Bibliothèque d'exercices

version 4, octobre 2003

recueil réalisé par Arnaud Bodin

Introduction

Afin de faciliter le travail de tous, voici la quatrième version de ce recueil d'exercices. L'esprit n'a pas changé : simplifier le concoctage des feuilles d'exercices par un simple «copier-coller». Je n'ai pas saisi tous les exercices, loin de là, je remercie vivement les «gros» contributeurs :

- Éliane Cousquer ;
- François Gourio ;
- Pierre-Yves Legall ;
- Pascal Ortiz ;
- Franz Ridde.

Sans oublier tous ceux qui m'ont fourni leurs feuilles d'exercices : Jean-François Barraud, Cécile Drouet, Cornélia Drutu, Olivier Gineste, Vincent Guirardel, Jean-Marc Hécart, Arnaud Hilion, Jean-Marie Lescure, Isabelle Liousse, Sylvain Maillot, Nicolas Marco, Bertrand Monthubert, Nadja Rebinguet, Sandrine Roussel, Marie-Helène Vignal. Qu'ils et elles en soient tous remerciés.

La «bibliothèque» s'agrandie encore : environ 2000 exercices. Les fichiers sources sont disponibles en LaTeX, et récupérables à l'adresse suivante :

`http ://www-gat.univ-lille1.fr/~bodin/`

Sur ce site, une page permet de récupérer les exercices qui vous intéressent en saisissant leur numéro. Certains exercices sont corrigés (environ 15%), cependant afin des sauver quelques arbres les corrections ne sont pas incluses dans cette version papier. Bien sûr lorsque vous récupérez des exercices pour faire une feuille de TD les corrections existantes sont automatiquement ajoutées en fin de feuille.

Vous pouvez contribuer à ce recueil en m'envoyant vos fichiers :

`Arnaud.Bodin@agat.univ-lille1.fr`

Donc n'hésitez pas à taper vos feuilles et corrections, ce sera fait une fois pour toutes et pour tous !

Arnaud Bodin

Sommaire

Première partie
ALGÈBRE 1

1 Nombres complexes

1.1 Forme cartésienne, forme polaire

Exercice 1 Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 2 Écrire les nombres complexes suivants sous la forme $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$:

$$\frac{5+2i}{1-2i} \quad ; \quad \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad ; \quad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

Exercice 3 Écrire sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

[Exercice corrigé]

Exercice 4 Placer dans le plan cartésien, les points d'affixes suivantes : $z_1=i,\quad z_2=1+i,\quad z_3=-2+$

Exercice 5 Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $a+ib$, $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.

$$\frac{-2}{1-i\sqrt{3}},\ \frac{1}{(1+2i)(3-i)},\ \frac{1+2i}{1-2i},\ \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 6
1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $z_1=3+3i$, $z_2=-1-\sqrt{3}i$, $z_3=-\frac{4}{3}i$, $z_4=-2$, $z_5=e^{i\theta}+e^{2i\theta}$.
2. Calculer $(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^{2000}$.

Exercice 7 Effectuer les calculs suivants :

1. $(3+2i)(1-3i)$.
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.
3. $\frac{3+2i}{1-3i}$.
4. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

[Exercice corrigé]

Exercice 8 Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leurs conjugués :

1. $1+i(1+\sqrt{2})$.
2. $\sqrt{10+2\sqrt{5}}+i(1-\sqrt{5})$.

3. $\frac{\tan\varphi - i}{\tan\varphi + i}$ où φ est un angle donné.

[Exercice corrigé]

Exercice 9 Représenter sous forme trigonométrique les nombres :

$$1+i \quad ; \quad 1+i\sqrt{3} \quad ; \quad \sqrt{3}+i \quad ; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

Exercice 10 Établir les égalités suivantes :

1. $(\cos(\pi/7)+i\sin(\pi/7))(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(1+i) = \sqrt{2}(\cos(5\pi/84)+i\sin(5\pi/84))$,
2. $(1-i)(\cos(\pi/5)+i\sin(\pi/5))(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}(\cos(13\pi/60)+i\sin(13\pi/60))$,
3. $\frac{\sqrt{2}(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 11 Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1-i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 12 Écrire sous la forme partie réelle-partie imaginaire, puis sous la forme module-argument le nombre complexe :

$$\left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2.$$

Exercice 13 Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta}+e^{2i\theta}.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 14 Déterminer le module et l'argument de $\frac{1+i}{1-i}$. Calculer $(\frac{1+i}{1-i})^{32}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 15 Calculer $Z = (1+i\sqrt{3})^{2000}$.

Exercice 16 Calculer $(1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$ et $(1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$.

Exercice 17 Calculer le module et l'argument de $z = \frac{1}{1+i\tan\alpha}$.

Exercice 18 Calculer les puissances n-ièmes des nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \quad ; \quad z_2 = 1+j \quad ; \quad z_3 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}.$$

Exercice 19 Comment choisir l'entier naturel n pour que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit un réel ? un imaginaire ?

Exercice 20 Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ, et soit $\overline{z}$ son conjugué. Calculer $(z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)\dots(z^n+\overline{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

[Exercice corrigé]

Exercice 21 (partiel novembre 88) Soient α et β deux nombres réels. Mettre le nombre complexe $z = e^{i\alpha}+e^{i\beta}$ sous forme trigonométrique $z = \rho e^{i\gamma}$ (indication : poser $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$).

En déduire la valeur de

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \cos[p\alpha + (n-p)\beta].$$

[Exercice corrigé]

Exercice 22 Écrire l'expression $(1+\cos\phi+i\sin\phi)$ sous forme trigonométrique. En déduire l'expression de $(1+\cos\phi+i\sin\phi)^n$.

Exercice 23 Mettre sous forme trigonométrique $1+e^{i\theta}$ où $\theta\in]-\pi,\pi[$. Donner une interprétation géométrique.
[Exercice corrigé]

Exercice 24 Montrer que si $|z|\leqslant k<1$ alors $1-k\leqslant|1+z|\leqslant 1+k$. Faire un dessin et montrer qu'il peut y avoir égalité.

Exercice 25 Montrer algébriquement et géométriquement que si $|z|=1$ alors $|1+z|\geqslant 1$ ou $|1+z^2|\geqslant 1$.

Exercice 26 Résoudre l'équation $\exp(z)=\sqrt{3}+3i$.

1.2 Racines carrées, équation du second degré

Exercice 27 Calculer les racines carrées de 1, i, $3+4i$, $8-6i$, et $7+24i$.
[Exercice corrigé]

Exercice 28 Trouver les racines carrées de $3-4i$ et de $24-10i$.
[Exercice corrigé]

Exercice 29
1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

[Exercice corrigé]

Exercice 30 Montrer que les solutions de $az^2+bz+c=0$ avec a, b, c réels, sont réelles ou conjuguées.
[Exercice corrigé]

Exercice 31 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ; \quad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad ;$$
$$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0\ ;\ z^2-(3+4i)z-1+5i=0\ ;\ 4z^2-2z+1=0\ ;$$
$$z^4+10z^2+169=0 \quad ; \quad z^4+2z^2+4=0.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 32 Trouver les racines complexes de l'équation suivante :

$$x^4-30x^2+289=0.$$

Exercice 33 Pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{2i\}$, on pose

$$f(z)=\frac{2z-i}{z-2i}.$$

1. Résoudre l'équation $z^2=i$, $z\in\mathbb{C}$.
2. Résoudre l'équation $f(z)=z$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{2i\}$.

Exercice 34 On note $j=e^{\frac{2\pi}{3}}$.
1. Mettre j et j^2 sous forme algébrique.
2. Vérifier que $1+j+j^2=0$.

3. Factoriser le polynôme $z^3 - 8i$.

Exercice 35 1. Calculer les racines carrées de $1+i$, $7+24i$, i, $5+12i$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

2. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $z^2 + z + 1 = 0$
   (b) $z^2 + z - 2 = 0$
   (c) $z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$
   (d) $z^2 + 4z + 5 = 0$
   (e) $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$
   (f) $z^4 - (1-i)z^2 - i = 0$
   (g) $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - 15 = 0$

Exercice 36 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - (11-5i)z + 24 - 27i = 0$.
2. $z^3 + 3z - 2i = 0$.

[Exercice corrigé]

Exercice 37 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$z^2 - (1+a)(1+i)z + \left(1+a^2\right)i = 0,$$

où a est un paramètre réel.

1. Calculer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ les solutions z_1 et z_2 de (E) (indication : on pourra déterminer les racines carées complexes de $-2i(1-a)^2$).
2. On désigne par Z_1 (resp. Z_2) les points du plan complexe d'affixe z_1 (resp. z_2) et par M le milieu de $[Z_1, Z_2]$. Tracer la courbe du plan complexe décrite par M lorsque a varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 38 1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\alpha)z + 1 = 0$. En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation :

$$z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1 = 0, \text{ où } n \text{ est un entier naturel non nul.}$$

$$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1.$$

(a) Justifier la factorisation suivante de P_α :

$$P_\alpha(z) = \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + 1\right)\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + 1\right)\ldots\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right.$$

(b) Prouver, à l'aide des nombres complexes par exemple, la formule suivante :

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

(c) Calculer $P_\alpha(1)$. En déduire

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{\pi}{n}\right)\ldots\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}.$$

2. Pour tout α appartenant à $]0,\pi[$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose :

$$H_n(\alpha) = \sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{2\pi}{n}\right)\dots\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

   (a) Montrer que, pour tout α non nul, on a :

$$2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2n)}.$$

   (b) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\dots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

1.3 Racine n-ième

Exercice 39 1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $|1+iz| = |1-iz|$.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles. Trouver alors les solutions.
Calculer les racines cubiques de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 40 Pour tout nombre complexe Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.

1. Factoriser $P(Z)$ et en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(Z) = 0$.
2. Déduire de 1. les solutions de l'équation d'inconnue z :

$$((2z+1)/(z-1))^4 = 1$$

Exercice 41 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4 = (1-i)/\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

Exercice 42 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \frac{1}{4}(-1+i)$ et montrer qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.
[Exercice corrigé]

Exercice 43 Trouver les racines cubiques de $2-2i$ et de $11+2i$.
[Exercice corrigé]

Exercice 44 Calculer $\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{5\pi}{12}$. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^{24} = 1$.
[Exercice corrigé]

Exercice 45 Trouver les racines quatrièmes de 81 et de -81.
[Exercice corrigé]

Exercice 46 1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout nombre $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$(z-1)\left(1+z+z^2+...+z^{n-1}\right) = z^n - 1,$$

et en déduire que, si $z \neq 1$, on a :

$$1+z+z^2+...+z^{n-1} = \frac{z^n-1}{z-1}.$$

2. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(ix) - 1 = 2i \exp\left(\frac{ix}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ la somme :

$$Z_n = 1 + \exp(ix) + \exp(2ix) + ... + \exp((n-1)ix),$$

et en déduire les valeurs de

$$\begin{array}{rcl} X_n & = & 1 + \cos(x) + \cos(2x) + ... + \cos((n-1)x) \\ Y_n & = & \sin(x) + \sin(2x) + ... + \sin((n-1)x). \end{array}$$

[Exercice corrigé]

Exercice 47 Calculer la somme $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$.
[Exercice corrigé]

Exercice 48
1. Résoudre $z^3 = 1$ et montrer que les racines s'écrivent 1, j, j^2. Calculer $1 + j + j^2$ et en déduire les racines de $1 + z + z^2 = 0$.
2. Résoudre $z^n = 1$ et montrer que les racines s'écrivent $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1}$. En déduire les racines de $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$. Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $1 + \varepsilon^p + \varepsilon^{2p} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)p}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 49 Résoudre dans $\mathbb{C}$:
1. $z^5 = 1$.
2. $z^5 = 1 - i$.
3. $z^3 = -2 + 2i$.
4. $z^5 = \bar{z}$.

Exercice 50
1. Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et de $1 + i$.
2. Résoudre $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les racines de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 51 Soit ε une racine n-ième de l'unité ; calculer

$$S = 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1}.$$

Exercice 52 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(z + 1)^n = (z - 1)^n$.

Exercice 53 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^n = \overline{z}$ où $n \geqslant 1$.

Exercice 54 Résoudre les équations suivantes :

$$z^6 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \quad ; \quad z^4 = \frac{1 - i}{1 + i\sqrt{3}}.$$

Exercice 55 Résoudre $z^6 + 27 = 0$. ($z \in \mathbb{C}$)

Exercice 56 (partiel novembre 91)
1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube.
   Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.
2. Donner, sous forme polaire, les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

$$z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0.$$

(Indication : poser $Z = z^3$; calculer $(9 + i)^2$)

[Exercice corrigé]

Exercice 57 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $27(z-1)^6+(z+1)^6=0$.

Exercice 58 Déterminer les racines quatrièmes de $-7-24i$.

Exercice 59 Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta^7=1$ et $\beta \neq 1$. Montrer

$$\frac{\beta}{1+\beta^2}+\frac{\beta^2}{1+\beta^4}+\frac{\beta^3}{1+\beta^6}=-2$$

1.4 Géométrie

Exercice 60 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\left|\frac{z-3}{z-5}\right|=1,$
2. $\left|\frac{z-3}{z-5}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

[Exercice corrigé]

Exercice 61

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) $(z-2)/(z-1)=i$. On donnera la solution sous forme algébrique.
2. Soit M, A, et B les points d'affixes respectives $z, 1, 2$. On suppose que $M \neq A$ et que $M \neq B$. Interpréter géométriquement le module et un argument de $(z-2)/(z-1)$ et retrouver la solution de l'équation (1).

Exercice 62 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par

$$M(x,y) \mapsto x+iy=z,$$

où z est appelé l'affixe de M. Soit $f : P \operatorname{rg} P$ qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe $z'=\frac{z-i}{z+i}$.

1. Sur quel sous ensemble de P, f est-elle définie ?
2. Calculer $|z'|$ pour z affixe d'un point M situé dans le demi plan ouvert
$$H := \{M(x,y) \in P \mid y>0.\}?$$
3. En déduire l'image par f de H.

Exercice 63 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et on identifie P à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par

$$M(x,y) \mapsto x+iy=z,$$

où z est appelé l'affixe de M. Soit $g : P \operatorname{rg} P$ qui à tout point M d'fixe $z \neq -1$ associe $g(M)$ d'affixe $z'=\frac{1-z}{1+z}$.

1. Calculer $z'+\bar{z}'$ pour $|z|=1$.
2. En déduire l'image du cercle de rayon 1 de centre 0 privé du point de coordonnées $(-1,0)$ par l'application g.

Exercice 64 Soit C la courbe d'équation $x^2-xy+y^2=0$ dans le plan P rapporté à un repère orthonormé.

1. La courbe C a-t-elle des points d'intersection avec le rectangle ouvert R dont les sommets sont :

$$\begin{aligned} A &= (-3,2) \\ B &= (4,2) \\ C &= (4,-1) \\ D &= (-3,-1). \end{aligned}$$

2. Même question pour le rectangle fermé R' de sommets :

$$\begin{aligned} A' &= (-1,4) \\ B' &= (2,4) \\ C' &= (2,1) \\ D' &= (-1,1). \end{aligned}$$

Exercice 65 Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$. Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1$.
[Exercice corrigé]

Exercice 66 Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = k$ ($k > 0$, $k \neq 1$). Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k$.
[Exercice corrigé]

Exercice 67
1. Soit A, B, C trois points du plan complexe dont les affixes sont respectivement a, b, c. On suppose que $a+jb+j^2c = 0$; montrer que ABC est un triangle équilatéral (j et j^2 sont les racines cubiques complexes de 1 — plus précisément $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$). Réciproque ?
2. ABC étant un triangle équilatéral direct du plan complexe, on construit les triangles équilatéraux directs BOD et OCE, ce qui détermine les points D et E (O est l'origine du plan complexe). Quelle est la nature du quadrilatère $ADOE$? Comparer les triangles OBC, DBA et EAC.

[Exercice corrigé]

Exercice 68 Soit H une hyperbole équilatère de centre O, et M un point de H. Montrer que le cercle de centre M qui passe par le symétrique de M par rapport à O recoupe H en trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.
Indications : en choisissant un repère adéquat, H a une équation du type $xy = 1$, autrement dit en identifiant le plan de H au plan complexe, $z^2 - \bar{z}^2 = 4i$. En notant a l'affixe de M, le cercle a pour équation $|z-a|^2 = 4a\bar{a}$. On pose $Z = z - a$ et on élimine $\bar{Z}$ entre les équations du cercle et de l'hyperbole. En divisant par $Z + 2a$ pour éliminer la solution déjà connue du symétrique de M, on obtient une équation du type $Z^3 - A = 0$.

Exercice 69 Montrer que pour $u, v \in \mathbb{C}$, on a $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.
[Exercice corrigé]

Exercice 70 Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z') = \frac{\pi}{2}$.
1. Montrer que $z\overline{z'} + \overline{z}z' = 0$.
2. Montrer que $|z+z'|^2 = |z-z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2$.

Exercice 71 1. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que : $\overline{z}(z-1)=z^2(\overline{z}-1)$.

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que les images de 1, z, $1+z^2$ soient alignées.

Exercice 72 Soit $s=(1-z)(1-iz)$.

1. Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes z tel que s soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes z tel que s soit imaginaire pur.

Exercice 73 1. Soit A un point du plan d'affixe $\alpha=a+ib$. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z|^2=\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z$.

2. Quelles conditions doivent vérifier les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2 pour que $\frac{z_1}{z_2}$ soit réel ?
3. Déterminer les nombres complexes z tels que les points du plan complexe d'affixes z, iz, i forment un triangle équilatéral.
4. Soit $z=a+ib$, mettre l'expression $\frac{z-1}{z+1}$ sous forme $A+iB$, . Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z telle que l'argument de $\frac{z-1}{z+1}$ soit $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 74 Déterminer les nombres complexes z tels que le triangle ayant pour sommets les points d'affixes z, z^2, z^3 soit rectangle au point d'affixe z.

Exercice 75 Déterminer les nombres complexes $z\in\mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes $z, \frac{1}{z}$ et $(1-z)$ soient sur un même cercle de centre O.

Exercice 76 Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système :

$$|z-1|\leqslant 1, |z+1|\leqslant 1.$$

Exercice 77 (Comment construire un pentagone régulier ?) Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonorm'e $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1. Donner les affixes $\omega_0, \dots, \omega_4$ des points $A_0, \dots, A_4$. Montrer que $\omega_k={\omega_1}^k$ pour $k\in\{0,1,2,3,4\}$. Montrer que $1+\omega_1+\omega_1^2+\omega_1^3+\omega_1^4=0$.
2. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2+2z-1=0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
3. On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin\frac{\pi}{10}$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin\frac{\pi}{10}=\cos\frac{2\pi}{5}$).
4. On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.
5. **Application :** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

[Exercice corrigé]

1.5 Trigonométrie

Exercice 78 On rappelle la formule ($\theta \in \mathbb{R}$) :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

1. Etablir les formules d'Euler ($\theta \in \mathbb{R}$) :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

2. En utilisant les formules d'Euler, linéariser (ou transformer de produit en somme) ($a, b \in \mathbb{R}$) :

$$2\cos a\cos b \quad ; \quad 2\sin a\sin b \quad ; \quad \cos^2 a \quad ; \quad \sin^2 a.$$

3. A l'aide de la formule : $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ ($x, y \in \mathbb{R}$), retrouver celles pour $\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$ et $\tan(x+y)$ en fonction de sinus, cosinus et tangente de x ou de y ; en déduire les formules de calcul pour $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ et $\tan(2x)$ ($x, y \in \mathbb{R}$).
4. Calculer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$ ($x \neq \pi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$).
5. Etablir la formule de Moivre ($\theta \in \mathbb{R}$) :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

6. En utilisant la formule de Moivre, calculer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

Exercice 79 1. Calculer $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\sin 6\theta$, $\sin 9\theta$, en fonction des lignes trigonométriques de l'angle θ.

2. Calculer $\sin^3\theta$, $\sin^4\theta$, $\cos^5\theta$, $\cos^6\theta$, à l'aide des lignes trigonométriques des multiples entiers de θ.

Exercice 80 En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

[Exercice corrigé]

Exercice 81 1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. A l'aide de la formule de Moivre exprimer en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$:

   (a) $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.

   (b) $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$. En déduire une équation du troisième degré admettant pour solution $\cos(\frac{\pi}{3})$ et la résoudre.

2. Linéariser les polynomes trigonométriques suivants : $1 + \cos^2 x$, $\cos^3 x + 2\sin^2 x$.

Exercice 82 Exprimer $(\cos 5x)(\sin 3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

Exercice 83 Soit x un nombre réel. On note $C = 1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \sum_{k=0}^{n} \cos kx$, et $S = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \sum_{k=0}^{n} \sin kx$. Calculer C et S.

Exercice 84 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$\sin x = \frac{1}{2}\,,\ \cos x = -\frac{1}{2}\,,\ \tan x = -1,$$

et placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions ; résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right).$$

Exercice 85 Calculer $\sin(25\pi/3), \cos(19\pi/4), \tan(37\pi/6)$.

Exercice 86 Résoudre l'équation : $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$, puis l'inéquation : $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 > 0$.

Exercice 87 Etudier le signe de la fonction donnée par $f(x) = \cos 3x + \cos 5x$.

Exercice 88 Simplifier, suivant la valeur de $x \in [-\pi, \pi]$, l'expression $\sqrt{1+\cos x} + |\sin x/2|$.

Exercice 89 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : (donner les valeurs des solutions appartenant à $]-\pi, \pi]$ et les placer sur le cercle trigonométrique).

1. $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$,
2. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$,
3. $\cos(3x) = \sin(x)$.

[Exercice corrigé]

Exercice 90 A quelle condition sur le réel m l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = m$ a-t-elle une solution réelle ? Résoudre cette équation pour $m = \sqrt{2}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 91 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\cos(5x) + \cos(3x) \leqslant \cos(x)$$
$$2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 92 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(3x)$.
2. $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$.

[Exercice corrigé]

1.6 Divers

Exercice 93 Montrer que tout nombre complexe z non réel de module 1 peut se mettre sous la forme $\frac{1+ir}{1-ir}$, où $r \in \mathbb{R}$.

Exercice 94 Soit u, v des nombres complexes non réels tels que $|u| = |v| = 1$ et $uv \neq -1$. Montrer que $\frac{u+v}{1+uv}$ est réel.

Exercice 95 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx).$$

Exercice 96 (Entiers de Gauss) Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \ ; \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que si α et β sont dans $\mathbb{Z}[i]$ alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ le sont aussi.
2. Trouver les élements inversibles de $\mathbb{Z}[i]$, c'est-à-dire les éléments $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tels qu'il existe $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ avec $\alpha\beta = 1$.
3. Vérifier que quel que soit $\omega \in \mathbb{C}$ il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\omega - z| < 1$.

4. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{Z}[i]$ une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient α et β dans $\mathbb{Z}[i]$ il existe q et r dans $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant :

$$\alpha = \beta q + r \qquad \text{avec} \qquad |r| < |\beta|.$$

(Indication : on pourra considérer le complexe $\frac{\alpha}{\beta}$)

[Exercice corrigé]

Exercice 97 Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$ $\dfrac{|\Re(z)| + |\Im(z)|}{\sqrt{2}} \leqslant |z| \leqslant |\Re(z)| + |\Im(z)|$. Étudier les cas d'égalité.

Exercice 98 Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ad - bc = 1$ et $c \neq 0$. Montrer que si $z \neq -\dfrac{d}{c}$ alors $\Im(\dfrac{az+b}{cz+d}) = \dfrac{\Im(z)}{|(cz+d)|^2}$.

Exercice 99 Que dire de trois complexes a, b, c non nuls tels que $|a+b+c| = |a| + |b| + |c|$.

Exercice 100
1. Étudier la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $z_0 = 4$, $z_{n+1} = f(z_n)$ où f est l'application de $\mathbb{C}$ sur lui-même définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = i + \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})z.$$

Indication : on commencera par rechercher les coordonnées cartésiennes de l'unique point α tel que $f(\alpha) = \alpha$, puis on s'intéressera à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = z_n - \alpha.$$

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, l_n = |z_{n+1} - z_n|$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} l_k$$

et interpréter géométriquement.

Exercice 101 (Examen octobre 1999) On définit une fonction f de $\mathbb{C} - \{i\}$ dans $\mathbb{C} - \{1\}$ en posant

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}.$$

1. On suppose z réel. Quel est le module de $f(z)$?
2. Trouver les nombres complexes z tels que $f(z) = z$.

Exercice 102 (Examen novembre 2001) Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

1. Calculer les points fixes de la fonction f, c'est à dire les nombres complexes z tels que $f(z) = z$.
2. Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $f(z)$ est réel.

Exercice 103
1. Montrer que si $x + y + z = a$, $yz + zx + xy = b$, $xyz = c$, alors x, y et z sont solutions de l'équation $Z^3 - aZ^2 + bZ - c = 0$. Trouver x, y et z si on suppose $a = b = 0$ et $c = -8$.
2. Résoudre le système

$$\begin{cases} x+y+z &= 4 \\ x^2+y^2+z^2 &= 4 \\ x^3+y^3+z^3 &= 1 \end{cases}$$

[Exercice corrigé]

2 Logique, ensembles, raisonnements

2.1 Logique

Exercice 104 Soient R et S des relations. Donner la négation de $R \Rightarrow S$.

Exercice 105 Démontrer que $(1=2) \Rightarrow (2=3)$.
[Exercice corrigé]

Exercice 106 Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2>x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

[Exercice corrigé]

Exercice 107 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leqslant 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leqslant 0$.

On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.
[Exercice corrigé]

Exercice 108 Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}$ $x^2=4$ ...... $x=2$;
2. $z \in \mathbb{C}$ $z=\overline{z}$ ...... $z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R}$ $x=\pi$ ...... $e^{2ix}=1$.

[Exercice corrigé]

Exercice 109 Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les ensembles $F_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\leqslant 0\}$ et $F_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy\geqslant 1,\ x\geqslant 0\}$. Évaluer les propositions suivantes :

1. $\forall \varepsilon \in]0,+\infty[\quad \exists M_1 \in F_1\, \exists M_2 \in F_2 \quad / \qquad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$
2. $\exists M_1 \in F_1\, \exists M_2 \in F_2 \quad / \quad \forall \varepsilon \in]0,+\infty[\qquad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$
3. $\exists \varepsilon \in]0,+\infty[\quad / \quad \forall M_1 \in F_1\, \forall M_2 \in F_2 \qquad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$
4. $\forall M_1 \in F_1\, \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0,+\infty[\quad / \qquad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$

Quand elles sont fausses, donner leur négation.
[Exercice corrigé]

Exercice 110 Nier la proposition : “tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans”.
[Exercice corrigé]

Exercice 111 Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

1. $P \Rightarrow Q$,
2. P et non Q,

3. P et (Q et R),
4. P ou (Q et R),
5. (P et Q) $\Rightarrow$ ($R \Rightarrow S$).

[Exercice corrigé]

Exercice 112 Nier les assertions suivantes :

1. tout triangle rectangle possède un angle droit ;
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique le relation $z < x + 1$;
4. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \ /\ \ |x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \varepsilon$.

[Exercice corrigé]

Exercice 113 (Le missionnaire et les cannibales) Les cannibales d'une tribu se préparent à manger un missionnaire. Désirant lui prouver une dernière fois leur respect de la dignité et de la liberté humaine, les cannibales proposent au missionnaire de décider lui-même de son sort en faisant une courte déclaration : si celle-ci est vraie, le missionnaire sera rôti, et il sera bouilli dans le cas contraire. Que doit dire le missionnaire pour sauver sa vie ? (d'après Cervantès)

Exercice 114 La proposition $\big(P \wedge Q \Rrightarrow (\neg P) \vee Q\big)$ est-elle vraie ?

Exercice 115 On suppose que la proposition P est vraie ainsi que les propositions suivantes :

1. $(\neg Q) \wedge P \Rrightarrow \neg S$.
2. $S \Rrightarrow (\neg P) \vee Q$.
3. $P \Rrightarrow R \vee S$.
4. $S \wedge Q \Rrightarrow \neg P$.
5. $R \wedge \neg(S \vee Q) \Rrightarrow T$.
6. $R \Rrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$.

La proposition T est-elle vraie ?

Exercice 116 Ecrire la négation des phrases suivantes :

1. $(\forall x)(\exists n)/(x \leqslant n)$.
2. $(\exists M)/(\forall n)(|u_n| \leqslant M)$.
3. $(\forall x)(\forall y)(xy = yx)$.
4. $(\forall x)(\exists y)/(yxy^{-1} = x)$.
5. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})/(\forall n \geqslant N)(|u_n| < \varepsilon)$.
6. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)/(\forall f \in \mathcal{F})(\forall y \in \mathbb{R})(|x - y| < \alpha \Rrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$.

Exercice 117 Comparer les différentes phrases (sont-elles équivalentes, contraires, quelles sont celles qui impliquent les autres...)

1. $(\forall x)(\exists y)/(x \leqslant y)$.
2. $(\forall x)(\forall y)(x \leqslant y)$.
3. $(\exists x)(\exists y)/(x \leqslant y)$.
4. $(\exists x)/(\forall y)(x \leqslant y)$.
5. $(\exists x)/(\forall y)(y < x)$.

6. $(\exists x)(\exists y)/(y < x)$.
7. $(\forall x)(\exists y)/(x = y)$.

Exercice 118 Si $P(x)$ est une proposition dépendant de $x \in X$, on note $\overline{P} = \{x \in X / P(x) \text{ est vraie}\}$. Exprimer en fonction de $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ les ensembles $\overline{\neg P}, \overline{P \wedge Q}, \overline{P \vee Q}, \overline{P \Rightarrow Q}, \overline{P \Leftrightarrow Q}$.

Exercice 119 Montrer que $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geqslant N \Rightarrow 2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon)$.
[Exercice corrigé]

Exercice 120 Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est périodique ;
7. f est croissante ;
8. f est strictement décroissante ;
9. f n'est pas la fonction nulle ;
10. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distcincts ;
11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;
12. f est inférieure à g ;
13. f n'est pas inférieure à g.

[Exercice corrigé]

2.2 Ensembles

Exercice 121 Montrer que $\emptyset \subset X$, pour tout ensemble X.

Exercice 122 Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

[Exercice corrigé]

Exercice 123 Soit A, B deux ensembles, montrer $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ et $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.
[Exercice corrigé]

Exercice 124 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Démontrer que :
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
$\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.
[Exercice corrigé]

Exercice 125 A et B étant des parties d'un ensemble E, démontrer les lois de Morgan :

$$\complement A \cup \complement B = \complement(A \cap B) \quad \text{et} \quad \complement A \cap \complement B = \complement(A \cup B).$$

Exercice 126 Démontrer les relations suivantes :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Exercice 127 Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

$$(F \subset G \iff F \cup G = G) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff \complement F \cup G = E).$$

En déduire que :

$$(F \subset G \iff F \cap G = F) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff F \cap \complement G = \emptyset).$$

Exercice 128 Soit E et F des ensembles. Si $A \subset E$ et $B \subset F$ montrer que $A \times B \subset E \times F$.

Exercice 129 Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Écrire le produit cartésien $A \times B$. Quel est le nombre de parties de $A \times B$?

Exercice 130 Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre d'éléments de E^p ? Quel est le nombre de parties de E^p ?

Exercice 131 x, y, z étant des nombres réels, résoudre le système :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2)z &= 0 \\ (x-2)(y-3) &= 0 \end{cases}$$

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions.

Exercice 132 Soit A une partie de E, on appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E, f et g leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1 - f$.
2. fg.
3. $f + g - fg$.

Exercice 133 Soit un ensemble E et deux parties A et B de E. On désigne par $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. *Dans les questions ci-après il pourra être commode d'utiliser la notion de fonction caractéristique.*

1. Démontrer que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Démontrer que pour toutes les parties A, B, C de E on a $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E, $A \triangle X = X \triangle A = A$.
4. Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que $A \triangle A' = A' \triangle A = X$.

Exercice 134
1. Écrire l'ensemble de définition de chacune des fonctions numériques suivantes : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x-1}$, $x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$.
2. Simplifier $[1, 3] \cap [2, 4]$ et $[1, 3] \cup [2, 4]$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $n\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs multiples de n : $n\mathbb{Z} = \{np \mid p \in \mathbb{Z}\}$. Simplifier $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$.

Exercice 135 On définit les cinq ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\ x+y<1\} \\ A_2 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\ |x+y|<1\} \\ A_3 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\ |x|+|y|<1\} \\ A_4 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\ x+y>-1\} \\ A_5 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\ |x-y|<1\} \end{array}$$

1. Représenter ces cinq ensembles.
2. En déduire une démonstration géométrique de

$$(|x+y|<1 \ \text{ et } \ |x-y|<1) \Leftrightarrow |x|+|y|<1.$$

Exercice 136 Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3+\frac{1}{n^2}\right[\quad \text{et} \quad I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2-\frac{1}{n}, 4+n^2\right].$$

[Exercice corrigé]

Exercice 137 Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[\quad \text{et} \quad I_2 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1+\frac{1}{n}, n\right].$$

[Exercice corrigé]

Exercice 138 Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 139 Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.
Montrer que $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Exercice 140 Donner les positions relatives de $A, B, C \subset E$ si $A \cup B = B \cap C$.

Exercice 141 Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$? Et $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

Exercice 142 Montrer que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \complement B = A \cap \complement C$.

Exercice 143 Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1,2\}))$.

Exercice 144 Soient $A, B \subset E$. Résoudre les équations à l'inconnue $X \subset E$

1. $A \cup X = B$.
2. $A \cap X = B$.

[Exercice corrigé]

Exercice 145 Soient E, F, G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.

Exercice 146 Soient E, F, G, H quatre ensembles. Comparer les ensembles $(E \times F) \cap (G \times H)$ et $(E \cap G) \times (F \cap H)$.

Exercice 147 Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{1, 2, 3\}$. Pour $i = 1, 2, 3$ on pose $A_i = \{f \in E / f(0) = i\}$. Montrer que les A_i forment une partition de E.

2.3 Absurde et contraposée

Exercice 148 Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 149 Soit X un ensemble et f une application de X dans l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X. On note A l'ensemble des $x \in X$ vérifiant $x \notin f(x)$. Démontrer qu'il n'existe aucun $x \in X$ tel que $A = f(x)$.

Exercice 150 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans lui-même. On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant $f(n) = f_n(n) + 1$. Démontrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.

[Exercice corrigé]

Exercice 151

1. Soit $p_1, p_2, \dots, p_r$ r nombres premiers. Montrer que l'entier $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i.
2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

[Exercice corrigé]

2.4 Récurrence

Exercice 152 Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111 quel que soit $n \in \mathbb{N}$. (Indication : $1000 = 9 \times 111 + 1$).

Exercice 153 Montrer :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

[Exercice corrigé]

Exercice 154 En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?
Soit $\mathcal{P}(n)$: n crayons de couleurs sont tous de la même couleur.

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit $n+1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.
  Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
- On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.

Exercice 155 Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

[Exercice corrigé]

Exercice 156

1. Dans le plan, on considère trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ formant un “vrai” triangle : elles ne sont pas concourantes, et il n'y en a pas deux parallèles. Donner le nombre R_3 de régions (zones blanches) découpées par ces trois droites.
2. On considère quatre droites $\Delta_1, \dots, \Delta_4$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Donner le nombre R_4 de régions découpées par ces quatre droites.
3. On considère n droites $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Soit R_n le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_n$, et R_{n-1} le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_{n-1}$. Montrer que $R_n = R_{n-1} + n$.
4. Calculer par récurrence le nombre de régions délimitées par n droites en position générale, c'est-à-dire telles qu'il n'en existe pas trois concourantes ni deux parallèles.

[Exercice corrigé]

Exercice 157 Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X, X)$, on définit $f^0 = id$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f^n \circ f$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f \circ f^n$.
2. Montrer que si f est bijective alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 158 Montrer que

$$\forall n \geqslant 2, n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Exercice 159 Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n$$

Démontrer que l'on a

$$S_n = \frac{1}{3} n(n-1)(n+1)$$

Exercice 160 Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère la propriété suivante :

$$P_n : \quad 2^n > n^2$$

1. Pour quelles valeurs de n l'implication $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ est-elle vraie ?
2. Pour quelles valeurs de n la propriété P_n est-elle vraie ?

Exercice 161 Que pensez-vous de la démonstration suivante ?

1. Pour tout $n \geqslant 2$, on considère la propriété :

   $$P(n) : \quad n \text{ points distincts du plan sont toujours alignés}$$

2. Initialisation : $P(2)$ est vraie car deux points distincts sont toujours alignés.
3. Hérédité : On suppose que $P(n)$ est vraie et on va démontrer $P(n+1)$.
   Soit donc $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ des points distincts. D'après l'hypothèse de récurrence, $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont alignés sur une droite d, et $A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite d'. Les deux droites d et d' ayant $n-1$ points communs $A_2, \dots, A_n$ sont confondues. Donc $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés, ce qui montre l'hérédité de la propriété.
4. Conclusion : la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 162 1. Démontrer que pour tout entier naturel n, 9 divise $10^n - 1$.

2. Soit k un entier strictement positif. Étudier la propriété suivante : pour tout entier naturel n, k divise $(k+1)^n + 2$.

Exercice 163 Démontrer que pour $n \geqslant 1$, le produit de n entiers impairs est un entier impair.

Exercice 164 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$$

Démontrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$.

Exercice 165 Soit $b \geqslant 2$ un entier fixé. Démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des entiers $a_0, a_1, \dots, a_n$ appartenant à $\{0, 1, \dots, b-1\}$ tels que ;

$$N = a_0 + a_1 b + \cdots + a_n b^n \quad \text{et} \quad a_n \neq 0$$

Démontrer que pour chaque N, le système $(n, a_0, a_1, \dots, a_n)$ est déterminé par la propriété ci-dessus.
On dit que $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les chiffres de l'écriture du nombre N suivant la base b.

Exercice 166 Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k!$ divise le produit de k entiers consécutifs :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ k! \mid n(n+1)\cdots(n-k+1)$$

Exercice 167 Les propriétés

$$P_n \ :\ 3 \mid 4^n - 1\ ,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

et

$$Q_n \ :\ 3 \mid 4^n + 1\ ,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

sont-elles vraies ou fausses ?

Exercice 168 1. Calculer les restes de la division euclidienne de $1, 4, 4^2, 4^3$ par 3.

2. Formuler, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une hypothèse $\mathcal{P}(n)$ concernant le reste de la division euclidienne de 4^n par 3. Démontrer que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $16^n + 4^n + 3$ est-il divisible par 3.

Exercice 169 Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7 quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 170 1. Démontrer par récurrence :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Calculer de deux manières différentes :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3.$$

3. En déduire :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + 3n).$$

Exercice 171 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 172 Démontrer, en le déterminant qu'il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ 2^n \geqslant (n+2)^2.$$

Exercice 173 Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 2$ l'implication

$$[x > -1, x \neq 0] \Rightarrow [(1+x)^n > 1 + nx]$$

est vraie.

Exercice 174

1. Soit $n \in \mathbb{N}$; montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$ on a

$$n^k + kn^{k-1} \leqslant (n+1)^k.$$

2. Soit b un réel positif ou nul. Montrer par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$(1+b)^n \leqslant 1 + \frac{nb}{1!} + \frac{(nb)^2}{2!} + ... + \frac{(nb)^n}{n!}.$$

Exercice 175 Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

pour tout réel a et b.

Exercice 176 On définit une suite (F_n) de la façon suivante :

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}; \quad F_0 = 1, F_1 = 1\ .$$

1. Calculer F_n pour $1 < n < 10$.
2. Montrer que l'équation $x^2 = x+1$ admet une unique solution positive a que l'on calculera.
3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$a^{n-2} < F_n < a^{n-1}\ .$$

Exercice 177 Montrer que :

$$\cos\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2}}}.$$

Exercice 178 Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, trouver une loi simplifiant le produit :

$$(1 - \frac{1}{4})...(1 - \frac{1}{n}).$$

Exercice 179 Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $a_0, \ldots, a_n$ des nombres réels de même signe tel que $a_i > -1$, montrer que :

$$(1+a_0)...(1+a_n) > 1 + a_0 + \ldots + a_n.$$

2.5 Divers

Exercice 180 Quels sont les entiers n tels que $4^n \leqslant n!$?

Exercice 181 Montrer que :

$$\forall n \geqslant 2, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \notin \mathbb{N}.$$

Indication : montrer que

$$\forall n \geqslant 2, \exists (p_n, q_n) \in (\mathbb{N}^*)^2, u_n = \frac{2p_n + 1}{2q_n}.$$

Exercice 182 Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n+1) > f(f(n)).$$

Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}^*}$. *Indications* : que dire de $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(k) = \inf\{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$? En déduire que $\forall n > 0, f(n) > f(0)$. Montrer ensuite que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall m > n, f(m) > f(n)$ et $\forall m \leqslant n, f(m) \geqslant m$ (on pourra introduire k tel que $f(k)$ soit le plus petit entier de la forme $f(m)$ avec $m > n$). En déduire que f est strictement croissante et qu'il n'existe qu'une seule solution au problème. Laquelle ?

Exercice 183 Pour $p \in \{1, 2, 3\}$ on note $S_p = \sum\limits_{k=0}^{n} k^p$.

1. A l'aide du changement d'indice $i = n - k$ dans S_1, calculer S_1.
2. Faire de même avec S_2. Que se passe-t-il ?
3. Faire de même avec S_3 pour l'exprimer en fonction de n et S_2.
4. En utilisant l'exercice 153, calculer S_3.

Exercice 184 Pour calculer des sommes portant sur deux indices, on a intérêt à représenter la zone du plan couverte par ces indices et à sommer en lignes, colonnes ou diagonales... Calculer :

1. $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$.
2. $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} i(j-1)$.
3. $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i-1)j$.
4. $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (n-i)(n-j)$.
5. $\sum\limits_{1 \leqslant p,q \leqslant n} (p+q)^2$ (on posera $k = p + q$).

3 Injection, surjection, bijection

3.1 Application

Exercice 185 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

[Exercice corrigé]

Exercice 186 Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3, -1])$, $f([-2, 1])$, $f([-3, -1] \cup [-2, 1])$ et $f([-3, -1] \cap [-2, 1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty, 2])$, $f^{-1}([1, +\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty, 2] \cup [1, +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty, 2] \cap [1, +\infty[)$.

3.2 Injection, surjection

Exercice 187 Donner des exemples d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (puis de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) injective et non surjective, puis surjective et non injective.

Exercice 188 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$.
f est-elle injective ? surjective ? Déterminer $f^{-1}([-1,1])$ et $f(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 189 Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n \quad ; \quad f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \quad ; \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2.$$

Exercice 190 Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$
2. $g : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$
3. $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{cases}$
4. $k : \begin{cases} \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$

Exercice 191 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$ $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

[Exercice corrigé]

Exercice 192 L'application $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z + 1/z$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
Donner l'image par f du cercle de centre 0 et de rayon 1.
Donner l'image réciproque par f de la droite $i\mathbb{R}$.

Exercice 193 On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective},$$

$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective}.$$

Montrer que :

$$\big(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }\big) \Leftrightarrow \big(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

[Exercice corrigé]

Exercice 194 Soit $f : X \to Y$. Montrer que

1. $\forall B \subset Y\ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.
2. f est surjective ssi $\forall B \subset Y\ f(f^{-1}(B)) = B$.
3. f est injective ssi $\forall A \subset X\ f^{-1}(f(A)) = A$.
4. f est bijective ssi $\forall A \subset X\ f(\complement A) = \complement f(A)$.

Exercice 195 Soit $f : X \to Y$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i. f est injective.

ii. $\forall A, B \subset X\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

iii. $\forall A, B \subset X\ A \cap B = \emptyset \Rrightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Exercice 196 Soit $f : X \to Y$.On note $\hat{f} : \begin{cases} \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y) \\ A \mapsto f(A) \end{cases}$ et $\tilde{f} : \begin{cases} \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X) \\ B \mapsto f^{-1}(B) \end{cases}$.
Montrer que :

1. f est injective ssi $\hat{f}$ est injective.
2. f est surjective ssi $\tilde{f}$ est injective.

Exercice 197 (Exponentielle complexe) Si $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $e^z = e^x \times e^{iy}$.

1. Déterminer le module et l'argument de e^z.
2. Calculer $e^{z+z'}, e^{\overline{z}}, e^{-z}, (e^z)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
3. L'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z$, est-elle injective ?, surjective ?

[Exercice corrigé]

3.3 Bijection

Exercice 198 Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, et $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f_{a,b}(x) = ax+b$. Démontrer que $f_{a,b}$ est une permutation et déterminer sa réciproque.
[Exercice corrigé]

Exercice 199 Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = id$.
[Exercice corrigé]

Exercice 200 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ t \mapsto e^{it}$. Montrer que f est une bijection sur un ensemble à préciser.
[Exercice corrigé]

Exercice 201 On appelle *demi-plan de Poincaré* l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres complexes z tels que $\operatorname{Im} z > 0$, et *disque unité* l'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres complexes z tels que $|z| < 1$. Démontrer que $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D}$.

Exercice 202 Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?
[Exercice corrigé]

Exercice 203 Soient $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives alors f, g et h le sont également.

Exercice 204 Soient $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A$. Montrer que si $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives et $f \circ h \circ g$ surjective alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 205 Soit X un ensemble. Si $A \subset X$ on note χ_A la fonction caractéristique associée. Montrer que $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(X) \to \mathcal{F}(X, \{0,1\}) \\ A \mapsto \chi_A \end{cases}$ est bijective.

Exercice 206 Soit E un ensemble non vide. On se donne deux parties A et B de E et on définit l'application $f : \wp(E) \to \wp(E)$, $X \mapsto (A \cap X) \cup (B \cap X^c)$. Discuter et résoudre l'équation $f(X) = \emptyset$. En déduire une condition nécessaire pour que f soit bijective.
On suppose maintenant $B = A^c$. Exprimer f à l'aide de la différence symétrique Δ. Montrer que f est bijective, préciser f^{-1}. f est-elle involutive (i.e. $f^2 = id$) ? Quelle propriété en déduit-on ?

4 Relation d'équivalence, relation d'ordre

4.1 Relation d'équivalence

Exercice 207
1. Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{R}$ par : $(a,b)\mathcal{R}(a',b') \Leftrightarrow a+b' = b+a'$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Identifier $E/\mathcal{R}$.
2. Mêmes questions avec $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $(p,q)\mathcal{R}(p',q') \Leftrightarrow pq' = p'q$.

Exercice 208 Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow y = y'.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 209 Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $z \in \mathbb{C}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 210 Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, symétrique et transitive. Que penser du raisonnement suivant ?

"$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est symétrique,
or ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$) $\Rightarrow x\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est transitive,
donc $\mathcal{R}$ est réflexive."

[Exercice corrigé]

Exercice 211 Étudier la relation $\Re$ définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) par :

$$f \Re g \Longleftrightarrow \exists A > 0, \forall x \in R, |x| > A \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Exercice 212 Montrer que la relation $\Re$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \Re y \Longleftrightarrow x e^y = y e^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\Re$.

4.2 Relation d'ordre

Exercice 213 La relation "divise" est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$? sur $\mathbb{Z}$? Si oui, est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice 214 Étudier les propriétés des relations suivantes. Dans le cas d'une relation d'équivalence, préciser les classes ; dans le cas d'une relation d'ordre, préciser si elle est totale, si l'ensemble admet un plus petit ou plus grand élément.

1. Dans $\mathcal{P}(E)$: $A\mathcal{R}_1B \Leftrightarrow A \subset B$; $A\mathcal{R}_2B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
2. Dans $\mathbb{Z}$: $a\mathcal{R}_3b \Leftrightarrow a$ et b ont la même parité ; $a\mathcal{R}_4b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ a-b = 3n$; $a\mathcal{R}_5b \Leftrightarrow a-b$ est divisible par 3.

Exercice 215 Soient $(X, \leqslant)$ et $(Y, \leqslant)$ deux ensembles ordonnés (on note abusivement les deux ordres de la même façon). On définit sur $X \times Y$ la relation $(x, y) \leqslant (x', y')$ ssi $(x < x')$ ou $(x = x'$ et $y \leqslant y')$. Montrer que c'est un ordre et qu'il est total ssi X et Y sont totalement ordonnés.

Exercice 216 Un ensemble est dit bien ordonné si toute partie non vide admet un plus petit élément.

1. Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
2. Montrer que bien ordonné implique totalement ordonné.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 217 Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ la relation $\mathcal{R}$ par $X\mathcal{R}Y$ ssi $(X = Y$ ou $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leqslant y)$. Vérifier que c'est une relation d'ordre.

Exercice 218 Montrer que $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$ est une l.c.i sur $]-1, 1[$ et déterminer ses propriétés.

5 Dénombrement

5.1 Binôme de Newton et C_n^p

Exercice 219 Démontrer que si p est un nombre premier, p divise C_p^k pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$.

Exercice 220 En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} kC_n^k \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 221 Démontrer que $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$ (pour $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$). En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p.$$

Exercice 222 En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

1. $2^n + 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est impair ;
2. $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

[Exercice corrigé]

Exercice 223 Démontrer que $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

Exercice 224 Montrer que, pour p et n entiers naturels non nuls tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, on a :

$$pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}.$$

Exercice 225

1. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{p} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p,$$
où p et n sont des entiers naturels avec $0 \leqslant p \leqslant n$.
2. Avec les mêmes notations, montrer que
$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 0.$$

Exercice 226

1. Soient n, p et q des entiers naturels tels que $0 \leqslant p, q \leqslant n$.
2. Montrer que l'on a $C_n^p = C_n^q$ si et seulement si $p = q$ ou $p + q = n$.
3. Résoudre l'équation
$$C_{2n+4}^{3n-1} = C_{2n+4}^{n^2-2n+3}.$$

Exercice 227 Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule du binôme, démontrer que $m^{2p+1} + n^{2p+1}$ est divisible par $m + n$.

Exercice 228 En utilisant la formule du binôme montrer :

$$(a)\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0 \qquad (b)\ \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 229 Calculer le module et l'argument de $(1 + i)^n$. En déduire les valeurs de

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots \\ S_2 &= C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \cdots \end{aligned}$$

[Exercice corrigé]

Exercice 230 Démontrer les formules suivantes :

1. $C_n^m = C_m^{n-m}$ (on pourra utiliser le fait que $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) A \mapsto A^c$ est une bijection.)
2. $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$,
3. $C_n^m = C_{n-2}^m + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 231 Soient E un ensemble non vide et X, Y une partition de E.

1. Montrer que l'application suivante est une bijection :
$$\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$$
$$A \mapsto (A \cap X, A \cap Y)$$
2. Montrer que pour $p, q, r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leqslant p + q$ on a :
$$\sum_{i+j=r} C_p^i C_q^j = C_{p+q}^r.$$

3. En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

Exercice 232 Soit E un ensemble, $a \in E$ et $f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto X \cup \{a\} \text{ si } a \notin X \\ X \mapsto X - \{a\} \text{ si } a \in X \end{cases}$

1. Montrer que f est une bijection.
2. On suppose désormais que E est fini et $\text{Card}\,(E) = n$. On pose $\mathcal{P}_0(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair et $\mathcal{P}_1(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal impair. Montrer que $\text{Card}\,(\mathcal{P}_0(E)) = \text{Card}\,(\mathcal{P}_1(E))$.
3. Calculer ces cardinaux et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k$.

Exercice 233 En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$. En déduire la valeur de $\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} C_n^{2k}$.

Exercice 234 Soient $0 \leqslant p \leqslant n$.

1. Montrer par récurrence sur n que $\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$.
2. Écrire ces égalités pour $p = 2$ et $p = 3$.
3. En déduire les sommes
$$S_2' = 1.2 + 2.3 + \ldots + (n-1).n \qquad S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$$
$$S_3' = 1^2.2 + 2^2.3 + \ldots + (n-1)^2.n \qquad S_3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$$

5.2 Cardinal

Exercice 235 Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable en utilisant l'application :
$$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \begin{cases} n \mapsto 2n-1 & \text{si } n > 0\,; \\ n \mapsto -2n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 236 Pour A, B deux ensembles de E on note $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Pour E un ensemble fini, montrer :
$$\text{Card}\,A\Delta B = \text{Card}\,A + \text{Card}\,B - 2\text{Card}\,A\cap B.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 237 Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?
[Exercice corrigé]

Exercice 238 Déterminer le nombre de mots distincts que l'on peut former avec 6 voyelles et 20 consonnes, chaque mot étant composé de 3 consonnes et 2 voyelles, en excluant les mots qui renferment 3 consonnes consécutives.

Exercice 239 On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant un as ?
3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?

Exercice 240 Soient A, A', B, B' quatre ensembles tels que :

$$\text{Card}\,(A) = \text{Card}\,(A') = a \text{ et } \text{Card}\,(B) = \text{Card}\,(B') = b.$$

1. Déterminer le nombre de bijections de $A \times B$ sur $A' \times B'$.
2. Supposons maintenant que $\{A, B\}$, $\{A', B'\}$ forment deux partitions de E, un ensemble. Déterminer le nombre de bijections $f : E \longrightarrow E$ telles que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

Exercice 241 Soient A et B deux sous ensembles finis d'un ensemble E.

1. Montrer que : $\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,(A) + \text{Card}\,(B) - \text{Card}\,(A \cap B)$.
2. Montrer par récurrence que si $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille de sous-ensembles finis de E alors :

$$\text{Card}\,(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \text{Card}\,(F_i)$$

avec égalité si les F_i sont deux à deux disjoints.

Exercice 242 Soient $1 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer le nombre de k-uplets $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$.

5.3 Divers

Exercice 243 1. (*principe des bergers*) Soient E, F deux ensembles avec F ensemble fini, et f une surjection de E sur F vérifiant :

$$\forall y \in F,\ \text{Card}\,(f^{-1}(y)) = p$$

Montrer que E est alors un ensemble fini et $\text{Card}\,(E) = p\text{Card}\,(F)$.

2. (*principe des tiroirs*) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, p élements distincts d'un ensemble E, répartis entre une famille de n sous-ensembles de E. Si $n < p$ montrer qu'il existe au moins un ensemble de la famille contenant au moins deux éléments parmi les α_i.(on pourra raisonner par l'absurde)

Exercice 244 Montrer par récurrence sur n que si $A_1, \ldots, A_n \subset E$ alors $\text{Card}\,(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \text{Card}\,(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$.

Exercice 245 Soit $p_n(k)$ le nombre de permutations de $\{1, ..., n\}$ ayant k points fixes, montrer alors que :

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!.$$

Interpréter.

Exercice 246 Soit E un ensemble de cardinal $nm \in \mathbb{N}^*$, où $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, et $P_{n,m}$l'ensemble des partitions de E en n parties à m éléments chacune. Montrer que :

$$N_{n,m} = card(P_{n,m}) = \frac{(nm)!}{n!(m!)^n}.$$

(*Indication* : on peut procéder par récurrence.)

Exercice 247 L'histoire : n personnes apportent chacune un cadeau à une fête, et chacun tire au sort un cadeau dans le tas formé par tous les présents apportés. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne reparte avec son cadeau ? Que devient cette probabilité quand le nombre de personnes devient très grand, i.e. : $n \to \infty$? (On remarquera que l'intuition met en évidence deux effets contradictoires : plus de personnes c'est plus de proba qu'une personne ait son cadeau car... il y a plus de personnes, mais c'est aussi plus de cadeaux, donc une proportion plus élevée de cadeaux "acceptables").
Soit $S_n = \sigma(\{1,\dots,n\})$. On dit que $\sigma \in S_n$ est un dérangement si $\forall i \in \{1,\dots,n\}\ \sigma(i) \neq i$. On note $A_i = \{\sigma \in S_n / \sigma(i) = i\}$ et D_n l'ensemble des dérangements.

1. Calculer Card (A_i).
2. Exprimer $S_n - D_n$ en fonction des A_i.
3. En déduire Card (D_n) (on pourra utiliser l'exercice 244).
4. Déterminer la limite de $\dfrac{\text{Card } D_n}{\text{Card } S_n}$. (on rappelle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!}) = e^x$).

Exercice 248 Soit E un ensemble de cardinal n, $\Re$ une relation d'équivalence sur E, avec k classes d'équivalences et r couples $(x,y) \in E^2$ tels que $x\Re y$. Montrer que $n^2 \leqslant kr$.

6 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

6.1 Divisibilité, division euclidienne

Exercice 249 Combien 15! admet-il de diviseurs ?
[Exercice corrigé]

Exercice 250 Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.
[Exercice corrigé]

Exercice 251 Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.
[Exercice corrigé]

Exercice 252 Soient $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$ des entiers ; montrer que :

1. $n - 1 | n^m - 1$;
2. $(n-1)^2 | n^m - 1$ si et seulement si $n - 1 | m$.

Exercice 253 Soit a un entier relatif quelconque, démontrer que le nombre $a(a^2 - 1)$ et, plus généralement, $a(a^{2n} - 1)$ est divisible par 6.

Exercice 254 Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.
[Exercice corrigé]

Exercice 255 Quel est le plus petit entier naturel qui, divisé par 8, 15, 18 et 24, donne respectivement pour reste 7, 14, 17 et 23 ?

Exercice 256 Montrer que si x et y sont des entiers naturels tels que x^2 divise y^2, alors x divise y. Application : démontrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Exercice 257 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24,$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ est divisible par } 120.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 258 Trouver tous les entiers relatifs n tels que $n^2 + n + 7$ soit divisible par 13.

Exercice 259 On considère le nombre $m = 2^n p$, dans lequel n désigne un entier naturel quelconque et p un nombre premier. Dresser la liste des diviseurs de m, y compris 1 et m lui-même, et calculer, en fonction de m et p, la somme S de tous ces diviseurs.

Exercice 260 Le diviseur d'une division est égal à 45 ; le reste est le carré du quotient. Calculer le dividende entier naturel.

Exercice 261 Trouver le plus petit entier naturel n telle que le développement décimal de $1/n$ admette une plus petite période de longueur 5, c'est-à-dire $1/n = 0,abcde\,abcde\,ab\ldots$ avec $a, b, \ldots, e \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Exercice 262 Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si a divise b et c, alors $c^2 - 2b$ est multiple de a.
2. S'il existe u et v entiers tels que $au + bv = d$ alors $\text{pgcd}(a, b) = |d|$.
3. Si a est premier avec b, alors a est premier avec b^3.
4. Si a divise $b + c$ et $b - c$, alors a divise b et a divise c.
5. Si 19 divise ab, alors 19 divise a ou 19 divise b.
6. Si a est multiple de b et si c est multiple de d, alors $a + c$ est multiple de $b + d$.
7. Si 4 ne divise pas bc, alors b ou c est impair.
8. Si a divise b et b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.
9. Si 5 divise b^2, alors 25 divise b^2.
10. Si 12 divise b^2, alors 4 divise b.
11. Si 12 divise b^2, alors 36 divise b^2.
12. Si 91 divise ab, alors 91 divise a ou 91 divise b.

Exercice 263 On définit les trois ensembles suivants :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{7n\,,\ n \in \mathbb{N}\} \\ E_2 &= \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \text{ est multiple de } 4\} \\ E_3 &= \{28n\,,\ n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

1. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, déterminer si on a l'inclusion $E_i \subset E_j$.
2. Ecrire $E_1 \cap E_2$ sous la forme $E = \{n \in \mathbb{N}\,,\ \mathcal{P}(n)\}$. Montrer que $E_1 \cap E_2 = E_3$.

Exercice 264 Montrer que si r et s sont deux nombres entiers naturels somme de deux carrés d'entiers alors il en est de même pour le produit rs.

Exercice 265 Soit n un entier relatif. Montrer que soit 8 divise n^2, soit 8 divise n^2-1, soit 8 divise n^2-4.

Exercice 266 Étant donnés deux nombres relatifs n et p montrer que soit np est pair, soit n^2-p^2 est divisible par 8.

Exercice 267 Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.
[Exercice corrigé]

Exercice 268
1. Soit n un entier naturel dont le reste de la division euclidienne par 5 vaut 2 ou 3, montrer que n^2+1 est divisible par 5.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier n^5-n est divisible par 5.

Exercice 269 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que parmi les trois entiers $n.(n+1)$, $n.(n+2)$ et $(n+1).(n+2)$, il y en a exactement deux qui sont divisibles par 3.

Exercice 270
1. Pour tout couple de nombres réels (x,y) montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a la relation
$$(*)\ x^n - y^n = (x-y).\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$
Indication : on pourra écrire de deux manières différentes la quantité $y(x^n-y^n)+(x-y)x^n$.
2. Soit (a,b,p) des entiers éléments de $\mathbb{N}$. En utilisant la formule $(*)$, montrer que s'il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $b = a+pl$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $b^n = a^n + pm$.
3. Soient a,b,p des entiers éléments de $\mathbb{N}$, en utilisant la question 2, montrer que si $a-b$ est divisible par p,
$$\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}$$
est aussi divisible par p. En déduire, à l'aide de la question 2 et de la formule $(*)$, que si $a-b$ est divisible par p^n i.e. il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $a-b = l.p^n$, alors $a^p - b^p$ est divisible par p^{n+1}.

[Exercice corrigé]

Exercice 271 Calculer 2000^{2000} modulo 7 et 2^{500} modulo 3.

Exercice 272 Soit $a,b \in \mathbb{Z}^2$ dont les restes modulo 11 sont 7 et 2 respectivement. Donner le reste modulo 11 de a^2-b^2.

Exercice 273
1. Montrer que 7 divise $2222^{5555}+5555^{2222}$;
2. montrer que que 11 divise
$$5^{10^{5^{10^{5^{10}}}}} + 10^{5^{10^{5^{10^{5}}}}} ;$$
3. trouver un critère de divisibilité par 8 puis par 6.

Exercice 274 Montrer que pour tout $n > 0$:
1. 7 divise $3^{2n+1}+2^{n+2}$
2. 11 divise $2^{6n+3}+3^{2n+1}$
3. 6 divise $5n^3+n$

4. 8 divise $5^n + 2.3^{n-1} + 1$.

Exercice 275 1. Déterminer la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 3^{500}.

2. On se donne 51 nombres compris entre 1 et 100. Montrer que parmi ces nombres il y en a nécessairement au moins deux tels que l'un divise l'autre. Montrer que l'on peut toujours trouver un ensemble de 50 nombres compris entre entre 1 et 100 ne vérifiant pas la propriété de divisibilité ci-dessus.

Exercice 276 Trouver les entiers positifs n tels que $n-1$ divise n^2+1.

Exercice 277 Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, 4 ne divise pas n^2+1.

Exercice 278 Montrer que pour chaque entier positif n, 49 divise $2^{3n+3} - 7n - 8$.

Exercice 279 Trouver tous les entiers positifs a tels que $a^{10}+1$ est divisible par 10.

Exercice 280 Quel est le chiffre des unités de 19971997^{10} ?

Exercice 281 Montrer que :

1. Si un entier est de la forme $6k+5$, alors il est nécessairement de la forme $3k-1$, alors que la réciproque est fausse.
2. Le carré d'un entier de la forme $5k+1$ est aussi de cette forme.
3. Le carré d'un entier est de la forme $3k$ ou $3k+1$, mais jamais de la forme $3k+2$.
4. Le carré d'un entier est de la forme $4k$ ou $4k+1$, mais jamais de la forme $4k+2$ ni de la forme $4k+3$.
5. Le cube de tout entier est de la forme $9k$, $9k+1$ ou $9k+8$.
6. Si un entier est à la fois un carré et un cube, alors c'est une puissance sixième, et il est de la forme $7k$ ou $7k+1$.

Exercice 282 Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que :

1. $n | n+8$.
2. $n-1 | n+11$.
3. $n-3 | n^3-3$.

Exercice 283 Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(n|2k+1$ et $n|9k+4)$.

Exercice 284 Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ il existe un unique $r(a) \in \{0, \dots, b-1\}$ tel qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ avec $a = bq + r(a)$.

1. En utilisant ceci pour $b = 13$, déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $13 | n^2+n+7$.
2. Si $a \in \mathbb{N}$ et $b = 7$, déterminer les valeurs possibles de $r(a^2)$ (on rappelle que $r(a^2)$ doit appartenir à $\{0, \dots, b-1\}$).
   Montrer alors que $\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2$ $(7 | x^2+y^2)$ ssi $(7|x$ et $7|y)$.
3. Montrer qu'un entier positif de la forme $8k+7$ ne peut pas être la somme de trois carrés d'entiers.

Exercice 285 1. Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.

2. Montrer de même que tout nombre pair vérifie $x^2 = 0[8]$ ou $x^2 = 4[8]$.
3. Soient a, b, c trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de $a^2+b^2+c^2$ et celui de $2(ab+bc+ca)$.
4. En déduire que ces deux nombres ne sont pas des carrés puis que $ab+bc+ca$ non plus.

[Exercice corrigé]

6.2 Sous-groupe de $\mathbb{Z}$

Exercice 286 Montrer qu'il est équivalent dans $\mathbb{Z}$ de dire m divise n, ou $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$.

Exercice 287
1. Montrer que l'intersection de deux sous-groupes de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Caractériser le sous-groupe $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. Caractériser les sous-groupes suivants :
$$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}\ ; \quad 5\mathbb{Z} \cap 13\mathbb{Z}\ ; \quad 5\mathbb{Z} \cap 25\mathbb{Z}.$$
2. Montrer que toute intersection de sous-groupes de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Caractériser l'intersection d'une famille finie de sous-groupes. Caractériser les sous-groupes suivants :
$$\bigcap_{n=1}^{17} 2^n\mathbb{Z}\ ; \quad 4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} \cap 8\mathbb{Z} \cap 19\mathbb{Z} \cap 35\mathbb{Z}.$$

Exercice 288
1. Déterminer $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$. Est-ce un sous-groupe de $\mathbb{Z}$?
2. Déterminer : $7\mathbb{Z} \cup 49\mathbb{Z}$; $5\mathbb{Z} \cup 45\mathbb{Z}$; $\bigcup_{n=1}^{28} 2^n\mathbb{Z}$. Ces ensembles sont-ils des sous-groupes de $\mathbb{Z}$?
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une réunion de deux sous-groupes de $\mathbb{Z}$ soit un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

Exercice 289
1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{Z}$; montrer que la famille des sous-groupes contenant A n'est pas vide. Soit H une partie contenant A. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :
   i) H est l'intersection des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ qui contiennent A,
   ii) H est le plus petit sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui contient A,
   iii) H est l'ensemble des sommes finies d'éléments de A ou d'éléments dont l'opposé est dans A.

   Si ces conditions sont vérifiées on dit que H est le sous-groupe engendré par A.
2. Soient $m\mathbb{Z}$ et $n\mathbb{Z}$ deux sous-groupes de $\mathbb{Z}$. Montrer que
$$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \{mu + nv \mid u, v \in \mathbb{Z}\}$$
   a) est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$,
   b) contient $m\mathbb{Z}$ et $n\mathbb{Z}$,
   c) est contenu dans tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui contient $m\mathbb{Z}$ et $n\mathbb{Z}$.
   d) Si $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, que peut-on dire de d ?
3. Déterminer les sous-groupes engendrés par : $14\mathbb{Z} \cup 35\mathbb{Z}$; $4\mathbb{Z} \cup 8\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z} \cup 64\mathbb{Z}$; $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$; $4\mathbb{Z} \cup 21\mathbb{Z}$; $5\mathbb{Z} \cup 25\mathbb{Z} \cup 7\mathbb{Z}$; $\{70, 4\}$.

6.3 Pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide

Exercice 290 Calculer le pgcd des nombres suivants :
1. 126, 230.
2. 390, 720, 450.
3. 180, 606, 750.

[Exercice corrigé]

Exercice 291 1. Calculer le ppcm des nombres : 108 et 144 ; 128 et 230 ; 6, 16 et 50.

2. Montrer que si $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$ sont des entiers de pgcd d et, si on pose $a = da'$; $b = db'$, le ppcm de a et b est $da'b'$.
3. Montrer que si a, b, c sont des entiers supérieurs à 1, on a :

$$\text{ppcm}(a, b, c) = \text{ppcm}(\text{ppcm}(a, b), c).$$

Exercice 292 Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.
[Exercice corrigé]

Exercice 293 Si a, b, c, d sont des entiers supérieurs à 1, montrer que l'on a :

$$(a, b, c, d) = ((a, b), (c, d))$$

où (,) désigne le pgcd .

Exercice 294 1. Soient a, b, c des entiers relatifs tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, montrer que pour que l'équation

$$ax + by = c$$

ait une solution (x, y) en entiers relatifs x et y, il faut et il suffit que le pgcd de a et b divise c.

2. Résoudre en entiers relatifs les équations suivantes :

$$7x - 9y = 1,$$

$$7x - 9y = 6,$$

$$11x + 17y = 5.$$

Exercice 295 Soient a et b deux entiers tels que $a \geqslant b \geqslant 1$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

1. Montrer que $\text{pgcd}(a + b, a - b) = 1$ ou 2,
2. Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, montrer que $\text{pgcd}(a + b, ab) = 1$,
3. Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, montrer que $\text{pgcd}(a + b, a^2 + b^2) = 1$ ou 2.

Exercice 296 Calculer par l'algorithme d'Euclide : $18480 \wedge 9828$. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.
[Exercice corrigé]

Exercice 297 Déterminer le pgcd de 99 099 et 43 928. Déterminer le pgcd de 153 527 et 245 479.

Exercice 298 Déterminer l'ensemble de tous les couples (m, n) tels que

$$955m + 183n = 1.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 299 Calculer, en précisant la méthode suivie,

$$a = \text{pgcd}(720, 252) \qquad b = \text{ppcm}(720, 252)$$

ainsi que deux entiers u et v tels que $720u + 252v = a$.

Exercice 300 Démontrer :

$$a \wedge (b_1 b_2) = 1 \Leftrightarrow (a \wedge b_1 = 1 \text{ et } a \wedge b_2 = 1),$$

puis par récurence :

$$a \wedge (b_1 \dots b_n) = 1 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad a \wedge b_i = 1.$$

Exercice 301 Démontrer pour $m, n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^m \wedge b^n = 1 \Rightarrow a \wedge b = 1.$$

Exercice 302 Déteminer deux entiers naturels connaissant leur somme, 1008, et leur pgcd, 24.

