), \dots, f(V_n)) = \det(f(e_1), \dots, f(e_n)).\det(V_1, \dots, V_n)$

Or $\det(f(e_1), ..., f(e_n))$ n'est autre que det(A). Ainsi :

$$\det(f(V_1), ..., f(V_n)) = \det(A).\det(V_1, ..., V_n)$$

Prenons maintenant $V_i = g(e_i)$. On obtient :

$$\det(f(g(e_1)), ..., f(g(e_n))) = \det(A).\det(g(e_1), ..., g(e_n))$$

Or $\det(f(g(e_1)), ..., f(g(e_n))) = \det(AB)$
et $\det(g(e_1), ..., g(e_n)) = \det(B)$

Ainsi *det(AB) = det(A).det(B)*

8– Déterminant de l'inverse d'une matrice

PROPOSITION

Soit A une matrice carrée inversible. Alors $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$

Soit A une matrice inversible. Si l'on applique en particulier ce qui a été prouvé précédemment à A et A^{-1}, on obtient :

$$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$$

or $AA^{-1} = I$ et $\det(I) = 1$.

Ainsi $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$

Nous montrerons plus loin qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Un sens de l'implication vient donc d'être montré.

9– Influence d'un changement de base

Soit E un espace vectoriel de dimension *n*, de base initiale $(e_1, ..., e_n)$. Notons $\det_e$ le déterminant relatif à cette base. Soit une nouvelle base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. Notons $\det_\varepsilon$ le déterminant relatif à cette nouvelle base. Soit P la matrice de passage de la base *e* à la base ε. Quel rapport y a–t–il entre $\det_e$ et $\det_\varepsilon$ et P ?

❑ <u>En ce qui concerne les vecteurs</u> $(V_1, ..., V_n)$. Notons (V_e) la colonne des composantes des V_i dans la base *e* et (V_ε) la matrice des composantes des V_i dans la base ε. On a : $(V_e) = P(V_\varepsilon)$. Donc :

$$\det_e(V) = \det(V_e) = \det(PV_\varepsilon) = \det(P)\det(V_\varepsilon) = \det(P)\det_\varepsilon(V)$$

Ainsi le déterminant d'une famille de vecteurs dépend de la base choisie. Parler de déterminant d'un système de vecteurs sans parler de base de référence est un non–sens. Dans $\mathbb{K}^n$, la base de référence est par défaut la base canonique.

Le déterminant reste inchangé si P est telle que det(P) = 1. L'ensemble des matrices de déterminant 1, muni du produit des matrices forme un sous–groupe du groupe des matrices inversibles, appelé groupe spécial $\mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$ (ou groupe unimodulaire).

❑ <u>En ce qui concerne les endomorphismes</u>, soit M la matrice associée à *f* dans la base *e*, et N la matrice associée à *f* dans la base ε. On a :

$$M = PNP^{-1} \text{ donc } \det(M) = \det(P)\det(N)\det(P^{-1}) = \det(N)$$

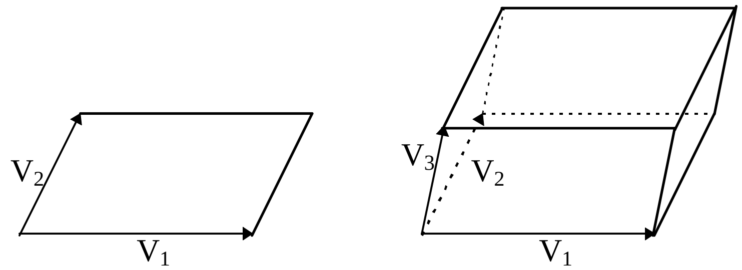
Ainsi, le déterminant d'une matrice associée à *f* ne dépend pas de la base choisie. On peut donc parler du déterminant de *f*, sans préciser la base. Les règles vues au 7) et 8) s'énoncent ici :

$$\det(f \circ g) = \det(f).\det(g)$$

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)} \text{ pour } f \text{ inversible.}$$

det est un morphisme de (L(E),o) (ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) dans ($\mathbb{K}$,.). C'est un morphisme de groupe de (GL(E),o) (ou $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$) dans ($\mathbb{K}$*,.). Le noyau de ce morphisme n'est autre que le groupe des endomorphismes (ou des matrices) de déterminant 1, le groupe spécial linéaire $\mathcal{SL}$(E) (ou $\mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$ pour les matrices).