Exercice 303 Notons $a = 1\,111\,111\,111$ et $b = 123\,456\,789$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Calculer $p = \text{pgcd}(a, b)$.
3. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = p$.

[Exercice corrigé]

Exercice 304 Soient m et n deux entiers ($m > n > 0$) et $a \geqslant 2$ un entier. Montrer que le reste de la division euclidienne de $a^m - 1$ par $a^n - 1$ est $a^r - 1$ où r est le reste de la division euclidienne de m par n, et que le pgcd de $a^m - 1$ et $a^n - 1$ est $a^d - 1$, où d est le pgcd de m et n.

Exercice 305 Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $1665x + 1035y = 45$.
[Exercice corrigé]

Exercice 306 Montrer qu'il n'existe pas d'entiers m et n tels que

$$m + n = 101 \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(m, n) = 3$$

Exercice 307 Soit m et n deux entiers positifs.

1. Si $\text{pgcd}(m, 4) = 2$ et $\text{pgcd}(n, 4) = 2$, montrer que $\text{pgcd}(m + n, 4) = 4$.
2. Montrer que pour chaque entier n, 6 divise $n^3 - n$.
3. Montrer que pour chaque entier n, 30 divise $n^5 - n$.
4. Montrer que si m et n sont des entiers impairs, $m^2 + n^2$ est pair mais non divisible par 4.
5. Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs est divisible par 24.
6. Montrer que si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, alors
   - $\text{pgcd}(a + b, a - b) \in \{1, 2\}$,
   - $\text{pgcd}(2a + b, a + 2b) \in \{1, 3\}$,
   - $\text{pgcd}(a^2 + b^2, a + b) \in \{1, 2\}$,
   - $\text{pgcd}(a + b, a^2 - 3ab + b^2) \in \{1, 5\}$.

Exercice 308 Trouver une CNS pour que $ax + b \equiv 0 \mod \mathrm{n}$ ait une solution.

Exercice 309
1. Calculer $\text{pgcd}(18, 385)$ par l'algorithme d'Euclide, en déduire un couple $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ solution de l'équation $18u + 385v = 1$, avec $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$.
2. Fournir enfin l'ensemble des solutions entières de

$$18u + 385v = 1; \quad 18u + 385v = 3; \quad 54u + 1155v = 3; \quad 54u + 1155v = 5.$$

Exercice 310 Trouver a et b entiers naturels tels que

1. $a+b=2070$ et $\text{ppcm}(a,b)=9180$;
2. $a^2+b^2=5409$ et $\text{ppcm}(a,b)=360$ (on pourra commencer par montrer que pgcd (a,b) divise $\text{pgcd}(5409,360)$ et considérer ensuite différents cas).

Exercice 311 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations : $35x\equiv 7 \mod 4$; $22\text{x}\equiv 33 \mod 5$

Exercice 312 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$S:\left\{\begin{array}{lcll} x & \equiv & 4 & \mod 6 \\ x & \equiv & 7 & \mod 9 \end{array}\right.$$

On recherchera d'abord une solution particulière.

Exercice 313 1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations : $x^2\equiv 2 \mod 6$; $\text{x}^3\equiv 3 \mod 9$.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes : $5x^2+2xy-3=0$; $y^2+4xy-2=0$.

Exercice 314 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

a) $17x+6y=1$ b) $27x+25y=1$
c) $118x+35y=1$ d) $39x+26y=1$

Exercice 315 Montrer que si a divise $42n+37$ et $7n+4$, pour une valeur de n donnée, alors a divise 13. Quelles sont les valeurs possibles pour n ?

Exercice 316 Trouver $\text{pgcd}(-357,629)$ et trouver des entiers x et y tels que

$$\text{pgcd}(-357,629)=-357x+629y$$

Exercice 317 Trouver $\text{pgcd}(2183,6313)=d$ et trouver des entiers x et y tels que

$$d=2183x+6313y$$

Exercice 318 Supposons $\text{pgcd}(a,b)=d$ et soit x_0 et y_0 des entiers tels que $d=ax_0+by_0$. Montrer que :

1. $\text{pgcd}(x_0,y_0)=1$,
2. x_0 et y_0 ne sont pas uniques.

Exercice 319 Soit a, b, c des entiers.

1. Montrer que $\text{pgcd}(ca,cb)=|c|\,\text{pgcd}(a,b)$.
2. Montrer que $\text{pgcd}(a^2,b^2)=(\text{pgcd}(a,b))^2$.
3. Montrer que si $\text{pgcd}(a,b)=1$ et si c divise a, alors $\text{pgcd}(c,b)=1$.
4. Montrer que $\text{pgcd}(a,bc)=1 \iff \text{pgcd}(a,b)=\text{pgcd}(a,c)=1$.
5. Montrer que si $\text{pgcd}(b,c)=1$ alors $\text{pgcd}(a,bc)=\text{pgcd}(a,b)\text{pgcd}(a,c)$.
6. Montrer que $\text{pgcd}(a,b)=\text{pgcd}(a+b,\text{ppcm}(a,b))$.

Exercice 320 En divisant un nombre par 8, un élève a obtenu 4 pour reste ; en divisant ce même nombre par 12, il a obtenu 3 pour reste. Qu'en pensez-vous ?
Le fort en calcul de la classe, qui ne fait jamais d'erreur, a divisé le millésime de l'année par 29, il a trouvé 25 pour reste ; il a divisé le même millésime par 69, il a trouvé 7 pour reste. En quelle année cela se passait-il ?

Exercice 321 Trouver deux nombres sachant que leur somme est 581 et que le quotient de leur PPCM par leur pgcd est 240.

Exercice 322 Trouver les solutions entières de l'équation :

$$102x - 18018y = 18.$$

Combien y a-t-il de solutions telles que x et y soient compris entre entre 0 et 4000 ?

Exercice 323 Le pgcd de deux nombres est 12 ; les quotients successifs obtenus dans le calcul de ce pgcd par l'algorithme d'Euclide sont 8, 2 et 7. Trouver ces deux nombres.

Exercice 324 Trouver les couples de nombres a et b, divisibles par 3, vérifiant les propriétés suivantes : leur ppcm est 7560, et si on augmente chacun de ces nombres d'un tiers de sa valeur, le pgcd des deux nombres obtenus est 84.

Exercice 325 Un terrain rectangulaire dont les dimensions en mètres a et b sont des nombres entiers, a pour aire 3024 m^2. Calculer son périmètre sachant que le pgcd de a et b est 6. Combien y a-t-il de solutions possibles ?

Exercice 326
1. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, écrire l'ensemble des multiples de $\bar{x}$, classe de x, pour x variant de 0 à $n-1$ dans chacun des cas suivants : $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
2. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, montrer l'équivalence des trois propositions :
   i) $\bar{x}$ est inversible ;
   ii) x et n sont premiers entre eux ;
   iii) $\bar{x}$ engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, c'est à dire que l'ensemble des multiples de $\bar{x}$ est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. La classe de 18 est-elle inversible dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse ? (On pourra utiliser le théorème de Bézout).

Exercice 327 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :
1. $91x - 65y = 156$.
2. $135x - 54y = 63$.
3. $72x + 35y = 13$.

Exercice 328 Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :
1. $31x - 13y = 1$.
2. $31x - 13y = -1$.

Application : Au bord d'une piscine pleine d'eau, on dispose d'une cuve fixe de 31 litres munie à sa base d'un robinet de vidange, et d'un seau de 13 litres. Expliquer comment opérer pour obtenir exactement 1 litre dans le seau.

Exercice 329 Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $77x + 105y = 2401$.

Exercice 330 Dans un pays nommé ASU, dont l'unité monétaire est le rallod, la banque nationale émet seulement des billets de 95 rallods et des pièces de 14 rallods.
1. Montrer qu'il est possible de payer n'importe quelle somme entière (à condition bien sûr que les deux parties disposent chacune d'assez de pièces et de billets).
2. On suppose que vous devez payer une somme S, que vous avez une quantité illimitée de pièces et de billets, mais que votre créancier ne puisse pas rendre la monnaie. Ainsi, il est possible de payer si $S = 14$, mais pas si $S = 13$ ou si $S = 15\dots$ Montrer qu'il est toujours possible de payer si S est assez grande. Quelle est la plus grande valeur de S telle qu'il soit impossible de payer S ?

Exercice 331 Trouver tous les points à coordonnées entières du plan d'équation $6x + 10y + 15z = 1997$. Combien y a-t-il de solutions dans $\mathbb{N}^3$?

Exercice 332 1. Trouver tous les points à coordonnées entières de la droite de l'espace d'équations $\left\{\begin{array}{lll} 4x - 2y - z - 5 & = & 0 \\ x + 3y - 4z - 7 & = & 0 \end{array}\right.$.

2. Même question avec la droite $\left\{\begin{array}{lll} x + 3y - 5z - 5 & = & 0 \\ 4x - 2y + z + 13 & = & 0 \end{array}\right.$.

Exercice 333 Résoudre dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$ l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15}$$

Exercice 334 Un coq coûte 5 pièces d'argent, une poule 3 pièces, et un lot de quatre poussins 1 pièce. Quelqu'un a acheté 100 volailles pour 100 pièces ; combien en a-t-il acheté de chaque sorte ?

Exercice 335 Soient a et b deux nombres entiers relatifs. On note d leur pgcd. Construisons les suites a_n et b_n $n \in \mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{Z}$de la manière suivante :

$$\begin{array}{lll} a_0 & = & a \\ b_0 & = & b \end{array}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = r$ où r est le reste de la division euclidienne de a_n par b_n.

1. Montrer que si d_n est le pgcd de a_n et b_n alors d_n est également le pgcd de a_{n+1} et b_{n+1}.
2. Déduire de la questionh précédente que d est le pgcd des nombres a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite b_n est strictement décroissante. Que peut-on en déduire ?
4. Déduire de ce qui précède que pour tout couple d'entiers relatifs (a, b) il existe un couple d'entier relatifs (u, v) tel que :
$$d = au + bv.$$

6.4 Nombres premiers, nombres premiers entre eux

Exercice 336 Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1. $(2^a - 1)|(2^{ab} - 1)$;
2. $(2^a - 1) \wedge (2^b - 1) = (2^{a \wedge b} - 1)$;
3. $(2^a - 1$ premier $) \Rightarrow (a$ premier $)$.

[Exercice corrigé]

Exercice 337 Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a + b$ et ab.

[Exercice corrigé]

Exercice 338 Résoudre l'équation $29x - 11y = 1$ dans $\mathbb{Z}$.
On considère maintenant l'équation $29x - 11y = 5$. Déduire de ce qui précède une solution particulière de cette équation, puis en donner la solution générale.

Exercice 339 Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}, 0 < i < p$ on a :
$$C_p^i \text{ est divisible par } p.$$
2. Montrer par récurence que :
$$\forall p \text{ premier}, \forall a \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } a^p - a \text{ est divisible par } p.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 340 1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que :
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow \exists (x', y', z') \in \mathbb{N}^3, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq} \\ \text{pgcd}(x', y', z') = 1 \\ x'^2 + y'^2 = z'^2 \\ x = nx' \text{ et } y = ny' \text{ et } z = nz'. \end{aligned}$$

2. Soit$(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$. On suppose que pgcd$(x, y, z) = 1$
   (a) Montrer que x et y ne sont pas de mêmes parité.
   (b) On suppose x pair et y impair. On pose :
   $$x = 2u,\ z - y = 2v,\ z + y = 2w$$
   avec $(u, v) \in \mathbb{N}^*$. Montrer que v et w sont premiers entre eux.
   (c) Montrer que
   $$x = 2mn,\ y = m^2 - n^2,\ z = m^2 + n^2$$
   avec m et n entiers naturels de parité différentes.
   (d) Montrer que si
   $$x = 2mn,\ y = m^2 - n^2,\ z = m^2 + n^2$$
   alors
   $$x^2 + y^2 = z^2.$$

Exercice 341 (Nombres de Fermat) 1. Montrer par récurence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant 1$ on a :
$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$

2. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

[Exercice corrigé]

Exercice 342 Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si a divise b et b divise c, alors a divise c.
2. Si a divise b et c, alors a divise $2b + 3c$.
3. S'il existe u et v entiers tels que $au + bv = 4$ alors pgcd$(a, b) = 4$.
4. Si $7a - 9b = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.

5. Si a divise b et b divise c et c divise a, alors $|a| = |b|$.
6. « a et b premiers entre eux » équivaut à « $\text{ppcm}\,(a, b) = |ab|$ ».
7. Si a divise c et b divise d, alors ab divise cd.
8. Si 9 divise ab et si 9 ne divise pas a, alors 9 divise b.
9. Si a divise b ou a divise c, alors a divise bc.
10. « a divise b » équivaut à « $\text{ppcm}(a, b) = |b|$ ».
11. Si a divise b, alors a n'est pas premier avec b.
12. Si a n'est pas premier avec b, alors a divise b ou b divise a.

Exercice 343 1. Soit $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier. Montrer que si $a \in \mathbb{Z}$ n'est pas congru à 0 modulo p alors p ne divise pas a et donc $\text{pgcd}(a, p) = 1$.

2. Soit $a \in \mathbb{Z}$ non congru à 0 modulo p avec p premier. Montrer en utilisant le a) qu'il existe $u \in \mathbb{Z}$ non congru à 0 modulo p vérifiant $au \equiv 1[p]$. (Remarquer que cela donne un inverse de a modulo p).
3. Montrer que si p n'est pas premier, il existe des éléments $a, u \in \mathbb{Z}$ non nuls modulo p tels que $au \equiv 0[p]$.

Exercice 344 1. Montrer que deux entiers non nuls consécutifs sont toujours premiers entre eux.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\text{pgcd}((n+1)^2, n+2) = 1$.

Exercice 345 Prouver que pour vérifier qu'un entier p est premier, il suffit de vérifier qu'il n'a pas de diviseurs inférieurs ou égaux à $\sqrt{p}$.

Exercice 346 (Théorème de Wilson) Démontrer que tout nombre premier p divise $(p-1)! + 1$.

Exercice 347 Montrer que les nombres suivants ne sont pas premiers :

1. $n^4 - 20n^2 + 4$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. $\frac{1}{4}(n^3 + (n+2)^3)$ pour $n \geqslant 2$.
3. $a^4 + 4b^4$ pour $a, b \geqslant 2$.

Exercice 348 Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k + 1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \dots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2 \dots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k + 3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

[Exercice corrigé]

Exercice 349 Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^n + 1$ soit premier, montrer que $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2^k$. Que penser de la conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$ est premier ?

[Exercice corrigé]

Exercice 350 Soit n un nombre premier et $p \in \{1, ..., n-1\}$, montrer que $n$divise C_n^p.

Exercice 351 Soient a et b deux entiers supérieurs à 2 premiers entre eux, montrer que :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0, n \in \left\{ax + by | (x, y) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

6.5 Divers

Exercice 352 Résoudre en nombres entiers naturels l'équation :

$$(x+1)(y+2) = 2xy.$$

Exercice 353 Montrer que $(0,0,0)$ est le seul triplet (x,y,z) d'entiers naturels tels que l'on ait :

$$x^2 + y^2 = 3z^2.$$

Exercice 354 Déterminer les solutions des équations :

$$x^2 - 5x - 11 \equiv 0 \text{ mod } 17; \quad \cos((\mathrm{n}^2 - 8\mathrm{n} + 2)\pi/7) = 1$$

Exercice 355 Un groupe de $N \geqslant 2$ personnes se réunit. Montrer qu'au moins deux personnes ont serré le meme nombre de mains. On pourra séparer les deux cas suivants : soit tout le monde a serré au moins une main, soit il existe quelqu'un qui n'a serré aucune main.

7 Polynômes

7.1 Division euclidienne

Exercice 356 Effectuer la division euclidienne du polynôme $P = X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ par $Q = X^2 - 1$. Même exercice lorsque $P = X^4 - 2X\cos(2\varphi) + 1$ et $Q = X^2 - 2X\cos(\varphi) + 1$.

Exercice 357 Soit P un polynôme. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 1 et celui de la division de P par $X - b$ est -1, $(a \neq b)$, quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$?

Exercice 358 Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X-1)^2$.

Exercice 359 Pour quelles valeurs de m le polynôme $P = (X+1)^m - X^m - 1$ est-il divisible par le polynôme $Q = X^2 + X + 1$?

Exercice 360 Montrer que le polynôme $P(X) - X$ divise le polynôme $P(P(X)) - X$.

Exercice 361 Déterminer $a, b \in \mathbb{Z}$ de façon à ce que le polynôme $aX^{n+1} - bX^n + 1$ soit divisible par le polynôme $(X-1)^2$. Calculer alors le quotient des deux polynômes.

Exercice 362 Existe-t-il un polynôme P de degré 7 tel que $(X-1)^4$ divise $P(X)+1$ et $(X+1)^4$ divise $P(X) - 1$?

Exercice 363 Effectuer les divisions par puissances croissantes de :

1. $P = 1$ par $Q = 1 - X$, à l'ordre n,
2. $P = 1 + X$ par $Q = 1 + X^2$ à l'ordre 5,
3. $P = X - \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{12}$ par $Q = 1 - 2X^2 + X^4$ à l'ordre 5.

Exercice 364 Effectuer les divisions euclidiennes de
$3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$,
$3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$,
$X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$.
[Exercice corrigé]

Exercice 365 Dans $\mathbb{C}[X]$, effectuer les divisions euclidiennes de
$X^2 - 3iX - 5(1+i)$ par $X - 1 + i$,
$4X^3 + X^2$ par $X + 1 + i$.

Exercice 366 Effectuer la division selon les puissances croissantes de :

$$X^4 + X^3 - 2X + 1 \text{ par } X^2 + X + 1 \text{ à l'ordre } 2.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 367 Soit a et b deux nombres complexes distincts, m et n deux entiers naturels. Montrer que si les polynômes $(X-a)^m$ et $(X-b)^n$ divisent un polynôme P, alors le polynôme $(X-a)^m(X-b)^n$ divise P.

Exercice 368 Pour $n \in \mathbb{N}$, quel est le reste de la division de $X^n + X + b$ par $(X-a)^2$?

Exercice 369 Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$. Trouver le quotient si $n = 2$.

Exercice 370 Trouver les polynômes P tels que $P+1$ soit divisible par $(X-1)^4$ et $P-1$ par $(X+1)^4$:

1. en utilisant la relation de Bézout,
2. en considérant le polynôme dérivé P'.

Combien y a-t-il de solutions de degré $\leqslant 7$?
[Exercice corrigé]

Exercice 371 Effectuer la division de $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$:

1. Suivant les puissances décroissantes.
2. À l'ordre 4 (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par X^5) suivant les puissances croissantes.

[Exercice corrigé]

Exercice 372 Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

Exercice 373 Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\sin aX + \cos a)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 374 Soit P un polynôme dont le reste de la division euclidienne par $X - 1$ est 7 et par $X + 5$ est 3. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 4X - 5$?

Exercice 375 Effectuer la division euclidienne de $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ par $X^2 - 5X + 4$.
[Exercice corrigé]

Exercice 376 Soit $n \geqslant 1$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ par $(X-1)^2$.

Exercice 377 Soient $P, Q \in K[X]$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $P(X^3) + XQ(X^3)$. Montrer que $P(1) = Q(1) = 0$. Réciproque ?

Exercice 378 Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?
[Exercice corrigé]

7.2 Pgcd

Exercice 379 Calculer pgcd(P, Q) lorsque :

1. $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$,
2. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$.

[Exercice corrigé]

Exercice 380 Déterminer le pgcd des polynômes suivants :
$X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2$,
$X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $X^3 + X^2 - X - 1$,
$X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3$ et $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.
[Exercice corrigé]

Exercice 381 Déterminer $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^3 + 1)A + (X^2 + X + 1)B = 1$.

Exercice 382 Montrer qu'il existe deux polynômes : U, V, vérifiant : $(\star)$ $(X-1)^n U + X^n V = 1$. Déterminer U_1 et V_1 de degré strictement inférieur à n, satisfaisant cette égalité. En déduire tous les polynômes U, V vérifiant $(\star)$.

Exercice 383 Soient P, Q deux polynômes premiers entre eux.

1. Montrer qu'alors P^n et Q^m sont premiers entre eux où n, m sont deux entiers positifs.
2. Montrer de même que $P + Q$ et PQ sont premiers entre eux.

Exercice 384 Soit n un entier positif.

1. Déterminer le pgcd des polynômes $(X^n - 1)$ et $(X - 1)^n$.
2. Pour $n = 3$ démontrer qu'il existe un couple de polynômes (U, V) tel que $(X^3 - 1)U + (X - 1)^3 V = X - 1$. En donner un.

Exercice 385 Montrer que les éléments $X^2 + X$, $X^2 - X$, $X^2 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux, mais ne sont pas premiers entre eux deux à deux.

Exercice 386 Trouver tous les polynômes U et V de $\mathbf{R}[X]$ tels que $AU + BV$ soit un pgcd de A et B avec $A = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$ et $B = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$.

Exercice 387 Calculer le pgcd D des polynômes A et B définis ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que $D = AU + BV$.

1. $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.
2. $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$.

[Exercice corrigé]

Exercice 388 Trouver le pgcd des trois polynômes :

$$\begin{aligned} A &= X^5 + 4X^4 + 6X^3 + 6X^2 + 5X + 2 \\ B &= X^2 + 3X + 2 \\ C &= X^3 + 2X^2 + X + 2. \end{aligned}$$

Exercice 389 Soit les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} A &= (X + 3)^2 (X + 1)(X^2 + 1)^3 \\ B &= (X + 3)^2 (X + 2)^2 (X^2 + 1) \\ C &= (X + 3)(X + 2)(X^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

1. Combien A possède-t-il de diviseurs normalisés ? et B ? et C ?
2. Écrire le pgcd et le ppcm de A et B.
3. Écrire le pgcd et le ppcm des trois polynômes A, B et C.

Exercice 390 1. Trouver le pgcd de $X^{24}-1$ et $X^{15}-1$; le pgcd de $X^{280}-1$ et $X^{60}-1$.

2. Montrer que quels que soient les entiers positifs b et q, X^b-1 divise $X^{bq}-1$. En déduire que le reste de la division de X^a-1 par X^b-1 est X^r-1 où r est le reste de la division dans $\mathbb{N}$ de a par b. Quel est alors le pgcd de X^a-1 et X^b-1 ? Application : trouver le pgcd de $X^{5400}-1$ et $X^{1920}-1$.
3. P étant un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[X]$, et a et b deux entiers naturels, quel est le pgcd de P^a-1 et P^b-1 ? Indication : utiliser le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 391 Soit $A \in \mathbb{C}[X]$ et $B \in \mathbb{C}[X]$.

1. A-t-on $\mathrm{pgcd}(A,B)=1 \iff \mathrm{pgcd}(A+B,AB)=1$?
2. A-t-on $\mathrm{pgcd}(A,B)=\mathrm{pgcd}(A+B,AB)$?

Exercice 392 Soit n un entier strictement positif.

1. Démontrer qu'il existe un unique couple de polynômes P et Q de degrés strictement inférieurs à n tels que $(1-X)^nP(X)+X^nQ(X)=1$.
2. Démontrer que $P(1-X)=Q(X)$ et $Q(1-X)=P(X)$.
3. Démontrer qu'il existe une constante a telle que
$$(1-X)P'(X)-nP(X)=aX^{n-1}.$$
En déduire les coefficients de P et la valeur de a.

Réponse : $a=-(2n-1)C_{2n-2}^{n-1}$.

Exercice 393 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$, premiers entre eux, tels que $P^2+Q^2=(X^2+1)^2$. En déduire que l'équation $x^2+y^2=z^2$ a une infinité de solutions (non proportionnelles) dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 394 1. Montrer que les polynômes $X-1$ et $X-2$ sont premiers entre eux et en déduire $d=\mathrm{pgcd}((X-1)^2,(X-2)^3)$ et des U et V polynômes tels que
$$U(X-1)^2+V(X-2)^3=d.$$

2. Déterminer le polynôme P, de degré minimal, tel que le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $2X$ et le reste de la division euclidienne de P par $(X-2)^3$ est $3X$.

Exercice 395 Montrer que les polynômes complexes $P=X^{1998}+X+1$ et $Q=X^5+X+1$ sont premiers entre eux.

7.3 Racines, décomposition en facteurs irréductibles

Exercice 396 1. Montrer que le polynôme $P(X)=X^5-X^2+1$ admet une unique racine réelle et que celle-ci est irationnelle.

2. Montrer que le polynôme $Q(X)=2X^3-X^2-X-3$ a une racine rationnelle (qu'on calculera). En déduire sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 397 Soit $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers premiers entre eux (c'est à dire tels que les seuls diviseurs communs à tous les a_i soient -1 et 1). Montrer que si $r = \dfrac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux est une racine rationnelle de P alors p divise a_0 et q divise a_n.

Exercice 398 Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degré n.

1. Montrer que si P est irréductible dans $\mathbb{Q}$ alors il n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P, de multiplicité strictement plus grande que $\dfrac{n}{2}$.Montrer que λ est rationnel.

Exercice 399 Montrer que le polynôme $nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$ admet une racine multiple. Application : déterminer les racines du polynôme $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.

Exercice 400 Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P.
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$
3. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles : $P = X^4 + X^2 + 1$, $Q = X^{2n} + 1$, $R = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, $S = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ (on cherchera les racines doubles de S).

Exercice 401 Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$, sans déterminer ses racines, le polynôme $P = X^4 + 1$, en produit de facteurs irréductibles.

[Exercice corrigé]

Exercice 402 Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $X - a$ divise $X^n - a^n$.

Exercice 403 Décomposer $X^{12} - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 404 Prouver que B divise A, où :
$A = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ et $B = X^2 + X + 1$,
$A = (X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ et $B = X(X + 1)(2X + 1)$,
$A = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$ et $B = (X - 1)^2$.

Exercice 405 Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $n \in \mathbb{Z}$; notons $m = P(n)$; ($\deg(P) \geqslant 1$).

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{Z}, m$ divise $P(n + km)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P dans $\mathbb{Z}[X]$, non constant, tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ soit premier.

Exercice 406 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = S^2 + T^2$ (on utilisera la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$).
Indications :

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer $c, d \in \mathbb{R}$ tels que : $ab = c^2 - d^2$, vérifier que $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$.
2. Résoudre le problème pour P de degré 2.
3. Conclure.

Exercice 407 Soit $\theta \in \mathbb{R}$; on suppose $\sin n\theta \neq 0$. Déterminer les racines du polynôme $P = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \sin k\theta\, X^k$. Vérifier que ces racines sont toutes réelles.

Exercice 408 Soit $a \in \mathbb{C}$, $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$, premiers entre eux. On suppose que a est racine double de $P^2 + Q^2$. Montrer que a est racine de $P'^2 + Q'^2$.

Exercice 409 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$$

[Exercice corrigé]

Exercice 410 Pour quelles valeurs de a le polynôme $(X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?
[Exercice corrigé]

Exercice 411 Montrer que le polynôme $X^3 + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 412 Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles.

1. $X^3 - 3$.
2. $X^{12} - 1$.

[Exercice corrigé]

Exercice 413 Quelle est la décomposition de $X^6 + 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$? Dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 414 Soit P le polynôme $X^4 + 2X^2 + 1$. Déterminer les multiplicités des racines i et $-i$, de deux façons différentes : soit en décomposant P dans $\mathbb{C}[X]$, soit en utilisant le polynôme dérivé de P.

Exercice 415 Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?
3. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 416 Soit E le polynôme du troisième degré : $aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, et soit x_1, x_2, x_3 ses trois racines dans $\mathbb{C}$. Trouver un polynôme ayant pour racines x_1x_2, x_2x_3 et x_3x_1.

Exercice 417 Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 - 2X^2 + X + 3$. Calculer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

Exercice 418 Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer qu'il y a un nombre fini de polynômes unitaires de degré n à coefficients entiers ayant toutes leurs racines de module inférieur ou égal à 1.

Exercice 419 Soit $n \geqslant 2$ et $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}X^k$. P_n a-t-il une racine double ?

Exercice 420 Résoudre les équations :

1. $P'P'' = 18P$ où $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 421 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

1. Montrer qu'il en est de même de P'.
2. Montrer que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 422 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. Quel est le degré de P ?
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

3. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^* \ \prod_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}(\frac{k\pi}{2p+1}) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

Exercice 423 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^6 + 1$.
2. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

[Exercice corrigé]

7.4 Divers

Exercice 424 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un polynôme P_n et un seul tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta.$$

Montrer que P_n est unitaire et que ses coefficients sont entiers. En déduire les r rationnels tels que $\cos r\pi$ soit rationnel.

Exercice 425 Déterminer, s'il en existe, tous les idéaux J de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $I(P) \subset J \subset \mathbb{R}[X]$, avec $I(P)$ idéal engendré par P dans les cas suivants :

$$P = X^2 + X + 1, \quad P = X^2 + 2X + 1, \quad P = X^3 + 3X - 4.$$

Exercice 426 Trouver un polynôme P de degré $\leqslant 2$ tel que

$$P(1) = -2 \quad \text{et} \quad P(-2) = 3 \quad \text{et} \quad P(0) = -1$$

[Exercice corrigé]

Exercice 427 Trouver un polynôme P de degré minimum tel que

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4$$

[Exercice corrigé]

Exercice 428 Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall k \in \mathbb{Z}\ \int_k^{k+1} P(t)dt = k+1$ (on pourra utiliser le polynôme $Q(x) = \int_0^x P(t)dt$).

Exercice 429 Soit $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\forall k \in \{0, \dots, n\}\ \deg P_k =$ k. Montrer à l'aide d'une récurrence soigneuse que cette famille est libre.

Exercice 430 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$.

1. Montrer que Δ est linéaire, i.e. que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]\ \Delta(aP+bQ) = a\Delta(P) + b\Delta(Q)$.
2. Déterminer $\ker(\Delta) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \Delta(P) = 0\}$.
3. Soient $H_0 = 1$ et pour $k \in \{1, \dots, n\}\ H_k = \frac{1}{k!}X(X-1)\dots(X-k+1)$. Calculer $\Delta(H_k)$.
4. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comment trouver $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta(P) = Q$.
5. Déterminer P pour $Q = X^2$ tel que $P(1) = 0$.
6. En déduire la somme $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Exercice 431 Résoudre l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$: $P(X+1)P(X) = -P(X^2)$.

Exercice 432 Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ tels que $\exists (a,A) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \forall x \in]-a,a[, |P(x)-Q(x)| \leqslant A\left|x^{n+1}\right|$. Que dire de P et Q ?

Exercice 433 Soient $W_n = (X^2-1)^n$, $L_n = \frac{1}{2^n n!} W_n^{(n)}$.

1. Donner le degré de L_n, son coefficient dominant, sa parité, calculer $L_n(1)$. Donner L_0, L_1, L_2.
2. Démontrer : $\forall n \geqslant 1, (X^2-1)W_n' = 2nXW_n$, en déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2-1)L_n'' + 2XL_n' - n(n+1)L_n = 0.$$
3. Montrer ensuite : $\forall n \geqslant 1, L_n' = XL_{n-1}' + nL_{n-1}$, puis $nL_n = XL_n' - L_{n-1}'$.
4. Montrer enfin que les polynômes L_n peuvent être définis par la récurrence :
$$(n+1)L_{n+1} = (2n+1)XL_n - nL_{n-1}.$$

Exercice 434 Montrer que si $n \geqslant 3$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution non triviale (i.e. $xyz \neq 0$) dans $\mathbb{C}[X]$.
Indication : on peut supposer x, y, z, sans facteurs communs. Dériver la relation, la multiplier par z, étudier le degré.

Exercice 435 Soit $n \in \mathbb{N}^*, P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n, avec $P(0) = 1, P(1) = 0$, montrer :
$$\sup_{|z|=1} |P(z)| \geqslant 1 + \frac{1}{n}.$$

Indication : $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$, montrer $\sum\limits_{k=0}^{n} P(w_k) = (n+1)a_0.$

Exercice 436

1. Lemme : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, $z_0 \in \mathbb{C}$, montrer que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} |\, |z - z_0| \leqslant \varepsilon\}, |P(z)| > |P(z_0)|.$$
Indications : Ecrire $P(z_0 + h) = P(z_0) + \sum_{m=k}^{\deg P} \frac{h^m}{m!} P^{(m)}(z_0)$où k est le plus petit entier strictement positif tel que $P^{(i)}(z_0) \neq 0$.
On se propose de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine complexe.
2. Expliquer pourquoi le minimum de la fonction $z \to |P(z)|$ est atteint sur un disque centré en 0, mettons $D(0, \mathbb{R})$, et expliquer pourquoi :
$$\exists z_0 \in \mathbb{C}, |P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|.$$
3. Montrer avec le lemme que $P(z_0) = 0$.

Exercice 437 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$. Quel est le degré de P ? Le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 438 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme dont tous les zéros sont réels et distincts, montrer que $\phi = (P')^2 - PP''$ n'a pas de zéro réel.

Exercice 439 Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un corps pour les lois usuelles sur $\mathbb{C}$ et $P \in K[X]$ non constant.

1. Montrer que si α est racine de P de multiplicité $m \in [1, +\infty[$ alors α est racine du polynôme P' avec la multiplicité $m-1$.

2. On suppose $K = \mathbb{R}$ et P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$ (on utilisera le théorème de Rolle).

Exercice 440 Soient $m, n \in [1, +\infty[$, $d = \text{pgcd}(m,n)$ et $P = X^m - 1, Q = X^n - 1, D = X^d - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

1. (a) Montrer que si $x \in \mathbb{C}$ est racine commune de P et Q alors x est racine de D (on pourra utiliser l'égalité de Bézout dans $\mathbb{Z}$).
   (b) Montrer que si $y \in \mathbb{C}$ est racine de D alors y est racine commune de P et Q (utiliser la définition de d).
2. (a) Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que toute racine de A est racine de B. Peut-on en déduire que A divise B ? Même question si les racines de A sont simples.
   (b) Montrer que les racines de D et P sont simples et en déduire que $\text{pgcd}(P, Q) = D$.

Exercice 441 Soient les polynômes complexes $P_1 = X^3 - 2$, $P_2 = X^4 + 4$ et $P_3 = X^4 + 4X^3 + 8$.

1. Étudier leur irréductibilité sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que P_1 est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (on utilisera que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$).
3. Montrer que P_2 est réductible sur $\mathbb{Z}$.
4. Montrer que P_3 est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 442 Soit $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18 \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer toutes les racines complexes de P sachant que deux d'entre elles ont 6 pour produit.

8 Fractions rationnelles

Exercice 443 Décomposer les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{3}{X^3+1} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ puis sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^3}{X^3-1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$F(X) = \frac{1}{(X^3-1)^2} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ en remarquant que } F(jX) = F(X)$$

$$\frac{X^7+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{3X^5+2X^4+X^2+3X+2}{X^4+1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{X^{2n}+1} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ puis sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^3+X}{(X^2+X+1)^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice 444 1. Décomposer $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

2. Décomposer $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

3. Décomposer $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
4. Décomposer $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
5. Décomposer $\frac{X}{X^2-4}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
6. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
7. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
8. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
9. Décomposer $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
10. Décomposer $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
11. Décomposer $\frac{X+i}{X^2+i}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
12. Décomposer $\frac{X}{(X+i)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
13. Décomposer $\frac{X^2+1}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
14. Décomposer $\frac{X}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
15. Décomposer $\frac{X^2+X+1}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
16. Décomposer $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
17. Décomposer $\frac{X^5+X+1}{X^6-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
18. Décomposer $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
19. Décomposer $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
20. Décomposer $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 445 Décomposition en éléments simples $\Phi = \dfrac{2x^4+x^3+3x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 446 Décomposition en éléments simples $\Phi = \dfrac{2x^5-8x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 447 Décomposition en éléments simples $\Phi = \dfrac{4x^6-2x^5+11x^4-x^3+11x^2+2x+3}{x(x^2+1)^3}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 448 Soient a et b deux réels distincts et $F(X) = \dfrac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. En utilisant la formule de Taylor en a pour $f(X) = (X-a)^nF(X)$, décomposer F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 449 Donner une CNS sur $f \in \mathbb{C}(X)$ pour qu'il existe $g \in \mathbb{C}(X)$ tel que $f = g'$.

Exercice 450 On appelle valuation une application $v : \mathbb{C}(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ telle que : $\lambda \in \mathbb{C}^* \Rightarrow v(\lambda) = 0, v(0) = \infty, \exists a \in \mathbb{C}(X) : v(a) = 1$

$$\forall (f,g) \in \mathbb{C}(X)^2, v(fg) = v(f) + v(g)$$

$$\forall (f,g) \in \mathbb{C}(X)^2, v(f+g) \geqslant \min(v(f), v(g))$$

(avec les convention évidentes $k + \infty = \infty, \forall k \geqslant 1 : k\infty = \infty, 0\infty = 0$, etc.) Déterminer toutes les valuations de $\mathbb{C}(X)$ et montrer la formule (la somme portant sur toutes les valuations) :

$$\forall f \in \mathbb{C}(X) - \{0\}, \sum_v v(f) = 0.$$

Deuxième partie
ANALYSE 1

9 Propriétés de $\mathbb{R}$

9.1 Les rationnels $\mathbb{Q}$

Exercice 451 1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ $r.x \notin \mathbb{Q}$.

2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
3. En déduire : entre 2 nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel. (On pourra utiliser la propriété : pour tout réel $a > 0$, il existe un entier n tel que $n > a$.)

[Exercice corrigé]

Exercice 452 Les nombres suivants sont-ils des rationnels ? des décimaux ?
$a = 1/3$, $b = 1/15$, $c = 1/25$, $d = 1/125$, e, $f = 0,333\cdots3\cdots$, $g = \sqrt{2}$,
$h = 0{,}123\,456\,789\,123\,456\,789\,123\cdots$, $i = 0{,}123\,456\,789\,101\,112\,131\,4\cdots$, $j = \pi$, $k = 13/7$, $l = 27/17$.

Exercice 453 (Un procédé géométrique d'approximation de $\sqrt{2}$) Dans le plan xOy, on porte sur Ox une suite de points $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ et sur Oy une suite de points $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, construites de la manière suivante :

(i) $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$,

(ii) $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$,

(iii) $a_n b_n = 2$ (le rectangle de côtés a_n et b_n a pour aire 2).

1. Représentez cette suite de rectangles de côtés a_n et b_n.
2. Démontrez successivement que : $\forall n,\ b_n < a_n$; $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroissante ; $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ croissante.
3. Calculez $a_n - b_n$ en fonction de $a_{n-1} - b_{n-1}$ et a_n. Montrez que l'on a l'inégalité :
$$a_n - b_n < \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{4}.$$
4. Calculez les premiers termes de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Combien de décimales exactes de $\sqrt{2}$ obtenez-vous à chaque pas ? Utilisez l'inégalité précédente pour montrer que le nombre de décimales exactes obtenues double *grosso modo* à chaque pas.

Exercice 454 Calculer avec une calculette : $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ et $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$. Expliquer le résultat.

Exercice 455 On considère les nombres rationnels inférieurs à $\sqrt{2}$. Y a-t-il un nombre rationnel juste avant $\sqrt{2}$, plus grand que tous les nombres rationnels inférieurs à $\sqrt{2}$?
Une suite de nombres rationnels a-t-elle pour limite un nombre rationnel ?
Une suite de nombres décimaux a-t-elle pour limite un nombre décimal ?

Exercice 456 Soient a et b deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.

Exercice 457 Soit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. On suppose que tous les a_i sont des entiers.

1. Montrer que si p a une racine rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ alors α divise a_0 et β divise a_n.
2. On considère le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent qu'il n'est pas rationnel.

[Exercice corrigé]

Exercice 458 Trouver sous la forme $\frac{p}{q}$ des rationnels x dont les dévelopements décimaux périodiques sont donnés par :
$3,14\overset{\frown}{14}\ldots$; $0,99\overset{\frown}{9}\ldots$; $3,149\overset{\frown}{9}\ldots$

Exercice 459 1. Soit $N_n = 0,1997\,1997\ldots1997$ (n fois). Mettre N_n sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p,q \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $M = 0,1997\,1997\,1997\ldots\ldots$ Donner le rationnel dont l'écriture décimale est M.
3. Même question avec : $P = 0,11111\ldots+0,22222\ldots+0,33333\ldots+0,44444\ldots+0,55555\ldots+0,66666\ldots+0,77777\ldots+0,88888\ldots+0,99999\ldots$

[Exercice corrigé]

Exercice 460 Montrer que l'ensemble $\{r^3\ ;\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 461 Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.
[Exercice corrigé]

Exercice 462 Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer :

$$\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*; \left|a - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Indication : considérer les parties fractionnaires de $0, a, 2a, ..., qa$ et la partition $[0, \frac{1}{q}[, [\frac{1}{q}, \frac{2}{q}[, ...[\frac{q-1}{q}, 1[$ de $[0,1[$.

Exercice 463 Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques :

$$\left\{\frac{a}{2^k}, (a,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

9.2 Maximum, minimum, borne supérieure...

Exercice 464 Le maximum de 2 nombres x,y (c'est-à-dire le plus grand des 2) est noté $\max(x,y)$. De même on notera $\min(x,y)$ le plus petit des 2 nombres x,y. Démontrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x,y,z)$.
[Exercice corrigé]

Exercice 465 Déterminer la borne supérieure et inférieure (éventuellement infinies) de : $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.
[Exercice corrigé]

Exercice 466 Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1] \cap \mathbb{Q}\ ,\ ]0,1[\cap \mathbb{Q}\ ,\ \mathbb{N}\ ,\ \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 467 Soit
$$I = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x + \frac{1}{2x} \leqslant 2 \right\}.$$

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
2. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de I.

Exercice 468 Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure, un plus grand élément, une borne inférieure, un plus petit élément, dans $\mathbb{D}$, dans $\mathbb{Q}$, dans $\mathbb{R}$, (si la question se pose) ?

1. $[0, 3[$,
2. $\{0\} \cup]1, 2]$,
3. $\mathbb{D} \cap [0, 1/3]$,
4. $\{x \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x = 1/n\}$,
5. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.

Exercice 469 On considère l'ensemble des nombres de la forme $1+\frac{1}{n}$, où n décrit l'ensemble des entiers strictement positifs. Cet ensemble est-il majoré ? Minoré ? A-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ? Justifier vos réponses.

Exercice 470 Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. 10 est un majorant de A,
2. m est un minorant de A,
3. P n'est pas un majorant de A,
4. A est majoré,
5. A n'est pas minoré,
6. A est borné,
7. A n'est pas borné.

Exercice 471 Soit E l'ensemble des réels de la forme $\frac{n-1/n}{n+1/n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble E admet-il une borne inférieure, une borne supérieure, un plus grand élément, un plus petit élément ?

Exercice 472 Soit $E = \{\frac{1}{n}\cos n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$; calculer $\inf E$ et $\sup E$.

Exercice 473 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de A et tout y de B on ait $x \leqslant y$. Démontrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leqslant \inf B$.

Exercice 474 Soit $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ une famille non vide et bornée de réels ; comparer :
$$\inf_i(\sup_j a_{ij}) \quad \text{avec} \quad \sup_j(\inf_i a_{ij}).$$

Exercice 475 Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ d'au moins deux éléments et x un élément de A.

1. Montrer que si $x < \sup A$, alors $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$.
2. Montrer que si $\sup(A \setminus \{x\}) < \sup A$, alors $x = \sup A$.

Exercice 476 Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B = \{a+b \mid (a, b) \in A\times B\}$.

1. Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

[Exercice corrigé]

Exercice 477 Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. **Vrai** ou **faux** ?

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$,
2. $B \subset A \Rightarrow \inf A \leqslant \inf B$,
3. $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A+B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leqslant \sup(A+B)$.

[Exercice corrigé]

Exercice 478 Donner la borne supérieure et la borne inférieure (si elles existent) de l'ensemble :

$$D = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} | n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Cet ensemble admet-il un maximum, un minimum ?

Exercice 479 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$, n nombres réels. Calculer :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} |x - a_i|.$$

Exercice 480 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. Tracer les graphes des fonctions $f, |f|, f_+, f_-$ où : $f_+ = \max(f, 0), f_- = \min(f, 0)$.

Exercice 481 Si $a = \sup A$, montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a. Réciproque.

Exercice 482 Soit $A = \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ et $a, b \in \mathbb{R}_+$. On considère les applications suivantes de A dans $\mathbb{R}_+$:

$$f : \frac{p}{q} \mapsto \frac{q-p}{q+p}\,; \qquad g : \frac{p}{q} \mapsto \frac{aq+bp}{p+q}$$

Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de $f(A)$ et de $g(A)$.

Exercice 483 Soit A l'ensemble des nombres réels qui peuvent s'écrire $x = \frac{2p^2-3q}{p^2+q}$ pour p et q entiers vérifiant $0 < p < q$.

1. Montrer que A est minorée par -3 et majorée par 2.
2. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$ (pour la borne supérieure on pourra prendre $q = p + 1$).

Exercice 484 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On pose $A_p = \sup_{n>p} u_n$ et $B_p = \inf_{n>p} u_n$. Montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante bornée et que $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante bornée. Soit $L = \lim_{p\to\infty} A_p$ et $l = \lim_{p\to\infty} B_p$.

1. Dans le cas particulier où $u_n = \frac{n+2}{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$, calculer L et l.
2. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant p,\ u_n > l - \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant p,\ u_n < l + \varepsilon$$

3. Interpréter ces propriétés. Énoncer des propriétés analogues pour L. Démontrez-les.
4. Que peut-on dire de (u_n) si $L = l$?

Exercice 485 Soient x et y deux réels strictement positifs. On pose

$$a = \frac{x+y}{2} \qquad g = \sqrt{xy} \qquad h = \frac{2xy}{x+y} \qquad q = \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

Montrer que a, g, h, q sont rangés dans un ordre indépendant de x et y.

Exercice 486 Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cup B$ est bornée et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. Enoncer un résultat analogue pour $\inf(A \cup B)$.
3. Qu'en est-il pour $A \cap B$?

9.3 Divers

Exercice 487 Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 2$ l'implication

$$[x > -1, x \neq 0] \Rightarrow [(1+x)^n > 1 + nx]$$

est vraie.

Exercice 488 Soient $a_1, \dots, a_n,\ b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, les a_i n'étant pas tous nuls. Soit $p(x) = \sum_{i=1}^n (a_i + xb_i)^2$. Montrer que le discriminant de cette équation du second degré est $\leqslant 0$. En déduire que :

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2},$$

et que

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}.$$

Exercice 489 Deux entiers naturels distincts peuvent-ils vérifier la relation $a^b = b^a$?

Exercice 490 Résoudre l'équation $\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 4$, x étant un réel positif.

Exercice 491 Si a et b sont des réels $\geqslant 0$, montrer que :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b}.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 492 Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.
Montrer que dans les deux cas on a :

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Exercice 493 Pout tout $x \in \mathbb{R}$ on note $E(x)$ sa partie entière et $\{x\}$ sa partie décimale.

1. Tracer les graphes des fonctions $x \mapsto E(x)$ et $x \mapsto \{x\}$.
2. Montrer les relations suivantes : $E(x) + E(y) \leqslant E(x+y)$, $E(x+n) = E(x) + n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer $\lim E(x)$ et $\lim\{x\}$ lorsque $x \to -1_+$ et $x \to -1_-$. Ces fonctions ont-elles une limites lorsque $x \to -1$?

Exercice 494 Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ montrer que :

$$2xy \leqslant \frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2.$$

Exercice 495 Soit deux nombres réels a et b vérifiant : $-1 < a < 4$ et $-3 < b < -1$. Donner un encadrement de $a - b$ et de a/b.

Exercice 496 On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; E(x) + E(y) \leqslant E(x + y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$.
2. Calculer $E(x) + E(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $E(x) = E(\frac{E(nx)}{n})$.

Exercice 497 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) = nf(1)$.
2. $\forall n \in \mathbb{Z} \qquad f(n) = nf(1)$.
3. $\forall q \in \mathbb{Q} \qquad f(q) = qf(1)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = xf(1)$ (on pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour encadrer x par des rationnels de plus en plus proches de x).

[Exercice corrigé]

Exercice 498 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$. Montrer que

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, x_i = 1.$$

Exercice 499 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1, x_2, ..., x_n) \in [0, 1]^n$, montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Exercice 500 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$A \neq \emptyset,$$

$$\forall x \in A, \exists \varepsilon_x > 0,]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\subset A,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\forall \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset) \Rightarrow x \in A.$$

Montrer que $A = \mathbb{R}$.

Exercice 501 Montrer :

$$\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = E(nx).$$

Exercice 502 Soient A et B deux parties denses de $\mathbb{R}$, AB et $A + B$ sont-elles denses ? Étude de la réciproque.

Exercice 503 Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, E(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+2}).$$

10 Suites

10.1 Découverte

Exercice 504 1. Dessiner les suites suivantes :

(a) $u_n = \dfrac{n^2-25}{2n^2+1}$ (prendre 2 cm comme unité sur Oy)

(b) $u_n = (-1)^n$

(c) $u_n = \dfrac{1}{n}\cos n \qquad v_n = \dfrac{1}{n}|\cos n|$ (n en radians)

(d) $u_n = \cos n$

(e) $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 3$; $u_4 = -1$; $u_n = 2$ pour $n \geqslant 5$.

(f) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ (prendre 10 cm comme unité sur Oy)

(g) $u_n = \cos\dfrac{n\pi}{6}$

(h) $u_n = \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (prendre 1 cm comme unité sur Oy)

(i) $u_n = n^2+1$

(j) $u_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ (pour $n \geqslant 2$)

2. Classer les dessins par paquets en précisant vos critères.
3. Pour chaque suite, pouvez-vous trouver l et n tels que $|u_n - l| < \frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{100}$? Mettre en relation avec le classement précédent.
4. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

   (a) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

   (b) Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang. Réciproque ?

10.2 Convergence

Exercice 505 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes :
• Si $(u_n)_n$ converge vers un réel l alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers l.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite l, il en est de même de $(u_n)_n$.
[Exercice corrigé]

Exercice 506 Montrer que toute suite convergente est bornée.
[Exercice corrigé]

Exercice 507 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.
[Exercice corrigé]

Exercice 508 Étudier la suite $u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, a et b étant donnés dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 509 Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire.
3. Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.
4. Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée.
5. Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée.

Exercice 510 Soit l un nombre réel. Peut-on dire qu'une suite qui vérifie

$$\forall \varepsilon \in]0,1[,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ |u_n - l| < \varepsilon$$

converge vers l ?

Exercice 511 Construire une suite $u_n = v_n w_n$ (resp. $v_n + w_n$) convergente et telle que l'une au moins des suites (v_n) et (w_n) diverge.

Exercice 512 Vrai ou faux : il existe une suite (u_n) telle que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0 et qui diverge.

Exercice 513 Encadrer la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 514 1. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$?

2. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = 1$?
3. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = +\infty$?

Exercice 515 Étant donné $k \in \mathbb{R}_+$, que peut-on dire d'une suite (u_n) qui vérifie $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$? *Application* : Étudier $u_n = \frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 4\cdots (3n-2)}$.

Exercice 516 Montrer qu'une partie D est dense dans $\mathbb{R}$ ssi tout réel est limite d'une suite de points de D.

Exercice 517 Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$ et x un réel.

1. Montrer que $x = \sup(A)$ ssi (x majore A et il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x).
2. Énoncer un résultat analogue pour $\inf(A)$.

Exercice 518 Étudier la convergence des suites :

$$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n} \qquad \frac{n\sin(n)}{n^2+1} \qquad \frac{1}{n} + (-1)^n \qquad n\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$$

[Exercice corrigé]

Exercice 519 Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire à partir d'un certain rang.

[Exercice corrigé]

Exercice 520 Soit $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer que $\forall n > 0\ \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Conclusion ?

[Exercice corrigé]

Exercice 521 Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente.

Exercice 522 Montrer que (u_n) converge ssi $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent (leurs limites n'étant pas nécessairement égales).

Exercice 523 Etudier la convergence de la suite $u_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$.

Exercice 524 Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos \dfrac{2n\pi}{q}$.

1. montrer que $u_{n+q} = u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite u_n n'a pas de limite.

[Exercice corrigé]

Exercice 525 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle prenant toute les valeurs rationnelles. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Exercice 526 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^2 = \lambda$. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 527
1. Donner un exemple de suite bornée divergente, puis de suite divergente telle que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} x_{n+k} - x_n = 0.$$
2. Donner un exemple de suite divergente qui a une seule valeur d'adhérence (i.e. telle qu'il existe une seule extraction ϕ telle que $x_{\phi(n)}$ converge).
3. Donner un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente telle que $\forall k \geqslant 2, (x_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 528 Que peut-on dire des nombres réels a et b si
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ a - \frac{1}{n} \leqslant b \leqslant a + \frac{1}{n} \ ?$$

Exercice 529 Étudier la suite (u_n) définie par :
$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si n est premier} \\ 67 + 1/n & \text{sinon .} \end{cases}$$
Si cette suite converge, montrer que sa limite est inférieure à 72. Étudier la convergence de cette suite.

Exercice 530 On donne la suite (u_n) définie par :
$$u_1 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}.$$
En étudiant les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 531
1. Soit (u_n), (v_n), (w_n) trois suites telles que pour n assez grand on ait $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$. On suppose que (v_n) et (w_n) sont convergentes, et on note $v = \lim v_n$ et $w = \lim w_n$. Montrer que pour tout ε positif, on a $v - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant w + \varepsilon$ pour n assez grand (*théorème d'encadrement*). Que peut-on en déduire si $v = w$?
2. Soit (u_n) une suite convergente de limite l. Montrer que la suite
$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$
est convergente et a pour limite l. Pour cela, encadrer u_n à ε près pour n assez grand, et en déduire un encadrement de v_n.

Exercice 532 Soit α un nombre irrationnel positif et (p_n) et (q_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{N}^*$ telles que $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} p_n = +\infty.$$

Exercice 533 Étudier la suite $u_n = \ln(1 + \ln(2 + \ln(3 + \cdots + \ln(n-1+\ln n)\cdots)))$.

Exercice 534 Montrer que pour $n \geqslant 1$, l'équation $x^n + x^{n-1} + x^2 + x - \frac{n+1}{n} = 0$ admet une unique racine positive ; on la note u_n. Étudier la suite (u_n).

Exercice 535 Un ivrogne part à un instant donné d'un point donné. À chaque seconde, il fait un pas dans une direction inconnue (et qui peut changer de façon arbitraire à chaque pas). Comme il se fatigue, ses pas sont de plus en plus courts. Peut-on prévoir qu'au bout d'un certain temps il restera à moins d'un mètre d'une certaine position si on admet que la longueur de son n-ième pas est :

1. $1/n$ mètre ?
2. $1/n^2$ mètre ?

10.3 Suites définies par une relation de récurrence

Exercice 536 Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que (u_n) est croissante et majorée.
2. Montrer que (u_n) converge vers le nombre réel positif l qui vérifie $l^2 - l - 1 = 0$ et calculer l.

Exercice 537 Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n(u_n^2 - 3u_n + 4) \ \forall n \geqslant 0.$$

Exercice 538 Étudier les suites :

1. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Exercice 539 (Examen 2000) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Montrer que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leqslant x_n < 1/2$ pour tout $n \geqslant 0$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers α.

[Exercice corrigé]

Exercice 540 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = e^{u_n} - 2$ pour $n \geqslant 0$.

1. Étudier cette suite si $a = 0$.
2. Étudier cette suite si $a = -10$.
3. Étudier cette suite si $a = 3$.
4. Généraliser en discutant selon la valeur de a.

Exercice 541 Étudier la suite définie par $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{10}$ dans les cas suivants :

1. $u_0 = -4$.
2. $u_0 = -2$.
3. $u_0 = 2$.
4. $u_0 = 3$.

Exercice 542 Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{(u_n-3)^2}{4}$.

Exercice 543 Étudier la suite définie par $u_{n+1} = e^{-u_n}$ et $u_0 = 0$.

Exercice 544 Étudier la suite définie par $u_{n+1} = \cos u_n$ et $u_0 = -8$.

Exercice 545 Étudier la suite définie par $u_{n+1} = \frac{2u_n^3+7}{3(u_n^2+1)}$ et $u_0 = 2$. En déduire une valeur approchée à 10^{-8} près de la racine réelle du polynôme $X^3 + 3X - 7$.

Exercice 546 Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{-u_n^2-u_n+24}{6}$ pour $n \geqslant 0$.

Exercice 547 Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -\frac{3}{13}u_n^2 - \frac{1}{9}u_n + 3$ pour $n \geqslant 0$.

Exercice 548 Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{5}u_n^2 - \frac{1}{6}u_n + \frac{33}{10}$ pour $n \geqslant 0$.

Exercice 549 Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \ln(e - 1 + u_n)$.

Exercice 550 Discuter suivant les valeurs de u_0 la nature de la suite $u_{n+1} = e^{u_n} - 2$.

Exercice 551 Soient a et b deux réels strictement positifs ; on définit une suite (u_n) par :

$$u_0 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{au_n + b}$$

1. Montrer qu'il existe une valeur de u_0 pour laquelle cette suite est stationnaire.
2. Montrer que si u_0 est distinct de cette valeur, (u_n) est monotone et bornée. Trouver $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 552 Étudier suivant les valeurs données à u_0 appartenant à $\mathbb{C}$ les suites :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n - 2}{u_n + 4} \\ u_{n+1} &= \frac{u_n + 2}{u_n + 1} \\ u_{n+1} &= \frac{-1}{u_n + 1} \end{aligned}$$

Exercice 553 Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$. On considère $a \in [0,1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. Si f est croissante, alors (u_n) est croissante.
2. Si (u_n) est croissante, alors f est croissante.

3. Si (u_n) est croissante et f monotone, alors f est croissante.
4. Si (u_n) converge vers une limite l, alors l est point fixe de f.
5. Si f est dérivable, alors (u_n) est bornée.
6. Si le graphe de f est au dessus de la droite d'équation $y = x$, alors (u_n) est croissante.
7. Si (u_n) converge vers un point fixe l de f, alors f est continue en l.

Exercice 554 Étudier la suite définie par $u_{n+1} = (1-u_n)^2$ (discuter suivant les valeurs de u_0).

Exercice 555 Soit $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$ et $a \in [0,1]$. Étudier la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 556 Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n + \mathrm{E}(u_n))$ où E désigne la fonction « partie entière ».

Exercice 557
1. Étudier la suite définie par récurrence par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \cos u_n$, où a est un nombre réel donné.
2. Étudier la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \underbrace{\cos(\cos(\cos(\cdots(\cos}_{n \text{ fois cos}} n)\cdots)))$.

Exercice 558
1. Étudier dans $\mathbb{C}$ une suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n^2$. Discuter suivant u_0.
2. On considère dans $\mathbb{C}$ une suite (v_n) telle que $\forall n$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}\big(v_n + \frac{A}{v_n}\big)$ où A est un nombre complexe non nul donné. Étudier l'existence et la convergence de cette suite suivant les valeurs de v_0. On pourra noter a une des racines carrées de A et poser $w_n = \frac{v_n - a}{v_n + a}$.

Exercice 559
1. On donne $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, $u_0 \geqslant 0$; étudier la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{A}{n+1} + Bu_n$.
2. Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{\frac{4n}{n+1} - u_n}{2 + u_n}$ (on pourra utiliser la question précédente pour terminer).

Exercice 560 On considère la suite réelle définie par :

$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1}.$$

1. Montrer que x_n est supérieur ou égal à 1 pour tout n.
2. Montrer que si (x_n) converge, sa limite l vérifie
$$l = \sqrt{2l+1}.$$
3. l étant définie par l'égalité de 2), est-il possible de trouver $k \in]0,1[$ tel que
$$|x_n - l| \leqslant k|x_{n-1} - l|.$$
Si oui en déduire que $|x_n - l| \leqslant k^n |x_0 - l|$. Conclure.

Exercice 561 En utilisant les méthodes de l'exercice précédent, étudier les suites définies par :

$$y_0 = 3\ ; \quad y_{n+1} = \frac{4 + 3y_n}{3 + 2y_n},$$
$$z_0 = 1\ ; \quad z_{n+1} = 1 + \frac{1}{z_n}.$$

Exercice 562 Soit une suite qui vérifie une relation de récurrence

$$u_n = \frac{au_{n-1}+b}{cu_{n-1}+d} \tag{1}$$

1. Montrer que si la transformation homographique : $x \mapsto y = \frac{ax+b}{cx+d}$ a deux points fixes distincts, α et β, on peut écrire la relation (1) sous la forme : $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = k\frac{u_{n-1}-\alpha}{u_{n-1}-\beta}$. Calculer $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ en fonction de $\frac{u_1-\alpha}{u_1-\beta}$.
2. Montrer que si la transformation homographique a un seul point fixe γ, on peut mettre la relation (1) sous la forme : $\frac{1}{u_n-\gamma} = \frac{1}{u_{n-1}-\gamma} + k$. Calculer $\frac{1}{u_n-\gamma}$ en fonction de u_1.
3. Utiliser la méthode précédente pour étudier les suites (u_n) définies par :

$$\text{a) } u_{n+1} = \frac{4u_n+2}{u_n+3}, \qquad \text{b) } u_{n+1} = \frac{-3u_n-1}{u_n-3},$$
$$\text{c) } u_{n+1} = \frac{5u_n-3}{u_n+1}, \qquad \text{d) } u_{n+1} = \frac{2u_n-1}{u_n+4}.$$

   Discuter suivant les valeurs de u_1 ; préciser pour quelles valeurs de u_1 chaque suite est définie.

10.4 Limites

Exercice 563 Posons $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$u_n = (1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2}).$$

Calculer u_n. En déduire que l'on a $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 564 Calculer, lorsqu'elles convergent, les limites des suites définies par :

$u_n = n - \sqrt{n^2-n}$ $\quad u_n = \sqrt{n(n+a)} - n$ $\quad u_n = \dfrac{n}{2}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ $\quad u_n = \dfrac{\sin n^2 - \cos n^3}{n}$.

Exercice 565 Montrer que les suites définies pour $n \geqslant 1$ par :

$u_n = \dfrac{n+1}{n}$ $\quad u_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ $\quad u_n = \frac{n}{n^2+1}$

admettent toutes des limites que l'on calculera.

Exercice 566 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie en posant $u_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 567 Etudier la limite des suites suivantes : $a_n = \cos(\dfrac{2^n}{n!})$; $b_n = \sqrt[n]{3-\sin n^2}$; $c_n = \dfrac{n^3+2^n}{3^n}$; $d_n = \dfrac{n^2+(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$; $e_n = (\cos n)\sin\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 568 Déterminer les limites lorsque n tend vers l'infini des suites ci-dessous ; pour chacune, essayer de préciser en quelques mots la méthode employée.

1. 1 ; $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3}$; … ; $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$; …
2. $2/1$; $4/3$; $6/5$; … ; $2n/(2n-1)$; …
3. 0,23 ; 0,233 ; … ; 0,233⋯3 ; …

4. $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}$
5. $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$
6. $\left[\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right]$
7. $\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
8. $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
9. $\big(1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n\big)$ puis $\sqrt{2}$; $\sqrt{2\sqrt{2}}$; $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; ...
10. $\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$
11. $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
12. $\dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$
13. Démontrer la formule $1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; en déduire $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 569 (Méthode d'Héron) Soit $a>0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0>0$ et par la relation

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right).$$

On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

1. Montrer que
$$u_{n+1}{}^2-a=\frac{(u_n{}^2-a)^2}{4u_n{}^2}.$$
2. Montrer que si $n\geqslant 1$ alors $u_n\geqslant\sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En utilisant la relation $u_{n+1}{}^2-a=(u_{n+1}-\sqrt{a})(u_{n+1}+\sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1}-\sqrt{a}$ en fonction de $u_n-\sqrt{a}$.
5. Si $u_1-\sqrt{a}\leqslant k$ et pour $n\geqslant 1$ montrer que
$$u_n-\sqrt{a}\leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$
6. Application : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0=3$.

[Exercice corrigé]

Exercice 570 On considère les deux suites :

$$u_n=1+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}\ ;\ n\in\mathbb{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite. Et montrer que cette limite est un élément de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 571 Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$, supposée continue et monotone, et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in [a,b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. On suppose que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.
2. Application :
$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{4u_n + 5}{u_n + 3}.$$
3. On suppose que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et convergentes.
4. Application :
$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1 - u_n)^2.$$
Calculer les limites des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

[Exercice corrigé]

Exercice 572 1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

2. Montrer les inégalités suivantes ($b \geqslant a > 0$) :
$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b \qquad \text{et} \qquad a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$
3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
   (a) Montrer que $u_n \leqslant v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) est croissante En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

[Exercice corrigé]

Exercice 573 Soit x un réel.

1. Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{E(x) + E(2x) + \ldots + E(nx)}{n^2}$.
2. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 574 Soit $n \geqslant 1$.

1. Montrer que l'équation $\sum\limits_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution a_n dans $[0,1]$.
2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par $\frac{1}{2}$.

3. Montrer que (a_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 575 Calculer suivant les valeurs de x :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}[\cos(n!\pi x)]^{2m}\right].$$

Exercice 576 Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) par $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. En calculant $a_n + b_n$, montrer qu'elles convergent vers $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

Exercice 577 Soit (u_n) une suite qui tend vers 0. On pose $x_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Montrer que (x_n) converge vers 0 (on pourra fixer ε puis séparer la somme en deux et enfin choisir N...).

Exercice 578 Déterminer les limites de $\dfrac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)}$ et $\sqrt[n]{n^2}$.

Exercice 579 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle dont tous les termes sont non nuls et telle que :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0.$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice 580 Étudier la suite définie par récurrence :

$$u_0 = a > 0, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

Exercice 581 Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{k}{n^2}).$$

Exercice 582 Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}.$$

Exercice 583 Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, telle que $\lim_{n\to\infty}\frac{\phi(n)}{n} = \ell$. Calculer ℓ.

Exercice 584 Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective ; montrer que $\lim_{n\to\infty}\phi(n) = +\infty$.

Exercice 585 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$, et on suppose que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$, puis que $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

Exercice 586 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers ℓ et ϕ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. (pas nécessairement strictement croissante !). Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_{\phi(n)} = \ell$.

Exercice 587 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = \lim_{n\to\infty} u_n v_n = 0.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Exercice 588 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = +\infty, \lim_{n\to\infty} u_{n+1} - u_n = 0.$$

Montrer que

$$E = \{u_n - v_m | (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 589 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 1.$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 1.$$

Exercice 590 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers ℓ et L. Étudier la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Exercice 591 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que :

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + \frac{u_{2n}}{2}) = 1.$$

Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 592 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \frac{z + |z|}{2}.$$

Étudier la suite définie par :

$$z_0 \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = f(z_n).$$

Indication : on écrira $z_n = \rho_n e^{i\phi_n}$,où $(\rho_n, \phi_n) \in \mathbb{R}^{+*} \times] - \pi, \pi[$ et on utilisera :

$$\sin\phi = 2^n \sin\frac{\phi}{2^n}\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\phi}{2^i}.$$

10.5 Équivalents

Exercice 593 Que penser-vous de l'énoncé suivant : si $(u_n) \sim (v_n)$ alors $(e^{u_n}) \sim (e^{v_n})$. Donner un énoncé correct.

Exercice 594 1. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \neq 0$ et si $(u_n) \to 0$ alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$.

2. Soit a un réel. Déterminer la limite de $(1+\dfrac{a}{n})^n$.

Exercice 595 Comparer les suites suivantes :

$$a_n = n^n, \qquad b_n = n^{\ln(n)}, \qquad c_n = e^{n^2}, \qquad d_n = (\ln n)^{n \ln n}$$

Exercice 596 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles de limite $+\infty$ telles que $u_n = o(v_n)$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

Exercice 597 Donner un exemple de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(v_n)$ mais qu'on n'ait ni $u_n = o(v_n)$, ni $v_n = O(u_n)$.

Exercice 598 Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in [0,1], u_{n+1} = u_n^2.$$

Donner un équivalent de u_n quand $n \to \infty$.

Exercice 599 Montrer la réciproque du théorème de Césaro (i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$) :

1. dans le cas où $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$ et

$$u_{n+1} - u_n = O(\frac{1}{n}),$$

2. dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 600 Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}$. En utilisant $v_n = \frac{u_n^2}{4}$, donner un équivalent de u_n. *Indication* : on montrera que $\lim\limits_{n\to\infty} v_{n+1} - v_n = 1$, on en déduira un équivalent de v_n puis de u_n.

Exercice 601 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. L'étudier et, en utilisant $v_n = \frac{1}{u_n}$, en donner un équivalent dans le cas $u_0 \in]-1;0]$. Que dire dans le cas $u_0 \in]0;\infty[$? (On étudiera $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.)

Exercice 602 Soient f et g deux formes linéaires sur un espace vectoriel E telles que $fg = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{1+nx_n^2}$. En étudiant $y_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$, en donner un équivalent.

Exercice 603 Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[, u_{n+1} = \sin u_n.$$

Donner $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$,(réponse : $\frac{1}{3}$) en déduire un équivalent de u_n^{-2} donc de u_n.

Exercice 604 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n \in [n, n+1[$ solution de $x - E(x) = \frac{1}{x^2}$. Donner un équivalent de x_n puis faire un développement asymptotique de $x_n - n$ à l'ordre 5 en fonction de $\frac{1}{n}$.

Exercice 605 Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - ... - \frac{1}{n^2}.$$

On montrera préalablement que :

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

quand $n \to \infty$.

11 Limites de fonctions

11.1 Théorie

Exercice 606 Écrire les définitions des limites suivantes : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
(On précisera sur quel type d'intervalle la fonction f doit être définie.)

Exercice 607 Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 dans son intérieur. On suppose que $\lim_{x\to x_0} f(x) = u > 0$. Démontrer qu'il existe $t > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < t$ alors $|f(x)| \geqslant \frac{u}{2}$.