❑ Interprétation géométrique :
Soit donné une base (e_1, ..., e_n). Alors le déterminant d'un système de vecteurs (V_1, ..., V_n) dans cette base s'interprète comme le volume (algébrique) du parallélépipède d'arêtes (V_1, ..., V_n), le volume unité étant défini comme celui du parallélépipède construit selon (e_1, ..., e_n). Le déterminant sera positif lorsque la base (V_1, ..., V_n) aura même orientation (voir plus bas) que la base (e_1, ..., e_n).



Cette application (V_1, ..., V_n) $\rightarrow$ volume(V_1, ..., V_n) est en effet multilinéaire et alternée. Elle est donc proportionnelle au déterminant. Valant 1 sur la base (e_1, ..., e_n), elle est égale au déterminant défini relativement à cette base. Le volume dépend évidemment de l'unité choisie pour le mesurer. De même, le déterminant d'un système de vecteurs dépend de la base dans lequel on le calcule.

Soit maintenant un endomorphisme *f*. Celui-ci transforme un système de vecteurs (V_1, ..., V_n) de volume det(V) (où V est la matrice des composantes des (V_1, ..., V_n) dans une base (e_1, ..., e_n)) en un système de vecteurs ($f(V_1)$, ..., $f(V_n)$), de volume det(MV) (où M est la matrice de *f* dans la base (e_1, ..., e_n)). On voit que det(*f*) = det(M) est le rapport des deux volumes. Autrement dit, det(M) est le facteur par lequel est multiplié le premier volume pour obtenir le second volume dans la transformation *f*. Si les volumes dépendent de l'unité choisie, il n'en est pas de même de leur rapport, qui est intrinsèque aux deux parallélépipèdes. C'est pourquoi le déterminant de *f*, rapport de deux volumes, ne dépend pas de la base choisie.

III : Applications des déterminants

1– Critère d'indépendance

PROPOSITION :

i) Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base (e_1, e_2, ..., e_n), et soit (V_1, V_2, ..., V_n) une famille de n vecteurs. Ces vecteurs forment un système libre si et seulement si det(V_1, ..., V_n) est non nul.

ii) Soit A une matrice $n \times n$. Alors A est inversible si et seulement si det(A) est non nul.

iii) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E, muni d'une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$. *Alors f est inversible si et seulement si det(f) est non nul.*

Ces trois propriétés sont en faite trois versions du même théorème. Prouvons le i).

<u>Démonstration</u> :
Si le système est libre, alors la matrice formée des coefficients est une matrice de rang n, donc inversible, et le déterminant d'une matrice inversible est non nul. Réciproquement, si le système est lié, alors l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres ; par exemple, $V_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i V_i$. Alors :

$$\det(V_1, ..., V_n) = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \det(V_i, V_2, ..., V_n)$$

et chaque déterminant de la somme de droite est nul, puisque V_i apparaît deux fois.

Début de partie réservée aux MPSI
EXEMPLE : Condition d'indépendance des vecteurs colonnes suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & & \ldots & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Le déterminant correspondant s'appelle déterminant de Vandermonde (1735-1796). Il s'agit d'un polynôme de n variables, dont tous les termes sont de degré global $\dfrac{(n-1)n}{2}$. On remarque qu'il se factorise par $(a_j - a_i)$ puisque, si $a_j = a_i$, il possède deux colonnes identiques. Or le produit des $(a_j - a_i)$, $i < j$, est lui–même un polynôme de degré $\dfrac{(n-1)n}{2.}$ Il est donc égal au déterminant de Vandermonde, à une constante près. Or les deux expressions possédant le terme $a_2a_3^2...a_n^{n-1}$, la constante est égale à 1. Ainsi, le déterminant est égal à $\prod_{i<j}(a_j - a_i)$. Il est donc nul si et seulement si il existe i et j distincts tels que $a_i = a_j$, autrement dit, s'il existe deux colonnes identiques. Cela donne aussi la condition de liaison des vecteurs.

On peut également procéder par récurrence sur n en considérant que le déterminant est un polynôme en a_n de degré n–1. Si les a_i sont distincts, ce polynôme s'annule en n–1 racines distinctes $a_n = a_1$, ..., $a_n = a_{n-1}$ et se factorise donc par $(a_n - a_1)...(a_n - a_{n-1})$, le coefficient dominant étant un Vandermonde de rang n–1.
Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.

2– Formules de Cramer
(On se limite à la dimension 2 ou 3 en PCSI)

Considérons un système de n équations à n inconnues $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $1 \leq i \leq n$. Soit A la matrice des coefficients (a_{ij}), V le vecteur de composantes (x_i) et B le vecteur de composantes (b_i). Le système est équivalent à AX = B. Il admet une solution unique si et seulement si A est inversible, c'est–à–

dire, si det(A) est non nul. Notons $(C_1, C_2, ..., C_n)$ les colonnes de la matrice A. Que vaut $\det(C_1, ...,C_{i-1}, B, C_{i+1}, ..., C_n)$? Remplaçons B par $\sum_{j=1}^{n} x_j C_j$ et utilisons le fait que le déterminant est multilinéaire alterné. On obtient $x_j.\det(A)$. On obtient ainsi les formules de Cramer :

$$x_j = \frac{\det(C_1, ...,C_{i-1}, B, C_{i+1}, ..., C_n)}{\det(A)}$$

Exemple : En dimension 2, on a :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Les solutions sont :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Mais en pratique, la méthode de Gauss est plus efficace pour résoudre un système.

3– Inverse d'une matrice

Début de partie réservée aux MPSI

Soit A une matrice carrée. Notons C_{ij} le cofacteur du terme a_{ij}. La matrice de terme général (C_{ij}) s'appelle comatrice de A. La méthode de développement de la colonne j permet d'écrire :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

On se pose la question suivante : pour $k \neq j$, que vaut $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{ij}$?

Cette somme est identique à la précédente, une fois que l'on a remplacé les termes a_{ij} par les termes a_{ik}. Il est donc égal au déterminant d'une matrice obtenue à partir de la matrice A en remplaçant la colonne j par la colonne k (cela ne modifie pas les cofacteurs C_{ij}, qui ne dépendent pas de a_{ij}). Mais alors, la nouvelle matrice obtenue possède deux colonnes identiques, la j et la k. Son déterminant est donc nul.

Ainsi : $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{ij} = \delta_{kj}.\det(A)$ où $\delta_{kj} = 1$ si $k = j$

$= 0$ si $k \neq j$

Les considérations précédentes permettent d'exprimer l'inverse d'une matrice à l'aide des cofacteurs. En effet, posons $b_{ij} = C_{ji}$. La matrice B est la transposée de la comatrice et $\sum_{i=1}^{n} b_{ji}\, a_{ik} C_{ij} = \delta_{kj} \det(A)$.

Cette égalité exprime le fait que BA = det(A) I

Si det(A) est non nul, A est inversible et son inverse est égale à la transposée de la comatrice, divisée par le déterminant de A. Cette méthode n'est cependant pas la plus rapide pour calculer l'inverse d'une matrice.

EXEMPLE : pour une matrice 2×2, l'inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est égale à $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI, PTSI.

4– Base directe et indirecte

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On pourra réfléchir aux questions suivantes :
– Quelle différence entre une droite et un axe ?
– Dans le plan, comment est défini le sens trigonométrique ?
– Quels sont les repères usuels utilisés pour les écrans d'ordinateurs (n° de lignes et de colonnes) ?
– Dans l'espace de dimension 3, comment est défini géométriquement le produit vectoriel ?
– Comment est fait un tire–bouchon ?
– Quel sens possède cette phrase (lue dans la revue *Pour La Science*) ? "La plupart des comètes se déplacent dans le sens trigonométrique par rapport au soleil."
– Comment distingue–t–on la gauche de la droite ?