Exercice 608 Montrer que si une fonction f définie sur $E \subset \mathbb{R}$ est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est, elle aussi, continue en x_0. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 609

1. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$.
2. Soient m, n des entiers positifs. Étudier $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$.
3. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \frac{1}{2}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 610 Soit f une fonction de variable réelle telle que $\frac{f(x)}{|x|} \to \infty$ quand $x \to \infty$. Montrer que pour tout réel α il existe X_α tel que $f(x) - |\alpha x| \geqslant |x|$ si $|x| \geqslant X_\alpha$. En déduire que pour tout α réel $f(x) - \alpha x \to \infty$ quand $x \to \infty$.

Exercice 611 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

1. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$
2. Montrer que si $L > 0$,
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

Exercice 612

1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.

[Exercice corrigé]

Exercice 613 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soient f et g deux fonctions de la variable réelle à valeurs réelles définies sur $\dot{I} := I - \{x_0\}$. Montrer que si f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 et que de plus ces deux limites coïncident, alors f admet une limite en x_0 dont la valeur est la valeur commune des limites à droite et à gauche.

Exercice 614 Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels de degré respectif d et d'. Etudier suivant les valeurs de d et d', et éventuellement de certains des coefficients de P et Q,

$$\lim_{x \to +\infty} P(x)/Q(x).$$

Exercice 615 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x+1) - f(x) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. (on pourra utiliser des ε, sommer des inégalités et utiliser la monotonie de f pour montrer qu'elle est bornée sur un segment).
Comment généraliser ce résultat ?

11.2 Calculs

Exercice 616 Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$a)$ $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ $b)$ $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$ $c)$ $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

$d)$ $\lim_{x \to \Pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ $e)$ $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ $f)$ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$

$g)$ $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ $h)$ $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$

[Exercice corrigé]

Exercice 617 1. Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x^2+x-2| < \varepsilon.$$

2. En déduire :

$$\lim_{x \to 1} x^2 + x - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1} (x^2+x-2)\cos x.$$

Exercice 618 1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, et pour tout couple de nombres réels (x, y) appartenant à $]-\infty, -a]$ ou à $[a, \infty[$, on a :

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leqslant \frac{1}{a^2}|x-y|.$$

2. En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow \ \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.$$

3. En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 619 1. Pour tout n entier naturel et tout couple de réels (x, y), établir la formule :

$$x^n - y^n = (x-y).\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

2. Déduire de la question précédente que pour tout entier n tout réel strictement positif a et tout couple de réels (x, y) tel que $|x| \leqslant a$ et $|y| \leqslant a$,
$$|x^n - y^n| \leqslant na^{n-1}|x - y|.$$
3. Déduire de ce qui précède que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :
$$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |x^n - x_0^n| < \varepsilon.$$
Conclure.
4. Sur quel sous ensemble D de $\mathbb{R}$, la fonction de la variable réelle f donnée par
$$f(x) := \frac{1 - x^n}{1 - x}$$
est-elle définie ? Calculer les limites de f aux bornes de D.

Exercice 620 1. Rappeler que pour tout nombre réels $\varepsilon > 0$ il existe un entier n tel que :
$$\begin{aligned} \frac{1}{2n\pi} &< \varepsilon \\ \frac{1}{(2n+1)\pi} &< \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout nombre réel l, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tel que :
$$|\sin \frac{1}{x} - l| > \frac{1}{2}.$$
3. En déduire que la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.
4. Montrer que la fonction définie par $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 621 Déterminer les limites suivantes :
$$\text{a)} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x \qquad \text{b)} \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$$
$$\text{c)} \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} \qquad \text{d)} \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$$
$$\text{e)} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \qquad \text{f)} \lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$$

Exercice 622 On rappelle les limites : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
Calculer les limites suivantes :
$$\text{a)} \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}.\sin\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{b)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$
$$\text{c)} \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x} \qquad \text{d)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x^2}$$
$$\text{e)} \lim_{x\to 0} x\frac{\tan x}{\cos^2 x - 1} \qquad \text{f)} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3(\frac{x}{2})}$$

Exercice 623 Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

1. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2 \ln x}$
2. $\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$
3. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$
4. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(3x+1)}{2x}$
6. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^x-1}{\ln(x+1)}$
7. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2}{x+1}\ln\Big(\dfrac{x^3+4}{1-x^2}\Big)$
8. $\lim_{x\to (-1)^+} (x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$
9. $\lim_{x\to 2^+} (x-2)^2\ln(x^3-8)$
10. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x(x^x-1)}{\ln(x+1)}$
11. $\lim_{x\to +\infty} (x\ln x - x\ln(x+2))$
12. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$
13. $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$
14. $\lim_{x\to +\infty} \Big(\dfrac{x+1}{x-3}\Big)^x$
15. $\lim_{x\to +\infty} \Big(\dfrac{x^3+5}{x^2+2}\Big)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$
16. $\lim_{x\to +\infty} \Big(\dfrac{e^x+1}{x+2}\Big)^{\frac{1}{x+1}}$
17. $\lim_{x\to 0^+} \big(\ln(1+x)\big)^{\frac{1}{\ln x}}$
18. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^{(x^x-1)}}{x^{(x^x)}}$
19. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$
20. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$

[Exercice corrigé]

Exercice 624 Soient a, b des réels positifs. $E(x)$ désigne la partie entière de x. Montrer que :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a}E\Big(\frac{b}{x}\Big) = \frac{b}{a} \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}E\Big(\frac{x}{a}\Big) = 0.$$

Exercice 625 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1};\ \lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^p-a^p}\ (a>0, m,p\in\mathbb{N}^*);\ \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\ (x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\Big(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}\Big);\ \lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{4x+\pi};\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}.$$

Exercice 626 En utilisant la définition d'une limite, montrer que :

$$a)\ \lim_{x\to -\frac{2}{3}}(3x+2)\sin\left(\frac{1}{3x+2}\right)=0\ ;\quad b)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}}=2.$$

Exercice 627 Calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 0^+}xE\Big(\frac{1}{x}\Big)\ ;\quad b)\ \lim_{x\to +\infty}xE\Big(\frac{1}{x}\Big)\ ;\quad c)\ \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}E\Big(\frac{1}{x}\Big)\ ;$$

$$d)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\ ;\quad e)\ \lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}).$$

Exercice 628 Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)},$$

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x},$$

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}},$$

$$\lim_{x\to 0}xE\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6},$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4}{1+x^\alpha\sin^2 x},\ \text{en fonction de } \alpha\in\mathbb{R}.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 629 Déterminer les limites suivantes :

$$\frac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})}\qquad \text{en } 0$$

$$\frac{x^3-3x^2+5x-3}{4x^4+x^2+x-6}\qquad \text{en } 1$$

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}\qquad \text{en } 0$$

$$\frac{\tan x}{\sqrt{x^2+4}+x-2} \quad \text{en } 0$$
$$\frac{1-\cos x}{x^2} \quad \text{en } 0$$
$$\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1} \quad \text{en } \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})-1}{\sqrt{3}-2\cos(x+\frac{\pi}{6})} \quad \text{en } 0$$

Exercice 630 Étudier les asymptotes de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$.

Exercice 631 Montrer que
$$\frac{\ln(x)}{x^\alpha} < \frac{2}{\alpha x^{\alpha/2}} \text{ où } \alpha > 0.$$
En déduire que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0.$$

Exercice 632 Calculer les limites suivantes :

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x} \qquad \text{b)} \lim_{x\to 1} \frac{x^7-1}{x^6-1} \qquad \text{c)} \lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} \quad n,m \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{d)} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \qquad \text{e)} \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} \qquad \text{f)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x}$$

$$\text{g)} \lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x} \quad a,b>0 \qquad \text{h)} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \qquad \text{i)} \lim_{x\to\alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}.$$

Exercice 633 Calculer :
$$\lim_{x\to\infty} \ln(1+e^{-x})^{\frac{1}{x}}, \lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}, \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$$

Exercice 634 Calculer :
$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{1}{(\sinh x)^2}\right).$$

[Exercice corrigé]

Exercice 635 Calculer :
$$\lim_{x\to\infty} (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 636 Trouver :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{x^x}\ln x}{x^x-1}$$

[Exercice corrigé]

Exercice 637 Trouver pour $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$:
$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 638 Trouver pour $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

[Exercice corrigé]

12 Continuité et étude de fonctions

12.1 Continuité : théorie

Exercice 639 (Partiel Novembre 96) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle :

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \right) \Rightarrow \left(\lim_{x \to a} |f(x)| = |f(a)| \right).$$

2. On suppose que f et g sont continues sur I. En utilisant l'implication démontrée ci-dessus, la relation $\mathrm{Sup}(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, et les propriétés des fonctions continues, montrer que la fonction $\mathrm{Sup}\,(f,g)$ est continue sur I.

[Exercice corrigé]

Exercice 640 Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$ telle que pour tout x et x' $(x \neq x')$ de $[a,b]$ on ait : $|f(x) - f(x')| < |x - x'|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a,b]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution dans $[a,b]$. (On pourra introduire la fonction : $x \mapsto g(x) = f(x) - x$).

Exercice 641 1. Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ telle que $f(]a,b[) \subset [a,b]$. Montrer, par considération de $\phi(x) = f(x) - x$, qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que $f(c) = c$.

2. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe c dans $[0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.
3. Un mobile parcours, à vitesse continue, une distance d en une unité de temps. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-unité de temps pendant lequel il parcourt une distance $\frac{d}{2}$.

Exercice 642 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.
Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

[Exercice corrigé]

Exercice 643 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Montrer que f s'annule. Appliquer ceci aux polynômes de degré impair.

[Exercice corrigé]

Exercice 644 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(0) = 1$, $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_{+\infty} f = 0$.

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|x| > a$ alors $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Montrer que f est bornée et possède un maximum.

Exercice 645 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.
[Exercice corrigé]

Exercice 646 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?
[Exercice corrigé]

Exercice 647 Soient f et g continues sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1]\ f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1]\ f(x) + m < g(x)$.

Exercice 648 Soit f croissante sur $[a, b]$ et prenant toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$. Montrer que f est continue.

Exercice 649 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 650 Soit f périodique croissante. Que dire de f ?

Exercice 651 Donner un exemple de fonction continue sur $[0, 1]$ non lipschitzienne, puis de fonction continue en un seul point, puis de fonction discontinue sur les rationnels et continue sur les irrationnels, enfin de fonction continue telle que $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou si $x = 0$, et $f(x) \in \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Une fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{h \to 0} f(x + h) - f(x - h) = 0$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Donner un exemple de bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$ discontinue en tout point.

Exercice 652 Soit f continue sur $\mathbb{R}$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes. Que dire de f ?

Exercice 653 Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ croissante, montrer qu'elle a un point fixe. *Indication* : étudier

$$E = \{x \in [0, 1] | \forall t \in [0, x], f(t) > t\}.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 654 Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $x \to \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante ; montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 655 Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x)e^{f(x)} = x.$$

Donner les variations de f puis comparer f et ln au voisinage de $+\infty$.

Exercice 656 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ croissante. Construire $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \leqslant g$.

Exercice 657 Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non constante telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2).$$

On suppose f continue en 0 et en 1, montrer que f est constante.

Exercice 658 Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in [0, 1], f(a_n) = a_n^n.$$

On suppose f strictement décroissante. Montrer que a_n est unique et étudier la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 659 Existe-t-il une bijection continue de $[0, 1[$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 660 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f^2 = f(*)$. On note $E_f = \{x \in [0,1] | f(x) = x\}$. Montrer que $E_f \neq \emptyset$ puis que c'est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Trouver toutes les solutions de $(*)$.
[Exercice corrigé]

Exercice 661 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, évaluer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Exercice 662 Une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ?
[Exercice corrigé]

Exercice 663 Soit f uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\forall x \geqslant 0$, la suite $(f(xn))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. Montrer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Exercice 664 Soit $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$, montrer qu'alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 665 Soit f continue sur $[a,b]$, montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in [a,b]^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y| + \varepsilon.$$

Exercice 666 Soit $(f,g) \in C([0,1],[0,1])^2$, tel que : $fg = gf$. On veut montrer que $f - g$ s'annulle par deux méthodes :
– par l'absurde, utiliser le fait que $(f-g)([0,1])$ est un segment ne contenant pas 0.
– par l'absurde, en examinant, si $f - g > 0$ par exemple, $\min\{x \in [0,1] | f(x) = x\}$.
Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace $[0,1]$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 667 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n).$$

Exercice 668 Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que : $\lim\limits_{|x|\to\infty} |f(x)| = +\infty \Leftrightarrow$ l'image réciproque de toute partie bornée est bornée.

Exercice 669 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On veut démontrer que

$$\sup_{a<x<b} f(x) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

1. Montrer que
$$\sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$
Pour cela, on pourra montrer que $\sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ est un majorant de f sur $]a,b[$.
2. Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. Montrer que $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$ en distinguant les trois cas : $x_0 = a, x_0 = b, x_0 \in]a,b[$. *Indication :* Dans le cas $x_0 = a$, par exemple, on pourra considérer la suite de réels $a_n = a + 1/n$ et étudier la suite $(f(a_n))$.
3. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $g(x) = 1$ si $x = 1$. Montrer que
$$\sup_{0<x<1} g(x) \neq \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x).$$
Quelle hypothèse est essentielle dans la propriété démontrée auparavant ?

[Exercice corrigé]

12.2 Continuité : pratique

Exercice 670 Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$ déterminer α tel que, $(x \neq 1/3$ et $|x| \leqslant \alpha) \Rightarrow |f(x)+3| \leqslant \varepsilon$.
Que peut-on en conclure ?

Exercice 671 Soit f la fonction réelle à valeurs réelles, strictement croissante définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f.
2. f est elle continue ?
3. Donner la formule définissant f^{-1}.

Exercice 672 Etudier la continuité de f la fonction réelle à valeurs réelles définie par $f(x) = (\sin x)/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
[Exercice corrigé]

Exercice 673
1. Soit la fonction réelle définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que f n'admet pas de limite en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Soit la fonction réelle définie par $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1-x$ sinon. En quels points de $\mathbb{R}$ f est elle continue ?

Exercice 674 On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leqslant |x|$.
1. Montrer que $x \mapsto \sin x$ est continue en 0 puis sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. En déduire que $x \mapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 675 Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :
1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_1(0) = 0$;
2. $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_2(0) = 0$;
3. $f_3(x) = xE(x)$;
4. $f_4(x) = E(x)\sin(\pi x)$.

Exercice 676 Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est strictement croissante puis que pour tout $y \in\ ]-1,1[$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 677 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin x \sin(\frac{1}{x}) \ ; \quad b)\ f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ ;$$

$$c)\ f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \ .$$

[Exercice corrigé]

Exercice 678 Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :
1. $f(x) = E(x)\sin(x)$,
2. $g(x) = E(x)\sin(\pi x)$.

Exercice 679 Etudier la continuité de

1. $f(x) = x + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$.
2. $g(x) = \mathrm{E}(x) + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$.

Exercice 680 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

[Exercice corrigé]

Exercice 681 La fonction $\dfrac{1}{x}$ est-elle lipschitzienne sur $]0, +\infty[$? sur $[1, +\infty[$?

Exercice 682 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$, $f(x) = 1/2 - x$ si $x \in]0, 1/2[$, $f(1/2) = 1/2$, $f(x) = 3/2 - x$ si $x \in]1/2, 1[$ et $f(1) = 1$.

1. Tracer le graphe de f. Étudier sa continuité.
2. Démontrer que f est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.
3. Démontrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}E(2x) - \frac{1}{2}E(1-2x)$.

Exercice 683 Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ $\quad f_1(0) = 0$;
2. $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ $\quad f_2(0) = 0$;
3. $f_3(x) = xE(x)$ sur $\mathbb{R}$;
4. $f_4(x) = [x - E(x)]^2$ et $f_5(x) = E(x) + f_4(x)$.

Exercice 684 En étudiant la suite $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$, déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près de l'unique réel solution de $\cos(x) = x$.

Exercice 685 Soit f définie par $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$, où E désigne la partie entière. Donner le domaine de définition de f, puis une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$. f est-elle monotone ? f est-elle $k-$lipschitzienne sur $[a, 1] (a > 0)$? Et sur $[0, 1]$? Étudier la continuité de f sur $[0, 1]$ en utilisant la définition. Déduisez en la continuité sur $\mathbb{R}$.

12.3 Étude de fonctions

Exercice 686 Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3\,x}{5-2\,x}}\ ; \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 2\,x - 5}\ ; \quad h(x) = \ln(4\,x + 3)$$

[Exercice corrigé]

Exercice 687 Montrer que l'équation $x^7 - 3\,x^2 + 4\,x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-1, 1[$. Même question pour l'équation $x^{29} + 14\,x^{17} - 7\,x^5 + 2 = 0$.

Exercice 688 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{R}^+$. Démontrer en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires que le polynôme $P(X) = X^n - d$ a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Exercice 689 En étudiant les variations de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, trouver le plus grand élément de l'ensemble $f(\mathbb{N}^*)$.
En déduire que quels soient m et n appartenant à $\mathbb{N}^*$, l'un des nombres $\sqrt[n]{m}$, $\sqrt[m]{n}$ est inférieur ou égal à $\sqrt[3]{3}$.

Exercice 690 (Partiel Novembre 96) Soit

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}.$$

Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$.
Déterminer $\mathrm{Sup}_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

[Exercice corrigé]

Exercice 691 1. Soit la fonction $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. Montrer que f admet une réciproque que l'on explicitera.

2. Trouver un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction $g(x) = \tan(x^3)$ admette une fonction réciproque (on précisera alors le domaine de définition de cette réciproque et son image).

Exercice 692 Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas des polynômes :

$$x \to e^x, \quad x \to \ln x, \quad x \to \sqrt{x^2+1}, \quad x \to \cos x.$$

12.4 Fonctions continues par morceaux

Exercice 693 Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \phi \in CM\left([a, b], \mathbb{R}\right), \forall x \in [a, b], |g(x) - \phi(x)| < \varepsilon.$$

Montrer que l'on peut choisir $\phi \in E\left([a, b], \mathbb{R}\right)$, ie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \phi \in E\left([a, b], \mathbb{R}\right), \forall x \in [a, b], |g(x) - \phi(x)| < \varepsilon.$$

NB : CM pour continue par morceaux et E pour escalier.

Exercice 694 Donner un exemple de fonction qu'on ne puisse approcher à ε près par des fonctions en escaliers.

Exercice 695 On dit qu'un ensemble A de fonctions définies sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ est dense dans un ensemble B si :

$$\forall f \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists g \in A, \forall x \in I, |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Le cours dit par exemple que l'ensemble des fonctions en escaliers est dense dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux si $I = [a, b]$. Montrer que l'ensemble des fonctions continues affines par morceaux est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $I = [a, b]$.

Exercice 696 On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $I = [a, b]$ converge uniformément vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathbb{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur l'intervalle $[a, b]$, et que toutes les f_n sont continues. Montrer que $\forall x \in [a, b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et donner sa limite. Montrer que f est bornée et continue.
On ne suppose plus que $(f_n)_n$ converge uniformément mais seulement point par point (ie, $\forall x \in [a, b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $f(x)$) ; de plus toutes les f_n sont lipschitziennes de rapport k ; montrer que f est lipschitzienne de rapport k et qu'il y a converge uniforme.

Exercice 697 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement si :

$$\exists \mu \in \mathbb{R}^+, \forall d = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\} \text{ subdivision de } [a, b], \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sigma(d) \leqslant \mu.$$

On appelle alors $V(a, b) = \sup\limits_{d \text{ subdivision}} \sigma(d)$ et on définit une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^+$: $x \to V(a, x)$.
Montrer que toute fonction monotone est à variation bornée puis que $x \to V(a, x)$ est croissante ainsi que $x \to V(a, x) - f(x)$. En déduire que toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes (d'où la nature de ses discontinuités). Une fonction continue, une fonction lipschitzienne sont-elles à variation bornée ?

13 Dérivabilité

13.1 Calculs

Exercice 698 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x} \ \text{ si } x \neq 0 \qquad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \sin\frac{1}{x} \ \text{ si } x \neq 0 \qquad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} \ \text{ si } x \neq 1 \qquad f_3(1) = 1.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 699 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \ \text{ et } \ f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

[Exercice corrigé]

Exercice 700 Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

[Exercice corrigé]

Exercice 701 Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 702 Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions :

$$f(x) = \frac{2x-5}{(x-2)^2(x+1)(x-3)} \qquad g(x) = \ln(1+x).$$

Exercice 703 (Formule de Leibnitz) Étant données u et v des fonctions dérivables à l'ordre n sur l'intervalle I, montrer par récurrence que la dérivée d'ordre n du produit uv sur cet intervalle est :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

En déduire les dérivées successives des fonctions :

$$x \mapsto x^2 e^x \quad ; \quad x \mapsto x^2(1+x)^n \quad ; \quad x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \quad ; \quad x \mapsto x^{n-1} \ln x.$$

Exercice 704 Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$f : x \mapsto x|x|, \qquad g : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}, \qquad h : \mapsto \frac{1}{1+|x|}.$$

Exercice 705 Calculer les dérivées des fonctions :

1. $x \mapsto \sqrt{1+x^2\sin^2 x}$, $\quad x \mapsto \frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1}$.
2. $x \mapsto \log(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)})$, $\quad x \mapsto (x(x-2))^{1/3}$.

Exercice 706 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la dérivée de $x \mapsto \sin(f(x)^2)$ et de $x \mapsto \sin(f(x^2))$.
2. On suppose $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $x \mapsto \log(|f(x)|)$.

Exercice 707 Prolonger par continuité en 0 et étudier la dérivabilté de

1. $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.
2. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 708 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ sinon} \end{cases}$
Déterminer a, b, c pour que f soit C^2 (et C^3 ?).

Exercice 709 Soit $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est C^∞ et que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0) = 0$.
[Exercice corrigé]

Exercice 710 Soient a et b deux réels et $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}$ et en déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

Exercice 711 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \neq 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, f(0) = 0.$$

Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et calculer ses dérivées en 0.

Exercice 712 Calculer la dérivée de $x \to \ln\cos(\pi + \frac{x^2-1}{x^2+1})$.

Exercice 713 La fonction $x \to \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 714 En quels points la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, f(x) = 0,$$

est-elle dérivable ?

13.2 Théorème de Rolle et accroissements finis

Exercice 715 Montrer que le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = \left[\left(1 - t^2\right)^n\right]^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1, 1]$.
[Exercice corrigé]

Exercice 716 Etudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 717 Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.
[Exercice corrigé]

Exercice 718 Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a,b[$ s'annulant en $n+1$ points de $]a,b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue,il existe un point x_0 de $]a,b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.
[Exercice corrigé]

Exercice 719 Étant donné y un réel positif et n un entier naturel pair, montrer que $(x+y)^n = x^n + y^n$ si et seulement si $x = 0$. Cas n impair ?

Exercice 720 Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a, +\infty[$ et telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe un élément c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 721 Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ préciser le nombre θ de $]\alpha, \beta[$. Interprétation géométrique ?
[Exercice corrigé]

Exercice 722 Appliquer la formule des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = a + bx + ce^{\alpha x}$$

(où a, b, c, α sont réels, et c et α sont non nuls) sur l'intervalle $[0, X]$.

1. Calculer "θ" en fonction de X.
2. En déduire que
$$x \mapsto \frac{1}{\alpha x} \ln \frac{e^{2x} - 1}{\alpha x}$$
est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 723 Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, a + 2h]$. Par introduction de la fonction

$$g(t) = f(a + t + h) - f(a + t)$$

montrer qu'il existe α dans $]0, 2[$ tel que

$$f(a) - 2f(a + h) + f(a + 2h) = h^2 f''(a + \alpha h).$$

Exercice 724 Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que
$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y.$$
2. On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par
$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha \ln x - (1 - \alpha) \ln y.$$
De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0, 1[$
$$\alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y).$$
Interprétation géométrique ?

[Exercice corrigé]

Exercice 725 Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n, n+1]$ montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.
[Exercice corrigé]

Exercice 726 Étant donné α dans $]0,1[$, montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \geqslant (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \geqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{\alpha}}.$$

Exercice 727 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ \ |e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2} e^{|x|}$.
[Exercice corrigé]

13.3 Divers

Exercice 728 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1-k)^3 x^2 + (1+k)x^3$ où k est un nombre réel. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'origine est un extremum local de f.
[Exercice corrigé]

Exercice 729 Appliquer la règle de l'Hôpital aux calculs des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right),$$

$$\lim_{x\to 0} (1 - \cos x)\text{cotan}\, x.$$

Exercice 730 Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^4) - 1}{x^4 e^x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx};$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \left(\exp \frac{1}{x} - \exp \frac{1}{x+1} \right).$$

Exercice 731 Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f(x+y)f(x-y) \leqslant f(x)^2$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x)f''(x) \leqslant f'(x)^2$.

Exercice 732 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{+\infty} f' = l$. Montrer qu'alors $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.

Exercice 733 Déterminer les extremums de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.
[Exercice corrigé]

Exercice 734 Quel est le lieu des points d'inflexion (puis des extrémums relatifs) de f_λ quand λ décrit $\mathbb{R}$, où :

$$f_\lambda : x \to \lambda e^x + x^2.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 735 Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \forall x \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Exercice 736 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\omega) = \omega$. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de x_0 et la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que si $|f'(\omega)| < 1, \exists \varepsilon > 0, \forall x_0 \in]\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon[, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers w, et que si $|f'(\omega)| > 1$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers w si et seulement si elle est stationnaire (i.e. $x_n = \omega$ à partir d'un certain rang). Que dire dans le cas $|f'(\omega)| = 1$?

Exercice 737 Soit $f \in C^1([0;1], \mathbb{R})$,telle que $f(0) = 0$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}).$$

Exercice 738 (Examen 2000) Enoncer le théorème de Rolle pour une fonction $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b[$. (Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.)
2. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a,b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. On suppose que $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que
$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$
4. Application : Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\text{Arccos}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 739 (Examen 2000) Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}, \quad x \geqslant 0.$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
   (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante :
$$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

(b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a

$$(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

[Exercice corrigé]

Exercice 740 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$

où P_n est un polynôme.

(a) Trouver P_1 et P_2.

(b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P'_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Montrer que f est de classe C^∞.

[Exercice corrigé]

14 Fonctions circulaires et hyperboliques inverses

14.1 Fonctions circulaires inverses

Exercice 741 Écrire sous la forme $\frac{m}{n}\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $|m|$ et n premiers entre eux, $\arcsin(\sin\alpha)$, $\arccos(\cos\alpha)$ et $\arctan(\tan\alpha)$ dans les cas : $\alpha = \frac{59}{5}\pi$; $\alpha = \frac{84}{5}\pi$; $\alpha = \frac{76}{5}\pi$.

Exercice 742 Résoudre les équations suivantes :

1. $\arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.
2. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.

Exercice 743 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}.$$

Exercice 744 Soient les fonctions $f : x \mapsto \arcsin(\sin x)$ et $g : x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

1. Simplifier les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Construire les graphes de f et g.

Exercice 745 Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p. À quelle distance doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal ?

Exercice 746 Démontrer les inégalités suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} a > \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{si } 0 < a < 1;$$

$$\operatorname{Arctan} a > \frac{a}{1+a^2} \quad \text{si } a > 0.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 747 Écrire sous forme d'expression algébrique

$$\sin(\operatorname{Arccos} x), \quad \cos(\operatorname{Arcsin} x), \quad \sin(3 \operatorname{Arctan} x).$$

[Exercice corrigé]

Exercice 748 Tracer les courbes représentatives des fonctions

$$x \mapsto f(x) = \sin(\operatorname{Arcsin} x), \qquad x \mapsto f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin x).$$

Exercice 749 Résoudre les équation suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin} \frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin} \frac{3}{5}, \quad \operatorname{Arccos} x = 2 \operatorname{Arccos} \frac{3}{4},$$

$$\operatorname{Arctan} x = 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{2}.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 750 Calculer

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}.$$

Exercice 751 Simplifier les expressions suivantes :

$$\operatorname{Arctan}(\tan x) \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}), \quad \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad (0 < x < 2\pi),$$

$$\operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Exercice 752 Vérifier

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 753 Montrer que $\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$ (on montrera que $0 \leqslant \arctan(\frac{1}{5}) \leqslant \frac{\pi}{8}$ et $0 \leqslant \arctan(\frac{1}{239}) \leqslant \frac{\pi}{2}$).

Exercice 754 Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{k^2-k+1}.$$

On montrera qu'elle converge (vers ℓ) et on évaluera $\lim_{n\to\infty} n(u_n - \ell)$.
Indication : que vaut $\arctan a - \arctan b$?

Exercice 755 Étudier la fonction :

$$\phi : x \to \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} + \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$$

Exercice 756 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}.$$

14.2 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

Exercice 757 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (\cos x + \operatorname{ch} y, \cos x \operatorname{ch} y).$$

Discuter et déterminer selon $p \in \mathbb{R}$ l'image réciproque de $(4,p)$. On exprimera y à l'aide d'un logarithme. Déterminer numériquement cette image réciproque si $p = -2$.

Exercice 758 1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(\operatorname{ch} x) = e^x.$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$

Préciser le nombre de solutions.

3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$

Préciser le nombre de solutions ; y a t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}^+$?

[Exercice corrigé]

Exercice 759 Calculer :

$$\lim_{x\to\infty} e^x(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} (x - \ln(\operatorname{ch} x)).$$

[Exercice corrigé]

Exercice 760 Donner un expression plus simple de :

$$y = \operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch} x}{2}}; \quad y = \operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}); \quad y = \operatorname{argth}\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Exercice 761 Calculer pour $(n,a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a+bk), \quad \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a+bk).$$

Exercice 762 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, résoudre le système $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} y = b \end{cases}$.

Exercice 763 Montrer que : $\operatorname{argth} x + \operatorname{argth} y + \operatorname{argth} z = \operatorname{argth} u$ et déterminer u.

Exercice 764 Les réels x et y étant liés par

$$x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

calculer $\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ et $\operatorname{th} x$ en fonction de y.

[Exercice corrigé]

Exercice 765 Montrer que $\operatorname{ch} nx$ et $\operatorname{sh} nx$ peuvent s'exprimer comme polynômes en $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$. Calculer $\operatorname{ch} 3x$ et $\operatorname{sh} 3x$ en fonctions de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$. En déduire $\operatorname{th} 3x$ en fonction de $\operatorname{th} x$.

Exercice 766 Exprimer $\operatorname{ch}^n x$ et $\operatorname{sh}^n x$ au moyen de $\{\operatorname{sh} px, \operatorname{ch} px\ ;\ 1 \leqslant p \leqslant n\}$. Expliciter $\operatorname{ch}^5 x$ et $\operatorname{sh}^5 x$.

Exercice 767 Calculer les sommes

$$1 + \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x + \cdots + \operatorname{ch} nx \quad \text{et} \quad 1 + \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \cdots + \operatorname{sh} nx.$$

Exercice 768 Simplifier

$$\operatorname{Argth} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Exercice 769 Vérifier les égalités

$$2 \operatorname{Argth} \tan x = \operatorname{Argth} \sin 2x, \qquad \operatorname{Argsh}(3x + 4x^3) = 3 \operatorname{Argsh} x.$$

Exercice 770 Expliciter au moyen de la fonction logarithme $\operatorname{Argch} \frac{1}{x}$ et $\operatorname{Argsh} \frac{1}{x}$.

Exercice 771 Résoudre

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x;$$

$$xy = a^2 \text{ et } \ln^2 x + \ln^y = \frac{5}{2} \ln^2 a.$$

Exercice 772 Préciser les comportements
de $x \mapsto \dfrac{x^2 - e^x}{x - e}$ quand $x \to e$,
de $x \mapsto \sqrt{\ln(1+x)} - \sqrt{\ln x}$ quand $x \to +\infty$,
de $x \mapsto \dfrac{a^x - b^x}{x}$ quand $x \to 0$.

Exercice 773 Démontrer les inégalités :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) \text{ pour } x > 0 \quad \text{et} \quad 1 + x \leqslant e^x \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

[Exercice corrigé]

Exercice 774 Déterminer $\lim\limits_{+\infty}(x - \ln(\operatorname{ch} x))$.

Exercice 775 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ \operatorname{ch}(2x) = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$. En déduire un équivalent de $\operatorname{ch} x - 1$ en 0.

Exercice 776 Résoudre l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des entiers positifs non nuls.
[Exercice corrigé]

Exercice 777 Résoudre l'équation $\tan(3 \arcsin x) = 1$. On exprimera les trois solutions au moyen de radicaux.

15 Calculs d'intégrales

15.1 Théorie

Exercice 778 Déterminer les fonctions f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_a^b f(t)dt = (b - a) \sup\limits_{[a,b]} |f|$.

Exercice 779 Soient $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ et $I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n \to 0$.

2. Montrer que ceci est encore vrai si f est en escalier.
3. En déduire que le résultat subsiste pour f continue par morceaux.

Exercice 780 Soient $0 < a \leqslant b$. Montrer que $\int_a^b \frac{dx}{x} \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

Exercice 781 Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ telle que $f(a) = a$.

Exercice 782 Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On définit $g : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \end{cases}$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que si f est périodique, g admet une limite en $+\infty$.

Exercice 783 Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in \{0,...,n\}, \int_0^1 f(u)u^k du = 0.$$

Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros distincts dans $]0,1[$.

Exercice 784 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que :

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1.$$

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t)dt.$$

Exercice 785 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue, n'admettant qu'un nombre fini de zéros sur $[0,1]$, et telle que $f(0) = 0, f(1) = 1$. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_0^1 e^{nt} f(t)dt \right| = +\infty.$$

Exercice 786 (Irrationnalité de π)

1. Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme $P_n = \frac{X^n(bX-a)^n}{n!}$ et ses dérivées successives prennent, en 0 et $\frac{a}{b}$, des valeurs entières.
2. Montrer que :
$$I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin(t)dt \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$
3. Montrer par l'absurde que $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 787 Soit f continue sur $[0,\pi]$ telle que $\int_0^\pi f(u)\cos(u)du = \int_0^\pi f(u)\sin(u)du = 0$, montrer que f s'annulle au moins deux fois sur $]0,\pi[$.

Exercice 788 Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall g \in E\left([0,1],\mathbb{R}\right), \int_0^1 fg = 0.$$

Montrer que $f = 0$.

Exercice 789 Soit f une fonction C^1 sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose $f(a) = 0$. Montrer que :

$$\int_a^b f^2(u)du \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u)du.$$

Exercice 790 Soit f continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[a,b]$. On suppose $a<0<b$ et $\int_0^1 f(t)dt=0$. Montrer que :

$$\int_0^1 f^2(t)dt \leqslant -ab.$$

Exercice 791 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ $(a<b)$, et f continue positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(t)dt\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[a,b]}|f(t)|.$$

Exercice 792 Calculer sans utiliser de primitive, pour $a<b$:

$$\int_a^b e^t dt.$$

Exercice 793 Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f^n(u)du$ ne prenne qu'un nombre fini de valeurs quand n décrit $\mathbb{N}$. Montrer que $f=-1$ ou $f=0$ ou $f=1$.

Exercice 794 Soient f et g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ croissantes. Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+, \left(\int_0^x f\right)\left(\int_0^x g\right) \leqslant x\int_0^x fg.$$

Indication : on établira d'abord que, si $a_1\leqslant a_2\leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant b_n$, alors :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i\right)\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_ib_i.$$

Remarquer que :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geqslant 0.$$

Exercice 795 Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt.$$

Éventuellement, en donner un DL en $\frac{1}{n}$.

Exercice 796 Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx.$$

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application continue ; calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n f(x)dx.$$

Exercice 797 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application continue par morceaux, continue en 0, trouver une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers telle que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)g_n(t)dt = f(0).$$

Exercice 798 Dire (avec justification) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Toute fonction intégrable sur $[a,b]$ est continue.

2. Si f est intégrable sur $[a,b]$, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ pour tout x de $[a,b]$.
3. Soit f une fonction sur $[a,b]$ vérifiant la propriété : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe g_ε intégrable sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - g_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon$; alors f est intégrable.
4. Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$.
5. Si $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$.
6. Si f et g sont des fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors la fonction fg est intégrable sur $[a,b]$.
7. Si f et g sont des fonctions continues sur $[a,b]$, alors la fonction fg est continue sur $[a,b]$, et $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt \cdot \int_a^b g(t)\,dt$.
8. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par
$$\begin{cases} f \equiv \lambda_n & \text{sur }]\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}] \text{ pour tout entier } n \geqslant 1 \\ f(0) = \mu \end{cases}$$
où (λ_n) est une suite bornée de nombres réels, et μ un nombre réel. Alors f est intégrable.
9. Soit f bornée sur $[0,1]$, continue sauf au point $1/3$; alors f est intégrable sur $[0,1]$.
10. Il existe $f \geqslant 0$ continue sur $[0,1]$, avec $f(1/2) > 0$, et telle que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.
11. Soit f intégrable sur $[a,b]$. Si $\int_a^b f(t)\,dt > 0$ alors $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$.
12. Si f est croissante sur $[a,b]$, elle est intégrable sur $[a,b]$ et de plus $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante.
13. Si $f \leqslant 0$ est continue sur $[a,b]$, alors $G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$ est croissante sur $[a,b]$.
14. Si f est continue sur $[0,1]$, $H(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0,1]$, et $\forall x \in [0,1]$, $H'(x) = f(x^2)$.

Exercice 799 Soit φ une fonction bornée sur $[a,b]$; comparer les assertions suivantes[1] :

1. φ a une primitive sur $[a,b]$.
2. φ est intégrable sur $[a,b]$.
3. φ est continue sur $[a,b]$.
4. φ est dérivable sur $[a,b]$.

Exercice 800 Soit f une fonction continue et strictement croissante de $[a,b]$ sur $[\alpha,\beta]$. On note g la fonction réciproque de f. Montrer que
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta g(x)\,dx = b\beta - a\alpha$$

Exercice 801 Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. On suppose que f est monotone sur $[a,b]$ et que g est positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que
$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt + f(b)\int_c^b g(t)\,dt$$
(considérer $\varphi(x) = f(a)\int_a^x g(t)\,dt + f(b)\int_x^b g(t)\,dt$).

[1] L'une des implications à étudier est très difficile ; on pourra admettre après avoir traité toutes les autres que celle qui reste est fausse.

Exercice 802 Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$, vérifiant :

i) $0 \leqslant f' \leqslant 2$;

ii) f' est décroissante ;

iii) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Trouver le plus grand nombre m et le plus petit nombre M tels qu'on soit sûr d'avoir $m \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant M$. Peut-il y avoir égalité ?

Exercice 803 Soit f définie et continue sur $[0,+\infty[$, vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = l$ (étant donné $\varepsilon > 0$, choisir A assez grand pour que sur $[A,+\infty[$ on ait $l-\varepsilon \leqslant f(t) \leqslant l+\varepsilon$; puis encadrer $\frac{1}{x}\int_A^x f(t)\,dt$, pour $x > A$; estimer l'erreur… et faire un dessin !).

Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{1+t^2}}\,dt$. Étudier la branche infinie du graphe de F quand $x \to +\infty$.

Exercice 804 (Méthode des trapèzes)

1. Soit f deux fois dérivable sur $[a,b]$, vérifiant $|f''| \leqslant M$ sur $[a,b]$. Soit
$$\varphi(t) = f(t) - f(a) - (t-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - A(b-t)(t-a)$$
Soit $x \in\,]a,b[$; on choisit $A = A(x)$ pour que $\varphi(x) = 0$ (dessiner !). Montrer qu'il existe $c_1, c_2 \in [a,b]$ tels que $c_1 < c_2$ et $\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = 0$, puis qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\varphi''(c) = 0$. En déduire une majoration de $|A|$ pour $x \in [a,b]$. On convient de poser $A(a) = A(b) = 0$.
2. On note E l'erreur commise en remplaçant $\int_a^b f(x)\,dx$ par l'aire du trapèze défini par l'axe des x, les droites $x = a$ et $x = b$ et la corde du graphe joignant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ (dessiner !). Montrer que $E = \int_a^b A(x)(b-x)(x-a)\,dx$, et vérifier que l'intégrale a un sens. En déduire que $|E| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12}$ (utiliser 1)).
3. Pour $n \geqslant 1$ on pose $I_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right]$ où $x_p = a + p\frac{b-a}{n}$ pour $p = 1, 2, \ldots, n-1$. Montrer que I_n est la somme des aires des trapèzes construits sur les points d'abscisses $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ et les cordes correspondantes du graphe de f (dessiner !). Montrer que
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - In\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$
4. On prend $[a,b] = [0,1]$ et $f(x) = e^{-x^2}$. Calculer $M = \sup_{[0,1]} |f''|$. Déterminer n pour que la méthode des trapèzes avec n intervalles donne un nombre qui approche $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ à moins de 10^{-2} près. En déduire un encadrement de cette intégrale.

15.2 Longueurs, aires, volumes

Exercice 805 Construire la courbe paramétrée $C \begin{cases} x = \frac{\cos t}{1+\lambda\cos t} \\ y = \frac{\sin t}{1+\lambda\cos t} \end{cases}$ où λ est un paramètre appartenant à $[0,1[$.

Calculer l'aire S limitée par C de deux façons :

– En se ramenant au calcul de $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1+\lambda\cos t)^2}$.

– En reconnaissant la nature géométrique de C.

[Exercice corrigé]

Exercice 806 Représenter la courbe définie par son équation polaire $\rho = a\sin^3\frac{\theta}{3}$. Calculer sa longueur L et les aires A_1 et A_2 limitées par les deux boucles qu'elle forme.

[Exercice corrigé]

Exercice 807 On appelle *tore* la figure obtenue par révolution d'un cercle de rayon r autour d'une droite de son plan passant à distance R de son centre (on suppose $r < R$). Calculer l'aire A du tore, et son volume V.

[Exercice corrigé]

Exercice 808 On appelle *cycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon R, lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur une droite en restant dans plan fixe. Montrer que dans un repère bien choisi, la cycloïde admet la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$
Représenter la cycloïde et calculer : la longueur L d'une arche, l'aire A de la surface S comprise entre cette arche et la droite fixe (Ox), les volumes V_1 et V_2 obtenus par révolution de S autour de Ox et Oy respectivement, les aires A_1 et A_2 obtenues par révolution d'une arche de la cycloïde autour de Ox et Oy respectivement.

[Exercice corrigé]

Exercice 809 On appelle *épicycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon r, lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur un cercle de rayon R en restant tangent extérieurement à ce dernier, et dans son plan. On pose $n = R/r$. Montrer que dans un repère que l'on précisera, l'épicycloïde admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = r\big((n+1)\cos t - \cos(n+1)t\big) \\ y = r\big((n+1)\sin t - \sin(n+1)t\big) \end{cases}$$

Représenter la courbe pour $n = 1, 2, 3$. En supposant n entier, calculer la longueur L de la courbe et l'aire A limitée par celle-ci. Dans le cas $n = 1$ (*cardioïde*), calculer de plus l'aire S de la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe autour de son axe de symétrie, ainsi que le volume V limitée par cette surface.

[Exercice corrigé]

Exercice 810 Soit C un cercle fixe de rayon R. Un cercle C' de même rayon roule sans glisser sur C en restant dans un plan (variable) perpendiculaire à celui de C. Un point M lié au cercle C' décrit une courbe Γ. Montrer que suivant un repère convenablement choisi, Γ admet la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = R(\cos t + \sin^2 t) \\ y = R\sin t(1 - \cos t) \\ z = R(1 - \cos t) \end{cases}$. En déduire la longueur L de Γ.
Représenter les projections de Γ sur chacun des trois plans de coordonnées.

[Exercice corrigé]

15.3 Intégration à l'aide d'une fonction auxiliaire

Exercice 811 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x^2+5} \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} \quad ; \quad \int e^x \sin(e^x)dx \quad ; \quad \int \tan^3 x dx \quad ;$$

$$\int \frac{1}{\tan^3 x}dx \quad ; \quad \int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m}dx,\ m \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x}dx \quad ; \quad \int \frac{\operatorname{ch} x\, dx}{\operatorname{sh}^5 x}.$$

15.4 Changement de variables

Exercice 812 Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$ et calculer I.
Résultat : $I = 2 - \pi/2$.

Exercice 813 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continûment dérivable. On considère les deux intégrales $I_1 = \int_a^b f(t)\, dt$ et $I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\, dt$.

1. Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Faire le changement de variable $t = f(u)$ dans l'intégrale I_2.
3. Calculer I_2 en fonction de I_1.
4. Faire un dessin faisant apparaître f et f^{-1}, et interpréter ce résultat géométriquement.

Exercice 814 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} dx, \quad (t = \sqrt[6]{2+x})\ ;$$

$$\int \frac{1}{((x-1)^2 - 4)^2} dx, \quad (\frac{x-1}{2} = \operatorname{th} u \text{ ou } \coth u)\ ;$$

$$\int (\arcsin x)^2 dx \quad ; \quad \int x^2 \sqrt{1 + x^3} dx.$$

15.5 Intégration par parties

Exercice 815 Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^n} dx\ n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int x \operatorname{Arctan} x dx \quad ; \quad \int (x^2 + x + 1) e^x dx.$$

Exercice 816 Soit $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.

Exercice 817 Soit $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$.

1. Montrer que $\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)(a - x)(b - x)dx$.
2. En déduire un encadrement de $\int_a^b f(t)dt$ si $\forall x \in [a, b]\ m \leqslant f''(x) \leqslant M$.

Exercice 818 (Intégrales de Wallis) Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
3. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.

5. Calculer nI_nI_{n+1}.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n.

Exercice 819 Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k})$.

Exercice 820 Calculer par récurrence :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^n u}.$$

Exercice 821 Calculer par récurrence :

$$J_n = \int_1^e \log(u)^n du.$$

15.6 Polynôme en sin, cos, ou en ch, sh

Exercice 822 Calculer les primitives suivantes :

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 3x)dx \quad ; \quad \int \cos x \sin^4 x dx \quad ; \quad \int \cos^6 x dx \quad ;$$

$$\int \sin^3 x \cos x dx \quad ; \quad \int \sin^4 x dx \quad ; \quad \int \sin^3 x \cos^2 x dx \quad ;$$

$$\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x dx \quad ; \quad \int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x dx \quad ; \quad \int \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x dx.$$

Exercice 823 Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$x \cos^2 x$$

$$\cos(2x)\cos^2 x$$

15.7 Fractions rationnelles

Exercice 824 Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

1. $\dfrac{1}{a^2 + x^2}$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
3. $\dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.
4. $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$.
5. $\dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.
6. $\dfrac{1}{(t^2 + 2t - 1)^2}$.

7. $\dfrac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$.
8. $\dfrac{3t+1}{t^2-2t+10}$.
9. $\dfrac{1}{t^3+1}$.
10. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$.
11. $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$.
12. $\dfrac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}$.
13. $\dfrac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}$.
14. $\dfrac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2}$.
15. $\dfrac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 825 Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}$.
2. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$.
3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$.
4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16}$.
5. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\,dx$.
6. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6}$.
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,dx$.
8. $\displaystyle\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx$.
9. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\,dx$.
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}\,dx$.
11. $\displaystyle\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx$ pour $a \in \mathbb{R}$. Y a-t-il une limite quand $a \to +\infty$?

12. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^4+1}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 826 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{x^4+1}{x(x-1)^3}dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{(x^4+1)^2} \quad ; \quad \int \frac{xdx}{x^4+x^2+1} \quad ; \quad \int \frac{dx}{(x-1)(x^2-2x-2)^2}.$$

Exercice 827 Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$$

$$\frac{2x}{(1-x+x^2)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)}$$

$$\frac{1}{(1+x^3)^3}$$

15.8 Fractions rationnelles en sin, cos ou en sh, ch

Exercice 828 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx \quad ; \quad \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x} \quad ; \quad \int \frac{\cos x}{1+\sin 2x}dx \quad ;$$

$$\int \frac{\tan x-\tan a}{\tan x+\tan a}dx \quad ; \quad \int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}dx.$$

Exercice 829 Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{\cos^3 x}{\sin x}$$

$$\frac{1}{1+\tan x}$$

$$\frac{1}{\operatorname{th}^2 x}$$

15.9 Intégrales abéliennes

Exercice 830 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} \quad ; \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} \quad ; \quad \int \frac{x}{\sqrt{9+4x^4}}dx \quad ;$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{x+2}dx \quad ; \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}}dx.$$

Exercice 831 Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$$

$$\sqrt{x^2-1}$$

$$\frac{x\sqrt{x}}{x^2-5x+4}$$

15.10 Primitives diverses

Exercice 832 Calculer les primitives suivantes.

1. $\displaystyle\int e^{\sin^2 x} \sin 2x\, dx$.
2. $\displaystyle\int \cos^5 t\, dt\,;\ \int \cosh^3 t\, dt\,;\ \int \cos^4 t\, dt\,;\ \int \sinh^4 t\, dt$.
3. $\displaystyle\int x^3 e^x\, dx$.
4. $\displaystyle\int \ln x\, dx\,;\ \int x \ln x\, dx\,;\ \int \arcsin x\, dx$.
5. $\displaystyle\int \cosh t \sin t\, dt$.
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$.
7. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.
8. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}\, dx$.
9. $\displaystyle\int e^{ax} \cos bx\, dx\,;\ \int e^{ax} \sin bx\, dx$.
10. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\, dx \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1.$
11. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$.
13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{a^3 - x^3}} \quad \text{avec} \quad 0 < x < a.$
14. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\cosh x + \sinh x}\, dx$.

[Exercice corrigé]

Exercice 833 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x \sqrt{\operatorname{ch} 2x}} \quad ; \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad ; \quad \int \frac{1+\cos 2x}{1-\tan^2 x} dx \quad ;$$

$$\int \frac{\sin ax + \cos bx}{e^x} dx \quad ; \quad \int \frac{x(2+\cos x)}{\sin^2 x} dx.$$

Exercice 834 Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\operatorname{ch} x \sin(2x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2+\tan^2 x}}$$

$$(x^2 + 2x + 2)\cos(2x)$$

$$x^2 \cos x \text{ et } x^2 \sin x \text{ en utilisant les complexes}$$
$$\frac{1}{(x^2-1)^3} \text{ et } \frac{1}{(x^2-1)^2}$$
$$\frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}$$

Exercice 835 Calculer $\int_0^1 \ln(1+x^2)$.

Exercice 836 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2})$.

Exercice 837 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{(2n)!}{n!n^n})^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 838 Soient $I = \int_0^\pi x\cos^2 x dx$ et $J = \int_0^\pi x \sin^2 x dx$.

1. Calculer I et $I+J$.
2. En déduire J.

Exercice 839 Soit $a_n = \int_0^1 t^n e^t dt$.

1. Calculer $a_0, \dots, a_4$.
2. Etudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

15.11 Sommes de Riemann

Exercice 840 Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}, \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}.$$

Exercice 841 Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \;;\; \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} \;;\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} \;;\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\; u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}.$$

Calculer :

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$$

et donner un équivalent de $u_n - \ell$.

Exercice 842 Soient f et g continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Exercice 843 Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}.$$

Exercice 844 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+p^2}$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=1}^{n} \ln \dfrac{(3n+6p-4)(n+2p)^2}{3n^3}$.

16 Équations différentielles

16.1 Premier ordre

Exercice 845 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = y + x$ avec $y(0) = 1$,
2. $y' = \cos x + y$,
3. $y' + 2y = (x-2)^2$.

Exercice 846 Pour chacune des équations différentielles qui suit : écrire la solution passant par le point M(.,.) et tracer sommairement le graphe de la solution.

1. $y' + 2xy = 0, \quad M = (0,1)$,
2. $y' + y\tan x = \sin x \cos x \quad M = (\frac{\pi}{4}, 0)$,
3. $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$, On déterminera $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

Exercice 847 (Partiel de Novembre 1994) On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0,\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0,\infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle

$$(E1) \qquad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$

3. Intégrer $(E1)$ sur $]0,\infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0,\infty[$.

[Exercice corrigé]

Exercice 848 Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) + 2y(t) = 0$;
2. $\dfrac{dx}{dt} - x = 0$;
3. $y'(x) + 2y(x) = 0$ avec $(y - y')(0) = 0$.

Exercice 849 Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $(1+x^2)y' - xy = 0$;

2. $y' + y\tan x = 0$, pour x dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Exercice 850 Trouver les solutions réelles sur l'intervalle maximal de l'équation différentielle :

$$t^2y' + y = 1.$$

Exercice 851 Soit l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 2xy = x.$$

1. Résoudre l'équation homogène asociée.
2. Calculer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

[Exercice corrigé]

Exercice 852 Résoudre et raccorder éventuellement :

1. $xy' - 2y = x^4$.
2. $x(1 + x^2)y' = y$.
3. $(x^2 + 1)y' + (x - 1)^2y = x^3 - x^2 + x + 1$.
4. $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x$.

Exercice 853 Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -2 \end{cases}$.

Exercice 854 Résoudre l'équation différentielle de Ricatti $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$ en trouvant une solution particulière y_0 et en posant $z = \frac{1}{y - y_0}$.

Exercice 855 Soit l'équation différentielle :

$$(E) : \frac{dy(x)}{dx} + y(x) = x^2 + 2x$$

Intégrer (E) et montrer que par un point donné il passe une et une seule courbe intégrale. Soit H l'ensemble des points M tels que la courbe intégrale passant par M a une tangente horizontale en ce point, et I l'ensemble des points M tels que la courbe intégrale passant par ce point a un point d'inflexion en ce point. Tracer H, I et la courbe intégrale passant par $O(0,0)$. En déduire un tracé géométrique des courbes intégrales.

Exercice 856 Résoudre le système différentiel :

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + y(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 3x(t) - y(t),$$

$$x(0) = 2, y(0) = -2.$$

Exercice 857 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que si :

$$\lim_{x\to\infty} (f'(x) + \alpha f(x)) = 0$$

alors :

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 858 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 1$ et $f \leqslant f' \leqslant 2f$.Encadrer $f(-1)$ et $f(1)$.

16.2 Second ordre

Exercice 859 Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$,
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$,
3. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Exercice 860 Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y'' - y = x^3 + x^2$,
2. $y'' - 2y' + y = e^x$,
3. $y'' - 2y' + y = \cos(mx)$ où $m \in \mathbb{R}$,
4. $y'' - 2y' + y = x^3e^x + 2\cos x + (x^3 + 3)$ (utiliser le principe de superposition).

Exercice 861 On considère l'équation homogène (E) $ay'' + by' + cy = 0$, avec $a \neq 0$. Donner des conditions necessaires et suffisantes liant les coefficients a, b et c dans les deux cas suivants :
(i) toutes les solutions de (E) tendent vers 0 lorsque x tend vers l'infini ;
(ii) toutes les solutions sont périodiques.

Exercice 862 Résoudre l'équation :

$$y'' + k^2y = \cos mx, \quad k, m \in \mathbb{R}.$$

On discutera suivant les valeurs de k et m.

Exercice 863 Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 864 Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 865 Résoudre l'équation suivante :

$$4y'' + 4y' + 5y = \sin xe^{-x/2}.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 866 On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E) (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4. Soit $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, \infty[$ et qui vérifie :

$$t^2f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t\log t.$$

(a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).

(b) En déduire une expression de f.

[Exercice corrigé]

Exercice 867 Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de l'équation :

$$(E_m) \qquad y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos mx$$

qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ (Indication : On traitera séparement les cas $m = 0$ et $m \neq 0$).

Exercice 868 On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 6y' + 9y = d(x) \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E) lorque, respectivement, on pose :

$$d(x) = (x^2+1)e^{-3x} \text{ et } d(x) = \cos x.$$

3. Donner la forme générale des solutions de (E) lorsque :

$$d(x) = 2(x^2+1)e^{-3x} + 50\cos x.$$

Exercice 869 Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 870 Déterminer une équation différentielle admettant $(r-2)^2 = 0$ comme équation caractéristique et $e^x + (x^3/6)e^{2x}$ comme solution particulière.

Exercice 871 Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations :
a) $y'' + y' - 6y = e^{3x}$, b) $y'' + y' - 6y = e^x(2x+1)$,
c) $y'' - 4y' + 13y = \cos x$, d) $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}(x+1)$ avec $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

Exercice 872 (Partiel Novembre 96) On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E.D.) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à $(E.D.)$.
2. Trouver une solution particulière de $(E.D.)$ lorsque $d(x) = e^{-2x}$ et lorsque $d(x) = e^{2x}$ respectivement.
3. Donner la forme générale des solutions de $(E.D)$ lorsque

$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 873 Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' - 4y = 4e^{-2x}$.
2. $y'' - 3y' + 2y = (x^2+1)e^x$.
3. $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$.

4. $y'' + y = e^{-|x|}$.

Exercice 874 Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}\ f''(x)+f(-x) = x$.

Exercice 875 Résoudre sur $]0, +\infty[$ $xy'' - y' - x^3y = 0$ en posant $z(t) = y(\sqrt{t})$.

Exercice 876 Résoudre en posant $z(t) = y(e^t)$ ou $y(-e^t)$ suivant le signe de x, les équations différentielles (d'Euler) suivantes :

1. $x^2y'' - 2y = x$.
2. $x^2y'' + xy' + y = x\ln|x|$.

Exercice 877 Résoudre l'équation différentielle de Bernouilli $x^2y^2 - xy' - 3y = 0$ en supposant que y ne s'annule pas et en posant $z = \frac{1}{y}$.

Exercice 878 Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x\frac{dy(x)}{dx} - 2y(x) &= x^4, \\ y"(x) - 4y(x) &= 4e^{-2x}, \\ y"(x) - 2y'(x) + y(x) &= e^x \sin x. \end{aligned}$$

Exercice 879 En posant $z = \frac{1}{y}$ et en supposant que y ne s'annulle pas, résoudre l'équation (de Bernoulli) :

$$x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2} - x\frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = 0.$$

Exercice 880 Résoudre : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2x\cos x \cosh x$.
[Exercice corrigé]

Exercice 881 Déterminer les $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x\cos x.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 882 Soit p continue positive non nulle ; montrer que toute solution de $y''(x) + p(x)y(x) = 0$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 883 Montrer que toute solution de $y''(x)e^{-x^2} + y(x) = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 884 En posant $t = \arctan x$, résoudre :

$$y''(x) + \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 885 Résoudre par le changement de fonction $z = \frac{y}{x}$ l'équation différentielle :

$$x''^2(x) - 2xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 0.$$

[Exercice corrigé]

Troisième partie
ALGÈBRE 2

17 Espaces vectoriels

17.1 Définition, sous-espaces

Exercice 886 Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Calculer leurs dimensions.
$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+y-z = x+y+z = 0\}$.
$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 - z^2 = 0\}$.
$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ e^x e^y = 0\}$.
$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ z(x^2+y^2) = 0\}$.
[Exercice corrigé]

Exercice 887 Soit $\mathbb{R}_+^*$ muni de la loi interne $\oplus$ définie par $a \oplus b = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et de la loi externe $\otimes$ telle que $\lambda \otimes a = a^\lambda, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 888 Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+a = 0, \text{ et } x + 3az = 0\right\}$$
$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(1) = 0\}, \qquad E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(0) = 1\}$$
$$E_4 = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P' = 3\}, \qquad E_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x + \alpha y + 1 \geqslant 0\right\}.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 889 Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :
$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y = 0\}$; $\quad E_1' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}$.
$E_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x = 0, y = z\}$; $\quad E_2' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}$.
$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy \geqslant 0\}$; $\quad E_3' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 \geqslant 0\}$.
$E_4 = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} / f(1) = 0\}$; $\quad E_4' = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} / f(0) = 1\}$;
$E_4" = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} / f \text{ est croissante}\}$.

Exercice 890 Déterminer si $\mathbb{R}^2$, muni des lois internes et externes suivantes, est ou n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

1. $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d); \lambda(a,b) = (a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d); \lambda(a,b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b), \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $(a,b) + (c,d) = (c,d); \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 891 Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels :

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.
2. L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ pour les mêmes opérations.
3. L'ensemble des solutions (x_1, x_2, x_3) du système : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 & = & 0. \end{array}\right.$

4. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $f(1/2)=0$.
5. L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations $x \oplus y = xy$ et $\lambda \cdot x = x^\lambda$, $(\lambda \in \mathbb{R})$.
6. L'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$.
7. L'ensemble des fonctions sur $[a,b]$ continues, vérifiant $f(a) = 7f(b) + \int_a^b t^3 f(t)\,dt$.
8. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont nulle en 1 ou nulle en 4.
9. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire comme somme d'une fonction nulle en 1 et d'une fonction nulle en 4. Identifier cet ensemble.
10. L'ensemble des polynômes de degré exactement n.
11. L'ensemble des fonctions de classe C^2 vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.
12. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que $f(3) = 7$.
13. L'ensemble des primitives de la fonction xe^x sur $\mathbb{R}$.
14. L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
15. L'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x+y) = 0$.
16. L'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1,3,-2)$.
17. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $\int_0^1 \sin x f(x)\,dx = 0$.
18. L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7.
19. L'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$.

Exercice 892 Montrer que l'ensemble $\mathcal{E} = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} / (\exists (a,\varphi) \in \mathbb{R}^2)(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = a\cos(x-\varphi)\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 893 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que
$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
2. Soient H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que
$$G \subset F \Longrightarrow F \cap (G+H) = G + (F \cap H).$$

Exercice 894 On munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition usuelle et de la loi externe $\lambda(x,y) = (\lambda x, y)$. Est-ce un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 895 Montrer que $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0 \text{ et } 2x-y+3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 896 Montrer que
$$F = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) | \exists (A,\phi) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A\cos(x+\phi)\}$$
est un espace vectoriel.

17.2 Systèmes de vecteurs

Exercice 897 Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1}(1,1,0)$, $\vec{v_2}(4,1,4)$ et $\vec{v_3}(2,-1,4)$.

1. Montrer que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$, puis avec $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.
2. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est-elle libre ?

Exercice 898 Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v_1}(1,0,1)$, $\vec{v_2}(0,2,2)$ et $\vec{v_3}(3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v_1}(1,0,0)$, $\vec{v_2}(0,1,1)$ et $\vec{v_3}(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\vec{v_1}(1,2,1,2,1)$, $\vec{v_2}(2,1,2,1,2)$, $\vec{v_3}(1,0,1,1,0)$ et $\vec{v_4}(0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $\vec{v_1}(2,4,3,-1,-2,1)$, $\vec{v_2}(1,1,2,1,3,1)$ et $\vec{v_3}(0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $\vec{v_1}(2,1,3,-1,4,-1)$, $\vec{v_2}(-1,1,-2,2,-3,3)$ et $\vec{v_3}(1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Exercice 899 On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_2}, \vec{e_3})$.
2. $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$.
3. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_1} + \vec{e_4}, \vec{e_4})$.
4. $(3\vec{e_1} + \vec{e_3}, \vec{e_3}, \vec{e_2} + \vec{e_3})$.
5. $(2\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_1} - 3\vec{e_2}, \vec{e_4}, \vec{e_2} - \vec{e_1})$.

Exercice 900 Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{e_1}(1,2,3,4)$ et $\vec{e_2}(1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1) \in Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$? Et pour que $(x,1,1,y) \in Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$?

Exercice 901 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 902 Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $V_1 = (1,1,1,1)$, $V_2 = (1,2,3,4)$, $V_3 = (3,1,4,2)$, $V_4 = (10,4,13,7)$, $V_5 = (1,7,8,14)$. Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.

Exercice 903 Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $V_1 = (1,1,1,1)$, $V_2 = (1,2,3,4)$, $V_3 = (3,1,4,2)$, $V_4 = (10,4,13,7)$, $V_5 = (1,7,8,14)$. À quelle(s) condition(s) un vecteur $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ appartient-il au sous-espace engendré par les vecteurs V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 ? Définir ce sous-espace par une ou des équations.

Exercice 904 Soient les vecteurs $e_1 = (1,2,3,4)$, $e_2 = (1,-2,3,-4)$ de $\mathbb{R}^4$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1) \in \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$? pour que $(x,1,1,y) \in \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$?

Exercice 905 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et x, y, z, t une famille libre d'éléments de E, les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $x, 2y, z$.
2. x, z.
3. $x, 2x + t, t$.
4. $3x + z, z, y + z$.
5. $2x + y, x - 3y, t, y - x$.

Exercice 906 Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \operatorname{Vect}\{(1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,-5)\} \\ G &= \operatorname{Vect}\{(-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\} \end{aligned}$$

Exercice 907 On suppose que $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 908 Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix}\right\}$. Montrer que E et F sont égaux.

[Exercice corrigé]

Exercice 909 Prouver que dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u_1 = (2,3,-1)$ et $u_2 = (1,-1,-2)$ engendrent le même s.e.v. que les vecteurs $v_1 = (3,7,0)$ et $v_2 = (5,0,-7)$.

Exercice 910

1. Montrer que les systèmes : $S_1 = (1; \sqrt{2})$ et $S_2 = (1; \sqrt{2}; \sqrt{3})$ sont libres dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
2. Soient, dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $u_1 = (3+\sqrt{5}, 2+3\sqrt{5})$ et $u_2 = (4, 7\sqrt{5}-9)$. Montrer que le système (u_1, u_2) est $\mathbb{Q}$-libre et $\mathbb{R}$-lié.
3. Soient les vecteurs $v_1 = (1-i, i)$ et $v_2 = (2, -1+i)$ dans $\mathbb{C}^2$.
   (a) Montrer que le système (v_1, v_2) est $\mathbb{R}$-libre et $\mathbb{C}$-lié.
   (b) Vérifier que le système $S = \{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ est une base de l'e.v. $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et donner les composantes des vecteurs v_1, v_2 par rapport à cette base.

Exercice 911

1. On définit les fonctions suivantes : $f_1 : t \mapsto \cos t . \operatorname{ch} t$, $f_2 : t \mapsto \cos t . \operatorname{sh} t$, $f_3 : t \mapsto \sin t . \operatorname{ch} t$, $f_4 : t \mapsto \sin t . \operatorname{sh} t$. Montrer que le système (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Même question pour la famille $\mathcal{F} = \{f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 912 Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les trois fonctions $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \sin 2x$, $x \mapsto \sin 3x$, sont-elles linéairement indépendantes ? Généraliser.

Exercice 913 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $S_1 = (e_1, e_2, ..., e_n)$ un système libre dans E, $n \geqslant 2$.

1. On considère le système $S_2 = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ défini par : $e'_j = \sum_{k=1}^{j} e_k, 1 \leqslant j \leqslant n$. S_2 est-il libre ?
2. On considère le système $S_3 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ défini par : $\varepsilon_j = e_j + e_{j+1}, 1 \leqslant j \leqslant n-1$ et $\varepsilon_n = e_n + e_1$. Montrer les résultats suivants :
   (a) S_3 libre $\Rightarrow S_1$ libre.
   (b) n impair : S_3 libre $\Leftrightarrow S_1$ libre.
   (c) n pair : S_3 lié.

Exercice 914 Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par le système (e_1, e_2) où $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

[Exercice corrigé]

Exercice 915 Soient $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)\cos(2x)$ et $h(x) = \sin(x)\sin(2x)$. Déterminer $\text{vect}(f, g, h)$.

Exercice 916 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \text{ si } x = \alpha \text{ , } 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

[Exercice corrigé]

Exercice 917 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\alpha x} \end{cases}$. Montrer que la famille $(g_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 918 Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et ce quelque soit $N \in \mathbb{N}^*$:

$$(x \to |x - a|)_{a=1,3,5,\ldots,2N+1} \, ; (x \to \cos nx)_{n=1,2,\ldots,N} \, ; (x \to e^{ax})_{a=1,\ldots,N}$$

17.3 Somme directe

Exercice 919 Soient $\vec{e_1}(0, 1, -2, 1), \vec{e_2}(1, 0, 2, -1), \vec{e_3}(3, 2, 2, -1), \vec{e_4}(0, 0, 1, 0)$ et $\vec{e_5}(0, 0, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\} = Vect\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\}$.
2. $(1, 1, 0, 0) \in Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} \cap Vect\{\vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}$.
3. $dim(Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} \cap Vect\{\vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}) = 1$.
4. $Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} + Vect\{\vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\} = \mathbb{R}^4$.
5. $Vect\{\vec{e_4}, \vec{e_5}\}$ est un sous-espace vectoriel de supplémentaire $Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 920 On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question pour $\text{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_2, v_5\}$.

Exercice 921 Si L, M, N sont trois sous-espaces vectoriels de E, a-t-on :

$$L \cap (M + N) = L \cap M + L \cap N \text{ ?}$$

Exercice 922 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. On définit

$$E_a = \{P \in E; (X - a)/P\}$$

pour $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si $a \neq b$ il existe un couple de réels (c, d) tels que $1 = c(X-a)+d(X-b)$. En déduire que $E = E_a + E_b$, la somme est-elle directe ?

Exercice 923 Soit $E = \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

[Exercice corrigé]

Exercice 924 Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont *supplémentaires* dans E lorsque $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$. On note $E = F \oplus G$.

1. Soient $e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $e_5 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Posons $F = \text{Vect}\,\{e_1, e_2\}, G = \text{Vect}\,\{e_3, e_4\}, G' = \text{Vect}\,\{e_3, e_4, e_5\}$. Montrer que $E = F \oplus G$ et $E \neq F \oplus G'$.
2. Supposons que E est de dimension finie n, que $\dim\,(F) = p$ et $E = F \oplus G$.
   (a) Calculer $\dim\,(G)$.
   (b) Montrer que tout élément x de E se décompose d'une manière *unique* en une somme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.
   (c) Soient $\mathcal{F} = \{f_1, \cdots, f_k\}$ une famille libre de F et $\mathcal{G} = \{g_1, \cdots, g_l\}$ une famille libre de G. Montrer que la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est libre.
   (d) Soit φ une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^q$, $q \in \mathbb{N}$. Construire deux applications linéaires ψ et ψ' de E dans $\mathbb{R}^q$ telles que : $\forall y \in F : \psi'(y) = 0, \forall z \in G : \psi(z) = 0$ et $\forall x \in E : \varphi(x) = \psi(x) + \psi'(x)$.

Exercice 925 (Caractérisation de la somme directe de trois s.e.v.) Soient U, V, W des s.e.v. d'un e.v. E, vérifiant $(I) : U \cap V = \{0\} = (U + V) \cap W$.

1. Démontrer que $V \cap W = \{0\} = U \cap (V + W)$.
2. Montrer que (I) équivaut à

$$(II) : (\forall x \in U + V + W)(\exists!(u, v, w) \in U \times V \times W)(x = u + v + w).$$

Exercice 926 Soit

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge } \}.$$

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires de E.

18 Applications linéaires

18.1 Définition

Exercice 927 *Notations :*
$\mathcal{C}$ *: ensemble des fonctions numériques continues sur* $[0, 1]$.
$\mathcal{C}_d$ *: ensemble des fonctions numériques ayant une dérivée continue sur* $[0, 1]$.
$\mathcal{C}(\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *: définis de façon analogue pour les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$.
$\mathcal{P}$ *: ensemble des polynômes sur* $\mathbb{R}$.
$\mathcal{P}_n$ *: ensemble des polynômes sur* $\mathbb{R}$*, de degré* $\leqslant n$.

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$.
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$.
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$.
4. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (y, x)$.
5. $\mathcal{C} \to \mathcal{C} : f \mapsto \{t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\}$.
6. $\mathcal{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto f(3/4)$.

7. $\mathcal{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto f(1/4) - \int_{1/2}^{1} f(t)\, dt$.
8. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3x + 5y$.
9. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{3x^2 + 5y^2}$.
10. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$.
11. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-x, y)$.
12. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$.
13. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ si $x^2 + y^2 \neq 0$ et0 sinon.
14. $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_d : f \mapsto \{x \mapsto e^{-x} \int_0^1 f(t)\, dt\}$.
15. $\mathcal{P} \to \mathcal{P}_n : A \mapsto$ quotient de A par B à l'ordre n selon les puissances croissantes (B et n fixés, avec $B(0) \neq 0$).
16. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : M \mapsto M'$ défini par : $\overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$ si $\overrightarrow{OM} \neq \overrightarrow{0}$ et 0 sinon.
17. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : M \mapsto \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{V}$ où $\overrightarrow{V} = (4, -1, 1/2)$.
18. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$.
19. $\mathcal{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto \max_{t\in[0,1]} f(t)$.
20. $\mathcal{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto \max_{t\in[0,1]} f(t) - \min_{t\in[0,1]} f(t)$.
21. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto$ la solution du système d'équations en (u, v) :
$$\begin{cases} 3u - v &= x \\ 6u + 2v &= y. \end{cases}$$
22. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto$ le symétrique de (x, y) par rapport à la droite d'équation $x+y-a = 0$ (discuter selon les valeurs de a).
23. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto$ la projection de (x, y, z) sur le plan $x + y + z - a = 0$ parallèlement à Oz (discuter selon les valeurs de a).
24. $\mathcal{C}_d \to \mathcal{C} : f \mapsto f'$.
25. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + z, x - y + z/3)$.
26. $\mathbb{R} \to \mathcal{C}d : \lambda \mapsto$ la solution de l'équation différentielle $y' - \frac{y}{x^2+1} = 0$ valant λ en $x_0 = 1$.
27. $\mathcal{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 \ln(1 + |f(t)|)\, dt$.
28. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto$ la 17-ième décimale de x (en écriture décimale).
29. $\mathcal{C}_d \to \mathbb{R} : f \mapsto f'(1/2) + \int_0^1 f(t)\, dt$.
30. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(3^{x\sqrt{2}})$.
31. $\mathbb{R} \times \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}) : (\lambda, f) \mapsto$ la primitive de f qui vaut λ en $x_0 = \pi$.
32. $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f \mapsto \{x \mapsto f'(x) + f(x) \cdot \sin x\}$.

Exercice 928 Soient f et g, applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définies par $f(z) = \bar{z}$ et $g(z) = \Re(z)$. Montrer que f et g sont linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-e.v., et non linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-e.v.

Exercice 929 Déterminer si les applications f_i suivantes (de E_i dans F_i) sont linéaires :
$$f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y, x - y) \in \mathbb{R}^2, f_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xy, x, y) \in \mathbb{R}^3$$
$$f_3 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y + z, y - z, x + y) \in \mathbb{R}^3$$
$$f_4 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X], f_5 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_3[X]$$
$$f_6 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3, f_7 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P - (X - 2)P' \in \mathbb{R}[X].$$

Exercice 930 Soit E un espace vectoriel de dimension n et φ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est une base de E.
[Exercice corrigé]

18.2 Image et noyau

Exercice 931 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, on définit l'application $f : F \times G \to \mathbb{R}^n$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 932 Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que les propriétés (1) à (3) sont équivalentes.

$$\mathbb{R}^n = Im(f) \bigoplus Ker(f) \tag{1}$$

$$Im(f) = Im(f^2) \tag{2}$$

$$Ker(f) = Ker(f^2) \tag{3}$$

Exercice 933 Soient : E, F et G trois sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. On rappelle que $g \circ f$ est l'application de E dans G définie par $g \circ f(v) = g(f(v))$, pour tout vecteur v de E.

1. Montrer que $g \circ f$ est une application linéaire.
2. Montrer que $f\big(\mathrm{K}er(g \circ f)\big) = \mathrm{K}erg \cap \mathrm{I}mf$.

Exercice 934 E_1 et E_2 étant deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E, on définit l'application $f \colon E_1 \times E_2 \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Appliquer le théorème du rang.

Exercice 935 Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Pour $p \leqslant n$ on note e_p le polynôme $x \mapsto x^p$. Soit f l'application définie sur E par $f(P) = Q$ avec $Q(x) = P(x+1) + P(x-1) - 2P(x)$.

1. Montrer que f est une application linéaire de E dans E.
2. Calculer $f(e_p)$; quel est son degré ? En déduire $\ker f$, $\mathrm{Im}\ f$ et le rang de f.
3. Soit Q un polynôme de $\mathrm{Im}\ f$; montrer qu'il existe un polynôme unique P tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 936 Soit E, F, G trois espaces vectoriels, f et g deux applications linéaires $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$; montrer que :

$$\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g \cap \mathrm{Im}\ f) = f^{-1}(\ker g).$$

Exercice 937 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et N deux sous-espaces vectoriels de E ; donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application linéaire f de E dans E vérifiant : $f(E) = F$ et $\ker f = N$.

Exercice 938 Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions respectives n, p, q, f et g deux applications linéaires $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ telles que $g \circ f = 0$. Quelle relation existe-t-il entre le rang de f et celui de g ?

Exercice 939 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f une application linéaire de E dans E ; montrer que les propriétés (1) à (3) sont équivalentes :

(1) $E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$,

(2) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$,

(3) $\ker f = \ker f^2$.

Exercice 940 Soit E un espace vectoriel, et u une application linéaire de E dans E. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ est libre, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$.
2. Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est libre, il en est de même de $e_1, e_2, \dots, e_p$.
3. Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ est génératrice, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$.
4. Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est génératrice, il en est de même de $e_1, e_2, \dots, e_p$.
5. Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est une base de $\Im u$, alors $e_1, e_2, \dots, e_p$ est une base d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$.

Exercice 941 Soient E un espace vectoriel et φ une application linéaire de E dans E. On suppose que $\operatorname{Ker}(\varphi) \cap \operatorname{Im}(\varphi) = \{0\}$. Montrer que, si $x \notin \operatorname{Ker}(\varphi)$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi^n(x) \neq 0$.

[Exercice corrigé]

Exercice 942 Pour des applications linéaires $f : E \to F$, $g : F \to G$, établir l'équivalence

$$g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g.$$

Soit f un endomorphisme d'un e.v. E, vérifiant l'identité $f^2 + f - 2i_E = 0$. Etablir $\operatorname{Im}(f - i_E) \subset \operatorname{Ker}(f + 2i_E)$; $\operatorname{Im}(f + 2i_E) \subset \operatorname{Ker}(f - i_E)$; $E = \operatorname{Ker}(f - i_E) \oplus \operatorname{Ker}(f + 2i_E)$.

Exercice 943 Soient E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

1. $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{im}(f)$.
2. $f^2 = 0$ et $n = 2 \operatorname{rg}(f)$.

[Exercice corrigé]

Exercice 944 Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans lui-même.

1. Montrer que, si $F \subset f(F)$ alors $f(F) = F$.
2. Montrer que, si f est injective et $f(F) \subset F$ alors $f(F) = F$.

Exercice 945 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(f)$.

Exercice 946 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et φ une application linéaire de E dans lui-même. Posons $K_n = \operatorname{Ker}(\varphi^n)$ et $I_n = \operatorname{Im}(\varphi^n)$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $K_n = K_{n_0}$. Déduiser en que pour tout $n \geqslant n_0$ on a également $I_n = I_{n_0}$.

Exercice 947 Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 948 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ (on remarquera que $f \circ (f^2 - f - id) = 0$).

Exercice 949 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = f(\ker(f \circ f))$.
[Exercice corrigé]

Exercice 950 Soit U un sous-espace vectoriel de E espace vectoriel, et

$$A = \{f \in L(E) | U \subset \mathrm{Ker}(f)\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

Exercice 951 Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
2. $\mathrm{Ker}(f)$ inclus strictement dans $\mathrm{Im}(f)$.
3. $\mathrm{Im}(f)$ inclus strictement dans $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 952 Soit $(u, v) \in (L(E))^2$, tels que $u^2 = u$ et $vu = 0$. Montrer que

$$\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v).$$

18.3 Injectivité, surjectivité, isomorphie

Exercice 953 Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$, et λ un nombre réel. Démontrer que la donnée de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi(\vec{e_1}) & = & \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \phi(\vec{e_2}) & = & \vec{e_1} - \vec{e_2} \\ \phi(\vec{e_3}) & = & \vec{e_1} + \lambda \vec{e_3} \end{array} \right.$$

définit une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Ecrire l'image du vecteur $\vec{v} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$. Comment choisir λ pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Exercice 954 Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et λ un paramètre réel.

Démontrer que la donnée de $\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi(e_1) & = & e_1 + e_2 \\ \varphi(e_2) & = & e_1 - e_2 \\ \varphi(e_3) & = & e_1 + \lambda e_3 \end{array} \right.$ définit une application linéaire φ de E dans E. Écrire le transformé du vecteur $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Comment choisir λ pour que φ soit injective ? surjective ?

Exercice 955 E étant un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, f une application linéaire de E dans E, construire dans les trois cas suivants deux applications linéaires bijectives u et v de E dans E telles que $f = u - v$.
- f est bijective.
- $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f = E$.
- f est quelconque.

Exercice 956

1. Dire si les applications $f_i, 1 \leqslant i \leqslant 6$, sont linéaires

$$\begin{aligned} f_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x+y, ax-y) \in \mathbb{R}^2, \\ f_2 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xy, ax, y) \in \mathbb{R}^3, \\ f_3 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto aP' + P \in \mathbb{R}[X], \\ f_4 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_2[X], \\ f_5 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3, \\ f_6 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P - (X-2)P' \in \mathbb{R}[X]. \end{aligned}$$

2. Pour les applications linéaires trouvées ci-dessus, déterminer $\ker(f_i)$ et Im (f_i), en déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

Exercice 957 Soit $f \in L(E)$ non nul ; montrer que f est injective si et seulement si pour tout couple (E_1, E_2) de sous-espaces supplémentaires de E, la somme $f(E_1) + f(E_2)$ est directe (i.e. $f(E_1)$ et $f(E_2)$ sont supplémentaires).

Exercice 958 Soit $f \in L(E)$ où E est un $K-$espace vectoriel. On suppose :

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in K, f(x) = \lambda x.$$

Montrer :

$$\exists \mu \in K, f = \mu id.$$

Exercice 959 Soient $E = \mathbb{C}_n[X]$ et A et B deux polynômes à coefficients complexes de degré $(n+1)$. On considère l'application f qui à tout polynôme P de E, associe les reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer l'équivalence

$$f \text{ est bijective} \Longleftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont premiers entre eux}.$$

Exercice 960 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f + id$. Montrer que f est un automorphisme.

Exercice 961 Soit E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que $E = \ker(f - Id) \oplus \ker(f - 2Id)$.
3. Déduire de 2. que si E est de dimension finie n, il existe une base $\beta = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, telle que $\forall i, f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$ avec $\lambda_i = 1$ ou $\lambda_i = 2$.

Exercice 962 Montrer que si $p < q$ il n'existe pas d'application linéaire surjective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Montrer que si $q < p$ il n'existe pas non plus d'application linéaire injective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$.

Exercice 963 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et φ une application linéaire de E dans F. Montrer que φ est un isomorphisme si et seulement si l'image par φ de toute base de E est une base de F.
[Exercice corrigé]

Exercice 964

1. Soient E et F deux espaces vectoriels et φ une application linéaire bijective de E dans F. Montrer que la bijection réciproque φ^{-1} est linéaire. Une telle application est dite un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer qu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels de E à valeurs dans F si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Exercice 965 Soit E un espace vectoriel de dimension finie φ et ψ deux applications linéaires de E dans lui-même telles que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_E$. Montrer que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_E$.

18.4 Morphismes particuliers

Exercice 966 Soient U et V deux ensembles non vides et f une application de U à valeurs dans V. Le *graphe* de f est le sous-ensemble de $U \times V$ défini par $\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in U \times V \text{ tels que } y = f(x)\}$.

1. On suppose maintenant que U et V sont des espaces vectoriels. Rappeler la définition de la structure d'espace vectoriel de $U \times V$.
2. Montrer qu'une partie H de $U \times V$ est le graphe d'une application linéaire de U dans V si et seulement si les trois conditions qui suivent sont satisfaites :
   i) La projection canonique $H \to U$ définie par $(x, y) \mapsto x$ est surjective.
   ii) H est un sous-espace vectoriel de $U \times V$.
   iii) $H \cap (\{0_U\}) \times V) = \{0_{U\times V}\}$. ($0_U$ et $0_{U\times V}$ sont les éléments neutres respectifs de U et $U \times V$.)
3. On identifie $\mathbb{R}^4$ à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par l'isomorphisme $(x, y, z, t) \mapsto ((x, y), (z, t))$. Enoncer des conditions nécéssaires et suffisantes pour que E soit le graphe d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.
4. Montrer que E est le graphe d'une application linéaire φ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. Déterminer sa matrice dans une base que l'on définira au préalabe.

Exercice 967 (Projecteur et involution) Soit E un espace vectoriel ; on note i_E l'identité sur E. Un endomorphisme u de E est un **projecteur** si $u \circ u = u$.

1. Montrer que si u est un projecteur alors $i_E - u$ est un projecteur. Vérifier aussi que $\mathrm{Im}u = \{x \in E;\ u(x) = x\}$ et que $E = \mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Im}u$.
   Un endomorphisme u de E est appelé *involutif* si $u \circ u = i_E$.
2. Montrer que si u est involutif alors u est bijectif et $E = \mathrm{Im}(i_E + u) \oplus \mathrm{Im}(i_E - u)$.
   Soit $E = F \oplus G$ et soit $x \in E$ qui s'écrit donc de façon unique $x = f + g$, $f \in F$, $g \in$G.
   Soit $u : E \ni x \mapsto f - g \in E$.
3. Montrer que u est involutif, $F = \{x \in E;\ u(x) = x\}$ et $G = \{x \in E;\ u(x) = -x\}$.
4. Montrer que si u est un projecteur, $2u - i_E$ est involutif et que tout endomorphisme involutif peut se mettre sous cette forme.

Exercice 968 Soient $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$ et $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 2y + z = 0, x - y - z = 0\}$. On désigne par ε la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une base $\{e_1, e_2\}$ de P et $\{e_3\}$ une base de D. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ puis que $\varepsilon' = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallélement à D. Déterminer $\mathrm{Mat}(p, \varepsilon', \varepsilon')$ puis $A = \mathrm{Mat}(p, \varepsilon, \varepsilon)$. Vérifier $A^2 = A$.
3. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P parallélement à D. Déterminer $\mathrm{Mat}(s, \varepsilon', \varepsilon')$ puis $B = \mathrm{Mat}(s, \varepsilon, \varepsilon)$. Vérifier $B^2 = I$, $AB = A$ et $BA = A$.

Exercice 969

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un *hyperplan* de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. Montrer que l'intersection de deux hyperplans de E a une dimension supérieure ou égale à $n-2$. Montrer que, pour tout $p \leqslant n$, l'intersection de p hyperplans a une dimension supérieure ou égale à $n-p$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application e_y de $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie en posant $e_y(P(X)) = P(y)$ (i.e. l'application e_y est l'évaluation en y) est linéaire. Calculer la dimension de son noyau.
3. Même question avec l'application e'_y de $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie en posant $e'_y(P(X)) = P'(y)$ (en désignant par P' le polynôme dérivé de P).
4. Démontrer, à l'aide de ces deux résultats, qu'il existe dans $\mathbb{R}_6[X]$ un polynôme P non nul et ayant les propriétés suivantes : $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ et $P'(4) = P'(5) = P'(6) = 0$.

Exercice 970 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \frac{1}{3}(-x+2y,-2x+4y) \end{cases}$. Montrer que f est la bîîîîp par rapport à bîîîîp parallèlement à bîîîîp.

Exercice 971 E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E : $E = F \bigoplus G$. On pose $s(u) = u_F - u_G$ où $u = u_F + u_G$ est la décomposition (unique) obtenue grâce à $E = F \bigoplus G$. s est la symétrie par-rapport à F de direction G.

1. Montrer que $s \in L(E)$, que $u \in F \Leftrightarrow s(u) = u, u \in G \Leftrightarrow s(u) = -u$, donner $\mathrm{Ker}(s)$ et calculer s^2.
2. Réciproquement si $f \in L(E)$ vérifie $f^2 = id_E$. On pose $p = \frac{f+id_E}{2}$. Calculer $f(u)$ en fonction de $p(u)$ et u. Vérifier que p est un projecteur, calculer son noyau et son image. Montrer que f est la symétrie par rapport à $F = \{u \in E | f(u) = u\}$ de direction $G = \{u \in E | f(u) = -u\}$.

Exercice 972 Soient p et q deux projecteurs de E, espace vectoriel, tels que $pq = qp$ (p et q commutent). Montrer que pq et $(p+q-pq)$ sont deux projecteurs de E, et que :

$$\mathrm{Im}(pq) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q,$$

$$\mathrm{Im}(p+q-pq) = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q.$$

Exercice 973 Soient p et q deux projecteurs de E, espace vectoriel ; donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p+q$ soit un projecteur de E ; donner alors $\mathrm{Im}(p+q)$ et $\mathrm{Ker}(p+q)$.
Indication : on montrera que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p \bigoplus \mathrm{Im}\, q$ et que $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 974 Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, P le sous-espace des fonctions paires et I le sous-espace des fonctions impaires. Monter que $E = P \bigoplus I$. Donner l'expression du projecteur sur P de direction I.

Exercice 975 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes, et $f : E \to E$ définie par :

$$\forall P \in E,\ f(P)(X) = \frac{P(-X) - P(X)}{2}.$$

Montrer que $f \in L(E)$, que $E = \mathrm{Im}\, f \bigoplus \mathrm{Ker}(f)$ mais que $f^2 = -f$. Quel théorème cet exemple illustre t-il ?

Exercice 976 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$, et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P) = P + (1-X)P'.$$

Montrer que $f \in L(E)$, donner une base de $\mathrm{Im}\, f$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 977 Soit $E = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $U : E \to E$ définie par $f \mapsto U(f)$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, U(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

et $U(f)(0) = f(0)$. Montrer que $U \in L(E)$, déterminer $\text{Ker}(U)$ et $\text{Im}(U)$.

Exercice 978 On désigne par $\mathcal{P}_q$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à q, et $\mathcal{O}_q$ l'espace vectoriel des polynômes d'ordre supérieur ou égal à q, c'est-à-dire divisibles par x^q. P étant un polynôme, on note $T(P)$ le polynôme défini par :

$$T(P)(x) = xP(0) - \frac{1}{20}x^5 P^{(4)}(0) + \int_0^x t^2[P(t+1) - P(t) - P'(t)]\, dt.$$

1. Montrer que T est linéaire. Déterminer $T(e_i)$ où $e_0 = 1$, $e_1 = x$, $e_2 = x^2$, $e_3 = x^3$, $e_4 = x^4$, et vérifier que $T(\mathcal{P}_4) \subset \mathcal{P}_4$. Désormais, on considère T comme application linéaire de $\mathcal{P}_4$ dans $\mathcal{P}_4$. Écrire sa matrice par rapport à la base $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$.
2. Déterminer soigneusement les espaces $T(\mathcal{P}_4 \cap \mathcal{O}_3)$ et $T(\mathcal{P}_4 \cap \mathcal{O}_2)$.
3. La restriction T' de T à $\mathcal{P}_4 \cap \mathcal{O}_2$ est-elle injective ? Sinon déterminer une base du noyau de T'.
4. Montrer que $\Im T = (\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{P}_1) \oplus (\mathcal{O}_3 \cap \mathcal{P}_4)$. Quel est le rang de T ?
5. Montrer que $\text{Ker}\, T$ peut s'écrire sous la forme $(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{P}_1) \oplus V$; expliciter un sous-espace V possible. Déterminer $\text{Ker}\, T \cap \Im T$.
6. On cherche un vecteur non nul $u = ae_3 + be_4$ de $\mathcal{O}_3 \cap \mathcal{P}_4$, et un nombre réel λ, tels que $T(u) = \lambda u$. Écrire les équations que doivent vérifier a, b, λ. Montrer qu'il existe deux valeurs possibles de λ, λ_1 et λ_2, telles $0 < \lambda_1 < \lambda_2$; les calculer. Trouver deux vecteurs non nuls u_3 et u_4 de $\mathcal{O}_3 \cap \mathcal{P}_4$ tels que $T(u_3) = \lambda_1 u_3$ et $T(u_4) = \lambda_2 u_4$.
7. On pose $u_0 = e_1$, $u_1 = e_2 - 4e_3 + 3e_4$, $u_2 = e_0$. Montrer que $\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une base de $\mathcal{P}_4$. Écrire la matrice de T dans cette base.

19 Espaces vectoriels de dimension finie

19.1 Base

Exercice 979 Montrer que les vecteurs $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

[Exercice corrigé]

Exercice 980 Soient $\vec{v_1}(1,2,3,4), \vec{v_2}(2,2,2,6), \vec{v_3}(0,2,4,4), \vec{v_4}(1,0,-1,2), \vec{v_5}(2,3,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. Soient $F = Vect\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ et $G = Vect\{\vec{v_4}, \vec{v_5}\}$. Déterminer une base des sous-espaces $F \cap G$, F, G et $F + G$.

Exercice 981
1. Montrer que les vecteurs $x_1 = (0,1,1)$, $x_2 = (1,0,1)$ et $x_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les composantes du vecteur $x = (1,1,1)$.
2. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.
3. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.

Exercice 982 On considère dans $\mathbb{R}^4$, $F = \text{lin}\{a, b, c\}$ et $G = \text{lin}\{d, e\}$, avec $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (2, 2, 2, 6)$, $c = (0, 2, 4, 4)$, $d = (1, 0, -1, 2)$ et $e = (2, 3, 0, 1)$. Déterminer des bases des sous-espaces $F \cap G$, F, G, $F + G$.

Exercice 983 Dans l'espace $\mathcal{P}_5$ des polynômes de degré $\leqslant 5$, on définit les sous-ensembles :
$E_1 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid P(0) = 0\}$
$E_2 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid P'(1) = 0\}$
$E_3 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid x^2 + 1 \text{ divise } P\}$
$E_4 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid x \mapsto P(x) \text{ est une fonction paire}\}$
$E_5 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid \forall x,\ P(x) = xP'(x)\}$.

1. Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cap E_3$, $E_1 \cap E_2 \cap E_3$, $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$.
2. Déterminer dans $\mathcal{P}_5$ des sous-espaces supplémentaires de E_4 et de $E_1 \cap E_3$.

Exercice 984 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 985 Vrai ou faux ? On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Si les vecteurs x, y, z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille x, y, z est libre.
2. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_p$ une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est libre.

Exercice 986 Étudier l'indépendance linéaire des listes de vecteurs suivantes, et trouver à chaque fois une base du sous-espace engendré.

1. $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 2)$, $(3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $(1, 2, 1, 2, 1)$, $(2, 1, 2, 1, 2)$, $(1, 0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $(2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $(1, 1, 2, 1, 3, 1)$, $(0, -1, 0, 3, 6, 2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $(2, 1, 3, -1, 4, -1)$, $(-1, 1, -2, 2, -3, 3)$, $(1, 5, 0, 4, -1, 7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Exercice 987 Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants forment-ils une base ? Sinon décrire le sous-espace qu'ils engendrent.

1. $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (-1, 1, -1)$.
2. $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (1, 8, 13)$.
3. $v_1 = (1, 2, -3), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (1, 10, -11)$.

Exercice 988 Dans $\mathbb{R}^3$, comparer les sous-espaces F et G suivants :
$F = \text{lin}\{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\}$ et $G = \text{lin}\{(3, 7, 0), (5, 0, -7)\}$.

Exercice 989 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles de vecteurs suivantes
$v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (1, 0, -2, 3)$, $v_4 = (2, 1, 0, -1)$, $v_5 = (4, 3, 2, 1)$.
$v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (3, 4, 5, 16)$.
$v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (2, 1, 0, 11)$, $v_4 = (3, 4, 5, 14)$.
Ces vecteurs forment-ils :

1. Une famille libre ? Si oui, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Si non donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille au moins une famille libre.
2. Une famille génératrice ? Si oui, en extraire au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

Exercice 990 Si E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces de E, montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 991 On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Soient D_1, D_2, D_3 des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ distinctes deux à deux. Alors $\mathbb{R}^3$ est somme de D_1, D_2, D_3.
2. Soient F et G des hyperplans vectoriels de E. Alors $E \neq F \cup G$.
3. Soient P_1 et P_2 des plans vectoriels de E tels que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$. Alors $\dim E \geqslant 4$.
4. Soient F et G des sous-espaces de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. Alors $F \cap G \neq \{0\}$.
5. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $F = \mathrm{lin}\{e_1, e_3\}$. Tout sous-espace vectoriel supplémentaire de F contient e_2.

Exercice 992

1. Montrer qu'on peut écrire le polynôme $F = 3X - X^2 + 8X^3$ sous la forme $F = a + b(1 - X) + c(X - X^2) + d(X^2 - X^3)$ (calculer a, b, c, d réels), et aussi sous la forme $F = \alpha + \beta(1 + X) + \gamma(1 + X + X^2) + \delta(1 + X + X^2 + X^3)$ (calculer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels).
2. Soit $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant 3$. Vérifier que les ensembles suivants sont des bases de $\mathcal{P}_3$: $B_1 = \{1, X, X^2, X^3\}$, $B_2 = \{1, 1 - X, X - X^2, X^2 - X^3\}$, $B_3 = \{1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3\}$.

Exercice 993 Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des polynômes de degré $\leqslant 2$, on considère les polynômes $P_1 = X^2 + X(1 - X) + (1 - X)^2$, $P_2 = X^2 + (1 - X)^2$, $P_3 = X^2 + 1 + (1 - X)^2$, $P_4 = X(1 - X)$. Peut-on extraire de $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ des bases de $\mathcal{P}_2$? Si oui, les trouver toutes.

Exercice 994 Soit E l'ensemble des fractions rationnelles F qui peuvent s'écrire

$$F = \frac{P}{(X-1)^3(X^2+1)^2}, \qquad P \text{ polynôme de degré } \leqslant 6.$$

Les fractions $\frac{1}{(X-1)}, \frac{1}{(X-1)^2}, \frac{1}{(X-1)^3}, \frac{1}{X^2+1}, \frac{X}{X^2+1}, \frac{1}{(X^2+1)^2}, \frac{X}{(X^2+1)^2}$ forment-elles une base de E ? Que se passe-t-il si on suppose que P décrit l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant 9$?

Exercice 995 Problème de l'interpolation : soit les cinq points $(x_1, y_1) = (-2, 3)$, $(x_2, y_2) = (0, -2)$, $(x_3, y_3) = (1, 5)$, $(x_4, y_4) = (5, 1)$, $(x_5, y_5) = (6, 7)$ de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{P}_4$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant 4$. On veut trouver un polynôme F dans $\mathcal{P}_4$ tel que pour $i = 1, \ldots, 5$ on ait $F(x_i) = y_i$.

1. Sans effectuer les calculs, indiquer comment on pourrait calculer a, b, c, d, e exprimant $F = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$ selon la base $\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ de $\mathcal{P}_4$.
2. Montrer que $\{1, X+2, (X+2)X, (X+2)X(X-1), (X+2)X(X-1)(X-5)\}$ est une base de $\mathcal{P}_4$. Calculer directement (indépendamment de la question précédente) les coordonnées de F dans cette base.
3. Montrer que l'ensemble des polynômes $X(X-1)(X-5)(X-6), (X+2)(X-1)(X-5)(X-6), (X+2)X(X-5)(X-6), (X+2)X(X-1)(X-6), (X+2)X(X-1)(X-5)$ forment une base de $\mathcal{P}_4$. Calculer directement (indépendamment des questions précédentes) les coordonnées de F dans cette base.
4. Dans laquelle des diverses bases ci-dessus le calcul de F vous paraît-il le plus simple ?

Exercice 996 Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 997 Soit (Σ) le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x-t=0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (Σ) forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension et une base de F.

Exercice 998 Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $A_p(X) = (X-a)^p$ et $B_p(X) = X^p$.

1. Montrer que $\varepsilon = \{A_0, \ldots, A_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) A_k(X)$. (On pourra montrer que l'ensemble E des élément de $\mathbb{R}_n[X]$ qui satisfont à cette égalité est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et contient une base.)

Exercice 999 On munit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de la loi interne "addition" $+$: $(a,b)+(a',b') = (aa', b+b')$, et de la loi externe . à coefficients réels : $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \forall (a,b) \in E \lambda.(a,b) = (a^\lambda, \lambda b)$.

1. Vérifier que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-e.v.
2. Les systèmes suivants sont-ils libres ou liés : ((1,0),(1,1)) ? ((2,1),(8,3)) ? ((2,1),(6,3)) ?
3. Vérifier que le système $b = ((2,0),(2,1))$ est une base de E et déterminer les composantes du vecteur $v = (x,y) \in E$ par rapport à la base b.

Exercice 1000 Pour $k = 2,3,4$ montrer que V_k est un s.e.v. de $\mathbb{C}^k$, et en donner une base :

$$V_2 = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 / a+ib=0\}, V_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 / a+2b+3c=0\},$$

$$V_4 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 / a+ib = b+ic = c+id\}.$$

Exercice 1001 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leqslant n$.

1. Soit $\beta = (P_0, P_1, ..., P_n)$ un système de $(n+1)$ polynômes tels que, $\forall k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\deg P_k = k$. Montrer que β est une base de E.
2. Soit P un polynôme de degré n. Montrer que : $\gamma = (P, P', \ldots, P^{(n)})$ est une base de E et déterminer les composantes du polynôme Q défini par : $Q(X) = P(X+a)$, (a réel fixé), dans la base γ.
3. Démontrer que le système $S = (X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E, et déterminer, pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$, les composantes du polynôme X^p dans la base S.

Exercice 1002 Soient $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,-1), \mathbf{v}_2 = (2,1,0,1), \mathbf{v}_3 = (1,-1,1,-1), \mathbf{v}_4 = (7,2,0,-1)$ et $\mathbf{v}_5 = (-2,-3,1,0)$. Donner une base du sous-espace vectoriel $F =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5 >$. Déterminer un supplémentaire de G dans F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 1003 Soient le triplet $\mathbf{v}_1 = (1,2,3,0), \mathbf{v}_2 = (-1,1,2,1), \mathbf{v}_3 = (1,5,8,1)$ et le triplet $\mathbf{w}_1 = (0,3,5,1), \mathbf{w}_2 = (1,-1,1,0), \mathbf{w}_3 = (0,0,3,1)$. On considère les sous-espaces vectoriels $F =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$ et $G =< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 >$. Donner une base des sous-espaces suivants $F, G, F \cap G$ et $F+G$.

Exercice 1004 Soit

$$E = \left\{ f_{\alpha,A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); (\alpha, A) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{\alpha,A}(x) = A\cos(x+\alpha) \right\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et en donner une base.

Exercice 1005 Soit $E = \mathbb{R}^3$. On définit le système

$$S = \{\mathbf{e}_1 = (1,1,1), \mathbf{e}_2 = (1,1,2), \mathbf{e}_3 = (1,2,3)\}$$

1. Montrer que S est une base de E.
2. Calculer les coordonnées de $\mathbf{v} = (5,7,12)$ dans cette base.

Exercice 1006

1. Montrer que les vecteurs $\mathbf{w}_1 = (1,-1,i), \mathbf{w}_2 = (-1,i,1), \mathbf{w}_3 = (i,1,-1)$ forment une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Calculer les composantes de $\mathbf{w} = (1+i, 1-i, i)$ dans cette base.

Exercice 1007

1. Montrer que le système $\mathbf{s}_1 = (1, \sqrt{2})$ et $\mathbf{s}_2 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ sont libres dans $\mathbb{R}$ considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.
2. Soient dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (3+\sqrt{5}, 2+3\sqrt{5})$ et $\mathbf{u}_2 = (4, 7\sqrt{5}-9)$. Montrer que le système $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est $\mathbb{Q}$–libre et $\mathbb{R}$–lié.
3. Soient dans $\mathbb{C}^2$, les vecteurs $\mathbf{r}_1 = (1+i, 1-2i)$ et $\mathbf{r}_2 = (3i-1, 5)$. Montrer que le système $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ est $\mathbb{R}$–libre et $\mathbb{C}$–lié.

Exercice 1008 Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les polynômes $X^2+t/2$, $X-t$, $(X+t+1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 1009 Etudier la liberté des familles

1. $(1,1), (1,2)$.
2. $(2,3), (-6,9)$.
3. $(1,3,1), (1,3,0), (0,3,1)$.
4. $(1,3), (-1,-2), (0,1)$.

Exercice 1010 Les familles suivantes sont-elles génératrices ?

1. $(1,1), (3,1)$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $(1,0,2), (1,2,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1011 On considère dans $\mathbb{R}^3$, $\Pi = \mathrm{vect}\,\{(1,1,1),(1,1,-1)\}$ et $D = \mathrm{vect}\,\{(0,1,-1)\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus D$.

Exercice 1012 Déterminer une base de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}$.

Exercice 1013 Déterminer une base de $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y=0, x-y+z=0\}$.

19.2 Dimension

Exercice 1014 Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $V_1 = (0,1,2,3)$, $V_2 = (1,2,3,4)$ et $V_3 = (2,3,4,5)$.

Exercice 1015 Si E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces de E, montrer que : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Exercice 1016 Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

Exercice 1017 Soient P_0, P_1, P_2 et $P_3 \in \mathbb{R}_2[X]$ définis par

$$P_0(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, \quad P_1(X) = \frac{X(X-1)}{2},$$

$$P_2(X) = 2X(X-2), \quad P_3(X) = \frac{(X-1)(X-3)}{3}.$$

Exprimer $1,\ X,\ X^2$ en fonction de $P_0,\ P_1$ et P_2. On note $F = Vect\{P_0, P_1\}$ et $G = Vect\{P_2, P_3\}$. Calculer $\dim F$, $\dim G$, $\dim(F+G)$ et $\dim(F \cap G)$. Vérifier que

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exercice 1018 Donner la dimension du sous-espace F de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $f_1(x) = \sin^2 x, f_2(x) = \cos^2 x, f_3(x) = \sin 2x$ et $f_4(x) = \cos 2x$.

Exercice 1019 On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F celui engendré par e_4, e_5. Calculer les dimensions respectives de E , F , $E \cap F$, $E + F$.

[Exercice corrigé]

Exercice 1020 Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = z + t$ Déterminer $\dim E, \dim F, \dim(E+F), \dim(E \cap F)$.

Exercice 1021 Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (z, x - y, y + z) \end{cases}$ est un automorphisme.

Exercice 1022 Soit E un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer que

$$n \text{ est pair} \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{L}(E) / \mathrm{Im} f = \ker f$$

Exercice 1023 Montrer qu'il existe une unique forme linéaire f sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f(1, 2) = 2$ et $f(-2, 1) = 5$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 1024 Déterminer suivant la valeur de $x \in \mathbb{R}$ le rang de la famille de vecteurs $e_1 = (1, x, -1), e_2 = (x, 1, x), e_3 = (-1, x, 1)$.

Exercice 1025 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Soit $x_0 \in E / f^2(x_0) \neq 0$.

1. Montrer que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base.
2. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de base (id, f, f^2).

Exercice 1026 Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois propriétés :

(i) $\ker f = \ker f^2$.

(ii) $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

(iii) $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.

Exercice 1027 Soient E et F de dimensions finies et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
2. En déduire que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$.

Exercice 1028 Soit $(f, g) \in (L(E))^2$ où E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, montrer les inégalités :

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \inf(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$$

(on pourra utiliser $g_{|\ker(f \circ g)} = h$ dont on déterminera le noyau)

Exercice 1029 Soit $(f, g) \in (L(E))^2$ où E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, tel que : $(f+g)$ est inversible et $fg = 0$. Montrer que :

$$rg(f) + rg(g) = n.$$

Exercice 1030 Soit U un sous-espace vectoriel de E espace vectoriel, et

$$A = \{f \in L(E) | U \subset Ker(f)\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $L(E)$. Si E est de dimension finie, quelle est la dimension de A ?

Exercice 1031 Soient $E_0, E_1, ..., E_n$ $n+1$ espaces vectoriels sur un même corps commutatif K, de dimensions respectives $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, f_1, ..., f_{n-1}$ telles que :

$$\forall k \in \{0, ..., n-1\}, f_k \in L(E_k, E_{k+1}).$$

et de plus :
- f_0 est injective ;
- $\forall j \in \{1, ..., n-1\}, \mathrm{Im}\, f_{j-1} = Ker(f_j)$;
- f_{n-1} est surjective.

Montrer que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \alpha_j = 0.$$

Exercice 1032 Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E, espace vectoriel de dimension n. Montrer que :

$$\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant n - 2.$$

Généraliser.

Exercice 1033 Donner un exemple d'endomorphisme d'un espace vectoriel injectif et non surjectif, puis d'un endomorphisme surjectif et non injectif.

Exercice 1034 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$, montrer l'équivalence :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2.$$

Donner un contre-exemple quand $\dim E = +\infty$.

Exercice 1035 Soit $(f,g)\in L(E,F)^2$ avec E,F de dimension finie. On suppose
$$\mathrm{rg}(f+g)=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g).$$
Montrer que :
$$E=\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}\, f;$$
$$\mathrm{Im}\, f\cap \mathrm{Im}\, g=\{0\}.$$

Exercice 1036 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(f,g)\in L(E)^2$ avec $E=\mathrm{Im}\, f+\mathrm{Im}\, g=\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 1037 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(f_1,...,f_k)$ des projecteurs de E. Montrer l'équivalence :
$$\left[\forall (i,j)\in\{1,...,k\}^2, i\neq j\Rightarrow f_if_j=0\right]\Leftrightarrow \sum_{i=1}^k f_i \text{ est un projecteur.}$$

Exercice 1038 Soit $f\in L(E)$ où E est un K-espace vectoriel de dimension n, tel que :
$$f^2=-Id.$$

1. Montrer que f est inversible et que la dimension de E est paire, donc $n=2p$.
2. Soit $x\neq 0$, monter que x et $f(x)$ sont linéairement indépendants, et qu'ils engendrent un sous-espace stable de E.
3. Montrer qu'il existe p sous-espaces de dimension deux stables par f, $E_1...E_p$ tels que : $E=\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. En déduire une "bonne" formule de calcul de f.

Exercice 1039 Soit E un K espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 1$. Soit $f\in L(E)$ nilpotente. On note $q\in\mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de f, i.e. :
$$q=\inf\{j\in\mathbb{N}^* | f^j=0\}.$$

1. Montrer que : $\exists x_0\in E$ tel que $\{x_0,f(x_0),...,f^{q-1}(x_o)\}$ soit libre. En déduire $q\leqslant n$.
2. Soit $r=\dim Ker(f)$. Montrer que $r>0$ et que
$$\frac{n}{r}\leqslant q\leqslant n+1-r.$$

20 Matrices

20.1 Découverte

Exercice 1040 Effectuer le produit des matrices :
$$\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&4&-1\\2&1&2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\\1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&a&c\\1&b&b\\1&c&a\end{pmatrix}$$

Exercice 1041 On considère la matrice suivante :
$$M=\begin{pmatrix}0&a&b&c\\0&0&d&e\\0&0&0&f\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
Calculer M^2,M^3,M^4,M^5.

Exercice 1042 On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB puis $(AB)C$.
2. Calculer BC puid $A(BC)$.
3. Que remarque-t-on ?

Exercice 1043 On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB.
2. Calculer BA.
3. Que remarque-t-on ?

Exercice 1044 Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. De même avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 1045 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 1046

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.
   (a) Calculer B^2, B^3 en déduire une formule de récurrence que l'on démontrera pour B^n, pour tout entier n.
   (b) Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binome et simplifier.
   (c) En déduire A^n Pour tout entier n.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier n, calculer A^n en utilisant $A - I_4$.

Exercice 1047

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   Montrer que $AB = AC$, a-t-on $A = C$? A peut-elle être inversible ?

(b) Déterminer toutes les matrices F telles que $A \times F = O$ (O étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls).

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.
3. Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$.
   Montrer que A est inversible et déterminer son inverse (en fonction de B).

Exercice 1048 Calculer le rang des matrices suivantes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 1049 Soit A une matrice carrée d'ordre n ; on suppose que A^2 est une combinaison linéaire de A et I_n : $A^2 = \alpha A + \beta I_n$.

1. Montrer que A^n est également une combinaison linéaire de A et I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que si β est non nul, alors A est inversible et que A^{-1} est encore combinaison linéaire de A et I_n.
3. Application 1 : soit $A = J_n - I_n$, où J_n est la matrice Attila (envahie par les uns...), avec $n \geqslant 1$. Montrer que $A^2 = (n-2)\,A + (n-1)\,I_n$; en déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.
4. Application 2 : montrer que si $n = 2$, A^2 est toujours une combinaison linéaire de A et I_2, et retrouver la formule donnant A^{-1} en utilisant 2.

Exercice 1050 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 et montrer que $A^2 = 2I - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

20.2 Généralités

Exercice 1051 Rappeler la structure d'espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Déterminer une base de $M_n(\mathbb{R})$. Donner sa dimension.

Exercice 1052 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

[Exercice corrigé]

Exercice 1053 Déterminer deux éléments A et B de $M_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

[Exercice corrigé]

Exercice 1054 Soit E le sous ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ défini par $E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices. Calculer dim (E).
2. Soit $M(a,b,c)$ un élément de E. Déterminer, suivant les valeurs des paramètres a,b et $c \in \mathbb{R}$ son rang. Calculer (lorsque cela est possible) l'inverse $M(a,b,c)^{-1}$ de $M(a,b,c)$.
3. Donner une base de E formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1.

Exercice 1055 Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. On nomme commutant de A et on note $C(A)$ l'ensemble des $B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

1. Montrer que $C(A)$ et un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, A^k \in C(A)$.

Exercice 1056 Soit F et G les sous-ensembles de $M_3(\mathbb{R})$ définis par :

$$F = \{\begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix} \; a,b,c \in \mathbb{R}\} \quad G = \{\begin{pmatrix} a+b+d & a & c \\ 0 & b+d & 0 \\ a+c+d & 0 & a+c \end{pmatrix} \; a,b,c,d \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que ce sont des sous espaces vectoriels de $M_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera des bases.
[Exercice corrigé]

Exercice 1057 Montrer que $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}); tr(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de F et la compléter en une base de $M_2(\mathbb{R})$.
[Exercice corrigé]

Exercice 1058 Soient A et $B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices triangulaires supérieures.

1. Montrer (en calculant les coefficients) que AB est triangulaire supérieure.
2. Soit φ un endomorphisme bijectif de $\mathbb{K}^n$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ tel que $\varphi(F) \subset F$. Montrer que que $\varphi^{-1}(F) \subset F$.
3. En déduire une nouvelle démonstration de 1. Montrer que si A est inversible, A^{-1} est triangulaire supérieure.

Exercice 1059 Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Calculer $\det(I+N)$. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ commute avec N, montrer que $\det(A+N) = \det(A)$. (on pourra commencer par étudier le cas où A est inversible.)

Exercice 1060 Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que G est un groupe multiplicatif.

Exercice 1061 Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $A^n(\theta)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1062 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$?
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. A est-elle inversible ?

Exercice 1063 Soient A et $B \in M_n(\mathbb{Q})$ telles que $\forall X \in M_n(\mathbb{Q})$ $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 1064 Que peut-on dire d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $\mathrm{tr}(A^tA) = 0$?

Exercice 1065 Discuter suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 1066 Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1067 Déterminer l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), MH = HM.$$

Exercice 1068 Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M - I_n$ soit nilpotente (ie $\exists k \in \mathbb{N}, (M - I_n)^k = 0$). Montrer que M est inversible.

Exercice 1069 $M = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que M est inversible.

Exercice 1070 Montrer que si $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})$ et $AB = A + B$ alors $AB = BA$.

Exercice 1071 Soit $M = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$, montrer :

$$\min_j \max_i a_{i,j} \geqslant \max_i \min_j a_{i,j}.$$

Exercice 1072 Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que : $J^2 = I$ et

$$E = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2; A = aI + bJ\}.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel stable par multiplication (Est-ce une algèbre ?). En déduire que :

$$\forall A \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2; A^n = a_nI + b_nJ$$

   et calculer les coefficients a_n et b_n.
2. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. Calculer (u_n, v_n) tel que $S_n = u_nI + v_nJ$ en fonction de a et de b. Calculer les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $e^A = uI + vJ$ où $u = \lim_{n\to\infty} u_n$, $v = \lim_{n\to\infty} v_n$. Calculer e^{-A} et le produit $e^{-A}\, e^A$.
3. Application :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

   Calculer e^A.

Exercice 1073 Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $\forall X \in M_n(\mathbb{C})$, $AXB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 1074 Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $AB = I + A + A^2$. Montrer que $AB = BA$ (*Indication* : voir d'abord que A est inversible).

Exercice 1075 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$une matrice triangulaire à éléments diagonaux nuls, montrer que :

$$A^n = 0.$$

Exercice 1076 Calculer les puissances de :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1077 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente, on définit :

$$\exp A = \sum_{i \geqslant 0} \frac{A^i}{i!},$$

la somme étant finie et s'arrêtant par exemple au premier indice i tel que $A^i = 0$. Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. En déduire que $\exp(A)$ est toujours inversible et calculer son inverse.

Exercice 1078 Calculer l'inverse de :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1079 Calculer l'inverse de :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a \\ 0 & 1 & a & \dots \\ \dots & 0 & 1 & a \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1080 (Examen) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & -9x_n & -18y_n \\ y_{n+1} & = & 6x_n & +12y_n \end{cases}$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$. On se propose dans ce problème de trouver les termes généraux de ces deux suites.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que la relation de récurrence linéaire ci-dessus soit équivalente à la relation $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
2. Trouver une expression de U_n en fonction de A et de U_0.
3. Trouver le noyau de A, et en donner une base B_1. Calculer le rang de A.
4. Montrer que l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{R}^2$ tels que $AX = 3X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa dimension ? En donner une base, qu'on notera B_2.
5. Montrer que la réunion $B_1 \cup B_2$ forme une base B de $\mathbb{R}^2$. Soit P la matrice formée des composantes des vecteurs de B relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que P est inversible, et que le produit $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D qu'on calculera.
6. Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$. Calculer D^n, et en déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Donner les termes généraux x_n et y_n.

[Exercice corrigé]

20.3 Matrice provenant d'un endomorphisme

Exercice 1081 Soit h l'homomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par rapport à deux bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base :
$$e_1' = e_2 + e_3, \quad e_2' = e_3 + e_1, \quad e_3' = e_1 + e_2.$$
Quelle est la nouvelle matrice A_1 de h ?
2. On choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ les vecteurs :
$$f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$
en conservant la base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nouvelle matrice A_2 de h ?

Exercice 1082 Soit h une application linéaire de rang r, de E, espace vectoriel de dimension n, dans F, espace vectoriel de dimension m.

1. Préciser comment obtenir une base $(e_i)_{i=1}^n$ de E, et une base $(f_j)_{j=1}^m$ de F, telles que $h(e_k) = f_k$ pour $k = 1, \dots, r$ et $h(e_k) = 0$ pour $k > r$. Quelle est la matrice de h dans un tel couple de bases ?
2. Déterminer un tel couple de bases pour l'homomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ défini dans les bases canoniques par :
$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 & = & x_2 + x_3 - 2x_4 \\ y_3 & = & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \end{array} \right.$$
3. Même question pour l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :
$$f(x, y, z) = (2x + y + z, -y + z, x + y).$$

Exercice 1083 On désigne par $\mathcal{P}_2$ l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 2. On désigne par (e_0, e_1, e_2) la base canonique de $\mathcal{P}_2$ et on pose
$$p_0 = e_0, \quad p_1 = e_1 - \frac{1}{2}e_0, \quad p_2 = e_2 - e_1 + \frac{1}{2}e_0.$$

1. Montrer que tout polynôme de $\mathcal{P}_2$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $p = b_0p_0 + b_1p_1 + b_2p_2$.
2. Écrire sous cette forme les polynômes : p_0', p_1', p_2', p', Xp', p''.
3. Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ définie par $\varphi(p) = Xp' - \frac{1}{2}p' + \frac{1}{4}p''$ est une application linéaire. Préciser le noyau et l'image de cette application. Écrire les matrices de cette application par rapport à la base canonique (e_i) et par rapport à la base (p_i). Écrire la matrice de passage de la base (e_i) à la base (p_i) ; quelle relation lie cette matrice aux deux précédentes ?

Exercice 1084 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$. On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et on fixe la base $\varepsilon = \{1, i\}$.

1. Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire.
2. Calculer $A = \mathrm{Mat}(f, \varepsilon, \varepsilon)$.

3. Existent-ils x et $y \in \mathbb{C} - \{0\}$ tels que $f(x) = x$ et $f(y) = -y$? Si c'est le cas déterminer un tel x et un tel y.
4. Décrire géométriquement f.
5. Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application $z \mapsto e^{i\rho}\bar{z}$. Calculer $A = \mathrm{Mat}(g \circ f, \varepsilon, \varepsilon)$ et décrire géométriquement $g \circ f$.

Exercice 1085 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^3 = -f$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^2 + I) = \{0\}$, $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + I) \neq \{0\}$.
2. Soit x un élément distinct de 0 de $\mathrm{Ker}(f^2 + I)$. Montrer qu'il n'existe pas $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha x$. En déduire que $\{x, f(x)\}$ est libre.
3. Calculer $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f^2 + I))$.
4. Déterminer une base ε de $\mathbb{R}^3$ telle que : $\mathrm{Mat}(f, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1086 Soient E un espace vectoriel de dimension n, f une application linéaire de E dans lui-même et x un élément de E tel que la famille $f(x), ..., f^n(x)$ soit libre.

1. Montrer que la famille $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ est une base de E. Déduiser-en que f est bijective.
2. On suppose maintenant que $f^n(x) = x$. Déterminer la matrice de f dans la base $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x$

Exercice 1087 Déterminer la matrice de la projection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}\vec{\imath}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ dans la base $(\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{\jmath})$ puis $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1088 Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$, ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que la famille $1, X, \ldots, X^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soient f, g et h les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définies par :
$$\begin{aligned} f(P(X)) &= XP(X), \\ g(P(X)) &= P'(X), \\ h(P(X)) &= (P(X))^2. \end{aligned}$$
Montrer que les applications f et g sont linéaires, mais que h ne l'est pas. f et g sont-elles injectives ? Surjectives ? Déterminer la dimension de leurs noyaux respectifs. Déterminer l'image de f.
3. On désigne par f_n et g_n les restrictions de f et de g à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'image de g_n est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$ et celle de f_n est incluse dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Déterminer la matrice de g_n dans la base $1, X, ..., X^n$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice de f_n de la base $1, X, ..., X^n$ dans la base $1, X, ..., X^{n+1}$. Calculer les dimensions respectives des images de f_n et de g_n.

Exercice 1089 Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même $M \mapsto AM$. Montrer que f est linéaire. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 1090 Soit φ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telle que $\varphi \neq 0$ et $\varphi^2 = 0$.

1. Construire des exemples de telles applications.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, \varphi(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de φ dans cette base.

Exercice 1091 Soit E un espace vectoriel et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$. Soit $p \geqslant 1$ et $x \in \mathrm{Ker}(\varphi^p)$. Montrer que $x \in \mathrm{Ker}(\varphi^{p-1})$. En déduire que $\mathrm{Ker}(\varphi^p) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ pour tout $p \geqslant 1$.
2. Montrer de même que si $\mathrm{Ker}(\varphi^2) = \mathrm{Ker}(\varphi^3)$ alors $\mathrm{Ker}(\varphi^p) = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$ pour tout $p \geqslant 2$.
3. On suppose désormais que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même telle que $\varphi^2 \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi^2(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, \varphi(x), \varphi^2(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de φ dans cette base.

Exercice 1092 Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et φ une application linéaire de E dans E telle que $\varphi^2 = 0$ et $\varphi \neq 0$. Posons $r = \mathrm{rg}(\varphi)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\ (\varphi) \subset \mathrm{Ker}\ (\varphi)$. Déduiser-en que $r \leqslant 3 - r$. Calculer r.
2. Soit $e_1 \in E$ tel que $\varphi(e_1) \neq 0$. Posons $e_2 = \varphi(e_1)$. Montrer qu'il existe $e_3 \in \mathrm{Ker}\ (\varphi)$ tel que la famille $\{e_2, e_3\}$ soit libre. Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Exercice 1093 Soient E un espace vectoriel et φ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\varphi^2 = \varphi$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\ (\varphi) \oplus \mathrm{Im}\ (\varphi)$.
2. Supposons que E est de dimension finie n. Posons $q = \dim\ (\mathrm{Ker}\ (\varphi))$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E telle que : $\varphi(e_1) = \ldots = \varphi(e_q) = 0$ et, pour tout $r > q$, $\varphi(e_r) = e_r$. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 1094 Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, définie en posant, pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$: $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans le cas où $n = 3$, donner la matrice de f dans la base $1, X, X^2, X^3$. Déterminer ensuite, pour une valeur de n quelconque, la matrice de f dans la base $1, X, \ldots, X^n$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f. Calculer leurs dimensions respectives.
4. Soit Q un élément de l'image de f. Montrer (en utilisant en particulier les résultats de la deuxième question) qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

20.4 Endomorphisme provenant d'une matrice

Exercice 1095 Soit (e_1, e_2, e_3) une base de l'espace E à trois dimensions sur un corps K. I_E désigne l'application identique de E. On considère l'application linéaire f de E dans E telle que :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

1. Étudier le sous-espace $\ker(f - I_E)$: dimension, base.
2. Étudier le sous-espace $\ker(f^2 + I_E)$: dimension, base.
3. Montrer que la réunion des bases précédentes constitue une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ? et celle de f^2 ?

Exercice 1096 Soit E un espace à n dimensions et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que la condition $f^2 = 0$ est équivalente à $\mathrm{Im} f \subset \ker f$. Quelle condition vérifie alors le rang de f ? On suppose dans le reste de l'exercice que $f^2 = 0$.

2. Soit E_1 un supplémentaire de $\ker f$ dans E et soit $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ une base de E_1. Montrer que la famille des vecteurs $(e_1, e_2, \dots, e_r, f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_r))$ est libre. Montrer comment on peut la compléter, si nécessaire, par des vecteurs de $\ker f$ de façon à obtenir une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?
3. Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $\mathrm{Im}\, f = \ker f$?
4. Exemple : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $f^2 = 0$. Déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice de f a la forme indiquée dans la question 2).

Exercice 1097 Soit trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note T la transformation linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3, \quad T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer le noyau de cette application. Écrire la matrice A de T dans la base (e_1, e_2, e_3).
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3,\ f_2 = e_1 - e_2,\ f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer $T(f_1), T(f_2), T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de T dans la base (f_1, f_2, f_3) et trouver la nature de l'application T.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation lie A, B, P et P^{-1} ?

Exercice 1098 Soit $M_{\alpha,\beta}$ la matrice : $M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$. Déterminer pour quelles valeurs de α et de β l'application linéaire qui lui est associée est surjective.
[Exercice corrigé]

Exercice 1099

1. Soit E un espace vectoriel et $\{e_1, \dots e_p\}$ une famille génératrice de E. Montrer l'égalité $\mathrm{Im}\ (\varphi) = \mathrm{Vect}\ \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)\}$.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$. Déterminer une base des noyaux et une base des images respectifs de f_A et de f_B.

Exercice 1100 Soit E un espace vectoriel de dimension n et φ une application linéaire de E dans E. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(f) = 0$. (On pourra utiliser le fait que $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{R})$.)
[Exercice corrigé]

Exercice 1101 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant l'application linéaire associée de $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}^n)$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1102 Même chose avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1103 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Déterminer la matrice de f dans la base $(1,0,-1),(0,1,1),(1,0,1)$.

Exercice 1104 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soient $e_1 = (-2,3)$ et $e_2 = (-2,5)$.

1. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\text{mat}(f, e)$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{5}{2}x_n - \dfrac{2}{3}y_n \end{cases}$.

Exercice 1105 Soit $E = \text{vect}(AB - BA, (A,B) \in M_n(\mathbb{Q})^2)$.

1. Montrer que $E = \ker \text{tr}$ (pour l'inclusion non triviale, on trouvera une base de $\ker \text{tr}$ formée de matrices de la forme $AB - BA$).
2. Soit $f \in M_n(\mathbb{Q})^*$ telle que $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{Q})^2$ $f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha \text{tr}$.

Exercice 1106 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Phi : \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases}$. Montrer que Φ est linéaire, déterminer sa matrice dans la base canonique et calculer $\ker \Phi$ et $\text{Im}\Phi$.

21 Déterminants, systèmes linéaires

21.1 Formes multilinéaires

Exercice 1107 On considère l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. On rappelle que la *trace* $\text{tr}(A)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme de ses coefficients diagonaux.
Pour une matrice M donnée, on note α_M l'application définie par

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \alpha_M(X) = \text{tr}(MX).$$

1. Vérifier que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \alpha_M \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$.

   On note ϕ l'application suivante :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^* \\ M & \mapsto & \alpha_M \end{array}$$

2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de ϕ.

3. En déduire que pour toute forme linéaire $\alpha \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$, il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \alpha(X) = \mathrm{tr}(AX).$$
4. Déterminer toute les formes linéaires $\alpha \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$ telles que
$$\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad \alpha(XY) = \alpha(YX).$$

Exercice 1108 On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Pour chaque $i \in \{0, \dots, n\}$, on note α_i l'application

$$\alpha_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(x_i) \end{array}$$

1. Vérifier que chaque α_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
2. On note G l'espace engendré par $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Déterminer G°. En déduire que la famille $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
3. Montrer que la famille $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
4. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$$
5. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes $(P_0, \dots, P_n)$ de $R_n[X]$ telle que $\forall (i,j) \in \{0, \dots, n\}^2 \quad P_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
6. En déduire que pour toute fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un polynôme P de degré n, qui interpole f en chaque point x_i, c'est à dire qui satisfait :
$$\forall i \in \{!, ..., n\} \quad P(x_i) = f(x_i).$$

Exercice 1109 Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application ϕ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, est multilinéaire.

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 + y_2 + z_3$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 + z_3)$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$$

Exercice 1110 Montrer que l'espace des formes bi-linéaires sur $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel. En donner une base.

Exercice 1111 Donner toutes les formes tri-linéaires alternées sur $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, que dire des formes m-linéaires alternées sur un espace de dimension n lorsque $m > n$?

Exercice 1112 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. On considère l'application Φ_A suivante :

$$\Phi_A \ : \ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n)^n & \to & \mathbb{R} \\ M = (C_1, ..., C_n) & \mapsto & \det(AM) \end{array}$$

Montrer que Φ_A est n-linéaire.
Calculer $A \times \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{id}_{n-2} \end{array} \right)$. En déduire que $\Phi_A(e_2, e_1, e_3 ... e_n) = -\Phi_A(e_1, e_2, e_3 ... e_n)$.
Plus généralement, montrer que Φ_A est alternée.
Montrer que $\Phi_A(M) = \det(A)\det(M)$.
En déduire que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \qquad \det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$$

Exercice 1113 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère les applications ω et α suivantes :

$$\omega \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} & \mapsto & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \alpha \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & x_3 \end{array}$$

1. Montrer que ω est antisymétrique et bilinéaire.
   A l'aide de ω et α, on définit une nouvelle application, notée $\omega \wedge \alpha$, de la façon suivante :

$$\omega \wedge \alpha \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (X, Y, Z) & \mapsto & \omega(X,Y)\alpha(Z) + \omega(Y,Z)\alpha(X) + \omega(Z,X)\alpha(Y) \end{array}$$

2. Montrer que $\omega \wedge \alpha$ est alternée.
3. Montrer que $\omega \wedge \alpha$ est trilinéaire.
4. Calculer $\omega \wedge \alpha(e_1, e_2, e_3)$. En déduire que $\forall (X, Y, Z) \in (\mathbb{R}^3)^3$ $\omega \wedge \alpha(X, Y, Z) = \det(X, Y, Z)$

21.2 Calcul

Exercice 1114 Calculer les déterminants des matrices suivantes : $\begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ a & b & b^2 & c+d+a \\ a & c & c^2 & d+a+b \\ a & d & d^2 & a+b+c \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{pmatrix}$

Exercice 1115 Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ le rang des matrices $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$ et $N_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1116

1. Soient $A \in M_p(\mathbb{R})$ et $B \in M_q(\mathbb{R})$. Calculer (en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$) le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R})$. (On pourra pour cela décomposer M comme produit de deux matrices de déterminant évident et utiliser la multiplicativité du déterminant.)
2. Soient $A \in M_p(\mathbb{R})$, $B \in M_q(\mathbb{R})$ et $C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R})$. (On pourra généraliser la méthode de 1.)

Exercice 1117 Sans calcul, montrer que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

Exercice 1118 Soit $\Delta(x) = \det(a_{i,j}(x))$ de taille $n = 2$ ou 3 avec $a_{i,j}$ des fonctions dérivables.

1. Montrer que $\Delta'(x)$ est la somme des n déterminants obtenus en remplaçant successivement dans $\Delta(x)$ chaque colonne par sa dérivée.
2. Calculer $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x \\ x & x+a_2 & x \\ x & x & x+a_3 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$.

Exercice 1119 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ et déterminer la condition d'inversibilité de la matrice.

Exercice 1120 La famille $(2,1,0)$, $(1,3,1)$, $(5,2,1)$ est-elle libre ?

Exercice 1121 Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

Exercice 1122 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 1 & \sin y & \cos y \\ 1 & \sin z & \cos z \end{vmatrix}$

Exercice 1123 Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On se place dans $\mathbb{R}^n$. On note e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la i-ième composante est égale à 1 et toutes les autres sont nulles. Écrire la matrice $n \times n$ dont les vecteurs colonnes C_i sont donnés par $C_i = e_i + e_n$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $C_n = e_1 + e_2 + e_n$. Calculer alors son déterminant.

Exercice 1124 On note a, b, c des réels. Calculer les déterminants suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

Généraliser le calcul de D_2 à un déterminant $n \times n$ du même type.

Exercice 1125 On note $a_1, \cdots, a_n$ des réels. Calculer les déterminants $n \times n$ suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Exercice 1126 Montrer que

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sin(c-b) + \sin(b-a) + \sin(a-c) = 4 \sin \frac{c-b}{2} \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{a-c}{2}$$

Exercice 1127 Soient a, b deux réels distincts. Calculer le déterminant suivant.

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & & & & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

Exercice 1128 Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Calculer alors, suivant la valeur du paramètre m, le rang de cette matrice.

Exercice 1129 Calculer le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \ddots & \\ -4 & 0 & 3 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

en fonction de n. (vérifier que -1 est racine de $X^3 - 3X^2 + 4$)

Exercice 1130 Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$$

Exercice 1131 Soit $(a, x, y) \in \mathbb{R}^3$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note A_n le déterminant suivant :

$$A_n = \begin{vmatrix} a & x & \cdots & x \\ y & a & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ y & & & a \end{vmatrix}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3,\ A_n = aA_{n-1} - xya^{n-2}$. En déduire une expression de A_n en fonction de n, a, x et y.

Exercice 1132 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note B_n le déterminant suivant :

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4,\ B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$ Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2,\ B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Exercice 1133 On s'intéresse aux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} - u_n \qquad (\star)$$

1. Déterminer toutes les suites complexes satisfaisant la relation $(\star)$.
2. Déterminer toutes les suites réelles satisfaisant la relation $(\star)$.
   On considère maintenant le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

3. Calculer Δ_{n+2} en fonction de Δ_{n+1} et Δ_n pour $n \in \mathbb{N}$ (on pose $\Delta_0 = 1$).
   En déduire la valeur de Δ_n en fonction de n.

Exercice 1134 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Exercice 1135 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Exercice 1136 Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le développer que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

Exercice 1137 Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$$

Exercice 1138 Pour $(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n$, on note $A_{(a_0\dots a_n)}$ la matrice

$$A_{(a_0\dots a_{n-1})}=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&a_0\\1&0&\ddots&\vdots&\vdots\\0&1&\ddots&0&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0&a_{n-2}\\0&\cdots&0&1&a_{n-1}-\lambda\end{vmatrix}$$

et à $\lambda\in\mathbb{R}$, on associe $\Delta_{(a_0\dots a_{n-1})}(\lambda)=\det(A_{(a_0,\dots,a_{n-1})}-\lambda\mathrm{id})$. Calculer $\Delta_{(a_0\dots a_{n-1})}(\lambda)$ en fonction de $\Delta_{(a_1\dots a_{n-1})}(\lambda)$ et a_0. En déduire $\Delta_{(a_0\dots a_{n-1})}(\lambda)$.

Exercice 1139 Calculer les déterminants suivant :

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a_{n-1,n}\\0&\cdots&0&a_{nn}\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}p&q&&0\\1&p&\ddots&\\&\ddots&\ddots&q\\0&&1&p\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}1&0&&1\\1&1&\ddots&\\&\ddots&\ddots&0\\0&&1&1\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}a+b&a&\cdots&a\\a&a+b&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a\\a&\cdots&a&a+b\end{vmatrix}$$

Exercice 1140 Soit $B\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $C\in\mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$. On considère l'application ϕ suivante :

$$\phi\ :\ \begin{array}{ccc}\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})&\to&\mathbb{R}\\A&\mapsto&\det\begin{pmatrix}A&B\\0&C\end{pmatrix}\end{array}$$

Etudier la multi-linéarité de ϕ par rapport aux colonnes de A. Calculer $\phi(\mathrm{id})$. En déduire que

$$\det\begin{pmatrix}A&B\\0&C\end{pmatrix}=\det(A)\det(C)$$

Soit $M=\begin{pmatrix}A_1&\cdots&\\&\ddots&\vdots\\0&&A_k\end{pmatrix}$ une matrice triangulaire par blocs. Montrer que $\det(M)=\det(A_1)\cdots\det(A_k)$

Exercice 1141 Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\-a_{21}&0&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\-a_{31}&-a_{32}&0&a_{34}&a_{35}\\-a_{41}&-a_{42}&-a_{43}&0&a_{45}\\-a_{51}&-a_{52}&-a_{53}&-a_{54}&0\end{vmatrix}$$

Comment généraliser ce résultat en dimension plus grande ?

Exercice 1142 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\\cos x&\cos y&\cos z&\cos t\\\cos 2x&\cos 2y&\cos 2z&\cos 2t\\\cos 3x&\cos 3y&\cos 3z&\cos 3t\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\-1&0&3&&n\\-1&-2&0&&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-2&-3&\cdots&0\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}0&1&2&\cdots&n-1\\1&0&1&\ddots&\cdots\\2&1&\ddots&\ddots&2\\\vdots&\ddots&\ddots&0&1\\n-1&\cdots&2&1&0\end{vmatrix}$$

Exercice 1143 Soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}$. Calculer

$$\Delta_n(a_0, ..., a_n, x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & -x & a_{n-2} \\ 0 & & 1 & a_{n-1} - x \end{vmatrix}$$

Exercice 1144 Soit $(a_1, a_2, a_3) \in (\mathbb{K})^3$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et on considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

Calculer le produit AV, puis $\det(AV)$ en fonction de $\det(V)$, et en déduire $\det(A)$.

Exercice 1145 Soit a un réel. On note Δ_n le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \qquad \Delta_n = a^{n-2}\left(a^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2\right)$

Exercice 1146 Soit a un réel différent de 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

Calculer D_n en foncion de D_{n-1} et D_{n-2}. Monter que $D_n = \frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2}$. Combien vaut D_n si $a = 1$?

Exercice 1147 Soient a, b, c trois réels et Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}$$

1. On pose $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.
2. On suppose que $a^2 = 4bc$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n = (n+1)\frac{a^n}{2^n}$$

Exercice 1148 Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

Exercice 1149 Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$ (avec la convention $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 3$).
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n = 2^{n+1} - 1$

Exercice 1150 Soit u l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $u(P) = P + P'$. Calculer $\det u$. Même question lorsque $u(P) = XP' + P(1)$.

21.3 Applications

Exercice 1151 Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\varphi^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Donner des exemples de telles applications dans le cas $n = 2$ ou 4.
2. Montrer que de telles applications existent si et seulement si n est pair.

[Exercice corrigé]

Exercice 1152 Inverser les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ainsi que leurs produits.

21.4 Divers

Exercice 1153 Montrer que $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1 + a + b + c$ sans le développer.

Exercice 1154 Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \in M_n(\mathbb{R})$ est dite triangulaire supérieure lorsque pour tout $i > j$: $a_{ij} = 0$.

1. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
2. Démontrer que $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$.
3. Soit E un espace vectoriel, $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On note E_i l'espace vectoriel engendré par $\{e_1, \dots, e_i\}$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Montrer que $\mathrm{Mat}(\varphi, \varepsilon)$ est triangulaire supérieure si et seulement si $\varphi(E_i) \subset E_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.
4. Démontrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 1155 On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = I + N.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ calculer $\det(A^n)$.
2. Calculer N^2 et N^3.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donner le rang de N^n et celui de A^n.
4. En utilisant 1., donner, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de la matrice $M(n) = A^n$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la formule $(A^n)^{-1} = M(-n)$. Expliquer et justifier l'écriture : $A^n = M(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1156 Soit S la matrice 5×5 à coefficients réels : $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer det (S). Déterminer (de préférence sans calcul) S^{-1}.
2. Montrer qu'il existe deux sous espaces vectoriels E_1 et E_2 de $\mathbb{R}^5$ de dimension respective 2 et 3 tels que : $\mathbb{R}^5 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ et $S(E_1) \subset E_1$ $S(E_2) \subset E_2$.
3. Montrer qu'il existe $x \in E_2$ tels que $Sx = x$. En déduire que la décomposition qui précéde n'est pas unique.

Exercice 1157 Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ anti-symétrique. Calculer $\det(A)$. Ce résultat vaut-il encore pour $A \in M_2(\mathbb{R})$?
[Exercice corrigé]

Exercice 1158 Soient $n = 2$ ou 3 et $A \in M_n(\mathbb{Q})$.

1. Montrer que si $\forall X \in M_n(\mathbb{Q})$ $\det(A + X) = \det(X)$ alors $A = 0$.
2. Soit $B \in M_n(\mathbb{Q})$ telle que $\forall X \in M_n(\mathbb{Q})$ $\det(A + X) = \det(B + X)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 1159 Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ tel que $A^2 + B^2 = AB$ et $AB - BA$ inversible. Montrer que 3 divise n.

Exercice 1160 Montrer que si $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, A \in M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\det(\mathrm{Com}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$

Exercice 1161 Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*, A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{rg}(A) = n \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = n;$$

$$\mathrm{rg}(A) = n - 1 \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1;$$

$$\mathrm{rg}(A) \leqslant n - 2 \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 0.$$

Exercice 1162 Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall i &\in \{1, ..., n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leqslant 1, \\ \forall (i,j) &\in \{1, ..., n\}^2, a_{i,j} \in [0, 1[. \end{aligned}$$

Montrer que $|\det(A)| < 1$.

21.5 Systèmes linéaires

Exercice 1163 Résoudre les systèmes suivants

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 3x & -\ y & +2z & = & a \\ -x & +2y & -3z & = & b \\ x & +2y & +\ z & = & c \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{llllll} x & +y & +2z & = & 5 \\ x & -y & -\ z & = & 1 \\ x & & +\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 1164 Sans chercher à résoudre les systèmes suivants, discuter la nature de leurs ensembles de solution :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & -z & = & 0 \\ x & -y & & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +3y & +2z & = & 1 \\ 2x & -2y & & = & 2 \\ x & +\ y & +\ z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +3y & +2z & = & 1 \\ 2x & -2y & & = & 2 \\ x & +\ y & +\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 1165 Soient $x_0,x_1,...,x_n$, $n+1$ réels distincts, et $y_0,y_1,...,y_n$, $n+1$ réels (distincts ou non).
Montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que :

$$\forall i \in \{0,...,n\} \quad P(x_i) = y_i$$

Exercice 1166 Résoudre, suivant les valeurs de m :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+(m+1)y & = & m+2 \\ mx+(m+4)y & = & 3 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} mx+(m-1)y & = & m+2 \\ (m+1)x-my & = & 5m+3 \end{array}\right.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 1167 Écrire les conditions, portant sur les réels a, b, c, pour que les systèmes suivants admettent des solutions non nulles ; expliciter ces solutions.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z & = & 0 \\ bcx+acy+abz & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x-a(y+z) & = & 0 \\ y-b(x+z) & = & 0 \\ z-c(x+y) & = & 0 \end{array}\right.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 1168 Résoudre et discuter suivant les valeurs de b_1, b_2, b_3 et b_4 :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+4z+7t & = & b_1 \\ x+3y+4z+5t & = & b_2 \\ x+3y+3z+2t & = & b_3 \\ x+y+z+t & = & b_4 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+5z+3t & = & b_1 \\ x+4y+7z+3t & = & b_2 \\ y+2z & = & b_3 \\ x+2y+3z+2t & = & b_4 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z-t & = & b_1 \\ -x+3y+t & = & b_2 \\ 2x-2y+2z-2t & = & b_3 \\ 2y+z & = & b_4 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z+2t & = & b_1 \\ -2x-4y-2z-4t & = & b_2 \\ -x-2y-z-2t & = & b_3 \\ 3x+6y+3z+6t & = & b_4 \end{array}\right.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 1169 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} (1+\lambda)x+y+z+t & = & a \\ x+(1+\lambda)y+z+t & = & b \\ x+y+(1+\lambda)z+t & = & c \\ x+y+z+(1+\lambda)t & = & d \end{array}\right.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 1170 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ et a :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y-z+t &=& \lambda \\ 2x+y-z &=& \lambda-1 \\ 5x+4y-2z &=& 2\lambda \\ (\lambda+2)x+(\lambda+2)y-z &=& 3\lambda+a \\ 3x-z+3t &=& -\lambda^2 \end{array}\right.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 1171 Mettre sous forme matricielle et résoudre les systèmes suivants.

1. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z &=& 3 \\ 3x-y-2z &=& 0 \\ x+y-z &=& -2 \\ x+2y+z &=& 1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 1 \\ x-y+2z-3t &=& 2 \\ 2x+4z+4t &=& 3 \\ 2x+2y+3z+8t &=& 2 \\ 5x+3y+9z+19t &=& 6 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z+t &=& 1 \\ x+2y+3z+4t &=& 2 \\ 3x-y-3z+2t &=& 5 \\ 5y+9z-t &=& -6 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z+t &=& 5 \\ 2x+3y+4z+5t &=& 8 \\ 3x+y-z+t &=& 7 \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& 0 \\ 2x+3y-z &=& 0 \\ 3x+y+2z &=& 0 \end{array}\right.$

Exercice 1172 Calculer les déterminants suivants.

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}\ D_4=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}\ D_5=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 1173 Résoudre et discuter le système linéaire suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+3x_3+10x_4+x_5 &=& b_1 \\ x_1+2x_2+x_3+4x_4+7x_5 &=& b_2 \\ x_1+3x_2+4x_3+13x_4+8x_5 &=& b_3 \\ x_1+4x_2+2x_3+7x_4+14x_5 &=& b_4 \end{array}\right.$$

Exercice 1174 On considère l'application f de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ qui à un élément $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ associe l'élément $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, défini par :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+3x_3+10x_4+x_5 &=& y_1 \\ x_1+2x_2+x_3+4x_4+7x_5 &=& y_2 \\ x_1+3x_2+4x_3+13x_4+8x_5 &=& y_3 \\ x_1+4x_2+2x_3+7x_4+14x_5 &=& y_4 \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. On considère A l'ensemble des solutions de (S_H).

$$(S_H)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+3x_3+10x_4+x_5 &=& 0\\ x_1+2x_2+x_3+4x_4+7x_5 &=& 0\\ x_1+3x_2+4x_3+13x_4+8x_5 &=& 0\\ x_1+4x_2+2x_3+7x_4+14x_5 &=& 0\end{array}\right.$$

   Quelle est la nature de A ? Que représente A pour l'application f ? Donner une base de A ; quelle est la dimension de A ? Donner un système minimal d'équations qui définissent A.
3. Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on considère les cinq vecteurs : $V_1=(1,1,1,1)$, $V_2=(1,2,3,4)$, $V_3=(3,1,4,2)$, $V_4=(10,4,13,7)$, $V_5=(1,7,8,14)$. Que représentent ces vecteurs pour l'application f ? Trouver une base de $\mathrm{Im} f$.
4. On considère le système (S) où les inconnues sont les x_i, et où les y_j sont des paramètres. Comment interpréter les conditions de possibilité de ce système du point de vue de f ?
5. Donner une interprétation du théorème du rang relativement à ce système. Quel est le lien entre le rang de f et le rang du système ?

Exercice 1175 Pour tout a réel, on considère la matrice A et le système linéaire (S) définis par :

$$A=\begin{pmatrix} a&1&1&1\\ 1&a&1&1\\ 1&1&a&1\\ 1&1&1&a\end{pmatrix} \qquad (S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} ax&+&y&+&z&+&t&=&1\\ x&+&ay&+&z&+&t&=&1\\ x&+&y&+&az&+&t&=&1\\ x&+&y&+&z&+&at&=&1\end{array}\right.$$

aux inconnues réelles x,y,z,t.

1. Discuter le rang de A suivant les valeurs de a.
2. Pour quelles valeurs de a le système (S) est-il de Cramer ? Compatible ? Incompatible ?
3. Lorsqu'il est de Cramer, résoudre (S) avec un minimum d'opérations (on pourra montrer d'abord que l'on a nécessairement $x=y=z=t$.).
4. Retrouver 3. par application des formules de Cramer.

Exercice 1176 Déterminer le noyau de la matrice $\begin{pmatrix} 1&-1&1\\ 0&1&1\\ 2&3&7\end{pmatrix}$

Exercice 1177 Soit $A=\begin{pmatrix} 2&2&0\\ 1&2&1\\ 0&2&2\end{pmatrix}$. Déterminer les $\lambda\in\mathbb{R}$ tels que $\exists X\in\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ tel que $AX=\lambda X$. Pour chaque λ déterminer $E_\lambda=\{X\in\mathbb{R}^3/AX=\lambda X\}$.

Exercice 1178 Donner une base de l'ensemble des solutions de $\left\{\begin{array}{l} 3x+2z=0\\ 3y+z+3t=0\\ x+y+z+t=0\\ 2x-y+z-t=0\end{array}\right.$.

Exercice 1179 Résoudre suivant les valeurs de $a\in\mathbb{R}$ $\left\{\begin{array}{l} x+ay+a^2z=0\\ a^2x+y+az=0\\ ax+a^2y+z=0\end{array}\right.$.

Exercice 1180 Résoudre suivant les valeurs de a et $\mu \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} ax+y+z+t=1 \\ x+ay+z+t=\mu \\ x+y+az+t=\mu^2 \\ x+y+z+at=\mu^3 \end{cases}$.

Exercice 1181 Inverser en utilisant un système linéaire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1182 Résoudre $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$.

Exercice 1183 Résoudre $\begin{cases} -cy+bz=\alpha \\ cx-az=\beta \\ -bx+ay=\gamma \end{cases}$.

Exercice 1184 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ des éléments (x,y,z,t) qui satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+3t & = & 0 \\ 2x+3y+4t & = & 0 \\ 2x+5y-4z & = & 0 \end{array} \right.$$

Donner une base de F et sa dimension.

Exercice 1185 On considère le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ll} x+y+z+t & =0 \\ x-y-2z+2t & =0 \\ 2x+y+z & =0 \end{array} \right.$$

1. Résoudre le système (S) puis indiquer son rang.
2. Montrer que l'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, indiquer sa dimension et en donner une base.

Exercice 1186 L'objectif de ce problème est de résoudre l'énigme du berger :
Un berger possède un troupeau de 101 moutons et remarque par hasard la propriété suivante : pour chaque mouton, il peut trouver une façon de scinder le troupeau des 100 autres moutons en deux troupeaux de 50 moutons et de même poids total. Il en déduit que tous les moutons ont le même poids. Comment a-t-il fait ? On montre, dans un premier temps, un résultat utile pour la démonstration finale.

1. (a) Montrer par récurrence que le déterminant de toute matrice carrée, dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est un nombre impair.
   (b) En déduire qu'une matrice de cette forme est inversible.
2. L'objectif de cette question est de résoudre l'énigme du berger. On note B la matrice carrée de taille 101 construite de la manière suivante :
   On numérote les moutons de 1 à 101. Quand le berger retire le ième mouton du troupeau, il sépare alors le reste du troupeau en deux troupeaux égaux (troupeau A, troupeau B)

et de même poids. On note alors $B_{i,j}$ les coefficients de la ième ligne de la matrice B obtenu de la façon suivante

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si le j-ième mouton se trouve dans le troupeau A} \\ 2 & \text{si le j-ième mouton se trouve dans le troupeau B} \end{cases}.$$

On note X la matrice de taille 101×1 constituée des poids des moutons

$$X = \begin{pmatrix} \text{poids du monton 1} \\ \text{poids du mouton 2} \\ \vdots \\ \text{poids du mouton 100} \\ \text{poids du mouton 101} \end{pmatrix}.$$

On note M le poids total du troupeau.

(a) Calculer
$$B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculer
$$BX.$$

(c) Montrer que B est inversible.

(d) En déduire X et résoudre l'énigme du berger.

21.6 Rang

Exercice 1187 Pour quelles valeurs de a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.

Exercice 1188 Soient a et b deux réels, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}(A) = 2$?

Exercice 1189 Soient $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^3$. Donner, sous forme d'équation, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartienne à l'espace vectoriel engendré par v_1 et v_2.
Même question pour un plan engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 1190 Soit u un endomorphisme de E, et $\mathcal{B}$ une base de E. Discuter dans chacun des cas ci-dessous la dimension du noyau de u.

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix} \qquad M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ 4 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \qquad M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 12-\lambda & -6 & \\ -9 & -5-\lambda & \\ -12 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 1191 Discuter le rang de la matrice suivante en fonction des paramètres réels x et y :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1192 Sans chercher à le résoudre, discuter la nature des solutions du système suivant, en fonction de α, a, b et c :

$$\begin{cases} x - y - \alpha z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

Quatrième partie
ANALYSE 2

22 Suites : compléments

22.1 Limites

Exercice 1193 Soient $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos(\frac{\pi}{2^k})$ et $v_n = u_n \sin(\frac{\pi}{2^n})$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente.
2. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite géométrique. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

Exercice 1194 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels telle que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$. Montrer que les valeurs d'adhèrence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 1195 On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1, v_0 = 2, u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_n+v_n}, v_{n+1} = \frac{(v_n)^2}{u_n+v_n}.$$

1. Montrer par récurrence que l'on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissent. En déduire qu'elles convergent vers ℓ et ℓ' respectivement. Montrer que l'on a $\ell\ell' = 0$.
3. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire ℓ et ℓ'.

Exercice 1196 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $0 < u_1 < v_1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$. Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

Exercice 1197

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non nuls convergeant vers une limite ℓ différente de zéro. Montrer que la suite $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs convergeant vers une limite ℓ différente de zéro. Montrer que la suite $(\sqrt{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{\ell}$.

Exercice 1198

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ converge.

Exercice 1199 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ, alors $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ. La réciproque est elle vraie ?
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2nk+k}$.
3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=\ell$. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\ell$.

4. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite strictement positive telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{1/n} = \ell$.

Exercice 1200 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$. On rappelle que $e = \lim_{n\to\infty} u_n$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. En déduire une valeur approchée de e à $\frac{1}{1000}$.
2. Démontrer que e est irrationnel.

Exercice 1201 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $m, n \geqslant N$ alors $|u_n - u_m| < \varepsilon$.

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2^p} \geqslant \frac{p+2}{2}$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini.
3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait au critère $\mathcal{C}'$ lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$ alors $|u_n - u_{n+1}| < \varepsilon$. Une suite satisfaisant au critère $\mathcal{C}'$ est-elle de Cauchy ?
4. Montrer que les trois assertions qui suivent sont équivalentes :
   (a) Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et toute partie minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.
   (b) Toute suite de Cauchy est convergente.
   (c) Deux suites adjacentes sont convergentes.

22.2 Suites récurrentes linéaires

Exercice 1202 Soit (u_n) définie par u_0 et u_1 strictement positifs et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $\lim(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ existe et la déterminer. Que remarquez-vous ?
2. Soit $a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
3. Montrer que a_{2n} et a_{2n+1} sont adjacentes.
4. Déterminer un rationnel r tel que $\left|r - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| < 10^{-3}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 1203 Déterminer (u_n) telle que

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = i$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$.

Exercice 1204 Déterminer les suites bornées qui vérifient $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

[Exercice corrigé]

Exercice 1205 Déterminer les suites convergentes qui vérifient $2u_{n+2} = 7u_{n+1} - 3u_n$.

Exercice 1206 Montrer que la suite $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$ est bien définie et la déterminer.

Exercice 1207 Déterminer les suites (u_n) et (v_n) qui vérifient $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - v_n \end{cases}$

22.3 Suites de Cauchy

Exercice 1208 Montrer que la suite $\left(\frac{\sin n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et que la suite $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas.

Exercice 1209 Montrer que la suite définie par

$$u_n = 1 + \frac{\cos 1}{1!} + \frac{\cos 2}{2!} + \cdots + \frac{\cos n}{n!}$$

est une suite de Cauchy. En déduire sa convergence.

Exercice 1210 Montrer que toute sous-suite extraite d'une suite de Cauchy est aussi une suite de Cauchy.
Montrer que si (u_n) est une suite de Cauchy, on peut trouver une sous-suite (u_{n_k}) de (u_n) telle que :

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall q \geqslant p,\ |u_{n_p} - u_{n_q}| \leqslant \frac{1}{2^p}.$$

Exercice 1211 Une suite (x_n) est définie par une relation de récurrence $x_{n+1} = a \sin x_n + b$ où a est un nombre réel de $]0, 1[$ et b un nombre réel quelconque. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $|x_{p+1} - x_p| \leqslant a^p |x_1 - x_0|$. En déduire que la suite (x_n) est une suite de Cauchy.
Combien de termes faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de $\lim x_n$ à 10^{-10} près si on suppose $a = 1/2$, $b = 5$, $x_0 = 1$?

23 Continuité et comparaison de fonctions

23.1 Continuité

Exercice 1212 Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $f(0) = 0$ et pour tout couple (x, y) de $[0, 1] \times [0, 1]$ on ait $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$.

1. Soit x un élément de $[0, 1]$. On pose $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. En déduire que $f(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$.
3. Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse $f(0) = 0$?

23.2 Comparaison de fonctions

Exercice 1213 À quelle condition sur f et g a-t-on $e^f \underset{a}{\sim} e^g$?

Exercice 1214 Soient f et g équivalentes au voisinage de a et strictement positives. Montrer que si f admet en a une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ différente de 1 alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.

Exercice 1215 Montrer que si f tend vers 0 en a alors $\ln(1 + f) \underset{a}{\sim} f$ et $e^f - 1 \underset{a}{\sim} f$.

Exercice 1216 Étudier en $+\infty$ et $-\infty$ la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}$.
[Exercice corrigé]

Exercice 1217 Calculer les limites de

1. $\dfrac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$ en 0.
2. $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$ en 0.
3. $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$ en 0.
4. $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

[Exercice corrigé]

Exercice 1218 Trouver un équivalent simple en $+\infty$ de $(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x})^x - 1$.

Exercice 1219

$$\text{Limite en } +\infty \text{ de } \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$$

$$\text{Équivalent en } +\infty \text{ de } \sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$$

$$\text{Limite en 0 de } \frac{\tan(ax)-\sin(ax)}{\tan(bx)-\sin(bx)}$$

$$\text{Limite en } \frac{\pi}{4} \text{ de } \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\tan(x+\frac{\pi}{4})$$

$$\text{Limite en } \frac{\pi}{4} \text{ de } \frac{\cos(x)-\sin(x)}{(4\,x-\pi)\tan(x)}$$

$$\text{Équivalent en 0 de } \frac{\tan(x-x\cos(x))}{\sin(x)+\cos(x)-1}$$

$$\text{Équivalent en } \frac{\pi}{4} \text{ de } \left(\tan(2\,x)+\tan(x+\frac{\pi}{4})\right)\left(\cos(x+\frac{\pi}{4})\right)^2$$

$$\text{Limite en 0 de } x^{\frac{1}{1+2\,\ln(x)}}$$

$$\text{Limite en } \frac{1}{2} \text{ de } \left(2\,x^2-3\,x+1\right)\tan(\pi\,x)$$

$$\text{Limite en 0 de } \frac{(\sin(x))^{\sin(x)}-1}{(\tan(x))^{\tan(x)}-1}$$

$$\text{Équivalent en } +\infty \text{ de } \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})}\ln(\frac{x}{x+1})$$

[Exercice corrigé]

Exercice 1220 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles. Montrer qu'il existe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}, f_n(t)=o(f(t))$ si $t\to\infty$.

24 Dérivabilité : compléments

24.1 Dérivées

Exercice 1221 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leqslant x$.

Exercice 1222 Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

Exercice 1223 Étudier la continuité, la dérivabilité, la continuité de la dérivée pour les applications suivantes :

1. $f : x \mapsto \sin\,(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
2. $g : x \mapsto x\sin\,(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
3. $h : x \mapsto x^2\sin\,(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice 1224 Soit g une fonction 2 fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $g(a) = g(b) = 0$ et $g''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Montrer que pour tout $x \in]a, b[, g(x) \geqslant 0$.

Exercice 1225 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}$ on ait $f(x) \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$ et $f''(x) \geqslant 0$. Étudier $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 1226 Soit f une application continue de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $]a, b]$. Montrer que si $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ existe, f est dérivable en a.

Exercice 1227 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction bornée deux fois dérivable et telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on ait $\alpha f(x) \leqslant f''(x)$.

1. (a) Montrer que f' a une limite en $+\infty$. Quelle est la valeur de cette limite ?
   (b) Montrer que f est décroissante et que $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$.
2. (a) Soit $g : x \mapsto \alpha f^2(x) - (f'(x))^2$. Montrer que g est croissante et a pour limite 0 en ∞.
   (b) En posant $f(x) = h(x)\exp(-\sqrt{\alpha}x)$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+ : f(x) \leqslant f(0)\exp(-\sqrt{\alpha}x)$.

24.2 Applications

Exercice 1228 Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction $x \mapsto f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.

1. On suppose $g_n(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}[$. Montrer que $f(1) > f(0)$.
2. On suppose désormais que $f(0) = f(1)$. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n s'annule en au moins un point de l'intervalle $[0, 1 - \frac{1}{n}]$.

Exercice 1229 Pour tout n entier supérieur où égal à 2, on considère le polynôme de degré n à coefficients réels :

$$P_n(X) = X^n + X^{n-1} + X^2 + X - 1$$

1. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que P_n a une unique racine réelle positive que l'on nommera λ_n. (On pourra étudier l'application $X \mapsto P_n(X)$.)
2. Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante puis qu'elle converge vers une limite que l'on notera ℓ.
3. Montrer que ℓ est racine du polynôme $X^2 + X - 1$. En déduire sa valeur.

[Exercice corrigé]

Exercice 1230 Soit f une fonction d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ dérivable sur I. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est strictement croissante sur I.
2. f' est positive ou nulle sur I et $\{x \in I; f'(x) > 0\}$ est dense dans I.

Exercice 1231

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en 0. Montrer qu'il existe une application ε de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ et $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Donner une interprtation géométrique de ce résultat.
2. En déduire les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = (n^3+1)^{\frac{1}{3}} - n$ et $v_n = (1 + \frac{\alpha}{n})^{\frac{1}{n}}$.
3. Construire un exemple de suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ avec, $u_n < 1$ pour tout $n \geqslant 1$ et telle que $\lim_{n\to\infty} w_n = 1$. (On pourra s'inpirer de l'exemple de $(v_n)_{n\geqslant 1}$ ci-dessus.)

Exercice 1232

1. Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$: $\log(n+1) < 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} < 1 + \log(n)$.
3. Posons $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log(n)$ Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroisante et convergente.

Exercice 1233

1. Soit f une application continue d'un intervalle $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable en $c \in]a, b[$. Montrer qu'il existe une (unique) application continue ε de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(c) = 0$ et, pour tout $x \in]a, b[$ distinct de c, on ait :
$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + (x-c)\varepsilon(x)$$
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général :
$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$$
est décroissante et qu'elle converge vers une limite que l'on nommera S.
3. Pourquoi peut on dire, *a priori*, que $\dfrac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1$?
4. Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Montrer que la suite $(\sigma_n(f))_{n\geqslant 1}$ de terme général :
$$\sigma_n(f) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2n}\right)$$
converge vers $f'(0)S$ (utiliser 1.).

5. Montrer que $\sigma_n(f) = \log(2)$ lorsque f est l'application $x \mapsto \log(1+x)$ et en déduire la valeur de S.
6. Calculer la limite de la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général :
$$\sigma_n = \sin\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n+1} + \cdots + \sin\frac{1}{2n}.$$
7. Plus généralement, quelle est la valeur pour $p \in \mathbb{N}^*$ donné, de la limite S_p de la suite $(\sigma_n(p))_{n\geqslant 1}$ de terme général :
$$\sigma_n(p) = \sum_{k=0}^{pn} \frac{1}{n+k}?$$

[Exercice corrigé]

Exercice 1234 Soit f une fonction dérivable et a un réel. Soit $h > 0$ un nombre réel strictement positif fixé.

1. Montrer qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que
$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h).$$
2. Pour tout $h \neq 0$ on note : $\varphi(h) = \dfrac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$. Montrer que si $f''(a)$ existe, alors $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = f''(a)$.

Exercice 1235 Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et 1 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $p = f(1) - f(0)$.

1. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = f'(0)$ et $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ sinon. Montrer que si u est un réel compris entre $f'(0)$ et p alors il existe $a \in [0,1]$ tel que $u = f'(a)$.
2. Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(1) = f'(1)$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$ sinon. Montrer que si v est un réel compris entre $f'(1)$ et p alors il existe $b \in [0,1]$ tel que $v = f'(b)$.
3. Soit w un réel compris entre $f'(0)$ et $f'(1)$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $w = f'(c)$.

Exercice 1236 Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients complexes de degré 3 ayant trois racines distinctes. Montrer que les racines de P' sont dans le triangle ayant pour sommet les racines de P

25 Développements limités

25.1 Calculs de développements limités

Exercice 1237 Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6).
2. $x \mapsto \tan(x)$ (à l'ordre 7).
3. $x \mapsto \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 7).
4. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).

5. $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).
6. $x \mapsto \sin^6(x)$ (à l'ordre 9.)

[Exercice corrigé]

Exercice 1238 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x}\right)$ sinon. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement limité de f en 0. Quelles conclusions en tirer ?

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = 0$ et, si $x \neq 0$: $g(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$. Montrer que g a un développement limité d'ordre 2 en 0 mais n'a pas de dérivée seconde (en 0).

Exercice 1239 Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 1240 Faire un développement limité ou asymptotique en a à l'ordre n de :

1. $\ln \cos x$ $n = 6$ $a = 0$.
2. $\dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$ $n = 2$ $a = 0$.
3. $\ln \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$ $n = 3$ $a = 0$.
4. $\ln \sin x$ $n = 3$ $a = \frac{\pi}{4}$.
5. $\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x}$ $n = 4$ $a = +\infty$.
6. $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ $n = 3$ $a = 0$.
7. $x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2})$ $n = 2$ $a = +\infty$.

[Exercice corrigé]

Exercice 1241 Développements limités en 0 de :

1. $\cos x . \ln(1 + x)$ à l'ordre 4.
2. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.
3. $\arcsin(\ln(1 + x^2))$ à l'ordre 6.
4. $\dfrac{\sinh x - x}{x^3}$ à l'ordre 4.
5. $(1 + x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3.

Exercice 1242 Pour chacune des fonctions suivantes, donner les conditions sur $\varepsilon(x)$ pour que ces fonctions soient des développements limités au voisinage d'un point et à un ordre que vous préciserez.

1. $f_1(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + x^2\varepsilon(x)$
2. $f_2(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^3}\varepsilon(x)$
3. $f_3(x) = (x - 2) + \dfrac{(x-2)^2}{5} + (x - 2)^3\varepsilon(x)$
4. $f_4(x) = x^2 - x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\varepsilon(x)$
5. $f_5(x) = x^3 + 3x^- x + 1 + (x - 1)^2\varepsilon(x)$
6. $f_6(x) = (x - 2)^2 + (x - 2) - 2 + (x - 2)\varepsilon(x)$

7. $f_7(x) = \{2x + x^2 + 1 + x^2\varepsilon(x)\}\{-x + 3 + x^2 - x^3\varepsilon(x)\}$

Exercice 1243 1. Développements limités en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$ et de $g(x) = e^{\sqrt{x}}$

2. Développement limité à l'ordre 3 en $x_0 \in]0; \pi[$ de $h(x) = \ln(\sin x)$. En déduire un développement limité en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 1244 Donner un développement limité à l'ordre 2 de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 1245 Donner un développements limité en 0 à l'ordre 10 de :

1. $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \cos t^2 dt$.
2. $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt = F(x^2) - F(x)$ où F est une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

Exercice 1246 Donner le DL2 en $+\infty$ de :

$$x \to \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} e^{\frac{x}{x-1}}.$$

25.2 Applications des développements limités

Exercice 1247 Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Exercice 1248 Calculer les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (\cos(x) + x)}{x^2}, \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \arctan(x) - x^4}{\cos(x^2) - 1}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 1249 Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

Exercice 1250 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Exercice 1251 Établir pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ l'inégalité :

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x+1}} < (x+1)^{3/2} - x^{3/2} < \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x}}.$$

Exercice 1252 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{x^2}{2} \leqslant e^x - x - 1 \leqslant \dfrac{x^2}{2} e^x$.

Exercice 1253 Soit $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[- \{0\}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer un DL de f en 0 à l'ordre 2.
3. Etudier la dérivabilité du prolongement de f.

Exercice 1254 Étudier les branches infinies des fonctions :

1. $f(x) = x^2 \arctan(\frac{1}{1+x^2})$.
2. $g(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$.

Exercice 1255 Soit (1) l'équation $x - E(x) = \frac{1}{x^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $x_n \in [n, n+1[$ solution de (1).
2. Déterminer un équivalent de x_n.
3. Faire un DAS de $x_n - n$ en $+\infty$ en fonction de $\frac{1}{n}$ à l'ordre 5.

Exercice 1256 Calculer pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{x^x - a^a}, \lim_{n\to\infty} (3(2)^{\frac{1}{n}} - 2(3)^{\frac{1}{n}})^n$$

Exercice 1257 Calculer :

$$\ell = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x + 1}{\ln x}\right)^{x \ln x}$$

et donner un équivalent de $\ell - \left(\frac{\ln x+1}{\ln x}\right)^{x\ln x}$ quand $x \to \infty$.

Exercice 1258 Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on définit $(u_n(x))_n$ et $(v_n(x))_n$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = \frac{u_n(x) + v_n(x)}{2}, v_{n+1}(x) = \sqrt{u_n(x)v_n(x)}, u_0(x) = 1, v_0(x) = x.$$

1. Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite ℓ_x.
2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ell_x$. Calculer $f(1), f(0)$, donner $f(\frac{1}{x})$ en fonction de $f(x)$ si $x > 0$. Montrer que f est croissante, en déduire le sens de variations de $x \to \frac{f(x)}{x}$.
3. Montrer que f est dérivable en 1 (on utilisera $\sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1+x}{2}$) puis que $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis que f est continue en 0.
5. Donner l'allure du graphe de f, préciser la tangente en 0 ainsi que le comportement asymptotique en $+\infty$.

Exercice 1259 Soit $n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$, on définit :

$$u_n(x) = \left(\frac{1^x + 2^x + ... + n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Déterminer $\ell_n = \lim\limits_{x\to 0} u_n(x)$.

Exercice 1260 Déterminer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x - \operatorname{sh} 2x}{(1 - \cos 3x)\arctan x}.$$

Exercice 1261 Soient u, v, f définies par :

$$u(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)^{\frac{1}{3}},\ v(x) = \sqrt{x^2 + x + 1},\ f(x) = u(x) - v(x).$$

1. Donner un équivalent de f au voisinage de $-\infty$, en déduire $\lim\limits_{-\infty} f$.
2. Déteminer $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) - x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} v(x) + x$. En déduire l'équation d'une droite asymptote au graphe de f en $-\infty$ et positionner f par-rapport à cette asymptote.
3. Même étude en $+\infty$.

Exercice 1262 Soit g la fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \dfrac{1}{x^2}$.

1. Donner le domaine de définition de g.

2. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
3. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

[Exercice corrigé]

Exercice 1263 Soient $f : x \mapsto \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$ et $g : x \mapsto (x+1)\exp(\dfrac{1}{x-1})$ deux fonctions. Déterminer si leurs graphes respectifs ont des asymptotes puis la position de ces graphes par rapport à celles-ci.

Exercice 1264 Montrer que, pour tout x réel vérifiant $|x| \leqslant 1$:

$$\left|\frac{x+\sin 2x}{x^9+x^2-3}\right| \leqslant 2.$$

Exercice 1265 Déterminer :

1. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2}+x$.
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2}+x$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{Arctan} x)^{\frac{1}{x^2}}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x}$.

Exercice 1266 1. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{x+1}{1+x^2} + \operatorname{Arctan} x.$$

   (a) Quel est le domaine de définition de g ?
   (b) Etudier ses variations.
   (c) Montrer que g s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un point α compris entre -1 et 0 (on ne demande pas de préciser la valeur de α).
   (d) Dessiner le graphe de g.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)\operatorname{Arctan} x.$$

   (a) Calculer la dérivée de f et établir son tableau de variation.
   (b) Le graphe de f a-t-il des points d'inflexion ? Si oui, donner les coordonnées de ce (ou ces) point(s).

3. Donner l'équation de la tangente au point d'abcisse $x=0$ au graphe de f et la position de ce graphe par rapport à cette tangente (au voisinage de ce point).
4. En utilisant les résultats de l'exercice **???**, montrer que :
   (a) $\dfrac{f(x)}{x} = (1+\dfrac{1}{x})(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x})$ si $x>0$.
   (b) $\dfrac{f(x)}{x} = (1+\dfrac{1}{x})(-\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x})$ si $x<0$.

5. En déduire l'existence d'une fonction ε telle que $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$ et, pour tout $x > 0$, on ait :
$$f(x) = \frac{\pi}{2}x + (\frac{\pi}{2} - 1) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}).$$
Etablir un résultat analogue pour $x < 0$.
6. Quelles sont les asymptotes au graphe de f ? Préciser la position de ce graphe par rapport à ces asymptotes.
7. Dessiner le graphe de f.

25.3 Formules de Taylor

Exercice 1267 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1268 Soit a un nombre réel et f une application de classe C^2 de $]a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose f' et f'' bornées ; on pose $M_0 = \sup_{x\geqslant a} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\geqslant a} |f''(x)|$.

1. En appliquant la formule de Taylor en x et $x + 2h$, montrer que, pour tout $x > a$ et tout $h > 0$, on a : $|f'(x+h)| \leqslant hM_2 + \dfrac{1}{h}M_0$.
2. En déduire que f' est bornée sur $]a, +\infty[$.
3. Établir le résultat suivant : soit g $:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 à dérivée seconde bornée et telle que $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Alors $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$.

Exercice 1269 Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que : $ae^2 + be + c = 0$.

1. En appliquant la formule de Taylor sur $[0, 1]$ à l'application $\varphi : x \mapsto ae^x + ce^{-x}$ démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\theta_n \in]0, 1[$ tel que :
$$-b = \frac{ae^{\theta_n} + (-1)^n ce^{-\theta_n}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{a + (-1)^k c}{k!}.$$
2. En déduire que pour n assez grand $ae^{\theta_n} + (-1)^n ce^{-\theta_n} = 0$ puis que $a = b = c = 0$. (On rappelle que $e = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$.)

Exercice 1270 Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ et $f^{(n)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ avec $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(n)}(x)\right| = o(\frac{n!}{a^n}), a$ constante fixée. Montrer que $\forall x \in [-a, a], f(x) = 0$, puis que $f = 0$.

Exercice 1271 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P \geqslant 0$. On pose $Q = P + P' + ... + P^{(n)}$. Montrer que $Q \geqslant 0$.

Exercice 1272 Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f \in C^3([a, b], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = f(a) + (b - a)f'(\dfrac{a+b}{2}) + \dfrac{(b-a)^3}{24}f'''(c)$ (on pourra utiliser Taylor-Lagrange entre $a, \dfrac{a+b}{2}, b$).

26 Intégrales (compléments), intégrales impropres

26.1 Intégration sur un compact

Exercice 1273 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cos(nt) f(t)dt = 0$.

Exercice 1274 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)dt = 0.$$

Généraliser au cas où $f(0)$ est quelconque.

Exercice 1275 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1. Montrer que f est bornée. On pose $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.
2. Soient x et $y \in [a,b]$ Montrer que $|\int_x^y f(t)dt| \leqslant M|x-y|$. En déduire que l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est continue sur $[a,b]$.
3. Soit $x_0 \in [a,b]$. Montrer que si f est continue en x_0 alors F est dérivable en x_0.

Exercice 1276 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nt^n f(t^n)dt = \int_0^1 f(t)dt.$$

(On pourra faire le changement de variable $u = t^n$).

Exercice 1277 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(a) = f(b) = 0$. Posons $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Montrer que $|\int_a^b f(t)dt| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{4}$. (Indication : faire des développements limités de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ et $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$).

Exercice 1278 Soit f continue sur $[0,1]$ avec $f(1) \neq 0$, montrer :

$$\int_0^1 x^n f(t)dt \sim \frac{f(1)}{n}.$$

En déduire :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-2t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

On posera $u = 1 - \frac{1}{n}$ puis $v = ue^{2(u-1)}$.

Exercice 1279 Donner un développement :

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt = a + \frac{b}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

26.2 Intégrales impropres

Exercice 1280 Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx.$$

$$\int_1^\infty x^x dx.$$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)}dx.$$

Nature et calcul des intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^5}{x^{12}+1}dx.$$

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\mathrm{sh}(bile)}d(bile).$$

[Exercice corrigé]

Exercice 1281 1. Montrer que $\forall x > -1 \ \ln(1+x) \leqslant x$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall x \in [0, n]$ $(1 - \frac{x}{n})^n \leqslant e^{-x} \leqslant (1 + \frac{x}{n})^{-n}$.
3. En déduire que
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}dt.$$
Rappel (intégrales de Wallis) : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n \, d\theta \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}du$ existe et vaut I_{2n-2}.
5. Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 1282 Étude de :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t}dt.$$

Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 1283 Soit f une application C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f + f'' \geqslant 0$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0.$$

Exercice 1284 Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et F de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que si f admet une limite ℓ en $+\infty$, alors F a aussi la limite ℓ en $+\infty$.
2. Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$ mais où F tend vers 0.
3. Montrer que si $f \to \infty$ quand $x \to \infty$, alors $F \to \infty$ quand $x \to \infty$.

Exercice 1285 Étudier la fonction :

$$h : x \to \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}.$$

Domaine de définition, continuité et dérivabilité, variations, limites aux bornes de ce domaine, et $\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x}$, éventuellement convexité.

Exercice 1286 Donner un exemple d'une fonction continue positive telle que :

$$\int_0^\infty f(u)du$$

existe mais telle qu'on n'ait pas :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Donner un exemple de fonction continue positive telle que :

$$\int_0^\infty f(u)du$$

existe mais telle que :

$$\int_0^\infty f^2(u)du$$

n'existe pas.

Exercice 1287 Soit f une fonction positive décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\int_0^\infty f$ existe. Montrer que :

$$f(x) = o(\frac{1}{x})$$

quand $x \to \infty$.

Exercice 1288 Soit f une application continue par morceaux de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ possédant une limite ℓ en $+\infty$, telle que $\int_0^\infty f$ existe ; montrer que $\ell = 0$.
Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f$ existe. Montrer que :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 1289 Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f^2$ existe. Montrer que quand $x \to \infty$:

$$\int_0^x f(t)dt = o(\sqrt{x}).$$

Exercice 1290 Étudier la nature de

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

selon $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 1291 Convergence et calcul de :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)dt}{t^2},$$
$$\int_0^\infty \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt,$$
$$\int_1^\infty \frac{\ln t}{t^n}dt.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 1292 Soit $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue telle que

$$\int_1^\infty f(t)dt$$

converge. Montrer que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x tf(t)dt = 0.$$

Exercice 1293 Soit $f \in C([1,\infty[,\mathbb{R}^+)$ décroissante, on pose :

$$x_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t)dt.$$

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer que la suite $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ a une limite quand $n\to\infty$ si et seulement si $\int_1^\infty f$ converge, et que dans ce cas :
$$\int_{n+1}^\infty f \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^m f(k) \leqslant \int_n^\infty f.$$
3. Montrer que si $\int_1^\infty f$ diverge on a : $S_n \backsim \int_1^n f$ quand $n\to\infty$.

Exercice 1294 Soit $f :]0;1]\to\mathbb{R}$ continue et monotone, telle que $\int_0^1 f$ existe. Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Exercice 1295 Montrer que si $f : \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ est uniformément continue, alors

$$\int_0^\infty \exp(if(t))dt$$

n'existe pas.

Exercice 1296 Nature de :

$$\int_0^\infty \sin t\sin\frac{1}{t}dt,\ \int_0^\infty \frac{e^{\sin t}}{t}dt,\ \int_2^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}dt,\ \int_0^1 \cos\ln t dt, \int_0^\infty \cos\exp t dt.$$

Exercice 1297 Nature et calcul de :

$$\int_0^\infty \ln t\ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)dt, a>0\ ;\ \int_0^\infty \exp\left(-t^{\frac{1}{n}}\right)dt, n\in\mathbb{N}^*\ ;\ \int_0^1 \left(\frac{1}{t}-E(\frac{1}{t})\right)dt.$$

Exercice 1298 Convergence et calcul de :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+\cosh^2 x},\ \int_1^\infty \frac{dx}{\sinh x},\ \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\cosh t}.$$

Exercice 1299 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f \geqslant 0, g \geqslant 0, g = o(f)$ en $+\infty$, et $\int_0^\infty f$ n'existe pas. Montrer alors :

$$\int_0^x g(u)du = o\left(\int_0^x f(u)du\right)$$

quand $x \to \infty$.

Exercice 1300 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, tendant vers ℓ en $+\infty$, montrer alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{f(t)n}{n^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2}\ell.$$

Exercice 1301 Calculer :

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^{3a} \frac{\tan t}{t^2}dt\ ,\ \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n - x^{2n}}{1-x}dx.$$

Exercice 1302 Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^\infty f$ existe, montrer que $F(x) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos tx dt$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Cinquième partie
ALGÈBRE 3

27 Groupes : généralités

27.1 Groupes, sous-groupes

Exercice 1303 Soit ABC un triangle équilatéral du plan.

1. Déterminer l'ensemble des rotations qui laissent invariant $\{A, B, C\}$.
2. Montrer que c'est un groupe pour la loi $\circ$.
3. Faire de même avec un carré.

Exercice 1304 (Entiers modulo n) Étant donné un entier naturel n, on appelle classe d'un entier relatif p modulo n l'ensemble $\overline{p} = \{p + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$. L'ensemble des classes modulo n est noté $\mathbb{Z}_n$.

1. Écrire la liste des éléments distincts de $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$ et $\mathbb{Z}_5$.
2. Montrer que si $x \in \overline{p}$ et $y \in \overline{q}$, alors $x + y \in \overline{p+q}$ et $xy \in \overline{pq}$.
3. En posant $\overline{p} + \overline{q} = \overline{p+q}$ et $\overline{p} \cdot \overline{q} = \overline{pq}$, on définit deux lois de composition, addition et multiplication sur $\mathbb{Z}_n$.
   Écrire la table d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}_4$.

Même question pour $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, et $\mathbb{Z}_5$.

Exercice 1305
1. Montrer que les transformations géométriques qui conservent globalement un rectangle forment un groupe. Faire l'étude de ce groupe.
2. Étudier le groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
3. Montrer qu'il n'existe que deux sortes de groupes à quatre éléments.

Exercice 1306
1. Étudier le groupe des isométries du carré.
2. Écrire la liste des éléments du groupe $\mathfrak{S}_4$ des permutations de quatre lettres. Trouver des sous-groupes de ce groupe isomorphes aux groupes du rectangle, du triangle équilatéral, du carré.

Exercice 1307 (Permutations d'un ensemble de n éléments)
1. Une permutation de l'ensemble de n éléments $\{1, 2, \dots, n\}$ est une bijection de cet ensemble dans lui-même. Il est commode de désigner une telle permutation s par le tableau de valeurs suivant : $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble de ces permutations pour n donné.
2. Écrire les éléments de $\mathfrak{S}_2$ et de $\mathfrak{S}_3$.
3. Établir les tables de composition de ces deux ensembles.
4. De la table de $\mathfrak{S}_3$ on peut extraire des parties *stables* ne faisant intervenir que certains éléments ; lesquelles ? Peut-on les trouver toutes.
5. Voyez-vous des analogies (totales ou partielles) entre ces tables et des situations rencontrées plus haut ?
6. On peut obtenir tous les éléments de $\mathfrak{S}_3$ à partir de la composition de certains d'entre-eux ; lesquels ?

7. Combien d'éléments possède $\mathfrak{S}_n$? Combien de cases contient la table de composition de $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5, \ldots$? Pourrait-on étudier $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{S}_5$ à partir de ces tables ?

Exercice 1308 Soient les quatre fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = -x \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Montre que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi $\circ$.

Exercice 1309 Montrer qu'il existe une seule table possible pour un groupe d'ordre 3. Est-ce vrai pour 4 ?

Exercice 1310 Montrer que si X contient au moins trois éléments alors $\sigma(X)$ n'est pas abélien.

Exercice 1311 Les ensembles suivants, pour les lois considérées, sont-ils des groupes ?

1. $]-1,1[$ muni de la loi définie par $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$;
2. $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ pour la multiplication usuelle ;
3. $\mathbb{R}_+$ pour la multiplication usuelle ;
4. $\{x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ pour la loi de composition des applications.

[Exercice corrigé]

Exercice 1312 Soit $K = \{\mathrm{Id}, f_1, f_2, f_3\}$ où f_1, f_2, et f_3 sont les permutations de $E = \{1, 2, 3, 4\}$ définies par

$$f_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right), f_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), f_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Montrer que K est un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$.

Exercice 1313 Soit l'ensemble

$$\mathcal{J} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Montrer que, muni de la multiplication usuelle des matrices, $\mathcal{J}$ est un groupe abélien.

Exercice 1314 Pour la multiplication usuelles des matrices carrées, les ensembles suivants sont-ils des groupes :

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \quad \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) : \det M = 1\} \ ?$$

[Exercice corrigé]

Exercice 1315 Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre à droite et tel que chaque élément de G admette un symétrique à droite. Montrer que G est un groupe.

Exercice 1316 Soient $(G, .)$ un groupe et $a, b \in G$. On suppose que

$$(1) : ab^2 = b^3a \quad \text{ et } (2) : ba^2 = a^3b.$$

1. Montrer, en utilisant seulement (1), que $a^2b^8a^{-2} = b^{18}$ puis que $a^3b^8a^{-3} = b^{27}$.
2. En déduire, en utilisant (2), que $a^3b^8a^{-3} = b^{18}$ et enfin que $a = b = 1$.

Exercice 1317
1. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ muni de la loi $\star$ définie par $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \star b = a + b + ab$ est-il un groupe ?

2. L'ensemble $E = \{-1, 1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$ muni de la loi usuelle de multiplication dans $\mathbb{C}$ est-il un groupe ?
3. L'ensemble $E = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ muni de la loi de multiplication usuelle des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un groupe ?
4. L'ensemble $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles d'ordre 2 muni de la loi de multiplication usuelle des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-il un groupe ?

Exercice 1318 Soient $(G, \star)$ et $(H, \triangle)$ deux groupes. On définit sur $G \times H$ la loi $\heartsuit$ par $(x, y)\heartsuit(x', y') = (x \star x', y\triangle y')$.

1. Montrer que $(G \times H, \heartsuit)$ est un groupe.
2. Si G est de cardinal 2, dresser la table de $G \times G$ et la reconnaître parmi les exemples des exercices précédents.

Exercice 1319 Montrer que si H et K sont des sous-groupes de G alors $H \cap K$ est un sous-groupe de G. Est-ce vrai pour $H \cup K$?

Exercice 1320 Si G est un groupe, on appelle centre de G et on note $Z(G)$ l'ensemble $\{x \in G / \forall y \in G, xy = yx\}$.

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que G est commutatif ssi $Z(G) = G$.
3. Calculer $Z(\sigma_3)$.

Exercice 1321 On nomme $M_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients entiers relatifs.
- Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que pour que M admette un inverse élément de $M_n(\mathbb{Z})$ il faut et il suffit que $\det(M) \in \{-1, 1\}$.
- Démontrer que $Gl_n(\mathbb{Z}) = \{M \in M_n(\mathbb{Z})\ ; \det(M) \in \{-1, 1\}\}$ est un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1322
1. L'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \leqslant 1$ est il un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$?
2. L'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ est-il un sous groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$?
3. Existe-t-il une valeur $M \in \mathbb{R}$ telle que l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $a \leqslant M$ forme un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$?

[Exercice corrigé]

Exercice 1323 Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

[Exercice corrigé]

Exercice 1324 Déterminer le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par les entiers 24, 36 et -54.

Exercice 1325 Les questions sont indépendantes. Soit j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Déterminer le sous-goupe du groupe additif $\mathbb{C}$ engendré par i et j.
2. Déterminer le sous-goupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ engendré par i et j.

Exercice 1326 Soit G un groupe engendré par a et b. Montrer que $< a > \cap < b > \subseteq Z(G)$ où $Z(G)$ désigne le centre de G.

[Exercice corrigé]

Exercice 1327 Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

1. Montrer l'existence de $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}^{+*})$.
2. Si $\alpha > 0$ montrer que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
3. Si $\alpha = 0$ montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1328 Soit G un groupe. Montrer que l'ensemble $Aut(G)$ des automorphismes de G est un groupe pour la loi de composition. Soit H un sous-groupe de $Aut(G)$, et $\pi : G \to \wp(G)$ définie par : $\pi(x) = \{f(x) | f \in H\}$. Montrer que $\pi(G)$ est une partition de G.

Exercice 1329 Soit E un ensemble muni d'une loi interne $\star$. On appelle translation à droite (resp. à gauche) par $a \in E$, l'application d_a (resp. g_a) de E dans E définie par $d_a(x) = a \star x$ (resp. $g_a(x) = x \star a$).

1. Montrer que dans un groupe les translations à droite et à gauche sont des bijections.
2. Réciproquement, si la loi $\star$ de E est associative, et que les translations à droite et à gauche sont des bijections, on va montrer que $(E, \star)$ est un groupe.
   (a) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $e_x \in E$ (resp. $f_x \in E$) tel que $e_x \star x = x$ (resp. $x \star f_x = x$).
   (b) Si $x, y \in E$, montrer que $e_x = e_y$ (noté e dorénavant) et $f_x = f_y$ (noté f dorénavant).
   (c) Montrer que $e = f$ (noté e dorénavant).
   (d) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $\bar{x} \in E$ (resp. $\bar{\bar{x}} \in E$) tel que $\bar{x} \star x = e$ (resp. $x \star \bar{\bar{x}} = e$).
   (e) Montrer que $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$.
   (f) Conclure.

Exercice 1330 Si K est un sous-groupe de H et H un sous-groupe de G, montrer que K est un sous-groupe de G.

Exercice 1331 1. Soit $(G, .)$ un groupe. Montrer l'équivalence de :
   i) G est abélien.
   ii) Pour tout $a, b \in G$, on a : $(ab)^2 = a^2b^2$.
   iii) Pour tout $a, b \in G$, on a : $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
   iv) L'application f de G dans G définie par $f(x) = x^{-1}$ est un automorphisme.
2. En déduire que si pour tout $x \in G$, $x^2 = e$, alors G est abélien.

Exercice 1332 1. Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*$ munis des lois $+$ ou $\times$ sont-ils des groupes ? Quand c'est le cas, chercher des sous-groupes non triviaux.
2. $\{x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ muni de la loi de composition des applications est-il un groupe ?

Exercice 1333 Quel est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ (resp. de $(\mathbb{R}^*, \times)$) contenant 1 ? Contenant 2 ?

Exercice 1334 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé. Montrer que $S_\lambda = \{\exp(i\lambda t) : t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, \times)$. Pour quelles valeurs de λ retrouve-t-on des sous-groupes bien connus ? A quoi ressemblent les courbes S_λ ? Que peut-on dire, en terme de morphisme, de l'application $t \mapsto \exp(i\lambda t)$?

27.2 Ordre d'un élément

Exercice 1335 On appelle *ordre d'un élément* d'un groupe fini $(G,*)$ l'ordre du sous-groupe engendré dans G par cet élément.

1. Montrer que si x est d'ordre p, p est le plus petit entier tel que $x^p = e$.
2. Déterminer les ordres des éléments des groupes rencontrés au **I**.
3. Soit $(G,*)$ un groupe fini, a un élément de G, H un sous-groupe d'ordre p de G ; on note aH l'ensemble $\{a*y \mid y \in H\}$.
   a) Montrer que pour tout $a \in G$, aH a p éléments.
   b) Montrer que si $a \in G$ et $b \in G$, $(aH = bH)$ ou $(aH \cap bH = \emptyset)$.
   c) En déduire que l'ordre de H divise l'ordre de G.
4. Montrer que si G est un groupe fini d'ordre n, les ordres de tous ses éléments divisent n.
5. Trouver des sous-groupes de $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$.
6. Si G est un groupe d'ordre 5, que peut-on dire de l'ordre de ses éléments ? En déduire les tables de composition possibles pour un groupe d'ordre 5. Que peut-on dire de deux groupes quelconques d'ordre 5 ? Mêmes questions pour les groupes d'ordre 23. Généraliser.

Exercice 1336 Soit H un groupe abélien. Un élément $x \in H$ est dit d'ordre fini lorsque il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que la somme $x + ... + x$ (n-fois) soit égale à 0. Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre fini de H est un sous-groupe abélien de H.

[Exercice corrigé]

Exercice 1337 Soit G un groupe, e son élément neutre. Un élément g de G est dit *d'ordre* $n \in \mathbb{N}$ si $g^n = e$ et $g^k \neq e$ pour tout entier $k < n$. g est dit *d'ordre fini* si il est d'ordre n pour un n quelconque.

1. Montrer que $Gl_2(\mathbb{R})$ contient des éléments d'ordre 2 et des éléments qui ne sont pas d'ordre fini.
2. Soit φ un homomorphisme de G à valeurs dans H et g un élément de G d'ordre n. Montrer que :
   - $\varphi(g)$ est d'ordre fini inférieur ou égal à n.
   - Si φ est injectif, l'ordre de $\varphi(g)$ est égal à n.
3. Montrer que si G n'a qu'un nombre fini d'éléments, tous ses éléments ont un ordre fini.

[Exercice corrigé]

Exercice 1338 Soit le groupe $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Déterminer le sous-groupe H de G engendré par $\overline{6}$ et $\overline{8}$ et déterminer son ordre.
2. Caractériser les générateurs de G.
3. Quel est l'ordre de l'élément $\overline{9}$?

Exercice 1339 Soient E un espace vectoriel réel de dimension 2 et (e_1, e_2) une base de E. On considère les endomorphismes de E définis par

$$s(e_1) = e_1, \quad s(e_2) = -e_2,$$

$$r(e_1) = e_2, \quad r(e_2) = -e_1.$$

1. Montrer que r et s sont des automorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
2. Déterminer l'ordre de s et l'ordre de r.
3. (a) Montrer que $sr = -rs$.

(b) En déduire que $G := \{\mathrm{Id}_E, s, r, sr, -\mathrm{Id}_E, -s, -r, -s\}$ est un sous-groupe du groupe linéaire de E.

(c) Montrer que G est le sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ engendré par s et t.

Exercice 1340 Soient G un groupe et $x \in G$ un élément d'ordre n. Quel est l'ordre de x^2 ?
[Exercice corrigé]

Exercice 1341 1. Soient G un groupe et $x, y \in G$ des éléments qui commutent et d'ordres respectifs m et n premiers entre eux. Montrer que xy est d'ordre mn. Montrer que l'hypothèse m et n *premiers entre eux* est indispensable.

2. Montrer que $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ sont des éléments de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ d'ordres finis et que AB n'est pas d'ordre fini.

[Exercice corrigé]

Exercice 1342 Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-il monogène ?
[Exercice corrigé]

27.3 Morphismes

Exercice 1343 Décrire tous les homomorphismes de groupes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.
[Exercice corrigé]

Exercice 1344 Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, on pose la matrice $M_{a,b} = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$. Soit $\mathcal{S} = \{M_{a,b} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$. Soit l'application $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}, M_{a,b} \mapsto a^2 + b^2$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un groupe pour la loi usuelle de multiplication des matrices carrées.
2. Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathcal{S}, \times)$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 1345 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ l'application qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe $e^{ix} \in \mathbb{C}^*$. Montrer que f est un homomorphisme de groupes. Calculer son noyau et son image. f est-elle injective ?
[Exercice corrigé]

Exercice 1346 Traduire en termes d'homomorphisme de groupes les propriétés traditionnelles suivantes :

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;
2. $\det(MM') = \det(M)\det(M')$;
3. $|zz'| = |z||z'|$;
4. $(xy)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$;
5. $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$;
6. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

Exercice 1347 Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, on pose $M_{a,b} = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$, $\mathcal{S} = \{M_{a,b} : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \setminus \{M_{0,0}\}$. Soit l'application $f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}, M_{a,b} \mapsto a + ib$.

1. (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-groupe du groupe additif usuel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathcal{S}^*$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{S}, +)$ sur le groupe additif $\mathbb{C}$.
3. (a) Montrer que f définit un homomorphisme du groupe $(\mathcal{S}^*, \times)$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de cet homomorphisme.

4. Montrer que $\Omega = \{M_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{R}^2, a^2+b^2 = 1\}$ est un sous-groupe distingué du groupe multiplicatif $\mathcal{S}^*$.

Exercice 1348 Soit G un groupe. Montrer que l'application $x \to x^{-1}$ est un morphisme si et seulement si G est commutatif. On suppose G fini ; soit ϕ un morphisme involutif de G dont le seul point fixe est e, montrer que :

$$\forall z \in G, \exists t \in G, z = t(\phi(t))^{-1}.$$

En déduire ϕ puis que G est commutatif.

27.4 Isomorphisme

Exercice 1349 Montrer que les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont isomorphes.

Exercice 1350 Montrer que $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_3$ est isomorphe à $\mathbb{U}_6$. Est-ce que $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$ est isomorphe est $\mathbb{U}_4$? Pouvez-vous conjecturer à quelle condition $\mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_m$ est isomorphe à $\mathbb{U}_{nm}$?

Exercice 1351 Soit G un groupe.

1. Montrer que l'ensemble des automorphismes de G muni de la loi de composition des applications est un groupe. Ce groupe est noté Aut (G).
2. Vérifier que l'application $\phi : G \to \mathrm{Aut}\,(G)$ qui associe à $g \in G$ l'application $\phi_g : G \to G, x \mapsto gxg^{-1}$ est un morphisme de groupes. Déterminer son noyau $Z(G)$, dit *centre* de G.
3. Déterminer Aut $(\mathbb{Q})$ et Aut $(\mathbb{Z})$.

Exercice 1352 Soit $(G, .)$ un groupe. On appelle conjugaison par $a \in G$, l'application f_a de G dans G définie par $f_a(x) = a.x.a^{-1}$.

1. Montrer que f_a est un automorphisme de G.
2. Soit $\Gamma = \{f_a : a \in G\}$. Montrer que $(\Gamma, \circ)$ est un groupe.
3. Soit $\Phi : G \to \Gamma, a \mapsto f_a$. Vérifier que Φ est un morphisme. Est-il injectif ? (indication : préciser ce morphisme lorsque G est abélien).

Exercice 1353 1. Les sous-groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Z}, +)$ sont-ils isomorphes ?

2. Les sous-groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 1354 Montrer que les groupes multiplicatifs $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ne sont pas isomorphes.
[Exercice corrigé]

28 Anneaux et corps

28.1 Anneaux

Exercice 1355 Soient $a, b \in \mathbb{C}$. L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto iz - \overline{z}$ est-elle un (endo)morphisme...

1. ...du groupe $\mathbb{C}$?
2. ...de l'anneau $\mathbb{C}$?
3. ...du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

Exercice 1356 Soient les ensembles

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Étudier si, munis des lois usuelles, L et M sont des anneaux, des corps.

Exercice 1357

1. Soit $D = \{f \in \mathbb{R}[X] : f'(0) = 0\}$. Montrer que D n'est pas un idéal de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ et que c'est un sous-anneau de l'anneau $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $E = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que D n'est pas un sous-anneau de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ et que c'est un idéal de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ dont on donnera un générateur.

Exercice 1358 On définit sur $\mathbb{R}$ les deux lois $\oplus$ et $\otimes$ par $x \oplus y = x+y-1$ et $x \otimes y = x+y-xy$. Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un corps.

Exercice 1359 Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. On note End(G) l'ensemble des endomorphismes de G sur lequel on définit la loi $+$ par $f + g : \begin{cases} G \to G \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{cases}$.
Montrer que $(\text{End}(G), +, \circ)$ est un anneau.

Exercice 1360 Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit que $x \in A$ est nilpotent ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que si x est nilpotent alors $1 - x$ est inversible.
2. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors xy et $x + y$ sont nilpotents.
3. Un corps admet-il des éléments nilpotents ?

Exercice 1361 Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
On appelle centre de A l'ensemble $C = \{x \in A / \forall y \in A, xy = yx\}$.
Montrer que C est un sous-anneau de A.

Exercice 1362 Soient A et B deux anneaux. On définit sur $A \times B$ les lois

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y)(x', y') = (xx', yy')$$

1. Montrer que $A \times B$ est alors un anneau.
2. Si A et B sont des corps, en est-il de même pour $A \times B$?

Exercice 1363 Montrer que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des sous-anneaux de A alors $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ est un sous-anneau de A.

Exercice 1364 Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif pour les lois usuelles de $\mathbb{C}$.
2. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 1365 Soit A un anneau commutatif. On dit que $a \in A$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$. On pose $\mathcal{N}(A) = \{a \in A : a \text{ est nilpotent}\}$.

1. Dans cette question, $A = \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$. Montrer que $\overline{6} \in \mathcal{N}(A)$ puis que $\mathcal{N}(A) = \left\{\lambda\overline{6} : \lambda \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Que peut-on dire de $\mathcal{N}(A)$ si A est intègre ?
3. Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est un idéal de A

Exercice 1366 (Extrait de l'examen de juin 1994) Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on définit la loi $\star$ par

$$(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

1. (a) Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ est un anneau commutatif noté A.
   (b) Chercher les diviseurs de 0 de l'anneau A.
2. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}[X] \to A, P \mapsto (P(0), P'(0)).$$

   (a) Montrer que f est un homomorphisme d'anneaux.
   (b) f est-il surjectif ?
   (c) Déterminer le noyau de f.

Exercice 1367 (Extrait de l'examen de janvier 1994) On définit $A = \{a + jb : a, b \in \mathbb{Z}\}$ où $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. On désigne par $\mathcal{U}(A)$ le groupe des éléments inversibles de A et enfin, on pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $N(z) = |z|^2$.
2. (a) Montrer que si $z \in A$ alors $N(z) \in \mathbb{Z}$.
   (b) Soit $z \in A$. Montrer que $z \in \mathcal{U}(A)$ si et seulement si $N(z) = 1$.
   (c) Soient a et b des entiers. Montrer que si $N(a + jb) = 1$ alors $a, b \in \{-1, 0, 1\}$.
3. Décrire le groupe $\mathcal{U}(A)$ et en déterminer les éléments d'ordre 3.
4. Soit $\Phi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}, P \mapsto P(j)$.
   (a) Montrer que Φ est un homomorphisme d'anneaux.
   (b) Déterminer le noyau de Φ (on pourra remarquer que $j^2 + j + 1 = 0$).
   (c) Montrer que $\operatorname{Im} \Phi = \{a + jb : a, b \in \mathbb{Q}\}$ et que c'est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 1368 1. $\mathcal{J} = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}\}$ est-il un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}^2$?

2. $\mathcal{J} = \left\{P \in \mathbb{R}[X] : P'(0) = 0\right\}$ est-il un idéal de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 1369 (D'après examen juin 94) 1. Montrer que $\overline{k}$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si les entiers k et n sont premiers entre eux.

2. On pose $n = 10$ et soit G le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   (a) Donner la liste des éléments de G.
   (b) Quel est l'ordre de $\overline{3}$? G est-il cyclique ?

Exercice 1370 (Bac 1978) Soit l'anneau $A = \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.

1. Déterminer les diviseurs de zéro de l'anneau A.
2. Résoudre dans A l'équation $x^2 + \overline{2}x - \overline{3} = \overline{0}$.

Exercice 1371 Soit $\mathcal{J} = \{P \in \mathbb{Z}[X] : P(0) \in 2\mathbb{Z}\}$.

1. (a) Montrer que $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.
   (b) Montrer que $\mathcal{J}$ est engendré par les polynômes 2 et X.
2. En remarquant que $2 \in \mathcal{J}$, montrer que l'hypothèse “$\mathcal{J}$ est un idéal principal de $\mathbb{Z}[X]$” est absurde.

Exercice 1372 Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau principal.

Exercice 1373 Soit A un anneau fini commutatif intègre (i.e. $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$). Montrer que c'est un corps, i.e. que tout élément non nul est inversible.

Exercice 1374 Soit A un anneau, on dit que $x \in A$ est nilpotent si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que si x est nilpotent alors $(1 - x)$ est inversible.
2. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent alors xy et $x + y$ sont nilpotents.
3. Un corps admet-il des éléments nilpotents ?

Exercice 1375 Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif, on dit que $I \subset A$ est un idéal de A si et seulement si : I est un sous-groupe de $(A, +)$ et de plus : $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$.

1. Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}$?
2. On appelle radical de I, l'ensemble :
$$\sqrt{I} = \{x \in A | \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$
Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de Acontenant I. Étudier le cas $A = Z$.
3. Montrer que si I et J sont deux idéaux de A tels que $I \subset J$, alors $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$.En déduire $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
4. Montrer que si I et Jsont deux idéaux de A, $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

Exercice 1376 Soit A un anneau commutatif. Un sous anneau J de A est nommé idéal de A lorsque pour tout $x \in J$ et tout $a \in A$ le produit ax appartient à J.

1. Trouver tous les idéaux d'un corps $\mathbb{K}$.
2. Montrer que tout idéal de $\mathbb{Z}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$, où $a \in \mathbb{Z}$.
3. On note D l'ensemble des rationnels x tels que il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x10^k \in \mathbb{Z}$. Montrer que tout idéal de D est de la forme aD où $a \in D$.

28.2 Algèbre, Corps

Exercice 1377 Déterminer les automorphismes du corps $\mathbb{Q}$.

Exercice 1378 Soit σ un automorphisme de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $x \geqslant 0$ alors $\sigma(x) \geqslant 0$.
2. Montrer que σ est croissante.
3. Déterminer σ.

Exercice 1379 Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $C = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : MA = AM\}$.

1. Montrer que C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.
2. Montrer que, pour les lois usuelles, C est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Exercice 1380 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u$. On définit
$$\mathbb{R}[u] := \{P(u) : P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

1. Montrer que, muni des lois usuelles sur $\mathcal{L}(E)$, c'est une $\mathbb{R}$-algèbre.
2. Montrer que cette algèbre est de dimension finie et discuter de sa dimension en fonction de u.
3. L'anneau $\mathbb{R}[u]$ est-il un corps ?

Exercice 1381 Soit $M = \{aI_2 + bJ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\}$ où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2 et montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ et $aI_2 + bJ = O$ alors $a = b = 0$.
2. Montrer que, muni des lois usuelles sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, M est un anneau. Cet anneau est-il commutatif, intègre ?
3. M est-il un corps, une $\mathbb{R}$-algèbre ?

Exercice 1382 Montrer que l'ensemble S des suites réelles convergentes est une $\mathbb{R}$-algèbre. L'application $S \to \mathbb{R}, u \mapsto \lim u$ est-elle un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres ? L'anneau S est-il intègre ?

Exercice 1383 Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u$. On définit

$$\mathbb{R}[u] = \{a\mathrm{Id}_E + bu : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que, muni des lois usuelles sur $\mathcal{L}(E)$, c'est une $\mathbb{R}$-algèbre. L'anneau $\mathbb{R}[u]$ est-il un corps ?

Exercice 1384 Un automorphisme d'un corps $\mathbb{K}$ est une application bijective φ de $\mathbb{K}$ dans lui-même telle que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(0) = 0$ et, pour tout $a, b \in \mathbb{K}$, on ait $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ et $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

1. Soit φ un automorphisme de $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $x \mapsto \varphi(x)$ est croissante. En déduire que l'identité est le seul automorphisme de $\mathbb{R}$.
2. Soit ψ un automorphisme *continu* de $\mathbb{C}$. Montrer $\psi(x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire tous les automorphismes *continus* de $\mathbb{C}$.

29 Groupes finis

29.1 Cadre général

Exercice 1385

1. On suppose que φ est un isomorphisme de $(G, *)$ sur $(G', \diamond)$. Si e est l'élément neutre de G, que peut-on dire de $\varphi(e)$? Si x' est l'inverse de x dans G, que peut-on dire de $\varphi(x')$? Si G est d'ordre n, que peut-on dire de l'ordre de G' ?
2. Pouvez-vous citer des exemples de groupes ? de groupes isomorphes ?
3. Si $(G, *)$ est un groupe fini et si on établit la table de la loi $*$, peut-on rencontrer deux fois le même élément dans la même ligne, dans la même colonne ? Établir les tables de composition possibles pour des groupes à 2, 3, 4 éléments. Pouvez-vous donner des exemples de groupes correspondant à ces tables. Retrouver éventuellement des groupes isomorphes.

Exercice 1386 Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre p. Montrer que G est cyclique et donner la liste des générateurs de G.

[Exercice corrigé]

Exercice 1387 Soit G un groupe d'ordre pn avec p premier.

1. On considère deux sous-groupes H et H' de G d'ordre p avec $H \neq H'$. Montrer que $H \cap H' = \{e\}$.
2. En déduire que le nombre d'éléments d'ordre p dans G est un multiple de $p - 1$.

[Exercice corrigé]

Exercice 1388 Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes d'ordre 4.