On remarquera que, pour l'ensemble de ces questions, une convention *arbitraire* a été choisie, et qu'une autre convention, *et une seule autre*, aurait pu être préférée. On dira qu'il y a deux façons différentes d'orienter le plan ou l'espace. Cette situation est générale.

Considérons un espace vectoriel de dimension n, ($n = 2$ ou 3 en PCSI), muni d'une base *arbitraire* $(e_1, ..., e_n)$. Soit $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une autre base. La matrice de passage P de e à ε est inversible. Son déterminant est non nul. Ou bien det(P) > 0 et nous dirons que les deux bases définissent la même orientation de l'espace, ou bien det(P) < 0, et nous dirons que les deux bases définissent des orientations différentes de l'espace.

Il n'y a que deux orientations possibles. En effet, soit (e) une base, (e') et (e'') deux autres bases ayant une orientation différente de celle de (e). Montrons que (e') et (e'') ont même orientation. On a en effet $\begin{cases} \det(P_{ee'}) < 0 \\ \det(P_{e''e}) < 0 \end{cases} \Rightarrow \det(P_{e''e'}) = \det(P_{e''e}P_{ee'}) > 0$

Le choix (arbitraire) d'une de ces deux orientations définit une orientation de l'espace de dimension n. Les bases de cette classe sont dites directes, les bases de l'autre classe sont dites indirectes. Il n'existe aucun moyen de privilégier une base par rapport à l'autre.

Voici quelques notions mathématiques ou physiques dépendant de l'orientation de l'espace de dimension 2 ou 3 :
– La définition du sens trigonométrique
– Le produit vectoriel
– Le champ magnétique ***B*** (le vecteur ***B***, dépendant de l'orientation, est dit axial)
– Le moment cinétique $m\mathbf{OM} \wedge \mathbf{V}$ et le moment dynamique $m\mathbf{OM} \wedge \mathbf{a}$
– Le moment d'un dipôle magnétique (petite boucle de circuit de surface S parcourue par un courant I. $\mu = I\mathbf{S}$ où ***S*** est orienté orthogonalement à la boucle en fonction du sens du circuit.
– Les couples
– Les vecteurs de rotation
– Le rotationnel

Voici quelques notions n'en dépendant pas :
– L'orthogonalité
– Le gradient, la divergence
– Le champ électrique ***E*** (Le vecteur ***E***, ne dépendant pas de l'orientation, est dit polaire)
– Les forces, vitesses et accélérations

EXEMPLE D'APPLICATIONS

De même qu'il existe en physique la notion d'homogénéité des unités, permettant de tester rapidement la validité d'une formule, il existe également la notion d'homogénéité du caractère axial ou polaire des vecteurs. Ci-dessous, les vecteurs axiaux sont en rouge, les vecteurs polaires en bleus. Nous notons également en rouge les produits vectoriels. On a alors :

Vecteur axial = Vecteur polaire $\wedge$ Vecteur polaire
Vecteur polaire = Vecteur polaire $\wedge$ Vecteur axial
Vecteur axial = Vecteur axial $\wedge$ Vecteur axial

On a également, concernant le rotationnel :

Rot Vecteur polaire = Vecteur axial
Rot Vecteur axial= Vecteur polaire

❑ Force électrostatique $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$: égalité de deux vecteurs polaires

❑ $\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\,V$: égalité de deux vecteurs polaires

❑ $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ (force de Lorentz) ou $d\mathbf{F} = i d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$ (force de Laplace) : égalité de deux vecteurs polaires. $q\mathbf{v}$ ou $i d\mathbf{l}$ sont polaires, ***B*** est axial, mais le produit vectoriel des deux est polaire. Ainsi, si un des membres est un vecteur polaire et si l'autre membre contient un vecteur axial et si le résultat est polaire, il faudra nécessairement qu'intervienne un produit vectoriel.

❑ $d\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{i d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u}}{r^2}$ (loi de Biot et Savart) : égalité de deux vecteurs axiaux.