Exercice 1389 1. Soit G un groupe dans lequel tout élément (distinct de l'élément neutre) est d'ordre 2. Montrer que G est commutatif.

2. Soit G un groupe d'ordre pair. Montrer que G contient au moins un élément d'ordre 2.

[Exercice corrigé]

Exercice 1390 Montrer que tout morphisme de groupes de $\mathbb{Q}$ dans un groupe fini G est trivial.

Exercice 1391 Soit G un groupe et H une partie finie non vide de G. On suppose que H est stable pour la loi de G. Montrer H est un sous-groupe de G.

Exercice 1392 Soit G un groupe fini de cardinal $2n$ ($n \geqslant 2$), possédant 2 sous-groupe H et H' tels que :

$$\text{Card}\,(H) = \text{Card}\,(H') = n$$

et

$$H \cap H' = \{e\}.$$

1. Montrer que $G - (H \cup H')$ est un singleton, noté $\{a\}$.
2. Soit $h \in H - \{e\}$, montrer que $hH' \subset \{h, a\}$, en déduire que $hH' = \{h, a\}$ puis que $n = 2$.
3. On écrit $G = \{a, e, h, h'\}$, donner la table de G (puis un exemple d'un tel groupe).

29.2 Groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exercice 1393 Donner la liste des générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 1394 Soit le groupe G (additif) $\mathbb{Z}/40\mathbb{Z}$.

1. Soit H le sous-groupe de G engendré par $\overline{12}$ et $\overline{20}$. Montrer que H est le sous-groupe de G engendré par $\overline{4}$ et trouver son ordre.
2. Caractériser les générateurs de G. Combien en compte-t-on ?
3. Déterminer l'ordre de $\overline{15}$.

Exercice 1395 1. Montrer qu'il n'existe aucun élément d'ordre 3 dans le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

2. En déduire les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 1396 Soit f un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

1. Montrer que f est caractérisé par $f(\overline{1})$.
2. Déterminer les ordres possibles de $f(\overline{1})$.
3. En déduire la liste des morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

Exercice 1397 Soit G le groupe-produit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

1. Donner la liste des éléments de G et déterminer l'ordre de chacun d'entre eux. G est-il cyclique ?
2. Donner la liste des sous-groupes de G et en constuire le treillis.

Exercice 1398 1. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ définie par $f(n) = (\overline{n}, \widetilde{n})$.

   (a) Montrer que f est un morphisme de groupes.

   (b) Déterminer le noyau de f.

2. En déduire que les groupes $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Exercice 1399 Les groupes $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 1400 On note R_n la rotation du plan de centre O, d'angle $2\pi/n$, S la symétrie par rapport à l'axe (Ox).

1. Montrer que $S^2 = id$, $(R_n)^n = id$ et $R_nS = SR_n^{-1}$.
2. Montrer que le sous-groupe des isométries du plan engendré par R_n et S (ie le plus petit sous-groupe des isométries du plan qui contient R_n et S) est de cardinal $2n$. On le note D_n : c'est le groupe dihédral d'ordre $2n$.
3. Montrer que D_n préserve un polygone régulier à n côtés, centré en O.
4. En vous aidant de ce qui précède, construire un isomorphisme entre D_3 et S_3.

Exercice 1401 Soit $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ l'ensemble des quaternions. $\mathbb{H}^*$ désigne $\mathbb{H}$ privé de la matrice nulle. On note $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathbb{H}^*$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{1}$, $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$, $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{kj} == \mathbf{i}$, $\mathbf{ik} = -\mathbf{j}$.
3. En déduire que le sous-groupe de $\mathbb{H}^*$ engendré par $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$ est d'ordre 8. On le note H_8.
4. Ecrire la table de H_8.
5. Vérifier que les groupes (tous de cardinal 8) H_8, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et D_4 sont 2 à 2 non isomorphes.

29.3 Groupes de permutations

Exercice 1402
1. Déterminer card(S_3) et écrire tous les éléments de S_3, puis écrire la table de S_3 et en déduire tous les sous-groupes de S_3.
2. On considère T un triangle équilatéral du plan, de sommets A, B, C.
   (a) Montrer que les isométries du plan qui préservent T forment un groupe pour la loi $\circ$, que l'on note G.
   (b) Montrer qu'un élément de G induit une permutation de l'ensemble $\{A, B, C\}$. On construit ainsi une application ϕ de G dans S_3.
   (c) Montrer que ϕ est un isomorphisme.

Exercice 1403 On considère le groupe symétrique S_n.

1. Déterminer card(S_n).
2. Calculer $(34)(45)(23)(12)(56)(23)(45)(34)(23)$.
3. Rappel : la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur k, que l'on note $(a_1\, a_2 \dots a_k)$.
   Si $\tau \in S_n$, montrer que $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1)\ \tau(a_2) \dots \tau(a_k))$.
4. Rappel : toute permutation se décompose en produit de cycles à supports disjoints, et cette décomposition est unique à l'ordre près.

   Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports disjoints : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 7 & 8 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

5. Rappel : il existe un unique morphisme de S_n dans $(\{-1,1\},\times)$ non trivial, appelé signature, et noté ε. Une manière de calculer $\varepsilon(\tau)$ (où $\tau \in S_n$) consiste à décomposer τ en produit de p transpositions (ie cycles de longueur 2) : alors $\varepsilon(\tau) = (-1)^p$.
   Montrer que la signature d'un cycle de longueur k vaut $(-1)^{k-1}$. En déduire comment se calcule la signature d'une permutation à partir de sa décomposition en produit de cycles disjoints.

Exercice 1404 Comment passer de 1234 à 2314 en échangeant seulement deux chiffres à chaque étape ? Y a-t-il plusieurs façons d'y parvenir ? Même question pour 1234 et 4312.
Peut-on obtenir n'importe quelle permutation des chiffres 1234 par ce procédé ?

Exercice 1405 Représenter graphiquement les permutations suivantes. Les décomposer en produit de cycles à supports disjoints, puis en produits de transpositions.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}1234567\\1425376\end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix}1234567\\2471635\end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix}1234567\\3261547\end{pmatrix} \qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix}1234567\\7146253\end{pmatrix}$$

Calculer la signature des permutations ci-dessus. Calculer le produit $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ et sa signature. Comparer ce résultat aux précédents.

Exercice 1406 Soient a, b, c trois éléments distincts de $\{1, ..., n\}$. Calculer le produit $(ab)(bc)(ab)$. En déduire que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les permutations $\{(1,i)\}_{2\leqslant i\leqslant n}$, c'est à dire que toute permutation s'écrit comme produit de transpositions de cette forme.
Montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par (12) et $(123...n)$.

Exercice 1407 Décrire tous les morphismes de groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ) \to (\{+1,-1\}, \cdot)$, c'est les applications $\phi\ : \mathcal{S}_n \to \{+1,-1\}$ satisfaisant :

$$\forall(\sigma,\sigma') \in \mathcal{S}_n^2, \quad \phi(\sigma\sigma') = \phi(\sigma)\phi(\sigma')$$

Indication : Commencer par montrer que toutes les transpositions ont même image.

Exercice 1408 Dans $\mathbb{R}^n$, on désigne par $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique. A une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe l'endomorphisme u_σ de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$u_\sigma \ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Soit $\tau = (ij)$ une transposition. Écrire la matrice de u_τ dans la base canonique. Montrer que $\det(u_\tau) = -1$.
2. Montrer que $\forall\sigma,\sigma' \in \mathcal{S}_n,\ u_\sigma \circ u_{\sigma'} = u_{\sigma\circ\sigma'}$.
3. En déduire que $\forall\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \det u_\sigma = \varepsilon(\sigma)$ où ε désigne la signature.

Exercice 1409 On note $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique des permutations sur n éléments.
Soit ρ un *morphisme de groupes* de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1,1\}, \cdot)$, c'est à dire une application de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1,1\}$ satisfaisant

$$\forall(\sigma,\tau) \in \mathcal{S}_n \ \ \rho(\sigma\tau) = \rho(\sigma)\rho(\tau)$$

1. Calculer $\rho(\text{id})$. Pour tout cycle γ de longueur p, calculer γ^p. En déduire que lorsque p est impair, $\rho(\gamma) = 1$.
2. On suppose que pour toute transposition τ, $\rho(\tau) = 1$. Montrer que $\forall\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \rho(\sigma) = 1$
3. On suppose maintenant qu'il existe une transposition $\tau_0 = (a,b)$ pour laquelle $\rho(\tau_0) = -1$.

(a) Pour un élément $c \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a, b\}$, calculer $(a, b)(a, c)$. En déduire que $\rho(a, c) = -1$.

(b) Pour deux éléments distincts c et d de $\{1, \dots, n\}$, calculer $(a, c)(a, d)(a, c)$. En déduire que $\rho(c, d) = -1$.

(c) En déduire que pour toute transposition τ, $\rho(\tau) = -1$ puis montrer que pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\rho(\sigma)$ est la signature de σ.

4. Quels sont tous les morphismes de groupes de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \cdot)$?
5. On considère l'application φ suivante :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n & \to & \{-1, 1\} \\ \sigma & \mapsto & \prod_{i=1}^{n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} \end{array}$$

Montrer que $\forall (\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_n,\ \varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau)$.
En déduire que

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ \ \varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j},$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ.

Exercice 1410 Soit G un groupe d'ordre $2n$ et H un sous-groupe de G d'ordre n (H est donc d'indice deux dans G).

1. Montrer que si $g \in G$ et $g \notin H$, on a $H \cap gH = \emptyset$ puis que $G = H \cup gH$.
2. En déduire que pour tout $g \in G, g^2 \in H$.
3. On suppose désormais $G = \mathcal{A}_4$ le groupe des permutations paires de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Soit $\sigma = (a, b, c)$ un 3-cycle. Montrer que σ peut s'écrire comme le carré d'une permutation paire c'est à dire qu'il existe $\varphi \in \mathcal{A}_4$ telle que $\varphi^2 = \sigma$. En déduire que $\mathcal{A}_4$ ne possède pas de sous-groupe d'ordre 6.

Exercice 1411 Déterminer tous les éléments $\sigma \in S_n$ tels que $\sigma^2 = \sigma$.

Exercice 1412 1. Rappeler $|S_3|$. Montrer que S_3 ne contient pas d'élément d'ordre 6.

2. Montrer que S_3 contient un unique sous-groupe d'ordre 3. Déterminer tous les sous-groupes d'ordre 2 de S_3.
3. Déduire de ce qui précède tous les sous-groupes de S_3.

[Exercice corrigé]

Exercice 1413 (examen juin 1999) Soit $GL_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles 2×2 à cœfficients réels. $GL_2(\mathbb{R})$ est naturellement muni d'une structure de groupe par la multiplication usuelle des matrices. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A et B appartiennent à $GL_2(\mathbb{R})$.
2. Quels sont les ordres de A et B ?
3. Montrer que $AB = -BA$ et en déduire que :

(a) $G = \{I, A, B, AB, -I, -A, -B, -AB\}$ est un groupe (pour la loi multiplicative des matrices ; I esl la matrice identité) ;

   (b) G est le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par $\{A, B\}$.
4. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne orientée canonique.
   (a) Montrer que G est inclus dans $O_2(\mathbb{R})$ (le groupe orthogonal).
   (b) Déterminer l'intersection de G et de $SO_2(\mathbb{R})$ (le groupe spécial orthogonal).
   (c) Déterminer la nature géométrique des 8 éléments de G.

Exercice 1414 (examen juin 1999) I

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On définit le centre $\mathcal{Z}(G)$ de G par :

$$\mathcal{Z}(G) = \big\{x \in G \ / \ \forall a \in G \ \ ax = xa\big\}.$$

Montrer que $\mathcal{Z}(G)$ est un sous-groupe de G.
Que peut-on dire de $\mathcal{Z}(G)$ si G est abélien ?

II

On désigne par $\mathcal{A}_n$ le groupe alterné d'ordre n (rappel : c'est le sous-groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ formé des permutations de $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ de signature $+1$.)
On se propose de déterminer le centre de $\mathcal{A}_n$ pour $n \geqslant 3$.

1. Donner la liste des éléments de $\mathcal{A}_3$ et de $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_3)$.
2. On suppose désormais $n \geqslant 4$. Dans cette question on fixe i, j, k trois éléments distincts de E_n.
   (a) Vérifier que le 3-cycle (i, j, k) est dans $\mathcal{A}_n$.
   (b) Soit $s \in \mathcal{S}_n$, montrer que $s \circ (i, j, k) = (s(i), s(j), s(k)) \circ s$.
   (c) En déduire que si $s \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_n)$ alors l'image de $\{i, j, k\}$ par s est $\{i, j, k\}$.
3. Pour $n = 4$, on note $E_4 = \{i, j, k, \ell\}$. Si $s \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_4)$ montrer que $s(\ell) = \ell$. En déduire $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_4) = \{\mathrm{id}\}$.
4. Pour $n \geqslant 5$, soit $s \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_n)$, soit i, j, k, ℓ, m cinq éléments distincts de E_n. En considérant les ensembles $\{i, j, k\}$ et $\{i, \ell, m\}$ montrer que $s = \mathrm{id}$ et déterminer $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_n)$

Exercice 1415 Quel est l'ordre maximal d'un élément de S_4? De S_5? De A_5?

Exercice 1416 On désigne par K le sous-ensemble $\{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ de S_4.

1. Montrer que K est un sous-groupe distingué de S_4 et de A_4.
2. Pour quelle raison K est-il isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Calculer le quotient A_4/K.
3. Montrer que le quotient S_4/K est isomorphe à S_3.
4. Donner un exemple de sous groupe distingué de K et non de S_4. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Exercice 1417 Calculer $Z(S_n)$ suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1418 Trouver la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, la signature, l'ordre et une décomposition en produit de transpositions des permutations suivantes de $\mathcal{S}_{10}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 6 & 9 & 8 & 5 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\varphi = (10, 3, 4, 1)\,(8, 7)\,(4, 7)\,(5, 6)\,(2, 6)\,(2, 9)\,.$$

Calculer σ^{1998} et φ^{1998}.

[Exercice corrigé]

Exercice 1419 $\mathcal{A}_4$ désigne le groupe des permutations paires sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. Quels sont les ordres des éléments de $\mathcal{A}_4$? En déduire la liste de ces éléments sous forme décomposée en produit de cycles à supports disjoints.
2. Montrer que les permutations $s = (1\ 2)(3\ 4)$ et $r = (1\ 2\ 3)$ engendrent $\mathcal{A}_4$.
3. Montrer que $\mathcal{A}_4$ admet un unique sous-groupe H d'ordre 4 (on examinera d'abord les ordres des éléments d'un tel sous-groupe) et que ce sous-groupe est un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_4$.

Exercice 1420 Le groupe $G = \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3$ est-il abélien ? Déterminer tous les sous-groupes de G d'ordre 4.

Exercice 1421 Quel est le nombre de k-cycles dans $\mathcal{S}_k$ puis dans $\mathcal{S}_n$ où $k \leqslant n$?

Exercice 1422 Soit G un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

1. Montrer que si G est d'ordre impair alors G ne contient aucune permutation impaire.
2. Montrer que si G contient au moins une permutation impaire, alors G contient autant de permutations paires que de permutations impaires.

Exercice 1423 Soient $a = (1, 2)(3, 4), b = (1, 3)(2, 4), c = (1, 4)(2, 3) \in \mathcal{A}_4$, $X = \{a, b, c\}$, $V = \{a, b, c, \mathrm{Id}\}$ et $\Phi : \mathcal{S}_4 \to \mathcal{S}(X), g \in G \mapsto \Phi_g = [x \mapsto gxg^{-1}]$.

1. (a) Montrer que V est un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_4$ (on pourra étudier l'ordre des élements de $\mathcal{A}_4$).
   (b) Montrer que $< a >$ est un sous-groupe distingué de V et n'est pas un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_4$.
2. Montrer que Φ est un homomorphisme de groupes.
3. (a) Calculer $\Phi(g)$ pour $g = (1, 2)$ puis $g = (1, 2, 3)$.
   (b) En déduire que Φ est surjectif.
4. Montrer que $\mathcal{S}_4/V$ est isomorphe à $\mathcal{S}_3$.
5. Ecrire la décomposition de $\mathcal{A}_4$ suivant les classes modulo V.

Exercice 1424 1. Déterminer le centre du groupe $\mathcal{S}_n$.

2. (a) Montrer qu'un groupe $G_1 \times G_2$ contient un sous-groupe distingué isomorphe à G_1.
   (b) Montrer que les groupes $\mathcal{S}_n$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathcal{A}_n$ ne sont pas isomorphes si $n \geqslant 3$.

Exercice 1425 1. Montrer que dans $\mathcal{S}_n$ on a $f \circ (a, b) \circ f^{-1} = (f(a), f(b))$.

2. Montrer que les permutations $(1, ..., n)$ et $(1, 2)$ engendrent $\mathcal{S}_n$ (on rappelle que les transpositions engendrent $\mathcal{S}_n$).

Exercice 1426 1. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{A}_{n+2}$.

2. Montrer que $\mathcal{S}_4$ n'est pas isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{A}_5$.
3. Montrer que $\mathcal{S}_5$ n'est pas isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{A}_6$.

[Exercice corrigé]

Exercice 1427 Montrer que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de S_n (groupe symétrique) pour un certain n.

30 Groupes quotients

30.1 Sous-groupes distingués

Exercice 1428 Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes d'ordre fini de G tels que $H \cap K = \{e_G\}$.

1. Montrer que le cardinal de HK est égal $|H||K|$.
2. En déduire que si $|G| = pq$ où p est premier et $p > q$ alors G a au plus un sous-groupe d'ordre p. Montrer que si ce sous-groupe existe il est distingué dans G.

[Exercice corrigé]

Exercice 1429 Soit G un groupe, A une partie non vide de G. On note $N(A) = \{g \in G; gAg^{-1} = A\}$ et $C(A) = \{g \in G; \forall a \in A; gag^{-1} = a\}$. Montrer que $N(A)$ et $C(A)$ sont des sous-groupes de G et que $C(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$.

Exercice 1430 Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On note $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$.

1. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$. En déduire que si H est distingué dans G alors HK est un sous-groupe de G.
2. On suppose désormais que $\forall h \in H, k \in K : hk = kh$. Montrer que l'application $f : H \times K \to G$ définie par $\forall h \in H, k \in K : f(h,k) = hk$ est un homomorphisme de groupes.
3. Calculer le noyau et l'image de f. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit un isomorphisme de groupes.

Exercice 1431

1. Soit G un groupe, H un sous-groupe de G. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   i) $\forall g \in G : gHg^{-1} \subset H$.

   ii) $\forall g \in G : gHg^{-1} = H$.

   iii) $\forall g \in G : gH = Hg$.
2. En déduire que tout sous-groupe d'indice 2 est distingué.

Exercice 1432 Soient $T = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) : a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ et $U = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : b \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que T est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que U est un sous-groupe distingué de T.

Exercice 1433 Soit G un groupe.

1. Un sous-groupe H de G est distingué si : $\forall x \in G, xH = Hx$, ce qui est équivalent à dire que H est le noyau d'un morphisme de G dans un groupe. Rappeler la démonstration de cette équivalence.
2. Si H est un sous-groupe d'indice 2 de G, montrer que H est distingué.
3. Si G est abélien, montrer que tout sous-groupe de G est distingué.
4. Le centre de G est l'ensemble $Z(G) = \{z \in G : \forall x \in G, xz = zx\}$. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué.

30.2 Groupes quotients

Exercice 1434 Soit G un groupe non réduit à un élément. Un sous-groupe M de G est dit *maximal* si le seul sous-groupe de G, distinct de G et contenant M, est M lui-même. Les questions sont indépendantes.

1. (a) Montrer que $6\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe maximal de $\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $5\mathbb{Z}$ est un sous-groupe maximal de $\mathbb{Z}$.
2. On pose $G := \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Soit H_1 le sous-groupe de G engendré par $\overline{4}$ et H_2 le sous-groupe de G engendré par $\overline{2}$.
   (a) Expliciter les éléments de H_1 et H_2.
   (b) Montrer que H_1 n'est pas un sous-groupe maximal de G et que H_2 est un sous-groupe maximal de G.

Exercice 1435 Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
[Exercice corrigé]

Exercice 1436 Montrer que le groupe-quotient $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

Exercice 1437 Soit G le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Si $q \in \mathbb{Q}$, on note $\mathrm{cl}(q)$ la classe de q modulo $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\mathrm{cl}(\frac{35}{6}) = \mathrm{cl}(\frac{5}{6})$ et déterminer l'ordre de $\mathrm{cl}(\frac{35}{6})$.
2. Montrer que si $x \in G$ il existe un unique $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$ tel que $x = \mathrm{cl}(\alpha)$.
3. Montrer que tout élément de G est d'ordre fini et qu'il existe des éléments d'ordre arbitraire.

Exercice 1438 Décrire le groupe-quotient $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+$ et montrer qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
[Exercice corrigé]

Exercice 1439 Montrer que tout quotient d'un groupe monogène est monogène.

Exercice 1440 Soient G le groupe-produit $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et H le sous-groupe de G engendré par $(\overline{3}, \overline{2})$. Écrire la décomposition de G suivant les classes à gauche modulo H. Décrire le groupe-quotient G/H.

Exercice 1441 Soit G un groupe $Z(G) = \{h \in G; \forall g \in g, gh = hg\}$.

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que si $G/Z(G)$ est monogène G est cyclique.

Exercice 1442 Soit G un groupe ; on note $D(G)$ le groupe engendré par les éléments de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$; $g, h \in G$.

1. Montrer que $D(G)$ est distingué dans G.
2. Montrer que $G/D(G)$ est commutatif ; plus généralement montrer qu'un sous-groupe distingué H de G contient $D(G)$ si et seulement si G/H est commutatif.

[Exercice corrigé]

Exercice 1443 Soit G un groupe ; on note, pour tout $g \in G$ φ_g l'application $x \mapsto gxg^{-1}$ de G dans lui-même et $\mathrm{Int}(G) = \{\varphi_g; g \in G\}$.

1. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$.
2. Soit $f : G \to \mathrm{Int}(G)$ l'application $g \mapsto \varphi_g$. Montrer que f est un homomorphisme de groupe. Calculer $\mathrm{Ker}(f)$.
3. En déduire que $G/Z(G)$ est isomorphe à $\mathrm{Int}(G)$.

Exercice 1444 Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On note $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$. On suppose que K est distingué dans G.

1. Montrer que $HK = KH$ et que HK est un sous-groupe de G.
2. Montrer que H et K sont des sous-groupes de KH et que $K \cap H$ est un sous-groupe distingué de H et que K est distingué dans KH.
3. Soit $\varphi : H \to (HK)/K$ la restriction à H de l'application quotient. Calculer le noyau et l'image de φ. En déduire que les groupes $H/(K \cap H)$ et $(HK)/K$ sont isomorphes.

Exercice 1445 Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes distingués de G avec $H \subset K$.

1. Montrer que K/H est un sous-groupe distingué de G/H.
2. Montrer que le quotient $(G/H)/(K/H)$ est isomorphe à G/K.

Exercice 1446 Soit G le sous-groupe de $Gl(2, \mathbb{R})$ engendré par les matrices $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit H le sous-groupe de G engendré par AB. Calculer $|H|$
2. Montrer que H est distingué dans G. Calculer le quotient G/H; en déduire $|G|$.

[Exercice corrigé]

Exercice 1447 Les questions sont indépendantes.

1. (a) Montrer que l'application $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto 3x+6y$ est un morphisme de groupes.
   (b) Déterminer le noyau $\ker f$ de f et montrer qu'il n'existe pas $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\ker f = p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}$.
   (c) Montrer que le groupe-quotient $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}(-2, 1)$ est isomorphe au groupe $3\mathbb{Z}$.
2. Soit G le sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ engendré par $(2, 0)$ et $(0, 2)$. Montrer que le groupe-quotient $\mathbb{Z}^2/G$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 1448
1. Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$. (indication : utiliser la division euclidienne).
2. Rappeler pourquoi ces sous-groupes sont distingués. On peut donc considérer les groupes quotients $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.
4. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe engendré par un cycle de longueur n dans S_N $(N \geqslant n)$.
5. Plus généralement, montrer qu'il existe, à isomorphisme près, un seul groupe monogène (ie engendré par un seul élément) d'ordre n, appelé groupe cyclique d'ordre n.

Exercice 1449 Rappel : si A est un anneau (en particulier, si A est un corps), on note $GL_n(A)$ l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficient dans A, qui sont inversibles. $GL_n(A)$ forme un groupe pour la loi $\times$ de multiplication des matrices, appelé groupe linéaire. Une matrice carrée de dimension n est dans $GL_n(A)$ ssi son déterminant est un inversible de l'anneau A (ce qui revient à dire, lorsque A est un corps, que son déterminant est non nul).
Pour simplifier, on suppose dans l'exercice que A est un corps, noté $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupes.

2. On note $SL_n(\mathbb{K}) = \ker(\det)$. Dire pourquoi $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe distingué de $GL_n(\mathbb{K})$ et montrer que $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^*$.
3. Reconnaître $GL_1(\mathbb{K})$ et $SL_1(\mathbb{K})$.
4. Montrer que les matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures) de $GL_n(\mathbb{K})$ forment un sous-groupe. Sont-ils distingués ?
5. Montrer que $Z(GL_n(\mathbb{K}))$ est le sous-groupe formé par les homothéties.

31 Espaces euclidiens

31.1 Produit scalaire, norme

Exercice 1450 A deux polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe

$$< P, Q >= (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 1451 Pour quelles valeurs de λ les formes bilinéaires ci-dessous définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

1. $f(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$
2. $g(x, y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + 6x_1y_2 + \lambda x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$
3. $h(x, y) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$
4. $i(x, y) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)+(x_1+x_3)(y_1+y_3)+(x_2+x_3)(y_2+y_3)-\lambda(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$

Exercice 1452 Vérifier que l'application $\phi\ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous est une forme bilinéaire symétrique et déterminer la forme quadratique qui lui est associée :

$$\phi\big((x, y, z), (x', y', z')\big) = xx' + 2yy' + 2yz' + 2y'z + zz'.$$

S'agit-il d'un produit scalaire ?

Vérifier que l'application $q\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous est une forme quadratique et déterminer la forme bilinéaire symétrique qui lui est associée :

$$q\big((x, y, z)\big) = x^2 + 3(x + y - z)^2 + (z - y)^2.$$

S'agit-il d'une norme euclidienne ?

Exercice 1453 Sur $\mathbb{R}_3[X]$ on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaire.

$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$
$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q(t) + P'(t)Q(t)dt$$
$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$

Exercice 1454 Pour quelles valeurs de λ les formes bilinéaires ci-dessous définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

1. $f(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$
2. $g(x,y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + 6x_1y_2 + \lambda x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$
3. $h(x,y) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$
4. $i(x,y) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)+(x_1+x_3)(y_1+y_3)+(x_2+x_3)(y_2+y_3)-\lambda(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$

Exercice 1455 Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ appartenant à $\mathbb{R}^2$. Pour quelles valeurs de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ l'application $f(x,y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 1456 Soient x, y et z trois réels tels que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leqslant 1$. Montrer l'inégalité : $(x + y + z)^2 \leqslant \frac{11}{6}$. (On pourra par exemple appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à certains vecteurs de $\mathbb{R}^3$ pour un produit scalaire bien choisi.)

Exercice 1457 Soient x, y et z trois réels tels que $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$. Montrer que $(x+2y+3z)^2 \leqslant 14$.

Exercice 1458 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul, φ un produit scalaire sur E, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. $\psi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\psi(x, y) = a\varphi(x, x) + b\varphi(x, y) + c\varphi(y, y)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que ψ soit un produit scalaire sur E.

Exercice 1459

1. Soient $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien et $\|.\|$ la norme associée ; $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_1, \ldots, v_n \in E$. Montrer l'inégalité : $\|\sum_{i=1}^{n} v_i\|^2 \leqslant \ n \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$. Etudier le cas d'égalité.

Exercice 1460 Montrer que

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Etudier le cas d'égalité.
Soit f et g deux applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall (f, g) \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) \qquad \left(\int_0^1 f(t)g(t)dt \right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(t)dt \int_0^1 g^2(t)dt.$$

Etudier le cas d'égalité.
Soit f une application continue d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) \qquad \left(\int_a^b f(t)dt \right)^2 \leqslant (b - a) \int_a^b f^2(t)dt.$$

Etudier le cas d'égalité.

Exercice 1461 Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Montrer que pour toute fonction continue d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\left(\int_a^b f(t)dt \right)^2 \leqslant (b - a) \int_a^b \Big(f(t)\Big)^2 dt$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité ?

Exercice 1462 Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue 2π-périodique$\}$. Montrer que $\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 1463 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\langle P|Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 1464 Soit E un espace euclidien et f et g deux fonctions de E dans E qui vérifient : $\forall (x,y) \in E^2\ \langle f(x)|y\rangle = \langle x|g(y)\rangle$. Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 1465 Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ des réels positifs.
Montrer que $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k \sum_{k=1}^{n} b_k^2 c_k$.

Exercice 1466 Soit E un espace euclidien de dimension n et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E tels que si $i \neq j$ alors $\langle x_i|x_j\rangle < 0$. Montrer par récurrence sur n que $p \leqslant n+1$.

Exercice 1467 Soit E un espace euclidien, et $(e_1, ..., e_n)$ des vecteurs unitaires vérifiant :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2 .$$

Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale (i.e. une base qui est aussi une famille orthonormale). (NB : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est n.)

Exercice 1468

1. Montrer que sur $M_n(\mathbb{R})$ l'application :
$$(A,B) \to tr({}^tAB)$$
est un produit scalaire.
2. Soit N la norme associée, montrer que :
$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R}), N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$
3. Montrer que :
$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |tr(A)| \leqslant \sqrt{n}N(A).$$

Exercice 1469 Soit E un espace euclidien et f et g deux fonctions de E dans E telles que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle .$$

Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 1470 Soit E un espace euclidien, montrer que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\|^2 + 1 \leqslant 2\left(1 + \|x\|^2\right)\left(1 + \|y\|^2\right).$$

Exercice 1471 Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ tel que $f(0) = 0$ et :

$$\forall (x,y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| .$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 1472 On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire :

$$(P,Q) \to \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Existe t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0) \ ?$$

Exercice 1473 Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E, tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0.$$

Montrer :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall (x,y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = \alpha (x|y).$$

Exercice 1474 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $\forall x, y \in E$ tels que $\langle x, y \rangle = 0$, on ait $\langle f(x), f(y) \rangle = 0$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E$: $\|f(x)\| = k\|x\|$.

31.2 Espace orthogonal

Exercice 1475 Montrer que l'application $(A, B) \mapsto tr({}^tAB)$ de $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques.

Exercice 1476 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

1. Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.
2. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
4. Si $\dim(E)$ est finie, alors $(F^\perp)^\perp = F$.

31.3 Projection, symétrie

Exercice 1477 Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$.
En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Dans un espace euclidien de dimension n, on considére un sous-espace F de dimension r et $(f_1, ..., f_r)$ une base de orthonormée de cet espace. On not p_F la projection orthogonale sur F, c'est à dire la projection sur F associée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$. Montrer que :

$$\forall v \in F, \qquad p_F(v) =< v, f_1 > f_1+ < v, f_2 > f_2 + \cdots + < v, f_r > f_r$$

Exercice 1478 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$ de $(1, 0, 0)$, et plus généralement d'un vecteur (x, y, z) quelconque.
Donner la matrice de cette projection ainsi que celle de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Dans un espace euclidien de dimension n, on considère un sous-espace F de dimension r et $(f_1, ..., f_r)$ une base de orthonormée de cet espace. On not p_F la projection orthogonale sur F, c'est à dire la projection sur F associée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$. Montrer que :

$$\forall v \in F, \qquad p_F(v) =< v, f_1 > f_1+ < v, f_2 > f_2 + \cdots + < v, f_r > f_r$$

Exercice 1479 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x \in E : \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 1480 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On note p la projection orthogonale sur F et on pose, pour tout $x \in E$: $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Soit $z \in F$.

1. Montrer que pour tout $x \in F$, les trois conditions sont équivalentes :
   (i) $d(x, F) = \|x - z\|$.
   (ii) $z = p(x)$.
   (iii) $\forall y \in F, y \perp (x - z)$.
2. En déduire $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.

Exercice 1481 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soient x et $y \in E$. Montrer que :

1. Si $\|x\| = \|y\|$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = s(x)$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à H.
2. Si $\langle x, y\rangle = \|y\|^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = p(x)$ où p est la projection orthogonale sur H.

Exercice 1482 Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien canonique, donner la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x+2y-3z = 0$. Donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce même plan.

Exercice 1483 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel muni d'une base orthonormale $(e_1, \dots , e_m)$. Soit p la projection orthogonale sur F.

1. Montrer que $\forall x \in E, p(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle e_i$.
2. Donner de même l'expression de la symétrie orthogonale par rapport à F et la projection orthogonale sur $F^\perp$.

Exercice 1484 Quelle est la transformation de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$?

Exercice 1485 Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ et $v_2 = (0, 1, 0, 1)$.

Exercice 1486 Soient E un espace euclidien, u un vecteur non nul et $H = u^\perp$. Soient p la projection orthogonale sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H.

1. Montrer que $\forall x \in E \qquad p(x) = x - \frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2} u$.
2. Montrer que $\forall x \in E \qquad s(x) = x - 2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2} u$.
3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le plan $(\Pi : x - y + z = 0)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à Π.

Exercice 1487 Soit $(E, \mid\ )$ un espace vectoriel de dimension n.

1. Soient F et G des sous-espace vectoriels de E. Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
2. Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$ et H le sous-espace vectoriel de E d'équation cartésienne $\sum_{k=1}^n a_k x_k = 0$ dans $\mathcal{B}$.
   (a) Déterminer l'orthogonale de H.
   (b) Déterminer la distance du vecteur $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ de E au sous-espace vectoriel H.
3. Soit P le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ défini par

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in P \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0.$$

(a) Déterminer une base de $P^{\perp}$ puis une base orthonormale de $P^{\perp}$.

(b) En déduire une expression analytique de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur P.

Exercice 1488 Soient E un espace vectoriel euclidien, F et G deux sous-espace vectoriels supplémentaires de E et p le projecteur de E d'axe F et de direction G.

1. On suppose que $F \perp G$. Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
2. On suppose que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
   (a) Soient $a \in F$ et $b \in G$. Montrer que $\|a+b\| \geqslant \|a\|$.
   (b) En déduire que $F \perp G$.

Exercice 1489 Soit $\alpha = \inf \left\{ \int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c - |x|\ )^2\, dx : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Déterminer un espace vectoriel euclidien $(E, |\,)$, un sous-espace vectoriel F de E et $v \in E$ tel que $\alpha = \mathrm{d}(v, F)^2$.
2. Déterminer $p \in F$ tel que $\alpha = \mathrm{d}(v, p)^2$ et α.

Exercice 1490 Soit E un espace euclidien (de dimension finie), F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Déterminer $(F+G)^{\perp}$ et $(F \cap G)^{\perp}$ en fonction de $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$.

Exercice 1491 Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - (ax+b))^2 dx$.

Exercice 1492 Calculer :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 \left|\ln x - ax - b\right|^2 dx.$$

31.4 Orthonormalisation

Exercice 1493 Résoudre l'équation $(1-x)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 1494

1. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^5$ engendré par $u = (1, 2, 3, -1, 2)$ et $v = (2, 4, 7, 2, -1)$. Trouver une base de l'orthogonal $F^{\perp}$ de F.
2. Trouver une base orthonormale du sous-espace E de $\mathbb{C}^3$ engendré par $v_1 = (1, i, 0)$ et $v_2 = (1, 2, 1-i)$.

Exercice 1495 Soit F un sous-espace d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe une base orthonormale de F qui est inclue dans une base orthonormale de E.

Exercice 1496

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A définit un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^3$. Construire une base orthonormale pour φ.
2. Considérons une base $\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour transformer $\{v_i\}$ en une base orthonormale.

Exercice 1497 Soient $E = \mathbb{R}_n[X], I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente. Que vaut I_{2p+1} ?

   Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t) e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.
2. Montrer que φ est un produit scalaire.

3. On suppose $n = 2$. Ecrire la matrice associée à φ dans la base $(1, X, X^2)$. Construire une base orthonormale (P_0, P_1, P_2) par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt appliqué à $(1, X, X^2)$.

Exercice 1498 Réduire en somme de carrés indépendants les formes suivantes :

1. $9x^2 - 6y^2 - 8z^2 + 6xy - 14xz + 18xw + 8yz + 12yw - 4zw$
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$

Exercice 1499 $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 0, 2)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 1500 $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Soient $e_1 = (1, 0, 1, 0)$ et $e_1 = (1, -1, 1, -1)$ et $F = \text{vect}(e_1, e_2)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ du projecteur orthogonal sur F.
3. Déterminer la distance du vecteur $(1, 1, 1, 1)$ au sous-espace vectoriel F.

Exercice 1501 On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire défini par

$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

1. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la distance du polynôme $P = X^2 + X + 1$ au sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_2[X]$ formé des polynômes f tels que $f'(0) = 0$.

Exercice 1502 Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie de la manière suivante : si $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ alors

$$f(u, u') = 2xx' + yy' + 2zz' + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur l'espace vectoriel canonique $\mathbb{R}^3$.
2. Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $2x - y + z = 0$.
   (a) Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel P.
   (b) Déterminer un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont l'orthogonal est P.
3. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire f.

Exercice 1503 Orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ la famille $x_1 = (1, -2, 2)$, $x_2 = (-1, 0, -1)$, $x_3 = (5, -3, 7)$.

Exercice 1504 Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Exercice 1505 On considère la forme bilinéaire b de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$b(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + 18x_4y_4 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_4 + 2x_4y_2 + 6x_3y_4 + 6x_4y_3$$

où x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 sont les coordonnées de x et y dans la base canonique.

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Ecrire la matrice de b dans la base canonique.

3. Trouver une base orthonormée pour b.

Exercice 1506 On considère un espace euclidien $(E, <>)$.

1. **Théorème de Pythagore :**
   Soient u et v deux vecteurs orthogonaux de E. Calculer $||u+v||^2$. Illustrer le résultat obtenu à l'aide d'un dessin.
2. **Projection orthogonale et distance à un sous-espace :**
   Soit F un sous-espace de E. On rappelle que $E = F \oplus F^{\perp}$, et donc que tout vecteur x de E se décompose de manière unique en une somme $x = x_1 +_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$. Le vecteur x_1 s'appelle alors la projection orthogonale de x sur F.
   (a) Montrer que l'application p qui à un vecteur asocie sa projection orthogonale sur E est une application linéaire. Vérifier que : $\forall y \in F, < x - p(x), y >= 0$.
   (b) On considère maintenant un vecteur x de E. On appelle distance de x à F le nombre $\mathrm{dist}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.
   Pour $y \in F$, vérifier que $x - p(x)$ et $y - p(x)$ sont orthogonaux. Utiliser alors la question 1 pour montrer que $||x-y||^2 \geqslant ||x - p(x)||^2$. Illustrer sur un dessin.
   En déduire que $\mathrm{dist}(x, F) = ||x - p(x)||$.
   (c) Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base orthonormée de F. Montrer que $p(x) = \sum_{i=1}^{r} < x, e_i > \ e_i$.
3. **Espace de polynômes :**
   Sur l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère la forme bilinéaire définie par :
   $$< P, Q >= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$
   (a) Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire (on admet que l'intégrale sur $[-1, 1]$ d'une fonction f continue et positive est nulle si et seulement si f est nulle sur $[-1, 1]$)
   (b) A l'aide du procédé de Schmidt appliqué à la base $(1, X, X^2)$, construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
   (c) On considère le polynôme $P_0 = X^3$. Calculer la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. En déduire que pour ce produit scalaire, on a :
   $$\mathrm{dist}(X^3, \mathbb{R}^2[X]) = \frac{2}{5\sqrt{7}} .$$

Exercice 1507 Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien, x_0 un point de E et F un sous espace vectoriel de E. On note π la projection orthogonale de E sur F. On rappelle que pour $x \in E$, $\pi(x)$ est caractérisé par les relations :
$$\pi(x) \in F \qquad \text{et} \qquad x - \pi(x) \in F^{\perp}$$
Le but de cette partie est de montrer que la projection orthogonale de x_0 sur F est le point de F le plus proche de x_0.

1. En utilisant que $x_0 - y = (x_0 - \pi(x_0)) + (\pi(x_0) - y)$, montrer que
   $$\|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - \pi(x_0)\|^2 + \|y - \pi(x_0)\|^2.$$
2. En déduire que $\inf\limits_{y \in F} \|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - \pi(x_0)\|^2$, c'est à dire que :
   $$\forall y \in F, \ \|x_0 - y\|^2 \geqslant \|x_0 - \pi(x_0)\|^2$$
   A quelle condition a-t-on égalité dans la relation ci-dessus ?

3. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base orthonormée de F. Montrer que $\pi(x_0) = \sum_{i=1}^k < e_i, x_0 > e_i$
4. Déduire des deux questions précédentes que

$$\inf_{y \in F} \|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - \sum_{i=1}^k < e_i, x_0 > e_i\|^2 = \|x_0\|^2 - \sum_{i=1}^k < e_i, x_0 >^2$$

Application : Le but est maintenant de déterminer

$$\alpha = \inf_{a,b \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (e^t - at - b)^2 dt.$$

On considère à cet effet l'espace $F = \mathbb{R}_1[X]$, comme sous espace de $E = F \oplus \mathbb{R} f_0$ où f_0 est la fonction définie par $f_0(t) = e^t$. On admettra sans démonstration que $< f, g >= \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E.

5. Donner une base orthonormée (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
6. Calculer $< f_0, P_1 >$, $< f_0, P_2 >$, et $\|f_0\|^2$. En déduire que

$$\alpha = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - (2e^{-1})^2 - \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)^2.$$

7. Même question avec le calcul de $\alpha' = \inf_{a,b \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (e^t - at^2 - bt - c)^2 dt.$: commencer par chercher une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le même produit scalaire, et en déduire α'.

Exercice 1508 A deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le nombre

$$\phi(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Lorsque $n = 2$, donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

31.5 Formes quadratiques

Exercice 1509 Soient E un K-espace vectoriel (où K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $n > 0$ et q une forme quadratique sur E.

1. q peut-elle être injective ?
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur q pour qu'elle soit surjective.

Exercice 1510 (examen juin 1999) Soit a un nombre réel. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(v) = x^2 + (1 + a)y^2 + (1 + a + a^2)z^2 + 2xy - 2ayz$$

pour $v = (x, y, z)$. Soit f la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1. Déterminer une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. Donner le rang et la signature de q suivant les valeurs de a.
3. Pour quelles valeurs de a, f définit-elle un produit scalaire ?

Exercice 1511 Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner l'expression analytique de q dans $\mathcal{B}$ et expliciter sa forme polaire f.
2. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e_1, -\frac{1}{2}e_1 + e_2, -e_2 + e_3)$ est une base $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de q dans cette base. Expliciter q dans cette base.
3. Trouver le rang et la signature de q.

Exercice 1512 Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et q l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $q(P) = P(0)P(1)$.

1. (a) Montrer que q est une forme quadratique sur E.
   (b) Déterminer la matrice de q dans la base canonique de E.
   (c) La forme q est-elle positive, négative ?
2. Soit $P := X^2 + X + 1$ et $V =$vect(P). Déterminer $V^\perp$ et $V^{\perp\perp}$.
3. Déterminer le rang de q puis son noyau.
4. Déterminer le cône isotrope $C(q)$ de q et constuire une base de E formée de vecteurs isotropes. $C(q)$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
5. Déterminer une base (P_0, P_1, P_2) de E telle que $q(a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2) = a_0^2 - a_1^2$ et donner la signature de q.

Exercice 1513 Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, que l'on suppose définie (*i.e.* son cône isotrope est $\{0\}$). Montrer que q garde un signe constant sur E (on pourra raisonner par l'absurde et considérer $q(a + tb)$ où a et b sont des vecteurs bien choisis et $t \in \mathbb{R}$).

Exercice 1514
1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Utiliser la question précédente pour trouver une base q-orthogonale, déterminer la signature de q et une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

Exercice 1515 Déterminer la signature de la forme quadratique

$$q : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y - z)^2 - (3x - y + 2z)^2 + (5y - 7z)^2 .$$

Exercice 1516 Soit la forme quadratique q définie par

$$q : (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \mapsto x_1x_2 + x_2x_4 - x_3x_4 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - x_1x_3.$$

1. Montrer, sans réduire q, qu'il existe une base q-orthonormale de $\mathbb{C}^4$.
2. En expliciter une.

32 Endomorphismes particuliers

32.1 Endomorphismes du plan

Exercice 1517 Dessiner l'allure du Shadock ci dessous après qu'il ait subi l'action de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Ecrire la matrice de la dernière transformation dans la base $((2,1),(-1,1))$.

Exercice 1518 Retrouver la matrice (dans la base indiquée sur le premier dessin) de la transformation subie par chacun des Shadocks ci-dessous.

32.2 Dualit'e

Exercice 1519 On considère l'application suivante :

$$\alpha \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(t)dt \end{array}$$

Montrer que α est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour $i \in \{0, ..., n\}$, on note α_i l'application

$$\alpha_i \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(i/n) \end{array}$$

Montrer que α_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, et montrer que la famille $(\alpha_0, ..., \alpha_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.
En déduire que :

$$\exists (\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(i/n)$$

Exercice 1520 On considère l'application u suivante :

$$u \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Calculer ${}^t u(\alpha)$ lorsque :

$$\alpha \ : P \mapsto P(0) \qquad\qquad \alpha \ : P \mapsto \int_0^1 P(t)dt$$

Exercice 1521 On appelle *trace* d'une matrice A, et on note $\mathrm{tr}(A)$, la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que : $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. En déduire que deux matrices semblables ont même trace.
3. Existe-t-il deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I$?

Exercice 1522 Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $(\mathrm{Im}\, f)^\perp = \mathrm{Ker}\, {}^t f$.
En déduire que f est surjective si et seulement si ${}^t f$ est injective.
Lorsque E et F sont de dimension finies, montrer que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}({}^t f)$. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^t(A))$.

Exercice 1523 Soit $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in (\mathbb{R}^3)^*$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad f(x) = \alpha(x)\, v.$$

(Indication : commencer par montrer que $\mathrm{rg}(f) \leqslant 1$*)*

Exercice 1524 On considère un espace euclidien $(E, <>)$. On rappelle que l'adjoint u^* d'un endomorphisme u est l'endomorphisme caractérisé par :

$$\forall (x,y) \in E^2, \; < u(x), y >=< x, u^*(y) >$$

On dit qu'un endomorphisme u de E est une similitude de E si et seulement si u est la composée d'une homotétie et d'une isométrie, c'est à dire si et seulement si :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \; \exists v \in O(E) \;/\; u = \alpha v.$$

1. Redémontrer l'équivalence entre les trois caractérisations suivantes des isométries :

$$\begin{aligned} v \text{ est une isométrie} &\Leftrightarrow \forall x \in E \quad \|v(x)\| = \|x\| \\ &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2 \quad < v(x), v(y) >=< x, y > \\ &\Leftrightarrow v^* v = \mathrm{id} \end{aligned}$$

On veut montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(i) u est une similitude

(ii) il existe un réel $\lambda > 0$ tel que
$$u^* u = \lambda \mathrm{id}$$

(iii) u conserve l'orthogonalité, c'est à dire :
$$\forall (x,y) \in E^2, < x, y >= 0 \Leftrightarrow < u(x), u(y) >= 0$$

2. Montrer que $(i) \Rightarrow (ii)$, puis que $(ii) \Rightarrow (i)$.
3. Montrer que $(i) \Rightarrow (iii)$.
4. On suppose (iii).
   (a) Soit $x \in E$, $x \neq 0$.Montrer que
   $$\forall y \in E \quad x \perp y \Leftrightarrow u^* u(x) \perp y$$
   (b) En déduire que $u^* u(x)$ appartient à la droite engendrée par x. On note λ_x le réel tel que $u^* u(x) = \lambda_x x$.
   (c) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \; \lambda_{tx} = \lambda_x$
   (d) Montrer que, pour tout couple (x, y) de vecteurs linéairement indépendants de E, on a : $\lambda_x = \lambda_y$.
   (e) En déduire que l'application $x \mapsto \lambda_x$ est constante. Conclure.

32.3 Endomorphismes auto-adjoints

Exercice 1525 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal si et seulement si $p = p^*$.

Exercice 1526 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si $\varphi = \varphi^*$ et $\varphi(F) \subset F$ alors $\varphi(F^\perp) \subset F^\perp$.
2. Soit F un espace propre de φ. Montrer que si $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ alors $\varphi(F^\perp) \subset F^\perp$.

Exercice 1527 Soient A et B deux matrices symétriques positives. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que tout vecteur propre de A^k est vecteur propre de A.
2. Si $A^k = B^k$ alors $A = B$.
3. Que se passe-t-il sans l'hypothèse A et B symétriques positives ?

Exercice 1528 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\varphi^* \circ \varphi$ est symétrique et que $\mathrm{Sp}(\varphi^* \circ \varphi) \subset \mathbb{R}_+$.
2. On note respectivement λ et μ la plus grande et la plus petite valeur propre de $\varphi^* \circ \varphi$. Montrer, pour tout $x \in E$, l'inégalité :
$$\mu \|x\|^2 \leqslant \|\varphi(x)\|^2 \leqslant \lambda \|x\|^2.$$

Exercice 1529 Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si $\varphi = \varphi^*$ et $\forall x \in E : \langle x, \varphi(x) \rangle = 0$ alors $\varphi = 0$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   i) $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$.
   ii) $\forall x, y \in E : \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \langle \varphi^*(x), \varphi^*(x) \rangle$.
   iii) $\forall x \in E : \|\varphi(x)\| = \|\varphi^*(x)\|$.
3. Si $\dim(E) = 2$ et si $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ alors la matrice de φ dans une base orthonormée est soit symétrique, soit de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.
4. On suppose désormais que $\dim(E) = 3$ et que $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$.
   (a) Montrer que φ a au moins une valeur propre réelle qu'on notera λ. Montrer que E_λ et $E_\lambda^\perp$ sont laissés stables par φ et φ^*.
   (b) Montrer que si φ n'est pas symétrique, il existe une base orthonormée ε de E et deux réels a et b (avec $b \neq 0$) tels que $\mathrm{Mat}(\varphi, \varepsilon) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 1530 Soit E un espace euclidien de dimension 3.

1. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormée de E. Soient $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ et $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ deux vecteurs de E. Calculer $\langle x, y \rangle$ en fonction des coefficients x_i et y_i (pour $i \in \{1, 2, 3\}$).
2. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. On note λ sa plus petite valeur propre et λ' sa plus grande valeur propre. Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à E, les inégalités :
$$\lambda \|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x \rangle \leqslant \lambda' \|x\|^2.$$
(On utilisera une base orthonormée convenable.)

3. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme quelconque. Montrer que $u = \frac{1}{2}(v + v^*)$ est auto-adjoint. Soient μ une valeur propre de v, λ la plus petite valeur propre de u et λ' la plus grande valeur propre de u. Montrer que $\lambda \leqslant \mu \leqslant \lambda'$.

Exercice 1531

1. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = {}^tA \cdot A$ est une matrice symétrique dont tous les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont positives. Démontrer l'égalité : $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2$.
2. Soit $S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Existe-t-il une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tA \cdot A$? Donner une condition nécessaire et suffisante sur S pour que A soit inversible. Application à $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 1532 Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien de dimension p. A chaque n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E on associe le nombre (déterminant de Gram)

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \text{dét}(< x_i, x_j >)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

1. Montrer que $x_1, \ldots, x_n$ sont liés si et seulement si $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$; montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont indépendants, on a $G(x_1, \ldots, x_n) > 0$.
2. Montrer que, pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, on a $G(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = G(x_1, \ldots, x_n)$, et que la valeur de $G(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas modifiée si l'on rajoute à un des vecteurs, soit x_i, une combinaison linéaire des autres vecteurs $x_j (j \neq i)$. Calculer $G(\alpha x_1, \ldots, x_n)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
3. On suppose $x_1, \ldots, x_n$ indépendants. Soit $x \in E$, et soit $d(x, H)$ la distance de x à l'hyperplan $H = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Montrer que $d(x, H)^2 = \dfrac{G(x, x_1, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)}$.

Exercice 1533 Diagonaliser très rapidement la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 1534 Montrer que l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$C = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

est un automorphisme orthogonal.

Exercice 1535 Soient E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|.$$

1. (a) Soit $x \in E$ tel que $f^*(x) = x$. Montrer que $\|f(x) - x\|^2 = \|f(x)\|^2 - \|x\|^2$.
   (b) En déduire que $\ker(f^* - \text{Id}) \subseteq \ker(f - \text{Id})$.
2. Soit h un endomorphisme de E. Montrer que $(\text{Im}\, h)^\perp \subseteq \ker h^*$.
3. En déduire que les sous-espace vectoriels $\ker(f - \text{Id})$ et $\text{Im}\,(f - \text{Id})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 1536 Soit E un espace euclidien de dimension 3.

1. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E. Soient $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ deux vecteurs de E. Calculer $\langle x, y \rangle$ en fonction des coefficients x_i et y_i (pour $i \in \{1, 2, 3\}$).

2. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. On note λ_1 sa plus petite valeur propre et λ_2 sa plus grande valeur propre. Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à E les inégalités :
$$\lambda_1\|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_2\|x\|^2.$$
(On utilisera une base orthonormée convenable.)
3. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme quelconque. Montrer que $u = \dfrac{1}{2}(v + v^*)$ est auto-adjoint. Soient λ une valeur propre de v, λ_1 la plus petite valeur propre de u et λ_2 la plus grande valeur propre de u. Montrer que $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$.

Exercice 1537 1. Soient E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique positif. Montrer que si $x \in E$ alors $(f(x)|x) \geqslant 0$.
2. Soit $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive. Montrer que pour tout $i = 1, .., n$, $m_{ii} \geqslant 0$ et $\mathrm{tr}(M) \geqslant 0$
3. Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques positives.
   (a) Montrer qu'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive telle que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(DM)$.
   (b) En déduire que $\mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

Exercice 1538 Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
1. $\forall x \in E, \langle f(x), x\rangle \geqslant 0$.
2. Il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g^*g$.
3. Il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h = h^*$ et $f = h^2$.

Exercice 1539 Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Montrer que $\|f\| = \|f^*\|$.

Exercice 1540 Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien (de dimension finie) et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. On note $X = \{x \in E; \langle f(x), x\rangle \leqslant 1\}$. Montrer que X est compacte si et seulement si toutes les valeurs propres de f sont strictement positives.

32.4 Autres endomorphismes normaux

Exercice 1541 Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien. Un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est dit antisymétrique lorsque $\varphi^* = -\varphi$.
1. Montrer que φ est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in E, \langle \varphi(x), x\rangle = 0$. (on pourra remarquer que $\varphi + \varphi^*$ est autoadjoint.)
2. Montrer que si φ est antisymétrique alors $(\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp = \mathrm{Im}(\varphi)$ puis que $\mathrm{rg}(\varphi)$ est pair.

Exercice 1542 Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme antisymétrique c'est-à-dire tel que $\varphi^* = -\varphi$.
1. Montrer que si $\lambda \in Sp(\varphi)$ alors $\lambda = 0$. Montrer que $(\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp$ est stable par φ.
2. (a) Montrer que φ^2 est symétrique.
   (b) Montrer que si x est un vecteur propre associé à une valeur propre μ de φ^2 alors $E_x = \mathrm{vect}\{x, \varphi(x)\}$ et $E_x^\perp$ sont laissés stables par φ.
   (c) Montrer que $\mu > 0$. Déterminer une base $\{e_1, e_2\}$ de E_x telle que la matrice de la restriction de φ Ĺ E_x dans $\{e_1, e_2\}$ soit $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\mu} \\ \sqrt{\mu} & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que E est somme directe orthogonale de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et de plans stables.

32.5 Endomorphismes orthogonaux

Exercice 1543 Soit f une transformation orthogonal d'un espace euclidien E. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}) = \mathrm{Im}(f-\mathrm{id})^{\perp}$$

En déduire que si $(f-\mathrm{id})^2 = 0$, alors $f = \mathrm{id}$.

Exercice 1544 Déterminer la nature des transformations de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 1545 Diagonaliser dans une base orthonormale (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$) la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Interpréter géométriquement la transformation de $\mathbb{R}^3$ représentée par cette matrice.

Exercice 1546 Diagonaliser les matrices suivantes dans des bases orthonormées :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} & 0 \\ -i\sqrt{2} & 1 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3i \\ 3i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1547 Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une matrice symétrique réelle. Montrer que ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2$$

Exercice 1548 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonal d'un espace euclidien E. On dit qu'un endomorphisme f de E conserve l'orthogonalité de $\mathcal{B}$ si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille orthogonale.
Montrer que f conserve l'orthogonalité de $\mathcal{B}$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de ${}^t\!f\, f$.
Montrer que pour tout endomorphisme f de E, il existe une base orthogonale dont f conserve l'orthogonalité.

Exercice 1549 (Décomposition polaire)

1. Soit r un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On dit que r est positif, si toutes ses valeurs propres sont positives.

   Montrer que si r est défini positif, il existe un et un seul endomorphisme symétrique s positif tel que $s^2 = r$. On appelle s racine carrée positive de r.

   On dit que r est défini positif si et seulement si toutes ses racines sont strictement positives. Montrer que si r est défini positif, alors sa racine positive aussi.

2. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que ${}^t\!f\, f$ est symétrique et positif. Montrer que si en plus f est bijective, ${}^t\!f\, f$ est défini positif.

3. On suppose maintenant que f est une bijection. Soit s la racine carrée positive de ${}^t f f$. Montrer que $u = f \circ s^{-1}$ est une transformation orthogonale. En déduire que tout endomorphisme bijectif de E peut s mettre sous la forme :
$$f = u \circ s$$
où u et une transformation orthogonale, et s est symétrique défini positif.
Montrer que cette décomposition, appelée décomposition polaire de f est unique.
4. Que se passe-t-il si f n'est pas bijective ?

Exercice 1550 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :
$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad (\textit{attention au } \tfrac{1}{7}...)$$

1. Sans calculs, dire pourquoi f est diagonalisable dans une base orthonormée.
2. Montrer que f est orthogonal. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.
3. Sans calculer le polynôme caractéristique de f, déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de f. En déduire le polynôme caractéristique de f.
4. Déterminer l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. En donner une base, puis lui appliquer le procédé de Schmidt pour obtenir une base orthonormée de E_1.
5. Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 satisfait $E_{-1} = (E_1)^{\perp}$. En utilisant l'équation caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.
6. Donner une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale. Donner une interprétation géométrique de f.

Exercice 1551 **A** — Soit E un espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E diagonalisables qui commutent (c'est à dire qui satisfont $u \circ v = v \circ u$). On note $\lambda_1 ... \lambda_k$les valeurs propres de u et $E_1 ... E_k$ les espaces propres associés.

1. Montrer que $v(E_i) \subset E_i$.
2. On note $v_i = v_{|E_i}$ la restriction de v à E_i. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que $P(v_i) = P(v)_{|E_i}$.
3. En déduire que v_i est diagonalisable. Soit B_i une base de E_i formée de vecteurs propres de v_i.
Montrer que $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ est une base de E formée de vecteurs propres à la fois pour u et pour v.
4. En déduire que u et v sont diagonalisables dans une même base. Montrer que $u - v$ est diagonalisable.

B — *Application :* On considère maintenant une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, et on lui associe l'endomorphisme $w_A \in \mathrm{End}(M_{n,n}(\mathbb{R}))$ suivant :
$$w : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$
Le but de l'exercice est de montrer que si A est diagonalisable, w_A l'est aussi.
On note
$$u_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \qquad \text{et} \qquad v_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MA \end{array}$$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, (u_A)^k = u_{A^k}$. En déduire que $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(u_A) = u_{P(A)}$, puis que tout polynôme annulateur de A est un polynôme annulateur de u_A.
2. Montrer que
$$A \text{ diagonalisable } \Rightarrow u_A \text{ diagonalisable}$$
On admet sans démonstration que le même résultat est vrai pour v_A :
$$A \text{ diagonalisable } \Rightarrow v_A \text{ diagonalisable}$$
3. Montrer que $u_A \circ v_A = v_A \circ u_A$.
4. En déduire que
$$A \text{ diagonalisable } \Rightarrow w_A \text{ diagonalisable}$$

Exercice 1552 Dans un espace euclidien $(E, < \cdot, \cdot >)$, on considère un vecteur v non nul, un scalaire λ et l'endomorphisme :

$$u : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x + \lambda < x, v > v \end{array}$$

1. Pour $x \in E$, calculer $\|u(x)\|^2$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et v pour que u soit une transformation orthogonale.
3. Lorsque u est orthogonale, dire a priori quelles sont les valeurs propres possibles de u, puis dire si elles sont effectivement valeur propre en étudiant les espaces propres associés.
4. Lorsque u est orthogonale, donner une interprétation géométrique de u.

Exercice 1553 On considère un espace euclidien $(E, <>)$. On dit qu'un endomorphisme u de E est une similitude de E si et seulement si il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$u^* u = \lambda \mathrm{id}$$

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est une similitude

(ii) u est colinéaire à une transformation orthogonale, c'est à dire

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists v \in O(E) \ / \ u = \alpha v$$

(iii) u conserve l'orthogonalité, c'est à dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, < x, y >= 0 \Rightarrow < u(x), u(y) >= 0$$

Pour (i)⇔(ii), on pourra commencer par montrer que (ii)⇒(i).
Pour (i)⇒(iii), on commencera par montrer que x et $u^*u(x)$ sont toujours colinéaires, c'est à dire que

$$\forall x \in E \exists \lambda_x / u^* u(x) = \lambda_x x$$

puis on montrera que λ_x est indépendant de x.

Exercice 1554 Dans un espace euclidien E, on considère un vecteur unitaire a, et à un réel $k \neq -1$ on associe l'endomorphisme u_k de E défini par :

$$u_k(x) = k < x, a > a + x$$

1. Montrer que u_k est un isomorphisme. Déterminer u_k^{-1}. *(on pourra commencer par calculer $< u_k(x), a >$)*
2. Rappeler la caractérisation de l'adjoint d'un endomorphisme, et montrer que u est auto adjoint.
3. Pour quelles valeurs de k u est-il orthogonal ? Interpréter alors géométriquement cette transformation.
4. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de u_k.

[Exercice corrigé]

Exercice 1555 1. Soient E un espace vectoriel euclidien, f un endomorphisme de E et $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de f dans une base orthonormale donnée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E. Pour $i, j \in \{1, ..., n\}$, exprimer a_{ij} en fonction de f et des vecteurs e_i et e_j.

2. Soient $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}$.
   (a) Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $S = (u|f(u))$.
   (b) En déduire que $|S| \leqslant n$.

Exercice 1556 Soient $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et A_{ij} le cofacteur (i, j) de A. Montrer que $\det A > 0$ si et seulement si a_{ij} et A_{ij} sont de même signe.

Exercice 1557 Que peut-on dire d'une matrice carrée réelle à la fois symétrique et orthogonale ? Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1558 Quelles sont les isométries vectorielles d'un espace vectoriel euclidien qui sont diagonalisables.

Exercice 1559 Soient E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|.$$

1. (a) Soit $x \in E$ tel que $f^*(x) = x$. Montrer que $\|f(x) - x\|^2 = \|f(x)\|^2 - \|x\|^2$.
   (b) En déduire que $\ker(f^* - \mathrm{Id}) \subseteq \ker(f - \mathrm{Id})$.
2. Soit h un endomorphisme de E. Montrer que $(\mathrm{Im}\, h)^\perp \subseteq \ker h^*$.
3. En déduire que les sous-espace vectoriels $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 1560 Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $U \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telles que $UDU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1561 Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $u^* = u^{-1}$.

ii) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

iii) $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

iv) L'image par u d'une base orthonormée de E est une base orthonormée de E.

v) L'image par u de toute base orthonormée de E est une base orthonormée de E.

Exercice 1562 Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathcal{O}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si $\varphi(F) \subset F$ alors $\varphi(F^\perp) \subset F^\perp$. A-t-on égalité ?

Exercice 1563 Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension 3 et $u \in \mathcal{O}^-(E)$. On pose $F = \mathrm{Ker}(u+id)$.

1. Montrer que $F \neq \{0\}$. Montrer que F et $f^\perp$ sont stables par u. Pour quelle raison $\dim(F) \neq 2$?
2. On suppose $E \neq F$. Montrer que la restriction de u à $F^\perp$ est une rotation.
3. En déduire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et une base ε de E tels que :

$$\mathrm{Mat}(u,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1564 Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension 4 et $\varepsilon = \{e_1,\cdots,e_4\}$ une base orthonormée de E. Soit A la matrice $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 & -\sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 & \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme déterminé par $\mathrm{Mat}\,(u,\varepsilon) = A$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{O}^+(E)$.
2. Montrer que l'espace vectoriel F engendré par e_1 et $u(e_1)$ est stable par u. Montrer que la restriction de u à F est une rotation.
3. Montrer que $F^\perp$ est stable par u et est engendré par e_4 et $u(e_4)$. La restriction de u à $F^\perp$ est-elle une rotation ?

Exercice 1565 Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}(n,\mathbb{R})$. Montrer pour tout $j \in \{1,\cdots,n\}$ l'égalité : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$. En déduire que si A est triangulaire supérieure elle est diagonale.

Exercice 1566 Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$. On pose $v = id - u$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(v)^\perp$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} u^p(x)$ est la projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(v)$.

Exercice 1567 Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $s \in \mathcal{L}(E)$ telle que $s^2 = id$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(s - Id) \oplus \mathrm{Ker}(s + Id)$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   i) $s \in \mathcal{O}(E)$.

   ii) $\mathrm{Ker}(s - Id) \perp \mathrm{Ker}(s + Id)$.

   iii) $s = s^*$.
3. On note désormais s_F l'unique symétrie $s \in \mathcal{O}(E)$ telle que $F = \mathrm{Ker}(s + Id)$. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{O}(E)$ on a : $us_Fu^{-1} = s_{u(F)}$.
4. Montrer que si f est une application de E dans lui-même laissant stables toutes les droites vectorielles (c'est à dire que pour tout $x \in E$ il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$) alors f est linéaire.
5. En déduire que $Z(\mathcal{O}(E)) = \{id, -id\}$ et que si $n \geqslant 3$ alors $Z(\mathcal{O}^+(E)) = \{id, -id\} \cap \mathcal{O}^+(E)$. (on pourra appliquer 3.) dans le cas où F est une droite ou un plan.)

6. Que se passe-t-il lorsque $n = 1$ et $n = 2$?

Exercice 1568 Soit E un espace euclidien et $u \in O(E)$ telle que $\ker(u - id) \neq E$. Soit $x \in E$ tel que $u(x) \neq x$. On pose $y = u(x)$. Alors on sait qu'il existe une unique réflexion r telle que $r(y) = x$.

1. Montrer que $\ker(u - id) \subset \ker(r - id)$.
2. Montrer que $\dim \ker(r \circ u - id) > \dim \ker(u - id)$.
3. Montrer par récurrence que toute isométrie vectorielle est la composée de réflexions.

Exercice 1569 Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall (i,j)\ |a_{i,j}| \leqslant 1$ et que $\left|\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \leqslant n$.

Exercice 1570 Soit E euclidien, $n \in \mathbb{N}^*, (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \in E^{2n}$ tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, ..., n\}^2, (x_i|x_j) = (y_i|y_j)\,.$$

Montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal f de E tel que :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, f(x_i) = y_{i.}$$

33 Polynômes d'endomorphismes

33.1 Idéaux

Exercice 1571 Montrer qu'un idéal de $K[X]$ est distinct de $K[X]$ si et seulement s'il ne contient aucun polynôme constant non nul.

Exercice 1572 Soient les polynômes $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^2 + X + 1$ de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer $\text{pgcd}(P, Q)$ puis la somme et l'intersection des idéaux principaux (P) et (Q) de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1573 Les parties $\mathcal{I} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P'(0) = 0\}$ et $\mathcal{J} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = P'(0) = 0\}$ sont-elles des idéaux de $\mathbb{R}[X]$? Dans l'affirmative, en donner un générateur.

33.2 Polynômes annulateurs

Exercice 1574 Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme minimal de A. En déduire A^{-1}, A^3 et A^5.

Exercice 1575 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $P(f) = 0$.
Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$; en déduire $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercice 1576 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(f - id) = 1$. On note $H = \text{Ker}(f - id)$.

1. Soit $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ une base de H et $e_n \notin H$. Montrer que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E et donner l'allure de la matrice de f dans cette base.
2. Montrer que le polynôme $(X - 1)(X - \det(f))$ annule f. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 1577 Soit E un espace vectoriel de dimension n, et u un endomorphisme de E nilpotent, c'est à dire tel que $\exists m \in \mathbb{N}, u^m = 0$. Montrer que $u^n = 0$

Exercice 1578 Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ telles que

$$A^2 - 3A + 2\mathrm{id} = 0$$

Même question pour

$$A^3 - 8A^2 + 21A - 18\mathrm{id} = 0$$

Exercice 1579 Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton. Le démontrer dans le cas particulier où le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
[Exercice corrigé]

Exercice 1580
1. Réduire la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$
2. Donner un polynôme annulateur de A de degré 2.
3. En déduire qu'il existe des coefficients a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n$ et les calculer en fonction de n.

Exercice 1581 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de trace non nulle. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui commute avec A^2 commute aussi avec A. (*Indication :* utiliser Cayley-Hamilton.)

Exercice 1582 Que peut-on dire d'un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension finie annulé par les polynômes $P = 1 - X^3$ et $Q = X^2 - 2X + 1$?

Exercice 1583 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que le polynôme minimal de f est $P = (X-2)(X-1)^2$. Quel est le polynôme minimal de $f + \mathrm{Id}_E$?