❑ $\mathbf{C} = \boldsymbol{\mu} \wedge \mathbf{B}$ (couple s'appliquant sur un dipôle magnétique plongé dans un champ magnétique) : égalité de deux vecteurs axiaux.

❑ L'orientation peut également s'appliquer à des quantités scalaires. On parle alors de pseudo-scalaires dont le signe dépend du choix arbitraire de l'orientation :

$$\int_\Gamma \mathbf{B}.d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_D \mathbf{J}.d\mathbf{S} \text{ (Théorème d'Ampère)}$$

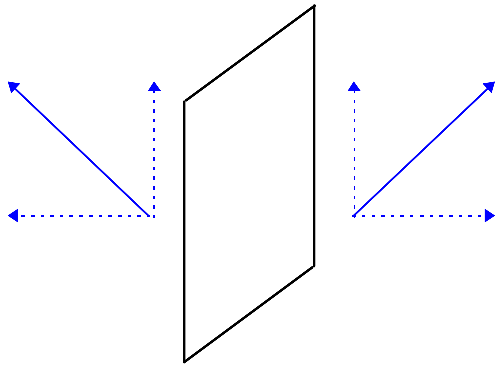
❑ $\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (une des équations de Maxwell) : égalité entre deux vecteurs axiaux

❑ $\dfrac{1}{\mu_0}\mathbf{rot}\,\mathbf{B} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (une autre équation de Maxwell) : égalité entre deux vecteurs polaires

❑ $\mathbf{C} = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}$ (couple créé en M par une force ***F*** par rapport à O) : égalité de deux vecteurs axiaux

❑ $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}$ (vitesse d'un point M tournant par rapport à O à la vitesse angulaire Ω) égalité de deux vecteurs polaires.

Le fait qu'une réflexion S (symétrie par rapport à un plan en dimension 3, ou plus généralement par rapport à un hyperplan en dimension quelconque) transforme une base directe en base indirecte et intervertit donc l'orientation de l'espace a des conséquences importantes sur les vecteurs polaires et les vecteurs axiaux. Un vecteur polaire est un "vrai" vecteur ; il sera donc symétrisé comme on s'y attend : sa composante parallèle au plan de symétrie sera invariante, sa composante orthogonale à ce plan sera changée de signe.



Mais un vecteur axial n'est pas un "vrai" vecteur. Il est défini par exemple comme produit vectoriel de deux vecteurs polaires $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. Or, si l'on décompose chacun de ces vecteurs en une composante parallèle au plan et une composante orthogonale, on a :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{/\!/} + \boldsymbol{u}_{\perp} \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{/\!/} + \boldsymbol{v}_{\perp} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}_{/\!/} + \boldsymbol{u}_{\perp}) \wedge (\boldsymbol{v}_{/\!/} + \boldsymbol{v}_{\perp})$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{u}_{/\!/} \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/}}_{\text{ortho-gonal au plan}} + \underbrace{\boldsymbol{u}_{\perp} \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/} + \boldsymbol{u}_{\perp} \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/}}_{\text{paralallèle au plan}} \text{ (en tenant compte du fait que } \boldsymbol{u}_{\perp} \wedge \boldsymbol{v}_{\perp} = 0)$$

On vérifiera alors que S($\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$) est différent de S($\boldsymbol{u}$) $\wedge$ S($\boldsymbol{v}$). En effet :

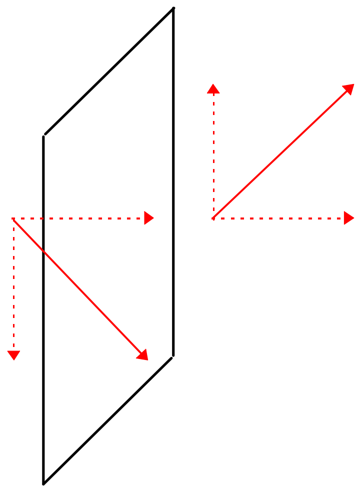
$$S(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = -\,\boldsymbol{u}_{/\!/} \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/} + \boldsymbol{u}_{\perp} \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/} + \boldsymbol{u}_{\perp} \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/}$$

alors que

$$S(\boldsymbol{u}) \wedge S(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}_{/\!/} - \boldsymbol{u}_{\perp}) \wedge (\boldsymbol{v}_{/\!/} - \boldsymbol{v}_{\perp})$$