Exercice 1584 Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice diagonale. Si $P \in K[X]$, calculer $P(M)$ et en déduire le polynôme minimal de M.

Exercice 1585 En appliquant la méthode utilisée en cours pour démontrer l'existence d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, déterminer le polynôme minimal de la matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 1586 Quel est le polynôme minimal d'un endomorphisme d'une droite vectorielle ?

Exercice 1587 Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E de rang 1. Montrer que le polynôme minimal de f est de la forme $X(X-\lambda)$.

Exercice 1588 Déterminer les endomorphismes d'un K-espace vectoriel E de dimension finie n dont le polynôme minimal est de degré 1.

Exercice 1589
1. Montrer que $P = (X-1)^2(X-2)$ est un polynôme annulateur de la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et en déduire le polynôme minimal de la matrice A.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Calculer explicitement $B^2 - \mathrm{tr}(B)\,B + \det(B) I_2$. En déduire le polynôme minimal de la matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 1590 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et P son polynôme minimal. Montrer que f est bijective si et seulement si $P(0) \neq 0$.

Exercice 1591 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3. Montrer que f admet un plan stable (on discutera en fonction du caractère trigonalisable de f).

Exercice 1592 Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie tel que

$$f^4 = f^2 + f.$$

1. Montrer que $\ker(f^3 - f - \mathrm{Id}) \oplus \ker f = E$.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Im}\, f \subseteq \ker(f^3 - f - \mathrm{Id})$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}\, f = \ker(f^3 - f - \mathrm{Id})$.

Exercice 1593 Déterminer le polynôme minimal de la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1594 Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice par blocs à coefficients réels suivante

$$M = \begin{pmatrix} O & \frac{1}{2}J \\ \frac{1}{2}J & O \end{pmatrix}.$$

1. Calculer M^2 et M^3 et en déduire que M est diagonalisable.
2. Déterminer le polynôme caract eristique et le polynôme minimal de M.

Exercice 1595 On considére la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calculer son polynôme caractéristique, calculer A^2 et déduire de ces calculs et du théorème de Cayley-Hamilton l'inverse de A.

Exercice 1596 On se place dans $E = \mathbb{C}^4$ muni de sa base canonique $b = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On désigne par j l'endomorphisme de E dont la matrice dans b est la matrice suivante

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

1. Déterminer l'image de b par j, j^2, j^3, et j^4.
2. En déduire J^2, J^3 et J^4.
3. Déterminer un polynôme annulateur non nul de J.
4. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P) \leqslant 3$ vérifie $P(J) = 0$ alors $P = 0$.
5. En déduire le polynôme minimal de J.
6. Montrer que J est diagonalisable.
7. Déterminer les valeurs propres de J.

34 Réduction d'endomorphismes : diagonalisation

34.1 Valeurs propres, vecteurs propres

Exercice 1597 Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A_m et une base de vecteurs propres.
2. Déterminer suivant les valeurs de m le rang de A_m. Déterminer lorsque cela est possible A_m^{-1}.
3. Lorsque A_m n'est pas inversible déterminer le noyau et l'image de A_m.

Exercice 1598 Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si -1 n'est pas valeur propre de A, alors il existe une matrice Q antisymétrique (i.e. ${}^tQ = -Q$) telle que $A = (I+Q)^{-1}(I-Q) = (I-Q)(I+Q)^{-1}$ et qu'on a $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Réciproque ?

Exercice 1599 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si λ est valeur propre de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).

Exercice 1600

1. Soient f et g deux endomorphisme s d'un espace vectoriel E de dimension n sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ayant chacun n valeurs propres distinctes dans K. Montrer que
$$f \circ g = g \circ f \Longleftrightarrow f \text{ et } g \text{ ont les mêmes valeurs propres.}$$
2. Supposons maintenant que $K = \mathbb{C}$ et que $f \circ g = g \circ f$. Si u est un endomorphisme on dit qu'un espace vectoriel F est $u-$stable si $u(F) \subset F$. Montrer que tout sous-espace propre de f est $g-$stable.
Remarque : On peut montrer par récurrence sur n qu'il existe un vecteur propre commun à $f$et g. On admettra ce résultat.
3. Considérons f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
   - Vérifier que $f \circ g = g \circ f$ et déterminer les sous-espaces propres de M et N.
   - Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les matrices de f et g sont diagonales.

Exercice 1601 Soient $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit f l'endomorphisme associé à la matrice A.
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Uniquement* en examinant la matrice A, trouver deux valeurs propres et un vecteur propre de A, puis deux sous-espaces $f-$stables.
2. Que représente la matrice B ?

Exercice 1602 Soit $u \in \mathrm{End}(E)$. On note $\chi_u = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. Montrer que
$$a_0 = \det(u) \qquad \text{et} \qquad a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(u)$$

Exercice 1603 Soient u et v deux endomorphismes de E. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 1604 Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent, c'est à dire tels que $u \circ v = v \circ u$. On suppose que v admet n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe une base de E, formée de vecteurs propres communs à u et à v.
En déduire qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\quad u = a_0\mathrm{id} + a_1 v + \cdots + a_{n-1}v^{n-1}$

Exercice 1605 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le moins de calculs possible,

1. montrer que $\qquad \{0\} \subset \operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^2 \subset \operatorname{Ker} A^3 = \mathbb{R}^4$
   et déterminer les dimensions respectives de $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} A^2$,
2. déterminer un vecteur e_1 tel que $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} A^2 \oplus \operatorname{Vect}(e_1)$,
3. montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1) est une famille libre,
4. montrer que $Ae_1 \in \operatorname{Ker} A^2$, et que $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Vect}(Ae_1)$,
5. montrer que $A^2e_1 \in \operatorname{Ker} A$ et déterminer un vecteur e_2 tel que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(A^2e_1) \oplus \operatorname{Vect}(e_2)$,
6. montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2). Caluler $P^{-1}AP$.

Adapter ce travail à l'étude de B et C

Exercice 1606 Soit J la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

.

1. Trouver une relation entre J et J^2.
2. En déduire les valeurs propres de J et calculer leurs multiplicités.
3. Donner le polynôme caractéristique de J.

Exercice 1607 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$AB - BA = A$$

Le but de cet exercice est de montrer que A est nilpotente, c'est à dire

$$\exists k \in \mathbb{N}, A^k = 0.$$

On note E l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'application :

$$\psi \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & MB - BM \end{array}$$

1. Montrer que ψ est linéaire de E dans E.
2. Montrer par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \psi(A^k) = kA^k$.

3. On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \neq 0$. Montrer que ψ a une infinité de valeurs propres.
4. Conclure.

Exercice 1608 Soit M la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de M. En déduire M^{-1}.

Exercice 1609 Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{C}^n$. Soit $\pi_1, ..., \pi_N$ des endomorphismes tous non nuls de E et $\lambda_1, ..., \lambda_N$ N nombres complexes distincts. On suppose que :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad f^m = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^m \pi_k.$$

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(f) = \sum_{k=1}^{N} P(\lambda_k)\pi_k$

   On considère le polynôme $Q = \prod_{1 \leqslant k \leqslant N}(X - \lambda_k)$ et pour chaque $p \in \{1, ..., N\}$ les polynômes suivants :

$$Q_p = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant N \\ k \neq p}} (X - \lambda_k) \qquad \text{et} \qquad \tilde{Q}_p = \frac{1}{Q_p(\lambda_p)} Q_p$$

2. Calculer $Q(f)$. Qu'en déduit-on pour f ?
3. Montrer que $Sp(f) \subset \{\lambda_1, ..., \lambda_N\}$
4. Montrer que $\tilde{Q}_p(f) = \pi_p$. Vérifier alors que $\pi_p \circ \pi_q = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq q \\ \pi_p \text{ si } p = q \end{cases}$
5. Calculer $f \circ \pi_p$. En déduire que $Sp(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_N\}$.

   On note E_p l'espace propre associé à la valeur propre λ_p.
6. Montrer que $\operatorname{Im} \pi_p \subset E_p$. Réciproquement, pour $x \in E_p$, montrer que $x \in \operatorname{Ker} \pi_q$ pour $q \neq p$ (on calculera par exemple $\pi_q \circ f(x)$ de deux façons différentes) puis que $x = \pi_p(x)$. En déduire que $E_p \subset \operatorname{Im} \pi_p$.
7. En déduire que $\operatorname{Im} \pi_p = E_p$ et que $\operatorname{Ker} \pi_p = \bigoplus_{q \neq p} E_q$. Décrire géométriquement π_p.

Exercice 1610 On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & (X^2 - 1)P' - 2(nX + a)P \end{array}$$

Vérifier que cette application est bien définie.
Déterminer ses valeurs propres, et les espaces propres associés.

Exercice 1611 Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.

1. Montrer que l'ensemble $\text{Com} = \{v \in \mathcal{L}(E, E)/uv = vu\}$ des endomorphismes de E qui commutent avec u est un espace vectoriel.
2. (a) Soit v un élément de Com. Montrer que v préserve les espaces propres de u (c'est à dire que si E_λ est un espace propre de u associé à la valeur propre λ, on a $\forall x \in E_\lambda, v(x) \in E_\lambda$).

   (b) Donner la dimension des espaces propres de u et montrer que si x est un vecteur propre de u alors c'est aussi un vecteur propre de v.

(c) A l'aide d'une base convenablement choisie, décrire tous les éléments de Com, et montrer que Com est de dimension n.

3. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, u^2, ..., u^{n-1}) \subset \mathrm{Com}$.
4. On veut maintenant étudier l'indépendance linéaire de la famille $\{\mathrm{id}, u, u^2, ..., u^{n-1}\}$. Pour cela, on considère n réels $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i u^i = 0$.

(a) Montrer que les (α_i) sont solution du système :

$$(*) \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \alpha_0 & + & \alpha_1\lambda_1 & + & \alpha_2\lambda_1^2 & + & ... & + & \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} & = & 0 \\ \alpha_0 & + & \alpha_1\lambda_2 & + & \alpha_2\lambda_2^2 & + & ... & + & \alpha_{n-1}\lambda_2^{n-1} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_0 & + & \alpha_1\lambda_n & + & \alpha_2\lambda_n^2 & + & ... & + & \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} & = & 0 \end{array} \right.$$

(b) On rappel que : $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & ... & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$. En déduire l'ensemble des solutions du système $(*)$ et conclure.

5. Montrer que $\mathrm{Com} = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, u^2, ..., u^{n-1})$.

[Exercice corrigé]

34.2 Diagonalisation

Exercice 1612 Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note T l'application linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer le noyau de cette application linéaire. Donner la matrice A de T dans la base donnée.
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer $T(f_1)$, $T(f_2)$, $T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de T dans cette nouvelle base.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation relie A, B, P et P^{-1} ?

Exercice 1613 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et de base (e_1, e_2, e_3). On désigne par I_E l'application identité de E. Soit f une application linéaire de E dans E telle que $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3$, $f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$.

1. Donner la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3).
2. Donner la dimension et une base de $Ker(f - I_E)$.
3. Donner la dimension et une base de $Ker(f^2 + I_E)$.
4. Montrer que la reunion des bases précédentes constitue une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ? Et celle de f^2 ?

Exercice 1614 Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans E.

1. Montrer que la condition $f^2 = 0$ est équivalente à $Imf \subset Kerf$. Quelle condition vérifie alors le rang de f ? On suppose dans la suite que $f^2 = 0$.
2. Soit F un supplémentaire de $Kerf$ dans E et soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de F. Montrer que la famille des vecteurs $(e_1, \ldots, e_r, f(e_1), \ldots, f(e_r))$ est libre. Montrer comment la compléter si nécessaire par des vecteurs de $Kerf$ pour obtenir une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?
3. Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $Imf = Kerf$?
4. Exemple. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $f^2 = 0$. Déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice de f a la forme indiquée dans la question 2).

Exercice 1615 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondant. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 1616 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A.

Exercice 1617 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 1618 On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire.

Exercice 1619 Soit n un entier strictement supérieur à 1. Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Soit x_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $A^{n-1}x_0 \neq 0$. Montrer que $(x_0, Ax_0, A^2x_0, \cdots, A^{n-1}x_0)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Comment s'écrit la matrice A dans cette base ?
Application : on pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3 et donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle A a une forme simple.

Exercice 1620 On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable ? Justifier. Écrire alors M sous une forme plus simple.

Exercice 1621 Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par sa matrice A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner un base de Ker T et ImT.
2. (a) Calculer le polynôme caractéristique de T, puis ses valeurs propres.
   (b) Justifier, sans calcul, que T soit diagonalisable et écrire une matrice diagonale semblable à A .
   (c) Calculer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de T.
3. Soient $f_1 = -2e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$ et $f_3 = 2e_1 + 3e_2 - e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Justifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice P de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (f_1, f_2, f_3).
   (b) Calculer P^{-1}.
   (c) Ecrire la matrice D de T dans la base (f_1, f_2, f_3) .
4. Quelle relation relie A^3, D^3, P et P^{-1} ? En déduire A^3.

Exercice 1622 Lorsque c'est possible, diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 1623 Pour quelles valeurs de $(a, b, c) \in \mathbb{C}^2$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? On ne cherchera pas à réduire explicitement A.

Exercice 1624 Soit u l'application suivante :

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{array}$$

Montrer que u est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de u, et, si c'est possible, diagonaliser u.

Exercice 1625 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A, alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A. De même, montrer que si x est un vecteur propre complexe de A, alors $\bar{x}$ (où $\bar{x}$ désigne le vecteur dont les composantes sont les conjuguées des composantes de x) est aussi un vecteur propre complexe de A.

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1626 Soit A_t la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{pmatrix}$. Sans calculer le polynôme caractéristique de A_t, montrer que $(t-1)$ est valeur propre. Déterminer l'espace propre associé. Que dire de la multiplicité de la valeur propre $(t-1)$? En déduire le spectre de A_t. A_t est-elle diagonalisable ?

Exercice 1627 Pour quelles valeurs de a, b et c les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Exercice 1628 Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E, qui commutent (c'est à dire tels que $u \circ v = v \circ u$). On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (resp. $\mu_1, \ldots, \mu_q$) les valeurs propres de u (resp. de v), et $F_1, \ldots, F_p$ les espaces propres associés (resp. $G_1, \ldots, G_q$).

1. Montrer que chaque G_j (resp. F_i) est stable par u (resp. v) (c'est à dire que $u(G_j) \subset G_j$).
2. On pose $H_{ij} = F_i \cap G_j$. Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$. Montrer que F_i est la somme directe des espaces $(H_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant q}$.
3. En déduire l'énoncé suivant : *Lorsque deux endomorphismes diagonalisables u et v commutent, il existe une base formée de vecteurs propres communs à u et à v (en d'autres termes, u et v sont diagonalisables simultanément dans la même base).*

Exercice 1629 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables, triangularisables ? Si oui, les réduire.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 1630 Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E et P un polynôme. Montrer que $P(f)$ est diagonalisable.

Exercice 1631 Soit P_0 un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, et f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & R = \text{ reste de la division euclidienne de } P \text{ par } P_0 \end{array}$$

A l'aide d'un polynôme annulateur de f, montrer que f est diagonalisable.

Exercice 1632 Soit α et β deux réels, et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha & 1 \\ 1-\beta & \alpha & \alpha-1 & -\beta \\ \beta & -\alpha & 1-\alpha & 1+\beta \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

A quelle condition sur α et β, A est-elle diagonalisable ?
On suppose $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. Vérifier que $A(A - I) = 0$. En déduire A^n et $(A + I)^{-1}$.

Exercice 1633 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables, triangularisables, sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$?
Lorsqu'elles sont diagonalisables, donner une matrice diagonale semblable.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Réduire explicitement A et C.

Exercice 1634 On considère un endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel E de dimension finie n, tel que f^2 est diagonalisable. Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$f \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$$

1. On suppose que f est diagonalisable. On note $\alpha_1, ..., \alpha_r$ les valeurs propres (distinctes) de A, et $E_1, ..., E_r$ les espaces propres associés.
   (a) Montrer que si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ alors $\operatorname{Ker} f^2 = \{0\}$.
   (b) On suppose maintenant que $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$. On note $\alpha_{\alpha_1}, ..., \alpha_{\alpha_r}$ les autres valeurs propres de f, et $E_0, ..., E_r$ ses espaces propres. En utilisant que $E = E_0 \oplus E_1 \oplus ... \oplus E_r$, montrer que si $f^2(x) = 0$ alors $f(x) = 0$. En déduire que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
2. On suppose que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
   (a) Montrer que si μ est une valeur propre de f, alors μ^2 est une valeur propre de f^2.
      i. Soit λ une valeur propre non nulle de f^2, et μ et $-\mu$ ses deux racines complexes. Montrer que
      $$\operatorname{Ker}(f - \mu \mathrm{id}) \subset \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda \mathrm{id}) \quad \text{et que} \quad \operatorname{Ker}(f + \mu \mathrm{id}) \subset \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda \mathrm{id}).$$
      ii. Montrer que
      $$\operatorname{Ker}(f^2 - \lambda \mathrm{id}) = \operatorname{Ker}(f - \mu \mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \mu \mathrm{id})$$
      (remarquer que $\forall y \in \operatorname{Ker} f^2 \;\; y = \frac{1}{2\mu}((f + \mu \mathrm{id})(y) - (f - \mu \mathrm{id})(y))$).
   (b) Montrer (avec soin) que f est diagonalisable.

Exercice 1635 La matrice suivante est-elle diagonalisable, triangularisable ? Effectuer explicitement la réduction.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

[Exercice corrigé]

Exercice 1636 Soit $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J \\ \hline J & 0 \end{array}\right)$. Calculer A^2, puis A^3. A l'aide d'un polynôme annulateur de A, montrer que A est diagonalisable.
Sans chercher à calculer le polynôme caractéristique de A, donner un ensemble fini contenant toutes les valeurs propres de A, puis donner les valeurs valeurs propres elles mêmes ainsi que leurs multiplicités. En déduire le polynôme caractéristique de A. **[Exercice corrigé]**

Exercice 1637 On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ et l'application ϕ_A définie par :

$$\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C}) \\ B & \mapsto & AB \end{array}$$

1. Montrer que ϕ_A est linéaire.
   Le but de l'exercice est de montrer que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
2. Calculer $\phi_A^2(B)$, puis $\phi_A^k(B)$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire que si P est un polynôme, alors $P(\phi_A) = \phi_{P(A)}$.
3. En déduire que P est un polynôme annulateur de A si et seulement si P est un polynôme annulateur de ϕ_A.

4. Montrer que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Exercice 1638 A n nombres complexes $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ avec $a_2 \neq 0$, on associe la matrice
$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ a_n & & & \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de A_n. Qu'en déduit-on pour le polynôme caractéristique χ_n de A_n ?
2. Calculer χ_2, χ_3.
3. On pose $b_n = a_2^2 + \cdots + a_n^2$. Par récurrence, montrer que $\chi_n = (-X)^{n-2}(X^2 - a_1X - b_n)$.
4. Si $b_n = 0$, A_n est-elle diagonalisable ?
5. Si $b_n \neq 0$, à quelle condition A_n est-elle diagonalisable ?

Exercice 1639 Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tA$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
Trouver une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 1640 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E tel que $u^p = 0$ pour un certain entier p. Quelles sont les valeurs propres de u. A quelle condition u est-il diagonalisable ? Montrer que $u^n = 0$.

Exercice 1641 Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables, triangularisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A l'aide du polynôme caractéristique de B, calculer B^{-1}.

[Exercice corrigé]

Exercice 1642 Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer ${}^tA$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Diagonaliser A.
3. Diagonaliser A dans une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$).

[Exercice corrigé]

Exercice 1643 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application linéaire suivante :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(0)X^3 + P'(0)X^2 + \frac{1}{2}P''(0)X + \frac{1}{6}P'''(0) \end{array}$$

1. Ecrire la matrice A de u dans la base canonique. Calculer A^2.
2. u est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de $\mathbb{R}^3[X]$ formée de vecteurs propres de u.

Exercice 1644 On considère un réel α et l'application T_α suivante :

$$T_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & X(X-1)P'' + (1+\alpha X)P' \end{array}$$

1. Montrer que pour tout entier $n > 0$, la restriction de T_α à $\mathbb{R}_n[X]$ défini un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On suppose pour cette question que $n = 3$.
   (a) Ecrire la matrice de T_α dans la base $(1, X, X^2, x^3)$.
   (b) Déterminer les valeurs propores de T_α. On les note $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
   (c) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T_α a des valeurs propres multiples.
   (d) Donner un vecteur propre de T_α pour chaque valeur propre, lorsque $\alpha = -1$, puis $\alpha = -4$. L'endomorphisme T_{-4} est-il diagonalisable ?
3. On suppose maintenant $n > 3$.
   (a) Ecrire la matrice de T_α dans la base $(1, X, X^2, ..., X^n)$.
   (b) Déterminer les valeurs propores de T_α. On les note $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$.
   (c) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T_α a des valeurs propres multiples. Dans chaque cas, donner la liste des valeurs propres avec leurs multiplicités
   (d) Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker} T_\alpha$ et de $\operatorname{Im} T_\alpha$ lorsque $\alpha \notin \{1-n, ..., -1, 0\}$.
   (e) Déterminer $\operatorname{Ker} T_\alpha$ pour $\alpha = -1$, puis $\alpha = 0$. L'endomorphisme T_0 est-il diagonalisable ?
   (f) Lorsque $\alpha = p - 1$ avec $p \in \{1, ..., n\}$, donner un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $T_\alpha(P) = 0$. En déduire $\operatorname{Ker} T_\alpha$. Préciser sa dimension.
   (g) Soit λ_k une valeur propre simple de T_α. Donner un vecteur propre de T_α associé à λ_k.

Exercice 1645 Soient $\mathbb{R}^n$ euclidien, $f \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale.

Exercice 1646 Diagonaliser en base orthonormale les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, a_i \in \mathbb{R}; B = \begin{pmatrix} a & b & & \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

Peut-on déterminer a, b tels que B soit la matrice d'un produit scalaire ?

Exercice 1647 Montrer que si A est une matrice symétrique réelle, alors $A + iI$ est inversible.

Exercice 1648 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ où } k \in \mathbb{C}.$$

(a) Déterminer, suivant les valeurs de k, la dimension du noyau de f.
(b) Montrer que M admet une valeur propre réelle entière indépendante de k, et calculer toutes les valeurs propres de M.
(c) Indiquer toutes les valeurs de k pour lesquelles on obtient des valeurs propres multiples. Pour quelles valeurs de ces k la matrice M est-elle semblable à une matrice diagonale ?

Exercice 1649 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$.

1. Montrer que n est pair, $n = 2p$.
2. Calculer $Sp_{\mathbb{R}}(A)$ et montrer $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{i, -i\}$. Pour quelle raison A est elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
3. Montrer que si $\{y_1, \dots y_k\}$ est une base de E_i, alors $\{\overline{y_1}, \dots \overline{y_k}\}$ est une base de E_{-i}. Quelle est donc la valeur de k ?
4. Démontrer que A est semblable (dans $M_n(\mathbb{R})$) à une matrice diagonale par blocs dont chacun des blocs diagonaux est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (on pourra utiliser la question 3.)

Exercice 1650 Soient M et $N \in M_n(\mathbb{K})$. On note $\varphi_M \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$ l'application $N \mapsto MN - NM$.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A et montrer que B n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que si N est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle λ de φ_M alors N est nilpotente. (on pourra établir que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $MN^k - N^kM = k\lambda N^k$.)
3. Montrer que l'identité n'appartient pas à l'image de φ_M. (utiliser la trace.)
4. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser φ_D puis φ_A. Montrer que φ_B n'est pas diagonalisable.
5. Montrer que si M est diagonalisable, φ_M est diagonalisable.
6. Etablir la réciproque lorsque M a au moins une valeur propre.

Exercice 1651 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application $p \in \mathcal{L}(E)$ est nommée projecteur lorsque $p^2 = p$.

1. Montrer que si p est un projecteur $1-p$ est un projecteur. Montrer que $\mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$.
2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soient p et q deux projecteurs tels que $p + q$ soit aussi un projecteur. Montrer que :
   (a) $pq = qp = 0$.
   (b) $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.
   (c) $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

   On suppose désormais E de dimension finie et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
3. Montrer que tout projecteur est diagonalisable et que deux projecteurs sont semblables si et seulement si ils ont même trace.
4. Montrer que toute matrice diagonalisable est combinaison linéaire de projecteurs.

Exercice 1652 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $P(Sp(u)) = \{P(\lambda); \lambda \in Sp(u)\}$.

1. On suppose que u est diagonalisable. Montrer que $P(Sp(u)) = Sp(P(u))$.
2. Montrer, dans le cas général, $P(Sp(u)) \subset Sp(P(u))$.
3. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ montrer que $Sp(P(u)) \subset P(Sp(u))$. Ce résultat est-il vrai lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Exercice 1653 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que f^2 soit diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

Exercice 1654 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ déterminée par sa matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Montrer que la restriction de f a tout sous-espace stable est diagonalisable.
3. En déduire tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Exercice 1655 Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ et $\varphi_M \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$ l'application $N \mapsto MN$. Montrer que φ_M est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable. (utiliser le polynôme minimal.)

Exercice 1656 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) La famille $\{id, f, f^2, \dots, f^{n-1}\}$ est libre.
(ii) Il existe $x \in E : \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ engendre E.
(iii) Les valeurs propres de f sont simples.

Exercice 1657 Soit ρ l'application de $\mathbb{R}_4[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par $(X^2 - 1)$.

1. Montrer que ρ est linéaire.
2. Montrer que $\rho^2 = \rho$. En déduire que ρ est diagonalisable.
3. Déterminer (de préférence sans calcul) une base de vecteurs propres pour ρ.

Exercice 1658 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propores de A. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(A - I)^2$. En déduire A^n, en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. Soient $P(X) = (X - 1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q.
   En remarquant que $P(A) = 0$ (on dit alors que P est un polynôme annulateur de A) et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme Q, retrouver A^n.
4. Montrer que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $(A-I)$ est un sous-espace de dimension 1, dont on désignera une base par ε_2. Déterminer ensuite un vecteur ε_3 tel que $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2+\varepsilon_3$. Soit enfin ε_1, un vecteur propre de f, non colinéaire à ε_2. Ecrire $\tilde{A}$, la matrice de f dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, ainsi que la matrice de passage P et son inverse P^{-1}. Retrouver A^n.

Exercice 1659 Soit f un automorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable.

Exercice 1660 Les questions sont indépendantes. K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base fixée de E et f un endomorphisme de E.

1. Quels sont les valeurs propres de l'endomorphisme nul de E ?
2. On suppose que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.
   (a) 2 est-il valeur propre de f ?

   (b) Le vecteur $2e_1 + e_2 + e_3$ est-il un vecteur propre de f ?

3. Pourquoi un vecteur de E ne peut-il être vecteur propre relativement à deux valeurs propres distinctes ?
4. (a) Est-il vrai que si λ est une valeur propre de f et si P est un polynôme annulateur de f alors λ est racine de P ?

   (b) Est-il vrai que si λ est une racine d'un polynôme annulateur de f alors λ est une valeur propre de f ?
5. Montrer que si $f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E = 0$ alors 1 est valeur propre de f.
6. Montrer qu'il existe toujours au moins un scalaire α tel que $f - \alpha \mathrm{Id}_E$ est bijectif.
7. Donner un exemple d'endomorphisme f de E avec $n = 2$ tel que la somme de deux vecteurs propres de f n'est pas un vecteur propre de f.
8. On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$ et que si $x \in E$ s'écrit $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ alors $f(x) = 2x_1 - 3x_2$.

   (a) Quel résultat assure l'existence d'un tel endomorphisme ?

   (b) Montrer que f est diagonalisable.
9. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
10. Si l' endomorphisme f admet 0 pour valeur propre et est diagonalisable, que peut-on dire de la dimension du noyau de f ?

Exercice 1661 Étudier le caractère diagonalisable des matrices suivantes et le cas échéant, les diagonaliser :

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$,
3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}), k \in \mathbb{C}$.

Exercice 1662 Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ et

$$f : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K), M \mapsto \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$.
2. Montrer que $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(K) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et $\mathrm{vect}(A)$ sont des sous-espaces propres de f.
3. En déduire que f est diagonalisable et écrire la matrice réduite de f.

Exercice 1663 Montrer que si le polynôme minimal d'un endomorphisme f d'un K-espace vectoriel de dimension finie admet une racine $\lambda \in K$ alors λ est valeur propre de f.

Exercice 1664 Étudier le caractère diagonalisable des matrices suivantes

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geqslant 2$,

Exercice 1665 Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors $\operatorname{tr}(f) \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que le polynôme cararactéristique de f s'écrive
$$\chi_f = (-1)^n X^{n-1}(X - \lambda).$$
3. (a) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}(f) \neq 0$.
   (b) Réduire sans calcul la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sans calcul les sous-espaces vectoriels propres.

Exercice 1666 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soit $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $Y^2 = D$.
   (a) Montrer que Y et D commutent.
   (b) En déduire que Y est diagonale puis déterminer Y.
2. (a) Montrer que A est diagonalisable.
   (b) En déduire les solutions $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation $X^2 = A$.

Exercice 1667 Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 est diagonalisable et $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2)$.
2. Soit $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Montrer que $\ker(f^2 - \mu^2 \mathrm{Id}_E) = \ker(f - \mu \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mu \mathrm{Id}_E)$.
3. On suppose $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2)$.
   (a) Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2)$.
   (b) On suppose en outre que f^2 est diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 1668 On considère la matrice par blocs $A = \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Calculer A^2.
2. Rechercher les éléments propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 1669 On désigne par E l'espace vectoriel des polynôme s à coefficients réels, et par E_n, le sous-espace des polynôme s de degré au plus n.

1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\Delta P(x) = (x+1)P'(x) + 2P(x)$ définit une application linéaire de E dans E. Quel est le degré de ΔP lorsque P appartient à E_n ?
2. On considère Δ_2, la restriction de Δ au sous-espace E_2. Déterminer les valeurs propres de Δ_2. L'endomorphisme Δ_2 est-il diagonalisable ? Est-ce que Δ_2 est un isomorphisme ?
3. En utilisant la définition des valeurs propres, calculer les valeurs propres et les polynôme s propres de Δ.

Exercice 1670 Pour tout élément non nul $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ est la matrice $A = (\alpha_{i,j})$ où $\alpha_{i,j} = a_i a_j$.

1. Déterminer le noyau et l'image de u.
2. En déduire les sous-espaces propres de u. Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Quel est le polynôme caractéristique de u ?

Exercice 1671 Soit B une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit son rayon spectral par

$$\rho(B) = \max\{|\lambda| \text{ avec } \lambda \text{ est une valeur propre de } B\}.$$

1. Montrer que $\lim_{k\longrightarrow+\infty} B^k = 0$.
2. En déduire que $I - B$ est inversible et que $(I-B)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} B^k$.

Exercice 1672 (Endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}^2$) On considère l'endomorphisme a de $E = \mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative $A = [a]_e^e$ dans la base canonique e est $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$. Calculer la trace, le déterminant, le polynôme caractéristique et le spectre de a. Quel théorème du cours garantit l'existence d'une base $f = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ de vecteurs propres ? Choisir ensuite f telle que $[\mathrm{id}_E]_f^e$ et $[\mathrm{id}_E]_e^f$ soient à coefficients entiers. Dessiner $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$, en prenant des unités d'axes assez petites. Dessiner quelques vecteurs $\vec{x}$ et leurs images $a(\vec{x})$ à l'aide de f.
Trouver deux matrices P et D carrées d'ordre 2 telles que D soit diagonale, P inversible et $A = PDP^{-1}$. Calculer $[a^{50}]_f^f$, $[a^{50}]_e^e$ et A^{50}. Calculer $\lim_{n\infty} \frac{1}{3^{2n}} a^{2n}$.
[Exercice corrigé]

Exercice 1673 (Endomorphisme d'un espace de matrices) Soit K un corps commutatif quelconque, et soit $F = \mathcal{M}_n(K)$ l'espace vectoriel sur K des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K. Si i et j sont des entiers compris entre 1 et n, on note par F_{ij} l'élément de F dont le coefficient (i,j) est 1 et dont les autres coefficients sont nuls. Montrer que les F_{ij} forment une base de F. Dimension de F ? Soit D dans F et diagonale. Soient α et β dans K et soit l'endomorphisme Φ de F qui à la matrice X fait correspondre la matrice $\Phi(X) = \alpha XD + \beta DX$. Calculer $\Phi(F_{ij})$. Φ est il un endomorphisme diagonalisable ? Donner son polynôme caractéristique en fonction des coefficients de D et de α et β.
[Exercice corrigé]

Exercice 1674 Soit $\theta \in]0,\pi[$. On considère les deux matrices d'ordre n :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}$$

Montrer par récurrence que $\det B = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ (Méthode : développer par rapport à la dernière ligne). Montrer que $\det B$ s'annule pour n valeurs distinctes de θ de $]0,\pi[$, et les déterminer. Si P_A est le polynôme caractéristique de A, calculer $P_A(-2\cos\theta)$ et déduire de ce qui précède les valeurs propres de A. Montrer que les valeurs propres des matrices $2I_n + A$ et $2I_n - A$ sont strictement positives.
[Exercice corrigé]

35 Réduction d'endomorphismes : autres réductions

35.1 Sous-espaces stables

Exercice 1675 Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le plan P d'équation $y + z = 0$ est-il stable par f ? La droite vect $\{(1,1,1)\}$ est-elle stable par f ?

Exercice 1676 Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ telle que $f^3 + f^2 + f = 0$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $F = \operatorname{Im} f$.

1. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel stable par f.
   (b) Montrer que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
   (c) En déduire que la restriction g de f à F est un automorphisme de F.
2. (a) Montrer que si $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ alors $\lambda = 0$.
   (b) En déduire que le rang de f est pair (raisonner par l'absurde et étudier les racines réelles du polynôme caractéristique de g).

Exercice 1677 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $a \in E$.

1. Montrer que le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant a et stable par f est $F_a = \operatorname{vect}\left\{f^k(a) : k \in \mathbb{N}\right\}$.
2. Montrer que si $\dim(E) = n$ alors $F_a = \operatorname{vect}\left\{f^k(a) : k = 0, ..., n-1\right\}$.
3. Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer qu'il n'existe pas $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $F_a = \mathbb{R}^3$. Généraliser à un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 1678 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par f et g l'endomorphisme de G induit par f.

1. Montrer que si $P \in K[X]$ vérifie $P(f) = 0$ alors $P(g) = 0$.
2. En déduire que si f est diagonalisable alors g est diagonalisable.
3. Application : trouver tous les sous-espaces vectoriels stables par l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 1679
1. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est trigonalisable. A est-elle diagonalisable ? Réduire A et déterminer son polynôme minimal.
2. Même question pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 1680 Quel est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ?

Exercice 1681 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres complexes. Exprimer $\operatorname{tr}(A^p)$ où $p \in \mathbb{N}$ en fonction des λ_j, $j = 1, ..., n$.

Exercice 1682 Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $fg = gf$.

1. Soit $x \in E$. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) = g(x)$ alors $f^n(x) = g^n(x)$.
   Dans toute la suite, on suppose g nilpotent.
2. (a) Déduire de 1. que si f est inversible alors $f + g$ est inversible.
   (b) Déduire de (a) que si $f + g$ est inversible alors f est inversible.
3. (a) Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrer que $\det(h + \operatorname{Id}_E) = 1$.
   (b) Montrer que $\det(f + g) = \det(f)$ (on distinguera selon que f est inversible ou non et on utilisera les questions précédentes.

Exercice 1683 Soient E un K-espace vectoriel, f et g des endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$ et P un polynôme de $K[X]$.

1. Montrer que $P(g)$ et f commutent.
2. Montrer que le noyau et l'image de l'endomorphisme $P(g)$ sont stables par f. Donner des cas particuliers de cette situation.

Exercice 1684 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par f. On désigne par g l'endomorphisme de F induit par f sur F.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(g) \subseteq \mathrm{Sp}(f)$.
2. Montrer que si $P(f) = 0$ alors $P(g) = 0$. En déduire que le polynôme minimal de g divise celui de f.

Exercice 1685 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E. Montrer que si f admet un sous-espace vectoriel propre de dimension $p \geqslant 2$ alors il admet une infinité de sous-espaces vectoriels stables par f.

35.2 Trigonalisation

Exercice 1686 Trigonaliser les matrices réelles suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1687 Mettre sous forme triangulaire les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} ; \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1688 Soient les matrices à coefficients réels suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Trigonaliser les matrices A, B et C.
2. Déterminer le polynôme minimal de A, B et C.

Exercice 1689 Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel canonique $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f^2 \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id})$.
2. Trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que $\ker f^2$ est stable par g. En déduire qu'un tel endomorphisme g ne peut exister.

Exercice 1690 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique ε de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Trouver une base $\varepsilon' = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}(f, \varepsilon') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - Id)^2$ sont laissés stables par g. En déduire que la matrice de g dans ε' est de la forme $\mathrm{Mat}(g, \varepsilon') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Préciser les valeurs possibles de a, b, c et d.
4. Soit $F = \{B \in M_3(\mathbb{R}); AB = BA\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. Calculer sa dimension (on pourra utiliser la question 3.).

Exercice 1691 Les questions sont indépendantes. K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base fixée de E et f. un endomorphisme de E.

1. Donner un exemple de matrice de $M_2(K)$ non trigonalisable.
2. Donner un exemple de matrice de $M_n(K)$ à la fois non diagonalisable et trigonalisable.
3. Déterminer sans calculs les valeurs propres complexes de f s i sa matrice dans $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. On suppose que $n = 3$ et que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que le plan d'équation $x + 2z = 0$ est stable par f.
5. Que peut-on dire d'un vecteur générateur d'une droite stable par f ?
6. Montrer que si l'endomorphisme f est trigonalisable alors il admet au moins un sous-espace vectoriel stable par f et de dimension $k \in [0, n]$ fixée.

35.3 Réduction de Jordan

Exercice 1692 Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4. Soit :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base canonique de E.

1. Calculer le polynôme caractéristique de u. Déterminer les sous-espaces propres E_1 et E_2. Pourquoi u est-il non diagonalisable ? Est-il triangularisable ?
2. Déterminer les sous-espaces caractéristiques F_1 et F_2. Pour $k = 1, 2$, donner l'ordre β_k du nilpotent $(u - \lambda_k.\mathrm{id}_E)|_{F_k}$ ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$).
3. Si $v \in F_2$ et $v \notin \ker(u - 2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2 - 1}$, montrer que $f_1 = (u - 2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2 - 1}(v)$, $f_1 = (u - 2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2 - 2}(v)$, $\ldots$, $f_{\beta_2} = v$ forment une base de F_2.
4. On note $f = \{f_1, \ldots, f_4\}$ la complétée de la base précédente par une base de F_1. Vérifier que $T = [u]_f^f$ est triangulaire. Décomposer T sous la forme $D + N$, où D est diagonale, N est nilpotente, et $DN = ND$. Calculer T^5.

Exercice 1693 Quel est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ?

Exercice 1694 Donner toutes les réduites de Jordan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des endomorphismes nilpotents pour $1 \leqslant n \leqslant 4$.

Exercice 1695 Soit ρ l'application de $\mathbb{R}_4[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par $(X^2 - 1)$.

1. Montrer que ρ est linéaire.
2. Montrer que $\rho^2 = \rho$. En déduire que ρ est diagonalisable.
3. Déterminer (de préférence sans calcul) une base de vecteurs propres pour ρ.

Exercice 1696 Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ ont-elles une racine carrée ?

Exercice 1697 Réduire sous la forme de Jordan les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1698 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice N (le plus petit entier p tel que $f^p = 0$). Montrer que

$$N = n \Leftrightarrow \operatorname{rang} f = n - 1.$$

35.4 Autres réductions

Exercice 1699 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique P_u de u. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces caractéristiques F_i.
2. Donner une base suivant laquelle la matrice de u se décompose en deux blocs diagonaux.
3. Donner les projections p_i de $\mathbb{R}^4$ sur F_i.

Exercice 1700 Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$ et $A \neq 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1701 Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n}$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice par blocs $M = \left(\begin{smallmatrix} I_n & I_n \\ O_n & O_n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.

2. (a) Déterminer le noyau de f.
   (b) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 1702 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et u un endomorphisme de E.
Soit $x_0 \in E \setminus \{0\}$. On note $x_k = u^k(x_0)$ et F le sous espace vectoriel engendré par la famille $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$, c'est à dire l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs de $x_k, k \in \mathbb{N}$:

$$F = \left\{ x \in E \;/\; \exists N \in \mathbb{N}, \exists(\alpha_0 \dots \alpha_N) \in \mathbb{R}^{N+1},\ x = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i x_i \right\}$$

1. Montrer que F est stable par u, c'est à dire que $\forall x \in F, u(x) \in F$.
2. Montrer qu'il existe un entier $k \leqslant n$ tel que $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ soit libre et $(x_0, x_1, \dots, x_{k+1})$ soit liée. Montrer alors qu'il existe des scalaires $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ tels que
$$x_{k+1} = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k$$
3. En déduire que le polynôme $P_0 = X^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ satisgfait $\big(P_0(u)\big)(x_0) = 0$.
4. Montrer que pour tout x de F, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $x = \big(P(u)\big)(x_0)$.
5. A l'aide des questions (3) et (4), montrer que $\forall x \in F, \exists R \in \mathbb{R}_k[X], x = \big(R(u)\big)(x_0)$.
   (on pourra effectuer la division eulidienne de P par P_0)
6. En déduire que $(x_0 \dots x_k)$ est une base de F.
7. Ecrire la matrice de la restriction $u_{|_F}$ de u à F dans cette base. Quel est le polynôme caractéristique de $\tilde{u}$?
8. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans la quelle
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_r \end{pmatrix}$$
   où les matrices C_i sont des matrices Compagnon.

[Exercice corrigé]

35.5 Applications

Exercice 1703 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Donner un polynôme annulateur de A de degré aussi petit que possible. En déduire A^{-1}, A^3, et A^5.

Exercice 1704 Résoudre les systèmes différentiels suivants

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 5y \\ \frac{dz}{dt} = -3x - 6y - 5z \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 3y + 4z \\ \frac{dz}{dt} = -3x - y - 2z \end{cases}$$

Exercice 1705 Déterminer toutes les suites (u_n) telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0 \\ u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 0 \end{cases}$$

Résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} f''' + f'' + f' + f = 0 \\ f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 1706 Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \frac{dx}{dt} & = & 2x(t) & + & 2y(t) & + & 2z(t) \\ \frac{dy}{dt} & = & x(t) & + & 3y(t) & + & 2z(t) \\ \frac{dz}{dt} & = & -x(t) & - & y(t) & - & z(t) \end{array} \right.$$

Donner toutes les solutions qui satisfont $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = -1$.

Exercice 1707 Réduire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(c'est à dire étudier la diagonalisabilité ou la triangularisabilité de A, et donner une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit aussi simple que possible)

Application : Déterminer toutes les fonctions dérivables x, y, z de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant les conditions :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + y \\ z' = x - 3y + 4z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

(on rappelle qu'il n'est pas utile de calculer P^{-1}...)

Exercice 1708 Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} + 2u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0.$$

Montrer que les suites réelles satisfaisant cette relation sont les suites de la forme :

$$u_n = A(-1)^n + B\cos(\frac{2n\pi}{3} + \phi)$$

où A, B et ϕ sont des réels.

Exercice 1709 Etant donnés quatre nombres réels (u_0, v_0, w_0, x_0), on définit quatre nouveaux nombres (u_1, v_1, w_1, x_1) en calculant les moyennes suivantes : $u_1 = \frac{2u_0+v_0+w_0+x_0}{5}$, $v_1 = \frac{u_0+2v_0+w_0+x_0}{5}$, $w_1 = \frac{u_0+v_0+2w_0+x_0}{5}$, et $x_1 = \frac{u_0+v_0+w_0+2x_0}{5}$. En itérant ce procédé, on définit quatre suites (u_n), (v_n), (w_n), et (x_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}(2u_n + v_n + w_n + x_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 2v_n + w_n + x_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + 2w_n + x_n) \\ x_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + w_n + 2x_n) \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice A associée à cette relation de récurrence, et la matrice $B = 5A$. Que dire de la diagonalisabilité de B ?
2. Sans calculer le polynôme caractéristique de B, montrer que 1 est valeur propre de B. Quelle est la dimension de l'espace propre associé ? Que dire de la multiplicité de 1 comme valeur propre de B ?
3. En utilisant la trace de B, déterminer toutes les valeurs propres de B.
4. Donner un polynôme annulateur de B de degré 2.
5. En déduire l'existence de deux réels a_n et b_n, que l'on calculera, tels que $B^n = a_n B + b_n I$.
6. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{5^n}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{5^n}$. En déduire que la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

   (On rappelle qu'une suite de matrices M_n est dite convergente si chaque suite de coefficient est convergente. On pourra utiliser sans démonstration la continuité des opérations élémentaires sur les matrices pour cette notion de limite, c'est à dire que :
   - si (λ_n) est une suite convergente alors pour toute matrice M, la suite $(\lambda_n M)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_n M) = (\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n)M$
   - si (M_n) est une suite de matrices convergente alors pour tout vecteur X, la suite de vecteurs $(M_n X)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to\infty}(M_n X) = (\lim\limits_{n\to\infty} M_n)X$.)
7. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et donner leur limite.

Exercice 1710 Donner toutes les suites (x_n), (y_n) et (z_n) telles que : *(on notera $\omega = e^{\frac{i\pi}{3}}$)*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = z_n + x_n \end{cases}$$

Parmi les solutions de ce système, donner celle qui satisfait $x_0 = 2$ et $y_0 = z_0 = 1$.
[Exercice corrigé]

Exercice 1711 Soit a un réel. On considère le système à n équations et n inconnues suivant :

$$\begin{cases} a\,x_1 - x_2 = 0 \\ -x_{p-1} + a\,x_p - x_{p+1} = 0 \quad (2 \leqslant p \leqslant n-1) \\ -x_{n-1} + a\,x_n = 0 \end{cases}$$

Écrire la matrice A_n associée à ce système. On note $D_n = \det A_n$. Calculer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2}

Exercice 1712 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$, avec $(b,c,d) \neq (0,0,0)$.

1. Calculer $A\,{}^tA$. Que vaut $\det A$ au signe près ?
2. En étudiant le signe du terme en a^4 dans le déterminant de A, montrer que $\det A = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. Sans calcul supplémentaire, en déduire que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = ((a-X)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.
3. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? (justifier)

4. On se place maintenant dans le cas où $a = 1$, $b = c = d = -1$. Vérifier que $(i\sqrt{3}, 1, 1, 1)$ et $(-1, i\sqrt{3}, -1, 1)$ sont des vecteurs propres de A, puis diagonaliser A sur $\mathbb{C}$.
5. Application : résoudre le système récurent suivant (il n'est pas nécessaire de calculer l'inverse de la matrice de passage de la question précédente). On notera $\omega = 1/2 + i\sqrt{3}/2 = e^{i\pi/3}$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n + v_n + w_n + h_n \\ v_{n+1} & = & -u_n + v_n - w_n + h_n \\ w_{n+1} & = & -u_n + v_n + w_n - h_n \\ h_{n+1} & = & -u_n - v_n + w_n + h_n \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ v_0 & = & 0 \\ w_0 & = & 0 \\ h_0 & = & 0 \end{array}\right.$$

[Exercice corrigé]

Exercice 1713 Résoudre le système différentiel $X' = AX$ où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 1714 Soit la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Par différentes méthodes, calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la formule obtenue a un sens pour $n \in \mathbb{Z}$ et donner plusieurs méthodes pour établir sa validité dans ce cas.

Exercice 1715 Soit l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{smallmatrix}\right).$$

1. Déterminer toutes les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f.
2. Déterminer toutes les plans vectoriels P de $\mathbb{R}^3$ stables par f (on commencera par étudier le polynôme caractéristique de la restriction de f à P).
3. Donner la liste de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Exercice 1716 Calculer les puissances et l'exponentielle ($e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$) des matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1717 Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = f$. Dans le cas d'existence de g, donner le nombre exact de g tel que $g^2 = f$.

Application Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$. Déterminer une N.

Exercice 1718 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M et ${}^tM$ sont semblables.
Indication : le montrer d'abord pour des blocs de Jordan n'ayant que des 1 au-dessus de la diagonale.

Exercice 1719 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur M pour que M et $2M$ soient semblables.

Exercice 1720 Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes. On pose

$$\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{L}(E) : au = ua\}.$$

1. Soit $u \in \mathcal{C}$.
   (a) Montrer que tout sous-espace vectoriel propre de a est stable par u.
   (b) En déduire que u est diagonalisable.
2. (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et que $\dim \mathcal{C} = n$.
   (b) Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, a, ..., a^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$ (raisonner par l'absurde et utiliser le polynôme minimal de a.)
   (c) En déduire que $\mathcal{C} = \{P(u) : P \in K[X]\}$.

Exercice 1721 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et $a \in E$ tels que la famille $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$ est une base de E.

1. Soit $P \in K[X] \setminus \{0\}$ un polynôme annulateur de f. Montrer que $\deg(P) \geqslant n$ (raisonner par l'absurde).
2. En déduire que le polynôme minimal de f est (au signe près) le polynôme caractéristique de f.

Exercice 1722 Donner un exemple de deux matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ayant même polynôme caractéristique et même polynôme minimal et pourtant non semblables. Qu'en est-il pour deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 1723 Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel

$$\mathcal{S} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \geqslant 3, u_n = 3u_{n-1} - 3u_{n-2} + u_{n-3}\right\}.$$

1. Montrer que l'application

$$f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, u_2)$$

   est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriels.
2. Soient la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A et, pour $n \geqslant 2$, $U_n = (u_{n-2}, u_{n-1}, u_n) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $\sigma(U_{n-1}) = U_n$ et en déduire une base de $\mathcal{S}$.

Exercice 1724 Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de nombres réels satisfaisant aux relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - x_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Calculer les valeurs de x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0 et z_0.

Exercice 1725 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = f$. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $f_t = id + tf$ est inversible ? Calculer f_t^{-1}.

Exercice 1726 Etudier les solutions (suivant A) dans $M_2(\mathbb{C})$ de l'équation $X^2 = A$.

Exercice 1727 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $C(A) = \{B \in M_n(\mathbb{K}); AB = BA\}$.

1. On suppose que A a des valeurs propres simples. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   i) $B \in C(A)$.

   ii) B a une base de vecteurs propres en commun avec A.

   iii) Il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $B = P(A)$.

   iv) Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = P(A)$.

2. On suppose que $n = 3$ (pour simplifier) et que A est diagonalisable avec une valeur propre double. Déterminer $C(A)$.

Exercice 1728 *Les parties I, II, III et IV peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.*

Soient $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & 1-a & a-1 \\ -1 & 3 & 2a-3 \\ a-2 & 2-a & 3a-2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice dépendant d'un paramètre réel a et f_a l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice M_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On nomme *racine carrée* d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ toute matrice $N \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$.

On désigne par I la matrice identité et, pour toute base ε de $\mathbb{R}^3$, on note $\mathrm{Mat}(f_a, \varepsilon)$ la matrice représentant l'endomorphisme f_a dans la base ε.

I

1. Calculer les valeurs propres de M_a en fonction de a. Pour quelle raison la matrice M_a est-elle triangularisable ?
2. Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

II

On pose maintenant (questions 3 et 4) $a = 2$.

3. Diagonaliser M_2. Déterminer une racine carrée A de M_2.
4. (a) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $g^2 = f_2$. Montrer que g est diagonalisable (on pourra déterminer le polynôme minimal de f_2). Montrer que les sous-espaces propres de f_2 sont laissés stables par g.

   (b) Démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ a une infinité de racines carrées. En déduire l'existence d'une infinité de racines carrées de M_2.

III

5. On pose $a = 1$. Montrer que $M_1 = 2I + N$ avec N nilpotente (telle que $N^2 = 0$). En déduire la valeur de $(M_1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer deux réels α et β tels que $\alpha I + \beta N$ soit une racine carrée de M_1.

IV

On pose désormais (questions 6 et 7) $a = 0$.

6. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f_0^2) \oplus \mathrm{Ker}(f_0 - 2I)$. Déterminer une base ε de $\mathbb{R}^3$ telle que l'on ait : $\mathrm{Mat}(f_0, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
7. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme tel que $g^2 = f_0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f_0^2)$ est laissé stable par g. En déduire que f_0 n'a pas de racine carrée.

Sixième partie
ANALYSE 3

36 Fonctions convexes

Exercice 1729 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in]0, +\infty[$.

1. En utilisant la concavité du log, montrer que $(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$.
2. Montrer que $(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}$.
3. En déduire que $n! \leqslant (\frac{n+1}{2})^n$.

Exercice 1730 Soit f une fonction C^2 sur $\mathbb{R}$ convexe croissante et non constante. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f =$ tûûûûûût.

Exercice 1731 Soient p et $q \in]0, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que $\forall x, y > 0$ $xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
2. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q = 1$. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant 1$.
3. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$. Montrer l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} y_i^q)^{\frac{1}{q}}$$
4. Soit $p > 1$. En écrivant $(x_i + y_i)^p = x_i(x_i + y_i)^{p-1} + y_i(x_i + y_i)^{p-1}$, montrer l'inégalité de Minkowski :
$$(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} y_i^p)^{\frac{1}{p}}$$
5. Soit (a_n) une suite strictement positive, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$. Montrer que si (u_n) converge alors (v_n) aussi.

Exercice 1732 Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ convexe.

1. Montrer que f' admet une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
2. En déduire que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$ (on pourra utiliser des ε et une formule de Taylor à l'ordre 1).

Exercice 1733 $I \subset \mathbb{R}^{+*}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $J = \left\{x; \frac{1}{x} \in I\right\}$.
Montrer que J est un intervalle de $\mathbb{R}^{+*}$, puis que si $(x, y) \in I^2$, alors :
$$\forall \lambda \in [0, 1], \exists \mu \in [0, 1], \frac{1}{\lambda x + (1-\lambda) y} = \mu \frac{1}{x} + (1-\mu) \frac{1}{y}.$$
Soit f continue sur I, et g définie sur J par $g(x) = f(\frac{1}{x}), h$ définie sur I par $h(x) = x f(x)$. Montrer que g est convexe $\Leftrightarrow$ h est convexe.

Exercice 1734 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe majorée. Que dire de f ? Et si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$?

Exercice 1735 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2, v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$. Montrer que si $(u_n)_n$ converge alors $(v_n)_n$ aussi.

Exercice 1736 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, ..., x_n) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n, 1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(1 + \prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 1737 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 1738 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe ou I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, dérivable en $x_0 \in I$ et telle que $f'(x_0) = 0$. Montrer que x_0 minimise f sur I.

Exercice 1739 Soit $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que g est convexe si et seulement si :

$$\forall h \in CM([0,1], \mathbb{R}), g\left(\int_0^1 h\right) \leqslant \int_0^1 g(h).$$

37 Notions de topologie

Exercice 1740 Soit $x = (x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad ; \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

et

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Démontrer que
$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$$
et
$$\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$
pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Discuter le cas $n = 1$.
3. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule unité fermée
$$B_{\|\cdot\|} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \|x\| \leqslant 1\}$$
pour chacune des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 1741 Représenter graphiquement et déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts.
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x - 1| < 1\}$; $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leqslant 1\}$;
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1, \ |y| \leqslant 1\}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$;
$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\}$; $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$.

Exercice 1742 Montrer que toute reunion et toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. Que peut-on dire des intersections infinies d'ensembles ouverts ?

Exercice 1743 (partiel 1999) On définit un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ en posant

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\}.$$

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A. L'ensemble A est-il connexe ?

Exercice 1744 (partiel 1999) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
(1) $\forall M > 0$, $\exists R > 0$ tel que $\|x\| > R \Rightarrow |f(x)| > M$.
(2) Pour toute partie bornée B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.
(3) Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1745
1. Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ euclidien muni d'une b.o.n., représenter les ensembles suivants :
   - $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 4\}$
   - $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 - y^2 > 1 \text{ et } x^2 + \frac{y^2}{4} < 4\}$
   - $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x+y+z < 3 \text{ et } x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } z > 0\}$
   - $\mathcal{D} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{ll} & x+y+z < 1 \\ \text{et} & x-y+z < 1 \\ \text{et} & -x-y+z < 1 \end{array} \right\}$
   - $\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 < 0 \text{ et } 2 < z < 4\}$
   - $\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1 \text{ et } x^2 + y^2 < z^2 \text{ et } z > 0\}$
   - $\mathcal{G} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ et } z = x - 1\}$.
2. Déterminer les projections de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ sur le plan (xOy).

Exercice 1746 (Images directes et réciproques)
1. Soit f l'application affine par morceaux, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant -2 \\ 1+x & \text{si} \quad -2 < x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$
Soient $A = [-1, 0[$ et $B = [0, 2[$. Déterminer $f(A)$, $f^{-1}(B)$, $f(\mathbb{R}\backslash A)$, $f^{-1}(f(A))$, $f(f^{-1}(B))$, $f(A \cap B)$, et $f(A) \cap f(B)$.
2. Soient deux ensembles E et F, et $f : E \to F$ une application. Comparer les ensembles $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$, $f^{-1}(f(A))$ et A, $f(f^{-1}(B))$ et B, $f(E \setminus A)$ et $F \setminus f(A)$.

Exercice 1747 Soit l'application $\left(\begin{array}{cccc} G: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\frac{u}{u+v}, \frac{\sqrt{v(v+2u)}}{u+v}) \end{array} \right)$. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de G. Déterminer $G(\mathcal{D})$.

Exercice 1748 Soient les applications f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y) \text{ et } g(x,y) = (2x, \frac{y}{\sqrt{2}}).$$

Soient les ensembles

$$\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{xy}{2} = 1\},$$

$$\text{et } \mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + 2y^2 = 1\}.$$

Déterminer $f(\mathcal{D}_1)$ et $g^{-1}(\mathcal{D}_2)$.

Exercice 1749 Simplifier l'écriture des ensembles suivants :

$$I = \bigcup_{n>1} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] \text{ et } J = \bigcap_{i>0, j>0}] - \frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{j}[.$$

Exercice 1750 Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer les implications suivants :
- $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in A,\ x < M \Rightarrow \sup A \leqslant M$
- $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$.

Exercice 1751 Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit :

$$A + B = \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B, c = a + B\}.$$

1. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure, puis que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
2. Montrer l'implication :

$$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in A, \forall y \in B,\ x + y < M \Rightarrow \sup A + \sup B \leqslant M.$$

Exercice 1752 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x \geqslant \varepsilon$. Montrer que $\varepsilon = 0$.

Exercice 1753 Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sup\{|x - y| : (x, y) \in A^2\} = \sup A - \inf A.$$

Exercice 1754 Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Compacts ?

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - \sin(y) \leqslant 4\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - 4e^y > 4\}$$
$$C = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \cos(x) \geqslant 0\}$$

Exercice 1755 On se propose de montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion d'intervalles ouverts disjoints. On considère donc un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ et pour tout $x \in U$ on pose

$$C(x) = \{y \in [x, +\infty[\mid [x, y] \subset U\} \cup \{y \in] - \infty, x[\mid [y, x] \subset U\}.$$

1. Montrer que $C(x)$ est un intervalle ouvert pour tout x. (Considérer $\inf_{y \in C(x)} y$ et $\sup_{y \in C(x)} y$.)
2. Pour tous x, y dans U, montrer qu'on a $C(x) = C(y)$ ou $C(x) \cap C(y) = \emptyset$.
3. Conclure.

Exercice 1756 Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E. Montrer :

1. $C_{\overset{\circ}{A}} = \overline{C_A}$, $C_{\bar{A}} = \overset{\circ}{C_A}$
2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

   En **déduire** $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
3. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

   En **déduire** $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.

   Donner un exemple pour lequel l'inclusion réciproque n'est pas réalisée.

Exercice 1757 Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On rappelle que la frontière de A est l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$. Montrer que :

1. $\text{Fr}(A) = \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x,\varepsilon) \cap C_A \neq \emptyset\}$
2. $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(C_A)$
3. A est fermé si et seulement si $\text{Fr}(A)$ est inclus dans A.
4. A est ouvert si et seulement si $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.

Exercice 1758 Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrer que $\bar{A}$ est l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de A.
2. On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente que si A est bornée, alors $\sup A \in \bar{A}$. (Construire une suite de points appropriée.)

Exercice 1759 Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon.

Exercice 1760 Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E. On pose $A + B = \{z \in E \mid \exists x \in A, \exists y \in B, z = x + y\}$.
Montrer que si A est ouvert, $A + B$ est ouvert. (Commencer par le cas où B est un singleton.)

Exercice 1761 Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est fermé.

Exercice 1762 Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide et bornée de E. On définit $\text{diam}(A) = \sup\{\|y - x\|, x, y \in A\}$.

1. Montrer que si A est bornée, alors $\bar{A}$ et $\text{Fr}(A)$ sont bornés.
2. Comparer $\text{diam}(A)$, $\text{diam}(\overset{\circ}{A})$ et $\text{diam}(\bar{A})$ lorsque $\overset{\circ}{A}$ est non vide.
3. (a) Montrer que $\text{diam}(\text{Fr}(A)) \leqslant \text{diam}(A)$.
   (b) Soit x et u des éléments de A avec $u \neq 0$. On considère l'ensemble $X = \{t \geqslant 0 \mid x + tu \in A\}$. Montrer que $\sup X$ existe.
   (c) En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $\text{Fr}(A)$.
   (d) En déduire que $\text{diam}(\text{Fr}(A)) = \text{diam}(A)$.

Exercice 1763 Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, les ensembles suivants sont-ils compacts ?
– $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leqslant \|(x, y)\| \leqslant 2 \text{ et } xy = 1\}$.
– $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < \|(x, y)\| \leqslant 2 \text{ et } xy = 1\}$.
– $C = \{(x, \cos n) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 18 \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 1764 Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit la *distance* d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $d(x_0, A)$, par la formule

$$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0, B) \geqslant d(x_0, A)$.)
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0, A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\|a - b\| \geqslant \delta \qquad \forall (a, b) \in A \times B.$$

5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

Exercice 1765 Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 1766 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour toutes parties A et B de E on note

$$A + B = \{z \in E \mid \exists (x, y) \in A \times B, z = x + y\}.$$

Montrer que si A est compact et B fermé, alors $A + B$ est fermé.

Exercice 1767 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit (x_n) une suite convergente de E et x sa limite. Montrer que l'ensemble $\{x\} \cup \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est compact.

Exercice 1768 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On suppose que (x_n) est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

Exercice 1769 Soit X une partie de $\mathbb{R}^2$; montrer qu'elle est fermée si et seulement si pour toute partie fermée bornée $K, K \cap X$ est fermée bornée.

Exercice 1770 Soient $k \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\omega_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{k^2}{n^2}\right\},$$

et

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \omega_n.$$

Ω est-il ouvert ? fermé ? ...

Exercice 1771 Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles fermés bornés de $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, K_{n+1} \subset K_n$, et $K_n \neq \emptyset$.
Montrer que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} K_n \neq \emptyset.$$

Exercice 1772 Montrer que l'intersection de deux ensembles ouvert est ouvert, que l'union de deux ensembles fermés est fermée, que cela reste vrai pour un nombre fini d'ensembles, mais que cela peut devenir faux si l'on considère des suites infinies.

Exercice 1773 Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ; on pose

$$\mathrm{Int}(E) =^c \overline{{}^c E}.$$

Montrer que $\mathrm{Int}(E)$ est le plus grand ouvert contenu dans E.

Exercice 1774 Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^2$, montrer que $\overline{A}$ est aussi bornée et que

$$\sup_{x\in A} \|x\| = \sup_{x\in\overline{A}} \|x\| .$$

Exercice 1775 Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^2$, montrer que $\overline{C}$ est aussi convexe.

Exercice 1776 Classer (pour l'inclusion) les parties : $\overline{A \cap B}, \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}, \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 1777 Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, chacune des parties suivantes est-elle ouverte ? fermée ?
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, [0,1[, [0,+\infty[,]0,1[\cup\{2\}, \{1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}, \bigcap_{n\geqslant 1}]-1/n, 1/n[$.

Exercice 1778 Soit E un evn (espace vectoriel normé). Soit A une partie de E. Montrer l'égalité

$$E\backslash\overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E\backslash A}} \quad \text{et} \quad E\backslash \overset{\circ}{A} = \overline{E\backslash A}$$

Exercice 1779 Soit E un evn, V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $\overset{\circ}{V} \neq \varnothing$ alors $V = E$.

Exercice 1780 Représenter graphiquement les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et dire pour chacune d'elle si c'est un ouvert, un fermé, ou ni l'un ni l'autre. Déterminer leurs adhérences et intérieurs.

1. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ |x| \neq 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$$
2. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ |x| = 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$$
3. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ |x| \neq 1 \text{ ou } |y| \neq 1\}$$
4. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ 1 - xy > 0\}$$
5. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ 3x + 4y = 2\}$$
6. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ , x^2 + y^2 = 1\}$$
7. $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ , xy = 1\}$$
8. $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{1/n\} \times [0,1]$$

Exercice 1781 Déterminer l'adhérence de chacune des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
2. $\{1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$
3. $\{\frac{(-1)^n}{1+1/n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$

Exercice 1782 Soient A et B, deux parties d'un evn E.

1. Montrer que si O est un ouvert de E, alors $A+O$ est ouvert. (Indication : Prendre d'abord $A = \{a\}$ puis A quelconque ....)
2. Etablir que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. (Trouver un exemple où l'inclusion est stricte)

Exercice 1783 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. $\forall n \geqslant 1$, on pose $A_n = \{u_p /\ p \geqslant n\}$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est $V = \bigcap_{n\geqslant 1} \overline{A_n}$, et qu'ainsi V est fermé. En déduire que si la suite est bornée, alors l'ensemble V est un compact non vide.

38 Fonctions de deux variables

38.1 Limites

Exercice 1784 Etudier l'existence des limites suivantes :

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x+y}$;
2. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$.
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^2-y^2}$
5. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$

Exercice 1785 Soit

$$f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

Démontrer que

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=0$$

et que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Exercice 1786 Soit

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} & \text{si } xy\neq 0\\ 0 & \text{si } xy=0\end{cases}$$

Démontrer que les deux limites itérées

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y) \quad \text{et} \quad \lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)$$

n'existent pas, et que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existe et est égale à 0.

Exercice 1787 Déterminer les limites

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$;
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}$;
3. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}$;
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$;
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$;
7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos xy}{y^2}$;
8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{\cos y-\cosh x}$

Exercice 1788 Etudier l'existence d'une limite en $(0,0,0)$ pour les fonctions f suivantes :

1. $f(x,y,z)=\frac{xyz}{x+y+z}$;
2. $f(x,y,z)=\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$.

38.2 Continuité

Exercice 1789 Étudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$
\begin{aligned}
&f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} && \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0),\\
&f_1(0,0) = 0.\\
&f_2(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} && \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0),\\
&f_2(0,0) = 0.
\end{aligned}
$$

Exercice 1790 (partiel 1999) 1. Étudier la continuité de la fonction $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{(\sin x)\,(\sin y)}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Soit $a > 0$ fixé. Étudier la continuité de la fonction $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^a\,|y|^a}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Étudier la continuité de la fonction $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_3(x,y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{si } y > x^2 \\ 0 & \text{si } y \leqslant x^2. \end{cases}$$

4. On définit une fonction continue de l'ouvert $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0\}$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$f_4(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\,\sin\frac{1}{x}\,\sin\frac{1}{y}\,\cos\frac{1}{z}.$$

Étudier la possibilité de prolonger f_4 en une fonction continue sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1791 Prolonger par continuité la fonction $g : \begin{cases} (\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xy\ln(x^2+y^2) \end{cases}$.

Exercice 1792 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,.)$ et $f(.,y)$ sont continues. Montrer qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \lim_{n\to\infty} g_n(x,y) = f(x,y).$$

Exercice 1793 Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = f(x+y, x-y).$$

Exercice 1794 Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction suivante :

1.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

3.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4y}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

4.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^4}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

5.
$$f(x,y)=\begin{cases}y^2\sin\frac{x}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

6.
$$f(x,y)=\begin{cases}xe^{\arctan\frac{y}{x}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 1795 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,x)\ ;\ x\in\mathbb{R}\}$ par
$$f(x,y)=\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\ .$$
Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 1796 Etudier la continuité en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+y)^4}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|x|^3|y|^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

3.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 1797 Etudier la continuité des fonctions suivantes :

1.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+2y)^3y^3}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^6+x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3.
$$f(x,y)=\begin{cases}e^{\frac{x}{y}} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

4.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{y} & \text{si } y\neq 0\\ x & \text{sinon.}\end{cases}$$

5.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)-\ln(1+y)}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ \frac{1}{1+x} & \text{sinon.}\end{cases}$$

définie sur $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$.

38.3 Différentiabilité

Exercice 1798 Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto x \text{ si } |x|>|y|\\ (x,y)\mapsto y \text{ si } |x|<|y|\\ (x,y)\mapsto 0 \text{ si } |x|=|y|\end{cases}$.

Étudier la continuité de f, l'existence des dérivées partielles et leur continuité.

Exercice 1799 Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0)\mapsto 0\end{cases}$.

Étudier la continuité de f et l'existence des dérivées partielles. f est-elle C^1 ?

Exercice 1800 Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0)\mapsto 0\end{cases}$.

Étudier la continuité de f. Montrer que f est C^1. Calculer les dérivées partielles secondes en $(0,0)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 1801 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y)=f(x+y)\qquad h(x,y)=f(x^2+y^2)\qquad k(x,y)=f(xy)$$

Exercice 1802 Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0)\mapsto 0\end{cases}$.

Montrer que f admet une dérivée en $(0,0)$ suivant tout vecteur mais n'admet pas de développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$.