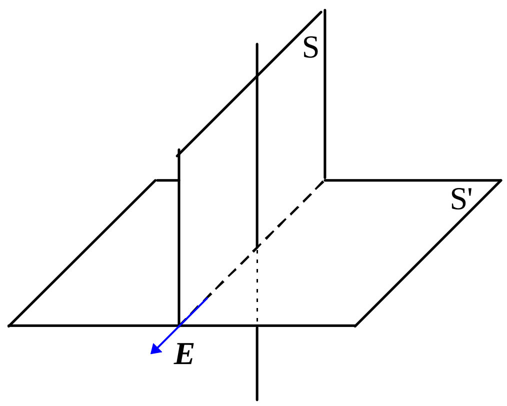
$$= \boldsymbol{u}_{/\!/} \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/} - \boldsymbol{u}_{\perp} \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/} - \boldsymbol{u}_{\perp} \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/} = -\,S(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})$$

En physique, si l'on souhaite utiliser les symétries d'un système tout en gardant la même orientation de l'espace, on est amené à considérer que $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est transformé en S($\boldsymbol{u}$) $\wedge$ S($\boldsymbol{v}$) et on est conduit à la règle suivante : *La composante du vecteur axial orthogonale au plan est invariante, la composante parallèle est changée en son opposée*. Ce sera le cas du vecteur champ magnétique $\boldsymbol{B}$ par exemple.

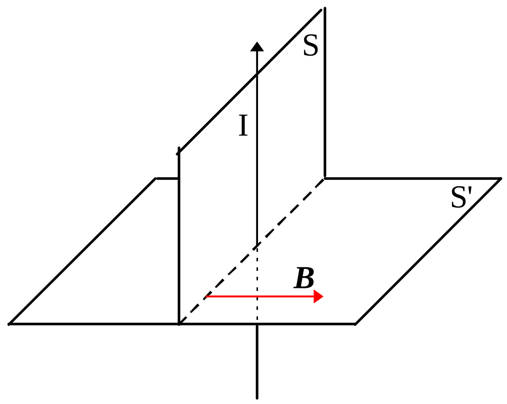


EXEMPLES :

❑ Considérons un fil rectiligne uniformément chargé. Soit S une symétrie par rapport à un plan contenant le fil. Le système reste invariant par S. Il en est donc de même du champ électrique (polaire) ***E*** créé par le fil. ***E*** est contenu dans le même plan que le fil. Soit S' une symétrie par rapport à un plan orthogonal au fil. Le système reste également invariant par S'. Il en est donc de même de ***E***. ***E*** est donc également contenu dans ce plan. La seule possibilité est que ***E*** soit radial.



❑ Considérons un fil rectiligne parcouru par un courant I. Soit S une symétrie par rapport à un plan contenant le fil. Le système reste invariant par S. Il en est donc de même du champ magnétique (axial) ***B*** créé par le fil. Mais pour un vecteur axial, cela signifie que ***B*** est orthogonal à ce plan. On peut retrouver ce résultat par l'autre symétrie S' par rapport à un plan orthogonal au fil. Dans cette symétrie, le sens du courant est inversé. Il en est de même de ***B***. Mais pour un vecteur axial, cela signifie qu'il est parallèle au plan considéré.



❑ Considérons un cercle uniformément chargé. Que peut-on dire du champ électrique créé en un point M de l'espace ? Si on considère un plan contenant le fil et passant par M, le système est invariant par la symétrie par rapport à ce plan. Donc ***E*** est contenu dans le plan.

❑ Considérons un cercle parcouru par un courant I. Que peut-on dire du champ magnétique créé en un point M de l'espace ? Si on considère un plan contenant le fil et passant par M, le sens du courant est inversé par la symétrie par rapport à ce plan. Il en est de même de ***B***, qui, étant axial, doit également être contenu dans le plan.