Exercice 1803 Étudier la continuité, l'existence de dérivées partielles et le caractère C^1 des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$(x,y)\to x \text{ si } |x|>|y|, (x,y)\to y \text{ si } |y|>|x|, (x,y)\to 0 \text{ si } |x|=|y|;$$

$$(x,y)\to(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, (0,0)\to 0;$$

$$(x,y)\to\sin|xy|;$$

$$(x,y)\to\frac{y^2}{x} \text{ si } x\neq 0, y \text{ si } x=0.$$

Exercice 1804 Soit $a \in \mathbb{R}^2$ fixé ; l'application $x \to \langle x, a \rangle$ de $\mathbb{R}^2$ usuel dans $\mathbb{R}$ est-elle continue, admet-elle des dérivées partielles, celles-ci sont elles continues ?

Exercice 1805 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
– si $|x| \leqslant y$, $f(x,y) = x^2$.
– $f(x,y) = y^2$ sinon.
Étudier la continuité de f et l'existence de dérivées partielles.

Exercice 1806 Montrer qu'une norme N sur $\mathbb{R}^2$ ne peut avoir des dérivées partielles qui existent et qui soient continues en 0.

Exercice 1807 Soient $\alpha > 0$ et $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que
$$\forall (x,y) \neq (0,0) \quad |f(x,y)| \leqslant \left(x^2+y^4\right)^{\frac{2\alpha-3}{4}}.$$
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \left|f(y^2,y)\right|$.
   (c) Étudier la continuité de f en (0,0).
2. (a) Montrer que
$$\forall (x,y) \neq (0,0) \quad \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant |x|^{\alpha-2}.$$
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{|f(x,x)|}{\sqrt{2}|x|}$.
   (c) Étudier la différentiabilité de f en (0,0).

Exercice 1808
1. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y) = e^{x^2+y^2}$ au point $P(1,0)$ suivant la bissectrice du premier quadrant.
2. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y,z) = x^2 - 3yz + 5$ au point $P(1,2,1)$ dans une direction formant des angles égaux avec les trois axes de coordonnées.
3. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y,z) = xy + yz + zx$ au point $M(2,1,3)$ dans la direction joignant ce point au point $N(5,5,15)$.

Exercice 1809 Etudier la continuité, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles premières, des fonctions suivantes :

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. $$f(x,y) = \begin{cases} e^{x \ln(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 1810 On définit la fonction

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ et que f est continue mais pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 1811 Soit $f:]0,1[\times]0,1[\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}x(1-y) & \text{si } x\leqslant y\\ y(1-x) & \text{si } x>y\end{cases}$$

Etudier la continuité et la différentiabilité de f.

Exercice 1812 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0,0)$ et admet des dérivées partielles dans toutes les directions, mais n'y est pas différentiable.

Exercice 1813 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2y^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\ .\end{cases}$$

Montrer que la fonction f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais que $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ ne sont pas continues en certains points de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1814 Etudier la différentiabilité et la continuité des dérivées partielles de la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{3/2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\ .\end{cases}$$

Exercice 1815 Etudier la différentiabilité en $(0,0)$ des fonctions définies par

1. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 1816 Calculer les dérivées partielles (d'ordre un) des fonctions suivantes en un point arbitraire du domaine de définition.

1. $f(x,y)=x^2e^{xy}$;
2. $g(x,y,z)=x^2y^3\sqrt{z}$;
3. $h(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

Exercice 1817 Calculer les dérivées partielles (d'ordre un) de la fonction $f(x,y)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$ en $(2,1)$.

Exercice 1818 On définit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ et $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ bien que f ne soit pas continue en $(0,0)$.

Exercice 1819

1. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$ au point $P(1,2)$ dans une direction formant avec l'axe Ox un angle de $\frac{\pi}{3}$.
2. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ au point $P(1,2)$ dans la direction joignant ce point au point $M(4,6)$.
3. Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ au point $P(1,1)$ suivant la bissectrice du premier quadrant.

Exercice 1820 Calculer les différentielles des fonctions suivantes en un point arbitraire du domaine de définition :

1. $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$;
2. $f(x,y) = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$.

Exercice 1821 Calculer $df\,(1,1)$, si $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$.

Exercice 1822 Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y,z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$ à l'origine dans une direction formant avec les axes de coordonnées x, y, z les angles α, β, γ.

38.4 Extremums

Exercice 1823 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - xy^2$. Montrer que $(0,0)$ est le seul point critique de f, qu'il n'est pas un extremum local, mais que pourtant la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ admet en ce point un minimum local.

Exercice 1824 Ecriver la formule de Taylor de second ordre pour chacune des fonctions suivantes au point (x_0, y_0) donné.

1. $f(x,y) = \sin(x+2y)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
2. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
3. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\cos xy$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
4. $f(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
5. $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos y$, $(x_0,y_0) = (1,0)$.

Exercice 1825 Pour chacune des fonctions suivantes etudiez la nature du point critique donné :

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ au point critique $(0,0)$;
2. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ au point critique $(0,0)$;
3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz$ au point critique $(0,0,0)$;
4. $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ au point critique $(0,0)$.

Exercice 1826 Trouvez les points critiques des fonctions suivantes et déterminez si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

1. $f(x,y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$;
2. $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$;

3. $f(x, y, z) = \cos 2x \cdot \sin y + z^2$;
4. $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$.

Exercice 1827 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$.

1. Étudier les extremums locaux de f.
2. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que f a un maximum M et un minimum m sur D.
3. Soit $(x, y) \in D$. Montrer que si $f(x, y) = M$ ou $f(x, y) = m$, alors $x^2 + y^2 = 1$.
4. Étudier la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$. En déduire les valeurs de M et m.

Exercice 1828 Trouver le point du plan $(2x - y + z = 16)$ le plus proche de l'origine.

Exercice 1829 Déterminer les extremums de $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y2)$ sur $[0, 1]^2$.

Exercice 1830 Soit $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$. Montrer que f admet au plus un extremum. Ecrire $f(x, y) + 9$ comme la somme de deux carrés et en déduire que f admet -9 comme valeur minimale.

Exercice 1831 Déterminer un triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle donné.

Exercice 1832 Soit $f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.
Montrer que f admet un minimum local en 0 suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ mais n'admet pas de minimum local en $(0, 0)$.

Exercice 1833 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xe^y + ye^x \end{cases}$.
Montrer que $(-1, -1)$ est le seul extremum possible. A l'aide d'un développement limité de $\varphi(h) = f(-1 + h, -1 + h)$ et de $\psi(h) = f(-1 + h, -1 - h)$, montrer que f n'a pas d'extremum.

Exercice 1834 Déterminer les extrémums de $f : (x, y, z) \to x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$.

Exercice 1835 Déterminer $\max\limits_{|z| \leqslant 1} |\sin z|$. On rappelle que : $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Exercice 1836 Si f est concave sur un ouvert convexe $U \subset \mathbb{R}^2$ et si :

$$\exists a \in U, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 0,$$

alors f admet un maximum local en a.

Exercice 1837 Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, on définit $\int(A)$ comme l'ensemble $\{x \in A | \exists \rho > 0, B(x, \rho) \subset A\}$. On supposera A fermée bornée et $\int(A) \neq \emptyset$. On suppose que f est une fonction C^1 sur A telle que f est constante sur $A \setminus \mathrm{Int}(A)$. Montrer qu'il existe $z \in \mathrm{Int}(A)$ tel que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(z) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(z) = 0.$$

Exercice 1838 Chercher les extrémums sur $\mathbb{R}^2$ des applications :

$$(x, y) \to x^4 + y^4 - 4xy;$$

$$(x, y) \to (x - y)e^{xy};$$

$$(x, y) \to xe^y + ye^x;$$

$$(x, y) \to e^{x \sin y};$$

$$(x, y) \to x^3 + y^3.$$

Exercice 1839 Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

1. Rappeler une condition nécessaire pour que f présente un extremum local en (x_0, y_0).
   Dans la suite de l'exercice, $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$ vérifie cette condition, c'est-à-dire est un *point critique* de f. On pose
   $$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}),$$
   $$Q(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \quad \Delta = B^2 - AC,$$
   $$R(t) = At^2 + 2Bt + C, \quad S(t) = Ct^2 + 2Bt + A.$$
2. On suppose $\Delta < 0$ et $A(\text{ou } C) > 0$.
   (a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $R(t) \geqslant \delta$ et $S(t) \geqslant \delta$ pour un certain $\delta > 0$.
   (b) On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$, et on suppose que $\sin\theta.\cos\theta \neq 0$.
   Montrer successivement :
   $$Q(x,y) \geqslant r^2\delta\sin^2\theta,$$
   $$Q(x,y) \geqslant r^2\delta\cos^2\theta,$$
   $$Q(x,y) \geqslant \tfrac{r^2}{2}\delta.$$
   En déduire que
   $$\forall (x,y) \quad Q(x,y) \geqslant \frac{r^2}{2}\mathrm{Inf}(\delta, 2A, 2C).$$
   (c) Montrer que $\mathbf{a}$ est un point de minimum local strict de f. On écrira pour cela la formule de Taylor-Young pour f en ce point.
3. On suppose $\Delta < 0$ et $A(\text{ou } C) < 0$.
   Montrer que (x_0, y_0) est un point de maximum local strict de f.
4. On suppose maintenant $\Delta > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $S(t_1) > 0$ et $S(t_2) < 0$.
   (b) Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\tan\theta_1 = t_1$ et $\tan\theta_2 = t_2$. En examinant les fonctions
   $$g(t) := f(x_0 + t\cos\theta_1, y_0 + t\sin\theta_1), \quad h(t) := f(x_0 + t\cos\theta_2, y_0 + t\sin\theta_2)$$
   pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit, montrer que $\mathbf{a}$ n'est ni un point de maximum local, ni un point de minimum local de f.
5. Dessiner l'allure du graphe de f au voisinage du point $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ dans les trois cas étudiés ci-dessus (questions 1, 3 et 4).
6. Que peut-on dire en général quand $\Delta = 0$? Pour répondre à cette question, on pourra s'appuyer sur l'étude des deux cas suivant au voisinage de $(0,0)$:
   $$f_1(x,y) = x^2 + x^4 + y^4 \quad \text{et} \quad f_2(x,y) = x^2 - y^4.$$

Exercice 1840 Existe-t-il un triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle donné ? Le déterminer par une méthode géométrique.

Exercice 1841 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue telle que :
$$\lim_{\|x\| \to \infty} |f(x)| = +\infty.$$
Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

Exercice 1842 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $(x, y) \mapsto 6xy + (y - x)^3$. On note $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$.

1. Dessiner Δ. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes sur Δ.
2. Calculer les extrema de f sur le bord de Δ puis dans l'intérieur de Δ.
3. En déduire les bornes de f sur Δ.

Exercice 1843 On note $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leqslant 1\}$ et $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Soit f l'application de D dans $\mathbb{R}$ définie par $f(z) = |\sin z|$.

1. Pour quelle raison f est-elle bornée sur D ? On note $M = \sup_{z\in D} f(z)$ et $m = \inf_{z\in D} f(z)$. Est-ce que M et m sont atteints ? Donner la valeur de m.
2. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $|\sin z|^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2y - \cos 2x)$. (On rappelle que $\sin z = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}$ et $\operatorname{ch} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.)
3. En déduire que M est atteint en un point de S.
4. Montrer que $M = \dfrac{e^2 - 1}{2e}$.

Exercice 1844 On pose $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable sur Ω et calculer sa différentielle.
2. Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$ et que sa différentielle est nulle.
3. Montrer que f admet en tout point des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et calculer la valeur de ces dérivées en $(0, 0)$. Que peut-on en déduire pour la continuité de ces dérivées partielles en $(0, 0)$?

38.5 Équations aux dérivées partielles

Exercice 1845 Résoudre à l'aide des coordonnées polaires l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exercice 1846 Résoudre l'équation des cordes vibrantes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ à l'aide du changement de variables $u = \frac{x+y}{2}$ et $v = \frac{x-y}{2}$ (on suppose que f est C^2).

Exercice 1847 Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = f$$

en passant en coordonnées polaires.

Exercice 1848 Résoudre en utilisant le changement de variable $x = u, y = uv$ l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 1849 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application C^1 homogène de degré $s > 0$, i.e. telle que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in \mathbb{R}^2, f(\lambda x) = \lambda^s f(x).$$

Montrer que les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $s-1$ et :

$$sf(x) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x).$$

Exercice 1850 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dérivable. On pose $F(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}$.

Exercice 1851 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction C^2. On pose $g(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$. Calculer $\triangle(g)$ en fonction de $\triangle(f)$.

Exercice 1852 On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + 2u \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0 \qquad \text{pour tout } (u,v) \in \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x,y) = (x, y + x^2)$.

1. En calculant l'application réciproque, montrer que ϕ est bijective. Vérifier que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Posons $g = f \circ \phi$.
   (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (b) Montrer que f est solution de (2) si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f vérifie (2) si et seulement s'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(u,v) = h(v - u^2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 1853 Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f\left(e^x \sin x, \ln(1+x^2)\right)$.
Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 1854 Soient $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ et $V =]0, +\infty[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On définit la fonction

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & V & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

1. Montrer que U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de V sur U. Déterminer Ψ^{-1}.
2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. On pose

$$F(r,\theta) = f \circ \Psi(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et calculer $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
   (b) Montrer que f vérifie l'équation

$$(E) \qquad a\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + b\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}\arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \forall (a,b) \in U$$

   si et seulement si F vérifie l'équation

$$(E') \qquad \frac{\partial F}{\partial r}(r_0,\theta_0) = \theta_0 \quad \forall (r_0,\theta_0) \in V.$$

(c) Déterminer toutes les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U qui vérifient l'équation (E).

Exercice 1855 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$. On cherche les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$ qui vérifient

$$(E) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in D.$$

1. Vérifier que $\varphi(x,y) = y/x$ est solution de (E).
2. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $g \circ \varphi$ est solution de (E).
3. Soit f une solution de (E). Montrer que $f(u,uv)$ ne dépend que de v.
4. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 1856 Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On pourra effectuer le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$.

Exercice 1857 Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. En utilisant des propriétés de la différentielle, montrer que $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.

38.6 Fonctions implicites

Exercice 1858 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = ((x-2)^2 + y^2 - 4)((x-1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1).$$

1. Tracer rapidement la courbe C d'équation $f(x,y) = 0$.
2. En quels points de C la relation $f(x,y) = 0$ permet-elle de définir une fonction implicite de la forme $y = \phi(x)$?

Exercice 1859 Montrer que les relations proposées définissent au voisinage du couple (a,b) indiqué une fonction implicite $y = \phi(x)$.
Donner un développement limité à l'ordre 3 de ϕ en a.

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$ $\qquad (a,b) = (0,1)$.
2. $f(x,y) = 2e^{x+y-1} + \ln(x-y) - 2x + y^3$ $\qquad (a,b) = (1,0)$.

Exercice 1860 Montrer que la relation

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2z(x+y) - 2x + y - 2z - 1 = 0$$

définit au voisinage de $(0,0,-1)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$. Donner un développement limité de ϕ à l'ordre 2 en $(0,0)$.

38.7 Divers

Exercice 1861 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues en 0 et telle que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^2 - \{0\}, \forall t > 0, f(ta) = tf(a).$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 1862 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application C^1 sur un ouvert convexe O telle que :

$$\forall a \in O, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 0.$$

Montrer que f est constante sur O.

Exercice 1863 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Montrez que si $\|\nabla f(x)\| \leqslant M$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M\|x - y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n .$$

39 Espaces métriques et espaces vectoriels normés

Exercice 1864 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
1. Montrer que : $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$
2. Déterminer : $m = \text{Inf}\{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n 1/x_i)$ tels que $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0\}$
3. Déterminer : $M = \text{Sup}\,\{|x + 2y + 3z + 4t|$ tels que $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ , x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leqslant 1\}$

Exercice 1865 (Normes sur $\mathbb{R}^2$) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x, y) = \text{Max}(\sqrt{x^2 + y^2}, |x - y|)$ et $N_2(x, y) = \sqrt{x^2/9 + y^2/4}$.
1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ et représenter les boules unités fermées associées à ces normes.
2. Montrer que $N_2 \leqslant \|.\|_\infty \leqslant \|.\|_2 \leqslant N_1 \leqslant \|.\|_1 \leqslant 4N_2$.
3. Déterminer le plus petit réel $k > 0$, tel que $\|.\|_1 \leqslant kN_2$. (utiliser Cauchy-Schwarz)

Exercice 1866 Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux familles de n nombres réels. Montrer, en étudiant le signe du trinôme $\lambda \longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^n (a_i + \lambda b_i)^2$ que $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 1867 Soit (E, d) un espace métrique.
1. Montrer que $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ est une distance sur E. Enoncer des conditions suffisantes sur une fonction f, définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ pour que $(x, y) \longrightarrow f(d(x, y))$ soit une distance sur E.
2. Montrer que l'application d'' définie sur $E \times E$ par $d''(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ est une distance sur E. *Indication* : On utilisera la croissance de la fonction $u \longrightarrow \dfrac{u}{1 + u}$.
3. Comparer les distances d et d'' .
4. Dans le cas où E est l'ensemble des nombres réels et où d est la distance valeur absolue, construire $B_{d''}(0, a)$ où a est un réel.

Exercice 1868 Soit (E, d) un espace métrique complet, et f une application de E dans E telle qu'il existe $k \in \mathbb{R},\ 0 < k < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) \leqslant k\ d(x, y)\ \ \forall x \in E,\ \forall y \in E$.
1. Montrer que f est continue sur (E, d).
2. Soient $x_0 \in E$ et pour $n \geqslant 0,\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans (E, d).
3. Montrer que cette suite converge vers un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de $f(l) = l$. Montrer que ce point fixe est unique.

4. Application : montrer que le système $\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 &= \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{cases}$ admet une solution unique $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 1869 On considère les trois normes définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| \quad , \quad \|X\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \|X\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Représenter graphiquement les boules unités de chacune d'entre elles. Peut-on "comparer" ces trois normes ? Ecriver les définitions des distances d_1,d_2 et d_∞ associées à chacune d'entre elles.

Exercice 1870 Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies et nues sur [-1,1].

1. Montrer que les trois applications suivantes sont des normes sur E :

$$f \longrightarrow \|f\|_1 = \int_{-1}^{+1} |f(x)|dx, \quad f \longrightarrow \|f\|_2 = (\int_{-1}^{+1} f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$f \longrightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,+1]} \{|f(x)|\}$$

2. On considère la suite $(f_n)_{n\in N^*}$ de fonctions définies par $f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nx & \text{si } x \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

La suite f_n est-elle de Cauchy dans $(E, \|.\|_1)$, $(E, \|.\|_2)$ et dans $(E, \|.\|_\infty)$? Conclusions ?

Exercice 1871 Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies, continues et dérivables sur [0,1] et vérifiant $f(0) = 0$. On définit sur cet espace les deux normes suivantes :

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f'\|_\infty.$$

1. Montrer que $N_1(f) \leqslant N_2(f)$. En déduire que l'application identique de (E, N_2) vers (E, N_1) est continue.
2. A l'aide de la fonction $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, montrer que l'application identique de (E, N_1) vers (E, N_2) n'est pas continue.

Exercice 1872 Lorsqu'un espace vectoriel E est en outre muni d'une multiplication, l'application $N: E \to \mathbb{R}$ est dite norme multiplicative si :
– N est une norme,
– pour tous A et B dans E, $N(A.B) \leqslant N(A).N(B)$.
Soit $E = M_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes. $A \in E$ se note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

1. Montrer que $N_\infty(A) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{ \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \}$ définit une norme multiplicative sur E.
2. Montrer que $N_\infty(A) = \max\limits_{\{X\in\mathbb{R}^n,\ \|X\|_\infty=1\}}\{ \|A.X\|_\infty\}$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ |a_{i,i}| > \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$ et D la matrice diagonale formée avec les éléments diagonaux de A. Soit aussi F un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On considère la suite des $X^{(p)} \in \mathbb{R}^n$ définie pour $p \geqslant 0$ par :

$$\begin{cases} X^{(0)} &= X_0 \in \mathbb{R}^n \\ X^{(p+1)} &= (I - D^{-1}A)X^{(p)} + D^{-1}F \quad \text{pour p} \geqslant 0 \end{cases}$$

Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Exercice 1873 (partiel 1999) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, x un élément de E et A un compact de E.

1. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à y associe $\|y\|$ est continue.
2. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à y associe $\|y-x\|$ est continue.
3. Montrer que la distance de x à A est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ tel que

$$\inf_{y\in A} \|y-x\| = \|a-x\|.$$

Exercice 1874 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit L une application linéaire de E dans F.

1. Montrer que L est continue en 0 si et seulement si elle est continue en tout point de E.
2. On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\|L(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E \qquad \forall x \in E.$$

   Montrer que L est continue.
3. Dans la suite, on suppose que L est continue et on pose

$$K = \sup_{\|x\|_E=1} \|L(x)\|_F.$$

   (a) Supposons que $K = +\infty$. Montrer qu'alors il existe une suite (x_n) dans E telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout n et telle que $\|L(x_n)\|_F$ tend vers $+\infty$. En déduire qu'il existe une suite y_n tendant vers 0 et telle que $\|L(y_n)\|_F = 1$.

   (b) En déduire que $K \in \mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in E$ on a

$$\|L(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E.$$

Exercice 1875 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

On considère l'application $L : E \to \mathbb{R}$ définie par $L(f) = f(1)$.

1. Montrer que L est une application linéaire.
2. En considérant les fonctions $f_n : x \mapsto \sqrt{n}x^n$, montrer que L n'est pas continue.

Exercice 1876 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On suppose que (x_n) est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

Exercice 1877 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit une norme sur E en posant

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(t)|\,dt.$$

On va montrer que E muni de cette norme n'est pas complet. Pour cela, on définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leqslant t \leqslant -\frac{1}{n} \\ nt & \text{si } -\frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \quad \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_n \in E$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. Montrer que
$$\|f_n - f_p\| \leqslant \sup(\frac{2}{n}, \frac{2}{p})$$
et en déduire que (f_n) est de Cauchy.
3. Supposons qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que (f_n) converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Montrer qu'alors on a
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0$$
pour tout $0 < \alpha < 1$.
4. Montrer qu'on a
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) + 1|\, dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - 1|\, dt = 0$$
pour tout $0 < \alpha < 1$. En déduire que
$$\begin{aligned} f(t) &= -1 \qquad && \forall t \in [-1, 0[\\ f(t) &= 1 && \forall t \in]0, 1]. \end{aligned}$$
Conclure.

Exercice 1878 Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle qu'une application continue g de E dans E est dite *contractante* s'il existe $K \in]0, 1[$ tel que
$$\|g(x) - g(y)\| \leqslant K\|x - y\| \qquad \forall x, y \in E.$$
On rappelle aussi que toute application contractante admet un unique point fixe.
Soit f une application continue de E dans E telle qu'il existe un entier n tel que f^n soit contractante. On note x_0 le point fixe de f^n.

1. Montrer que tout point fixe de f est un point fixe de f^n.
2. Montrer que si x est un point fixe de f^n, il en est de même pour $f(x)$.
3. En déduire que x_0 est l'unique point fixe de f.

Exercice 1879 Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit la *distance* d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $d(x_0, A)$, par la formule
$$d(x_0, A) = \inf_{x\in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0, B) \geqslant d(x_0, A)$.)
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0, A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que
$$\|a - b\| \geqslant \delta \qquad \forall (a, b) \in A \times B.$$

5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

Exercice 1880 $N : (x,y) \longmapsto |5x+3y|$ est-elle une norme de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 1881 1. Montrer que $\forall p \geqslant 1$, l'application $\begin{pmatrix} N_p : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (\sum_{k=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \end{pmatrix}$ est une norme (on utilisera la convexité de x^p).

2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, montrer que $\lim_{p\to+\infty} N_p(x) = \max(x_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$, et que cela définit une norme, appelée **norme infinie**, et notée N_∞.
3. Établir les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ N_\infty(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \sqrt{n}N_2(x) \leqslant nN_\infty(x).$$

Que peut-on en déduire ?

4. Dessiner les boules unités des normes 1,2, et ∞ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1882 Soit $\begin{pmatrix} N : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum_{k=1}^n |\sum_{i=1}^k x_i| \end{pmatrix}$. Montrer que N est une norme.

Exercice 1883 A est dit *convexe* s'il contient tout segment reliant deux quelconques de ses points :

$$\forall (x,y) \in A^2,\ [x,y] = \{x + t(y-x),\ t \in [0,1]\} \subset A.$$

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme N. Montrer que toute boule fermée (ou ouverte) est convexe et symétrique par rapport à son centre.

Exercice 1884 Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Montrer :

$$\forall (x,y) \in (E \setminus \{0\})^2,\ N(x-y) \geqslant \frac{1}{2}\sup(N(x),N(y)) \cdot N\left(\frac{x}{N(x)} - \frac{y}{N(y)}\right).$$

Exercice 1885 Soit E un espace vectoriel normé, et $(a,a') \in E^2$, $(r,r') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer :

1. $B(a,r) = \{a\} + B(0,r)$
2. $B(a,r) = B(a',r') \Leftrightarrow a = a'$ et $r = r'$
3. $B(a+a',r+r') = B(a,r) + B(a',r')$
4. $B(a,r) \cap B(a',r') \neq \emptyset \Leftrightarrow \|a'-a\| < r + r'$.

Exercice 1886 Soit (E,N) une espace vectoriel. Montrer les équivalences :

$$\begin{aligned} A \subset E \text{ est borné } &\Leftrightarrow \exists (a,r) \in E \times \mathbb{R}^+ \,:\, A \subset B(a,r) \\ &\Leftrightarrow \exists R \geqslant 0 \,:\, A \subset B(0,R) \\ &\Leftrightarrow \exists R \geqslant 0 \,:\, A \subset B_f(0,R) \\ &\Leftrightarrow A \text{ est inclus dans une boule de } E. \end{aligned}$$

Exercice 1887 (Topologie du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$) 1. Quelles sont toutes les normes sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$?

On se place désormais dans $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$.

2. Quelles sont les boules ouvertes ? fermées ?
3. Ouverts et fermés de $\mathbb{R}$:
   (a) soit $(I_a)_{a\in A}$ une famille d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$, deux à deux disjoints. Montrer que A est au plus dénombrable.

(b) soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, et $a \in O$. On pose $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin O \text{ et } x > a\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin O \text{ et } x < a\}$. Etudier l'existence de $\inf A$ et $\sup B$.

(c) en déduire que :
- tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts
- tout fermé de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles fermés.

Exercice 1888 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ telles que $f(0) = 0$.

1. On pose pour tout $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty$ et $N'(f) = \|f'\|_\infty$. Montrer que N et N' sont des normes.
2. Montrer que N et N' ne sont pas équivalentes.

Exercice 1889 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ telles que $f(0) = 0$.

1. On pose pour tout $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que N est une norme sur E
2. Montrer que, si $f \in E$ alors, pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) = e^{-x} \displaystyle\int_0^x e^t(f(t) + f'(t))dt$.
3. On pose, pour tout $f \in E$, $N'(f) = \|f + f'\|_\infty$. Montrer que N' est une norme sur E, équivalente à N.

Exercice 1890 Soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E et x un élément de E. Comparer les deux assertions :

i) Pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $A \cap B(x, \varepsilon)$ est infini.

ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un élément y distinct de x dans $A \cap B(x, \varepsilon)$.

Exercice 1891 Soit A l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

1. On munit $C[0,1]$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Montrer que A est fermé et calculer son intérieur.
2. On munit $C[0,1]$ de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$. Montrer que l'intérieur de A est vide et que A est fermé.

Exercice 1892 Soit $(E, \| \quad \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\mu(E) = \sup_{x,y \in E-(0,0)} \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}.$$

1. Montrer que $1 \leqslant \mu(E) \leqslant 2$.
2. Calculer $\mu(\mathbb{R}^2)$ lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne puis de la norme $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$.

Exercice 1893 Soit $\| \quad \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $A = (a_{i,j})_{i,j \in 1,\cdots n} \in M_n(\mathbb{R})$. On pose :

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|=1} \|Ax\|.$$

1. Montrer qu'on définit ainsi une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\| \quad \|_1$. Montrer que $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} (\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|)$.

Exercice 1894 1. Montrer que l'application $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire euclidien sur $C[0,1]$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles.

2. On note $C = \{f \in C[0,1]; \int_0^1 f(t)dt = 1$. Montrer que $\inf_{f\in C} \int_0^1 f^2(t)dt = 1$ et que cette borne inférieure est atteinte.

Exercice 1895 On munit $C[0,1]$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Soit $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On pose $N(\varphi) = \sup_{f\in C[0,1];\|f\|_\infty=1} |\varphi(f)|$. Montrer que φ est continue si et seulement si $N(\varphi)$ est fini.
2. Calculer $N(\psi)$ lorsque $\psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$.
3. Posons, pour toute fonction $f \in C[0,1]$: $\varphi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$. Montrer que $N(\varphi) = 1$.

Exercice 1896 On munit E, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles telles que $f(0) = 0$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On pose $N(\varphi) = \sup_{f\in E;\|f\|_\infty=1} |\varphi(f)|$. Montrer que φ est continue si et seulement si $N(\varphi)$ est fini. Montrer que $\varphi \mapsto N(\varphi)$ est une norme sur l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E.
2. Calculer $\mu = N(\psi)$ lorsque ψ est définie en posant, pour toute fonction $f \in E$: $\psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$.
3. Peut-on trouver une fonction $f \in E$ telle que $|\psi(f)| = \mu$ et $\|f\|_\infty = 1$?

Exercice 1897 On munit $E = C^1[0,1]$ et $F = C[0,1]$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. On pose $N(\varphi) = \sup_{f\in E;\|f\|_\infty=1} |\varphi(f)|$. Montrer que φ est continue si et seulement si $N(\varphi)$ est fini.
2. Montrer que l'application $f \mapsto f'$ n'est pas continue.

Exercice 1898 Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$.

1. Soient $x, y \in E$ et I le segment $[x,y]$. Calculer $S \cap I$.
2. Les normes $\| \quad \|_1$ et $\| \quad \|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ sont-elles euclidiennes ?

Exercice 1899 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer quil existe une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ inversibles convergeant vers A (en un sens que l'on précisera).

2. Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Calculer les valeurs propres de N. Montrer que $\det(I+N) = 1$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $AN = NA$. Calculer $\det(A+N)$.

Exercice 1900

I Préliminaires

1. Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{P}$ est de dimension infinie.
2. Soit X une partie bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup(X) = \sup \bar{X}$.

II

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions *lipschitziennes* de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est à dire telles qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x, y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$. On note $\mathbb{C}^1$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe C^1, c'est à dire dérivables à dérivée continue.

1. Montrer que $\mathcal{L}$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, que $\mathcal{L}$ contient $\mathbb{C}^1$ et est de dimension infinie.
2. On pose, pour tout $f \in \mathcal{L}$:
$$N_1(f) = |f(0)| + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$
$$N_2(f) = |f(0)| + \sup_{x\in]0,1]} \frac{|f(x)-f(0)|}{|x|}$$
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$
$$\lambda(f) = \|f\|_\infty + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$
   (a) Montrer que N_1, N_2, $\| \|_\infty$ et λ sont des normes sur $\mathcal{L}$.
   (b) En considérant la suite $f_n(x) = \sin(2\pi n x)$, montrer que N_2 n'est pas équivalente à $\| \|_\infty$.
   (c) Montrer que N_1 n'est équivalente ni à $\| \|_\infty$, ni à N_2.
   (d) Construire une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{L}$ qui converge vers 0 pour $\| \|_\infty$ mais pas pour N_2. En déduire (de nouveau) que N_2 n'est pas équivalente à $\| \|_\infty$.
   (e) Montrer que λ et N_1 sont équivalentes.
3. On pose, pour tout $f \in \mathbb{C}^1$: $\nu_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ et $\nu(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
   (a) Montrer que ν_1 et ν sont des normes sur $\mathbb{C}^1$.
   (b) Montrer que $\nu_1(f) = N_1(f)$, pour tout $f \in \mathbb{C}^1$.
   (c) Les normes ν et ν_1 sont-elles équivalentes ?
4. Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite de *Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, si $m, n \geqslant N$ alors $\|x_n - x_m\| \leqslant \varepsilon$. On dit que $(E, \| \|)$ est *complet* si toute suite de Cauchy y est convergente. On rappelle que $\mathbb{R}$ muni de la norme $x \mapsto |x|$ est complet.
   (a) Soit C^0 l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(C^0, \| \|_\infty)$ est complet.
   (b) L'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}^1, \nu)$ est-il complet ? Qu'en est-il de $(\mathbb{C}^1, \nu_1)$?
   (c) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}, \lambda)$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue f.

(d) Démontrer que pour n assez grand $f - f_n$ est lipschitzienne.

(e) En déduire que $(\mathcal{L}, \lambda)$ est complet.

III

On munit $\mathbb{C}^1$ d'une norme N et et C^0 de la norme $\| \ \|_\infty$. On note d l'application $f \mapsto f'$ de $\mathbb{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{C}^0$.

1. Soit $\varphi : \mathbb{C}^1 \to C^0$ une application linéaire. On pose $N(\varphi) = \sup_{f; N(f) \leqslant 1} \|\varphi(f)\|_\infty$. Démontrer que φ est continue si et seulement si $N(\varphi)$ est fini. Vérifier que N est une norme sur l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $\mathbb{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{C}^0$.
2. Montrer que l'application d n'est pas continue si $N = \| \ \|_\infty$.
3. On munit $\mathbb{C}^1$ de la norme ν. Montrer que d est continue et calculer $N(d)$.

[Exercice corrigé]

40 Suites dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1901 Soit x_n une suite de $\mathbb{R}^d$. Montrer que l'ensemble A des valeurs d'adhérence de x_n est fermé. Indication : prouver que le complément de A est ouvert.

Exercice 1902 Soit x_n une suite bornée de $\mathbb{R}^d$. Montrer que x_n converge si et seulement si A est un singleton. Indication : pour prouver la convergence, utiliser qu'une suite bornée de $\mathbb{R}^d$ a au moins une valeur d'adhérence.

Exercice 1903 Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Soit x_n la suite définie par

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Supposons que $||x_n - x_{n+1}|| \to 0$. Montrer que si $a \in A$ alors $f(a) = a$.
Indication : appliquer la définition de la continuité de f en a en termes de limites.

Exercice 1904 Soit x_n une suite bornée de $\mathbb{R}^d$. Supposons que $||x_n - x_{n+1}|| \to 0$. Montrer que l'ensemble A est non-vide, compact, connexe.
Indication : pour la connexité, supposer que $A = A_1 \cup A_2$ avec A_1 et A_2 non-vides, disjoints, fermés.
Si $d = 1$ conclure que $A = [a, b]$ avec $a \leqslant b$.

Exercice 1905 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit x_n la suite définie par

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Supposons que x_n est bornée. Montrer que x_n converge si et seulement si

$$||x_n - x_{n+1}|| \to 0.$$

Indication. Montrer qu'il suffit de prouver que $a = b$ dans $[a, b] = A$. Si $a < b$ montrer que la suite est stationnaire.

Exercice 1906 Soit $s_n = \Sigma_{k=1}^n 1/k$ et $x_n = \cos(s_n)$. Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Indication : montrer que $||x_n - x_{n+1}|| \to 0$ mais que x_n ne converge pas.

41 Intégrales multiples

Exercice 1907 Calculer $I_1 = \iint\limits_D (x+y)e^{-x}e^{-y}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}$.
Calculer $I_2 = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < x, x^2+y^2 > y\}$.
Calculer $I_3 = \iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in [0,1]^2 / x^2+y^2 \geqslant 1\}$.
Calculer $I_4 = \iint\limits_D \frac{1}{y\cos(x)+1}dxdy$ où $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$.
Calculer $I_5 = \iiint\limits_D zdxdydz$ où $D = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 / y^2+z \leqslant 1, x^2+z \leqslant 1\}$.
Calculer $I_5 = \iint\limits_D xydxdy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x, y > 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ avec $a, b > 0$.

Exercice 1908 Représenter et calculer le volume de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / -1 \leqslant z \leqslant 1, x^2+y^2 \leqslant z^2+1\}$.

Exercice 1909 Déterminer le centre de gravité du culbuto (homogène), *i.e.* le cône

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z \in [0,1], x^2+y^2 \leqslant z^2\}$$

auquel on adjoint sur sa base une demi-boule.

Exercice 1910 Soit $D = [0,1]^2$. Calculer :

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}.$$

Exercice 1911 Soit D le disque de centre $(0,1)$ et de rayon 1 du plan. Calculer :

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Exercice 1912 Soit $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2-2y \geqslant 0, x^2+y^2-1 \leqslant 0\}$. Calculer :

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Exercice 1913 Soit $D = \{(x^2+y^2)^2 \leqslant xy\}$. Calculer :

$$\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy.$$

Exercice 1914 Soient $a, b > 0$. Calculer l'aire de l'ellipse $E = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$ par deux méthodes différentes.
(On rappelle que l'aire d'un domaine D vaut $\iint_D dx\,dy$.)

Exercice 1915 Soit $a > 0$ et D le domaine délimité par la courbe d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$. Calculer l'aire de D.

Exercice 1916 Soient $0 < a \leqslant b, 0 < c \leqslant d$, et $D = \{ax^2 \leqslant y \leqslant bx^2, \frac{c}{x} \leqslant y \leqslant \frac{d}{x}\}$. Calculer l'aire de D.
(Indication : poser $u = \frac{y}{x^2}$ et $v = xy$.)

Exercice 1917 Soit $p > 0$ et $D = \{y^2 - 2px \leqslant 0, x^2 - 2py \leqslant 0\}$. Calculer :

$$\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy.$$

(Indication : poser $x = u^2v$ et $y = uv^2$.)

Exercice 1918 Soit $R > 0$, $D_R = \{x^2 + y^2 \leqslant R^2, x > 0, y > 0\}$ et $K_R = [0, R]^2$. Montrer que :

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leqslant \iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leqslant \iint_{D_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-t^2}\,dt.$$

Exercice 1919 Soient $a, R > 0$. Dans le plan (yOz), soit D le disque de centre $(0, a, 0)$ et de rayon R. En tournant autour de l'axe (Oz), le disque D engendre un domaine T (appelé un tore plein). Calculer le volume de T (c'est-à-dire l'intégrale triple $\iiint_T dx\,dy\,dz$).

Exercice 1920 Soit $D = \{x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 + y^2\}$. Calculer le volume de D.

Exercice 1921 Soit $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x + y + z \leqslant 1\}$. Calculer :

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(1 + x + y + z)^3}.$$

Exercice 1922 Quel est le volume délimité par deux cylindres de révolution d'axes (Ox) et (Oy) et de même rayon $R > 0$?

Exercice 1923 En utilisant un changement de variables, calculer l'intégrale de f sur D avec

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 < x^2 + y^2 \leqslant 4\pi^2\}$; $f(x, y) = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$;
2. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ avec a, $b > 0$; $f(x, y) = x^2 + y^2$;
3. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\,,\ 0 \leqslant z \leqslant h\}$ avec $h > 0$; $f(x, y, z) = z$;
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 \leqslant y \leqslant 2x^2\,,\ 1/x \leqslant y \leqslant 2/x\}$; $f(x, y) = x + y$ (changement de variable $u = y/x^2$, $v = xy$) ;
5. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0\,,\ y \geqslant 0\,,\ z \geqslant 0\,,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$; $f(x, y, z) = xyz$;
6. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4\}$; $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$.

Exercice 1924 Identifier les ensembles suivants et calculer leur aire s'ils sont dans $\mathbb{R}^2$, leur volume s'ils sont dans $\mathbb{R}^3$.

1. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ avec $a, b > 0$;
2. $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$ avec $a, b, c > 0$; qu'obtient-on dans le cas particulier où D est la boule unité de $\mathbb{R}^3$?
3. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant R\,,\ 0 \leqslant z \leqslant h\}$ avec $R, h > 0$;
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0\,,\ y \geqslant 0\,,\ z \geqslant 0\,,\ x + y + z \leqslant 1\}$;
5. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant z^2/h^2\,,\ 0 \leqslant z \leqslant h\}$ avec $h > 0$.

Exercice 1925 Calculer les coordonnées du centre d'inertie (de gravité) du domaine D :

1. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\,,\ x \geqslant 0\,,\ y \geqslant 0\right\}$ (le quart d'ellipse) ;
2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\,,\ x \geqslant 0\,,\ |y| \leqslant ax\}$;
3. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\,,\ (x - 1)^2 + y^2 \geqslant 1\}$.

Exercice 1926 1. **Théorème de Guldin** Soit D_0 un domaine tracé dans le demi-plan $\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0\}$. Si l'on fait tourner D_0 autour de l'axe Oz, on obtient un domaine D de $\mathbb{R}^3$. En utilisant les coordonnées cylindriques. montrer que

$$Vol\,(D) = 2\pi Aire\,(D_0) \cdot x_G\,,$$

où (x_G, z_G) sont les coordonnées du centre d'inertie du domaine D_0.

2. Calculer les volumes des domaines suivants :
   (a) le tore obtenu en faisant tourner autour de Oz le domaine $D_0 = \{(x,0,z) \mid \frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leqslant 1\}$, où $a < c$;
   (b) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 4R^2\,,\, x^2+y^2 \leqslant R^2\}$, où $R > 0$.

Exercice 1927 On pose $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ et $J = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} dxdy$. Calculer J et en déduire la valeur de I.

Exercice 1928 On note D le domaine délimité par les droites $x = 0$, $y = x+2$ et $y = -x$.

1. Calculer (directement) $I = \displaystyle\iint_D (x-y)dxdy$.
2. Calculer I au moyen du changement de variable $u = x+y$ et $v = x-y$.

Exercice 1929 Soit $D = \{(x,y); x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D (4-x^2-y^2)dxdy$.

42 Séries numériques, séries de Fourier

42.1 Séries numériques

Exercice 1930 Soient, pour $n > 0$, $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ et $v_n = \ln u_n$.

1. Etudier la serie de terme général w_n où, pour $n \geqslant 2$, $w_n = v_n - v_{n-1}$ et $w_1 = v_1$.
2. En déduire, en utilisant la convergence de la suite des sommes partielles de w_n, que la suite u_n converge vers $\lambda > 0$.
3. Déterminer λ en utilisant la formule de Wallis : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$. En déduire un équivalent de $n!$.
   Indication : Exprimer $n!$ (respectivement $(2n)!$) en fonction de u_n (resp. de u_{2n}) et remplacer-les dans la formule de Wallis.

Exercice 1931 Soit $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Donner une valeur approchée de S en garantissant une erreur inférieure ou égale à 10^{-3}.

Exercice 1932 Etudier la série de terme général

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n} \text{ où } a > 0,\ b > 0.$$

Indication : Chercher un équivalent suivant les valeurs de b.

Exercice 1933 (Utilisation des règles de Cauchy et d'Alembert) Etudier les séries de termes généraux

1.
$$u_n = \sqrt{n!}\sin x \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdots\sin\frac{x}{\sqrt{n}} \text{ avec } x>0.$$

2.
$$v_n = e^{an^2}(1-\frac{a}{n})^{n^3}$$

Exercice 1934 (Comparaison à des séries de Riemann et équivalent) Etudier les séries de termes généraux

1.
$$u_n = cos(\frac{\pi n^2}{2n^2+an+1}) \text{ avec } a>0$$

2.
$$v_n = e^{-\sqrt{n}}$$

3.
$$w_n = (1-\frac{1}{n^2})^n$$

Exercice 1935 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, on suppose que $\lim(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = 1$ et que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\frac{\alpha}{n}+O(\frac{1}{n^\beta}) \text{ , où } \alpha>0 \quad \beta>1.$$
On pose $v_n = n^\alpha u_n$. Etudier $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et montrer que (v_n) a une limite finie. Application : Etudier la série de terme général
$$u_n = \sqrt{n!}\sin 1\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\sin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 1936 Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $\dfrac{n!}{n^n}$, $(\mathrm{ch}\sqrt{\ln n})^{-2}$, $n^{-(1+(1/n))}$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$, $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$, $n^{lnn}e^{-\sqrt{n}}$

Exercice 1937 Etudier, suivant les valeurs de $p\in\mathbb{N}$, la nature de la série de terme général :
$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}.$$

Exercice 1938 Calculer les sommes des séries suivantes, en montrant leur convergence :

1. $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)3^{-n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{n^4+n^2+1}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{2n-1}{n^3-4n}$

Exercice 1939 Soit (u_n) une suite réelle positive et $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} u_p$. Comparer la nature des séries $(\sum u_n)$ et $(\sum \frac{u_n}{S_n})$.

Exercice 1940 (Séries à termes quelconques) Etudier les séries de termes généraux

1.
$$u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)(n^{1/n})}$$

2.
$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ où } \alpha > 0$$

3.
$$w_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}) \text{ où } \alpha > 0$$

Indication : Des calculs de D.L. peuvent etre fructueux ...

Exercice 1941 (Utilisation d'une série) Le but de cet exercice est de montrer la convergence de l'intégrale généralisée suivante $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x}$.
Pour cela, on considère la série de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x}.$$

Par un changement de variable, transformer u_n en

$$u_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + (n\pi + x)^4 \sin^2 x}$$

Encadrer ensuite u_n par les termes de la suite v_n où

$$v_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + (n\pi)^4 \sin^2 x}$$

Calculer explicitement l'intégrale v_n et en déduire un équivalent de u_n. Conclure.

Exercice 1942 Soit u_n une suite décroissante à termes positifs. On suppose $(\sum u_n)$ converge. Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} (n u_n) = 0.$$

Indication : Encadrer $\sum_{p+1}^n u_k$ pour $n > p$. Puis revenir aux définitions des limites avec les epsilons.

Exercice 1943 Soient $\sum_{n \geqslant 0} u_n$, $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs. On suppose que $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ converge, et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{u_{n+2}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+2}}{v_n}.$$

Montrer que $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ converge.

Exercice 1944 (Examen 2000) En justifiant votre réponse, classer les dix séries $\sum u_n$ suivantes en 4 catégories
– GD : celles telles que u_n ne tend pas vers 0 ;
– ZD : celles qui divergent et telles que $\lim u_n = 0$;
– AC : celles qui convergent absolument ;
– SC : celles qui convergent, mais non absolument.

(Attention : pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations : par exemple pour montrer que $\sum u_n$ est SC, il faut montrer que $\sum u_n$ converge *et* que $\sum |u_n|$ diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right);\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})\right];\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(1-\frac{1}{n})^n\right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1000}{3^n+1};\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi n)\sin(\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{1}{3^{n-k}}\right).$$

Exercice 1945 (Examen 2000)

1. On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\log 2.$$
Montrer la convergence des deux séries $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$ et $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)$ et calculer leur somme à l'aide du rappel ci dessus.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4x^3-x}$.
3. Montrer la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^3-k}$et calculer sa somme à l'aide de ce qui précède.
4. L'intégrale impropre $\int_1^{\infty}\frac{dx}{4x^3-x}$ converge t-elle ? Si oui, la calculer.

Exercice 1946 (Examen 2000) Soit $a>0$ fixé. Pour n entier positif ou nul on dĆfinit $P_n(a)$ par $P_0(a)=1$, $P_1(a)=a$, $P_2(a)=a(a+1)$ et, plus généralement $P_{n+1}(a)=(n+a)P_n(a)$. Montrer que
$$L(a)=\lim_{n\infty}\frac{P_n(a)}{n!n^{a-1}}$$
existe et est un nombre strictement positif. Méthode : considérer la série de terme général pour $n>0$: $u_n=\log(n+a)-a\log(n+1)+(a-1)\log n$, comparer sa somme partielle d'ordre $n-1$ avec $\log\frac{P_n(a)}{n!n^{a-1}}$, et, ... l'aide d'un développement limité en $1/n$ d'ordre convenable, montrer que, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ converge.

Exercice 1947 Soit α et β deux nombres réels ou complexes tels que $\alpha\beta=-1$ et $|\alpha|>1>|\beta|$. Pour n dans l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers positifs ou négatifs on pose $F_n=\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n-\beta^n)$ et $L_n=\alpha^n+\beta^n$ (si $\alpha+\beta=1$ ces nombres sont appelés entiers de Fibonacci (1225) et de Lucas (1891)).

1. Montrer par le critère de D'Alembert que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{2n+1}+1}$ converge et calculer la limite de $Q_n=L_n/F_n$ si $n\to+\infty$. .
2. On admet (identité de Backstrom (1981)) que pour tous n et k de $\mathbf{Z}$ on a
$$\frac{1}{F_{4n-2k-1}+F_{2k+1}}+\frac{1}{F_{4n+2k+1}+F_{2k+1}}=\frac{1}{2L_{2k+1}}\left(Q_{2n+2k+1}-Q_{2n-2k-1}\right).$$
En faisant $k=0$ dans cette identité, calculer la somme partielle d'ordre $2n$ de la série initiale, c'est à dire $s_{2n}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{F_{2j+1}+1}$ en montrant par récurrence sur n que $s_{2n}=\frac{1}{2L_1}(Q_{2n+1}-Q_1)$. En déduire la somme de la série en termes de α et β. Donner une expression simple du terme général de la série et de sa somme si $\alpha=\exp t$ et $\beta=-\exp(-t)$ si t est réel.

3. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}+F_3}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 1948 (Permutation dans la série harmonique alternée : Pringsheim (1883)) Pour tout entier $n > 0$, soit $u(n) = (-1)^n/n$. Soit σ une permutation des entiers > 0 et soit τ la permutation réciproque. On suppose de plus que
(1) pour tout entier $p > 0$ on a $\tau(2p-1) < \tau(2p+1)$ et $\tau(2p) < \tau(2p+2)$.
(2) Notant par $p(n)$ le nombre d'entiers k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\sigma(k)$ est pair, alors $\alpha = \lim_{n\infty} p(n)/n$ existe et est dans $]0,1[$.

1. Dans le cas particulier où σ est définie par
$$\sigma(3p) = 2p,\ \sigma(3p+1) = 4p+1,\ \sigma(3p+2) = 4p+3$$
pour tout entier $p > 0$, calculer explicitement τ, et vérifier que σ satisfait (1) et (2), en calculant $p(n)$ pour tout n ainsi que α.
2. On note $f(n) = \sum_{k=1}^{n} 1/k - \log n$, et on rappelle le fait, vu en cours, que $\lim_{n\infty} f(n) = \gamma$ existe (Constante d'Euler). On revient au cas général pour σ, on considère la série de terme général $v_n = u(\sigma(n))$ et on note $s_n = v_1 + \cdots + v_n$.
3. Montrer par récurrence que $s_n = \sum_{k=1}^{p(n)} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n-p(n)} \frac{1}{2k-1}$ et que
$$s_n = \frac{1}{2}f(p(n)) + \frac{1}{2}f(n-p(n)) - f(2n-2p(n)) + \frac{1}{2}\log\frac{p(n)}{n-p(n)} - \log 2.$$
En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge et calculer sa somme en fonction de α.

Exercice 1949 Soit $0 < a < b$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ défini par $u_0 = 1$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ pour $n \geqslant 0$. Montrer que la limite de la suite $S_n = \log(n^{b-a}u_n)$ existe et est finie. En déduire les valeurs de a et b telles que la série $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ converge. Calculer alors sa somme : pour cela expliciter sa somme partielle s_n, en montrant d'abord que pour tout n on a
$$\sum_{j=0}^{n}[(j+1)+b-1]u_{j+1} = \sum_{j=0}^{n}[j+a]u_j.$$

42.2 Séries de Fourier

Exercice 1950 Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann périodique de période 2π. On désigne par : $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$ sa série de Fourier et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$.
2. Etablir que $S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin\frac{(x-t)}{2}}f(t)dt$.
3. En déduire $S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\theta)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}d\theta$.
4. Calculer $\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}d\theta$.

Exercice 1951 Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x|$ si $|x| \leqslant \pi$.

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
4. Montrer que $|x| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}$. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ puis $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 1952 Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ si $|x| \leqslant \pi$.

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
3. Montrer que $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$. En déduire $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 1953 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, C^2 et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ et, $\forall t \in [0, 2\pi], |f(t)| \geqslant |f''(t)|$.On note respectivement $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(c''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier (complexes) de f et f''.

1. Calculer c_0 puis calculer c''_n en fonction de c_n.
2. A l'aide du théorème de Parseval, en déduire que $c_n = 0$ pour $|n| \geqslant 2$.
3. Montrer qu'il existe $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$ tels que $f(t) = \rho\cos(t+\varphi)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 1954 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, C^1 et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. On note respectivement $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(c'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier (complexes) de f et f'.

1. Calculer c_0 puis donner une relation entre c_n et c'_n.
2. En déduire que que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$.
3. Dans quel cas l'égalité a-t-elle lieu ?

Exercice 1955 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : xf(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin tx}{(1+t^2)^2} dt$.
2. Montrer que f est de classe C^2 puis, en dérivant l'expression ci-dessus, que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$: $f''(x) = f(x)$.
3. Donner une expression de f sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}$.

Septième partie
GÉOMÉTRIE

43 Géométrie affine

43.1 Droites, triangles,...

Exercice 1956 Soit P un plan muni d'un repère $R(O,\vec{i},\vec{j})$, les points et les vecteurs sont exprimés par leurs ccordonnées dans R.

1. Donner un vecteur directeur, la pente et des représentations cartésiennes et paramétriques des droites (AB) suivantes :

   (a) $A(2,3)$ et $B(-1,4)$

   (b) $A(-7,-2)$ et $B(-2,-5)$

   (c) $A(3,3)$ et $B(3,6)$.

2. Donner des représentations cartésiennes et paramétriques des droites passant par A et dirigées par $\vec{u}$ avec :

   (a) $A(2,1)$ et $\vec{u}(-3,-1)$

   (b) $A(0,1)$ et $\vec{u}(1,2)$

   (c) $A(-1,1)$ et $\vec{u}(1,0)$.

3. Donner des représentations paramétriques et cartésiennes (que l'on pourra déduire des paramétriques) des droites définies comme suit :

   (a) passant par le point $(0,4)$ et de pente 3,

   (b) passant par le point $(2,-3)$ et parallèle à l'axe des x,

   (c) passant par le point $(-2,5)$ et parallèle à la droite $D : 8x+4y=3$,

   (d) passant par le point $(1,0)$ et parallèle à la droite $D : x-y+5=0$.

Exercice 1957 1. Les trois points A, B et C de P sont-ils alignés ? Si oui donner une équation cartésienne de la droite qui les contient.

   (a) $A(-3,3)$, $B(5,2)$ et $C(2,1)$,

   (b) $A(1,1)$, $B(-2,2)$ et $C(2,1)$,

   (c) $A(4,-3)$, $B(0,-1)$ et $C(2,-2)$,

   (d) $A(2,-1)$, $B(1,-2)$ et $C(-3,4)$.

2. Dans les cas suivant, donner un vecteur directeur de D et déterminer si le point C appartient ou non à D

   (a) $(D) : 3x+5y+1=0$, $\qquad C(3,-2)$.

   (b) $(D) : \left\{\begin{array}{l} x=3+t \\ y=2-t \end{array}\right.$, $\qquad C(5,3)$.

Exercice 1958 Dans l'exercice suivant, on considère des couples de deux droites D_1 et D_2 : on doit déterminer si elles sont sécantes, parallèles ou confondues. Si elles sont sécantes, on déterminera les coordonnées du point d'intersection, et si elles sont parallèles ou confondues on déterminera un vecteur directeur.

1. $(D_1) : 3x + 5y - 2 = 0$ et $(D_2) : x - 2y + 3 = 0$
2. $(D_1) : 2x - 4y + 1 = 0$ et $(D_2) : -5x + 10y + 3 = 0$
3. $(D_1) : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 4t \\ y = 2 - t \end{array} \right.$ et $(D_2) : \left\{ \begin{array}{l} x = 5 - s \\ y = 2 + 3s \end{array} \right.$
4. $(D_1) : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{array} \right.$ et $(D_2) : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 4s \\ y = -1 + 6s \end{array} \right.$
5. $(D_1) : x - 2y + 3 = 0$ et $D_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{array} \right.$
6. $(D_1) : 3x - 2y + 1 = 0$ et $(D_2) : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 4t \\ y = 2 - 6t \end{array} \right.$

Exercice 1959 On considère les deux droites du plan $D : 2x-3y+4 = 0$ et $D' : x+3y+1 = 0$. On considère le point A, intersection des deux droites et le point B de coordonnées $(3, 8)$. Donner une équation de (AB).

Exercice 1960 On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour équations $(AB) : x+2y = 3, (AC) : x + y = 2, (BC) : 2x + 3y = 4$.

1. Donner les coordonnées des points A, B, C.
2. Donner les coordonnées des milieux A', B', C' de $(BC), (AC)$ et (AB) respectivement.
3. Donner une équation de chaque médiane et vérifier qu'elles sont concourantes.

Exercice 1961 (Médianes) On considère dans P trois points A, B et C.

1. Déterminer dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ des équations pour les médianes du triangle ABC.
2. En déduire que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Exercice 1962 (Théorème de Menelaüs) Dans le triangle ABC, on considère trois points P, Q, R, sur les côtés $(BC), (AC)$ et (AB) respectivement, ces points n'étant pas les points A, B ou C. Montrer que P, Q et R sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$$

Exercice 1963 (Théorème de Pappus) Soient (A_1, A_2, A_3) et (B_1, B_2, B_3) deux systèmes de trois points alignés. Montrer que les points C_1, C_2 et C_3, intersections des droites (A_2B_3) et (A_3B_2), (A_3B_1) et (A_1B_3), (A_1B_2) et (A_2B_1) (que l'on suppose exister) sont alignés.

Exercice 1964 (Théorème de Ceva) Dans le triangle ABC, on considère trois points P, Q, R, sur les droites $(BC), (AC)$ et (AB) respectivement, ces points n'étant pas les points A, B ou C. Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} . \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} . \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

43.2 Convexes

Exercice 1965 Montrer que l'intersection de deux parties convexes est convexe. Est-ce vrai pour l'union ?

Exercice 1966 Soient C et C' deux ensembles convexes d'un espace affine, montrer que

$$D = \left\{ \frac{M+M'}{2} | \, (M,M') \in C \times C' \right\}$$

est convexe.

Exercice 1967 On appelle enveloppe convexe $co(A)$ d'une partie non vide A d'un espace affine E l'intersection des ensembles convexes contenant A ; c'est le plus petit ensemble convexe contenant A. Montrer que c'est aussi l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de A. Que sont $co(\{A,B\}), co(\{A,B,C\})$?

Exercice 1968 Un cône d'un espace vectoriel est une partie K telle que :

$$\forall x \in K, \forall t \geqslant 0, tx \in K.$$

Montrer qu'un cône est convexe si et seulement si il est stable par addition.

Exercice 1969 Trouver les parties C convexes de $\mathbb{R}^2$ telles que le complémentaire ${}^cC$ soit aussi convexe.

Exercice 1970 Soit E un espace affine de dimension n, et $(x_1, ..., x_n)$ des points de E.On considère une combinaison convexe de points de A, sous ensemble de E :

$$x = \sum_{i=1}^{m} t_i x_i \text{ avec } \forall i \in \{1, ..., m\} : t_i \geqslant 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{m} t_j = 1.$$

Montrer qu'on peut écrire :

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} g_k x_k \text{ avec } \forall k \in \{1, ..., n+1\} : g_k \geqslant 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{n+1} g_k = 1.$$

Ainsi il suffit de $n+1$ points dans un espace de dimension n pour écrire une combinaison convexe.

43.3 Divers

Exercice 1971 Une bimédiane d'un tétraèdre est une droite qui passe par les milieux de deux arêtes opposées. Montrer que les trois bimédianes sont concourantes.

Exercice 1972 Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine. Déterminer l'ensemble des points ayant mêmes coordonnées dans les repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Exercice 1973 Soit $R_1 = (0, e_1, e_2, e_3)$ un repère cartésien d'un espace affine. Soient $O' = (1,0,0)$, $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_1 - e_2$, $e_3' = e_3$ et $R_2 = (0', e_1', e_2', e_3')$. Déterminer les coordonnées d'un point dans R_2 en fonction de ses coordonnées dans R_1.

Exercice 1974 Soient $(D_i)_{i=1...4}$ quatre droites du plan affine sécantes deux à deux en six points distincts. Si deux d'entre elles se coupent en A et les deux autres en B, on dit que $[AB]$ est une diagonale. Montrer que les milieux des trois diagonales sont alignés (on étudiera le problème analytiquement en choisissant un bon repère).

Exercice 1975

1. Soient $(D_i : u_i x + v_i y + h_i = 0)_{i=1...3}$ trois droites du plan affine. Montrer qu'elles sont parallèles ou concourantes ssi $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0.$

2. Soient $(D_1 : x + 2y = 1)$, $(D_2 : x + y = 2)$, $(D_3 : 2x + y = 3)$, $(D_4 : 3x + 2y = 1)$. Déterminer une équation de la droite D qui passe par $D_1 \cap D_2$ et $D_3 \cap D_4$ sans calculer ces points d'intersection.

Exercice 1976 Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine.

1. Soit f une application affine telle que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$. Montrer que $f = id$.
2. Soient f et g affines telles que $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ et $f(C) = g(C)$. Que peut-on dire ?
3. Soit f affine telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$ et $f(C) = A$. Que peut-on dire ?

Exercice 1977 Soit E un espace affine et f une application affine de E dans E.

1. Montrer que f est une translation ssi $\vec{f} = id$.
2. Montrer que si $\vec{f} = \lambda id$ où $\lambda \neq 1$ alors f est une homothétie (on montrera que f admet un point fixe).
3. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe du groupe affine.
4. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties bijectives. Montrer que $\mathcal{T} \cup \mathcal{H}$ est un sous-groupe du groupe affine.

Exercice 1978 Soient f et g deux applications affines de E dans E telles que $\vec{f} = \vec{g}$. Montrer qu'il existe $u \in \vec{E}$ tel que $f = t_u \circ g$ où t_u est la translation de vecteur u. Que peut-on dire si de plus il existe $M \in E$ tel que $f(M) = g(M)$?

Exercice 1979 Reconnaître les application affines de $\mathbb{R}^3$ suivantes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x + 2y - 2z - 2 \\ -3y + 2z + 6 \\ -4y + 3z + 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{y}{2} - \frac{z}{2} + \frac{2}{3} \\ -x + \frac{3y}{2} - \frac{z}{2} + \frac{2}{3} \\ -x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} + \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 1980 Soit E un espace affine, f une application affine de E dans E et

$$F = \{M \in E / f(M) = M\}.$$

On suppose que $F \neq \emptyset$.

1. Montrer que $\vec{F} = \ker(\vec{f} - id)$.
2. On suppose que $\vec{f} \circ \vec{f} = \vec{f}$. Soit s la projection affine sur F parallèlement à $\ker(\vec{f})$. Montrer que $f = s$.
3. Faire la même chose si $\vec{f} \circ \vec{f} = id$.

Exercice 1981 Soit E un espace affine et f une application affine de E dans E.

1. Montrer que si $f \circ f = f$ alors f est une projection affine.
2. Montrer que si $f \circ f = id$ alors f est une symétrie affine.

44 Isométries vectorielles

Exercice 1982 Compléter $x_1 = (1, 2, 1)$ en base orthogonale directe de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique.

Exercice 1983 Montrer que $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}^3)^3 \quad x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0$.

Exercice 1984 Soit E euclidien orienté de dimension 3 et $a \in E$.
Soit $f : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \wedge a \end{cases}$. f est-elle linéaire, bijective ? Comparer f^3 et f.

Exercice 1985 Soient a et b deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Discuter et résoudre l'équation $a \wedge x = b$.

Exercice 1986 Soit R le rotation vectorielle d'angle θ et d'axe orienté par le vecteur unitaire k. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $R(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)k \wedge x + 2(x|k)\sin^2(\frac{\theta}{2})k$.

Exercice 1987 Determiner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du retournement d'axe $\mathbb{R}(1,2,1)$.

Exercice 1988 Reconnaître les transformations géométriques dont les matrices respectives dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 1989 Soit R une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe $\mathbb{R}u$ et d'angle θ et r une rotation quelconque. Déterminer rRr^{-1}. En déduire que le centre de $SO_3(\mathbb{R})$ est bîîîîîp (le centre est l'ensemble des rotations qui commutent avec toutes les autres).

Exercice 1990 On considère l'espace vectoriel euclidien canonique et orienté $\mathbb{R}^3$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ et $p = [a, b, c]$ le produit mixte de a, b et c. Exprimer à l'aide de p les quantités suivantes

1. $s = [a + b, b + c, c + a]$,
2. $t = [a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a]$.

45 Géométrie affine euclidienne

45.1 Géométrie dans le plan

Exercice 1991 On considère les droites $D : x + 2y = 5$ et $D' : 3x - y = 1$ et on note A l'intersection des deux droites et B le point de coordonnées $(5, 2)$.

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à D passant par B.
3. Donner une équation cartésienne de la parallèle à D' passant par B.
4. Soit C le point de coordonnées $(2, -7)$). Donner une équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[B, C]$. Δ est-elle parallèle à D ? Et à D' ?

Exercice 1992 1. On considère la famille des droites $D_\lambda : x + \lambda y + 1 = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Vérifier que ces droites passent toutes par un même point A dont on donnera les coordonnées.

(b) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est verticale ? Si oui donner une équation de cette droite.

(c) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est horizontale ? Si oui donner une équation de cette droite.

(d) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il qui sont parallèles, confondues ou perpendiculaires à la droite Δ d'équation $2x - 3y + 1 = 0$? Si oui donner des équations de ces droites.

2. On considère la famille de droites $D_m : (2m-1)x+(3-m)y+m+1=0$, $m \in \mathbb{R}$. Parmi toutes ces droites y en a-t-il une perpendiculaire à $(\Delta) : x+y-1=0$? Si oui, laquelle ?

Exercice 1993 On considère les trois points de P : $A(2,-3)$, $B(0,-1)$ et $C(-2,-5)$.

1. Dessiner le triangle ABC puis calculer son aire.
2. Calculer les coordonnées de l'orthocentre H, du centre du cercle circonscrit Ω et du centre de gravité G de ABC.
3. Vérifier que H, Ω et G sont alignés et qu'en particulier $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega H}$.

Exercice 1994 1. Calculer les angles :
   (a) entre les vecteurs $\vec{u}_1(\sqrt{3},2)$ et $\vec{v}_1(1,3\sqrt{3})$,
   (b) entre les vecteurs $\vec{u}_2(1,\sqrt{2})$ et $\vec{v}_2(\sqrt{2}-2,\sqrt{2}+2)$,
   (c) du triangle de sommets $A(-1,0)$, $B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $C(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.
2. Calculer la distance du point A à la droite D :
   (a) $A(1,1)$ et $D : 2x+y-1=0$
   (b) $A(2,-1)$ et $D : 3x-2y+4=0$
   (c) $A(3,3)$ et $D : -x+3y+2=0$.
3. Trouver les bissectrices de :
   (a) $D : 5x-12y+7=0$ et $D' : 3x+4y-7=0$,
   (b) $D : x-3y+5=0$ et$D' : 3x-y-1=0$.

Exercice 1995 Soit $(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan. Déterminer l'expression analytique dans ce repère de la réflexion d'axe $x+y=1$.

Exercice 1996 Soit G un sous-groupe fini de l'ensemble des isométries du plan. Montrer que G ne peut pas contenir de translation non triviale.

Exercice 1997 On considère dans le plan les deux droites $(D : 3x+y=5)$ et $(D' : x-2y+3=0)$. Quel est l'angle entre ces deux droites ?

Exercice 1998 Soit C un cercle de centre $I=(x_0,y_0)$ et de rayon R et $(D : ax+by+c=0)$. En paramétrant D, montrer que D est tangente à C (*i.e.* $D\cap C$ est un singleton) ssi $d(I,D)=R$.

Exercice 1999 Soient A et B deux points du plan et α un réel. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\alpha$.

Exercice 2000 Soient A,B,C les sommets d'un triangle équilatéral de coté 1. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $MA^2+MB^2+MC^2=2$.

Exercice 2001 Soient A et B deux points du plan et k un réel strictement positif. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $MA=kMB$.

Exercice 2002 Quelle est l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3x-4y \\ -4x+3y-2 \end{pmatrix} \end{cases}$?

Exercice 2003 Soit $X=\{A,B,C,D\}$ les sommets d'un carré du plan et $G=\{f\in I_2/f(X)=X\}$. Montrer que G est un sous-groupe de I_2. Montrer que si $f\in G$ alors $f(O)=O$ où O est l'isobarycentre de A,B,C,D. En déduire les éléments de G.

Exercice 2004 Déterminer les $z\in\mathbb{C}$ tels que z,z^2,z^4 soient alignés.

Exercice 2005 Si a et b sont les affixes de deux sommets opposés d'un carré, calculer les affixes des deux autres.

Exercice 2006 Soit O, A, B un triangle rectangle en O. A toute droite D issue de O on associe le cercle de diamètre $A'B'$ où A' et B' sont les projetés orthogonaux de A et B sur D. Montrer que tous les cercles passent par un même point fixe (on pourra utiliser une similitude...).

Exercice 2007 Pour a, b, c trois nombres complexes tels que $b \neq c$, on note $V(a, b, c) = \frac{c-a}{c-b}$. Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre nombres complexes distincts. Montrer que les images de ces nombres complexes sont alignées ou cocycliques ssi $\frac{V(z_1,z_2,z_3)}{V(z_1,z_2,z_4)} \in \mathbb{R}$.

Exercice 2008 Soit $ABCD$ un carré direct et M un point de la droite (DC). La perpendiculaire à (AM) passant par A coupe (BC) en N. On note I le milieu de $[MN]$. Déterminer le lieu des points I lorsque M décrit la droite (DC).

Exercice 2009 Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan tels que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$. Montrer que le centre de la similitude transformant A en C et B en D est aussi le centre de celle transformant A en B et C en D.

45.2 Géométrie analytique dans l'espace

Exercice 2010 Les quatre points A, B, C et D de l'espace sont-ils coplanaires ? Si oui, donner une équation cartésienne du plan qui les contient :

1. $A(1, 2, 2)$, $B(-1, -2, -1)$, $C(3, 4, 4)$ et $D(-2, 3, 1)$.
2. $A(0, 1, 3)$, $B(1, 2, -1)$, $C(1, 1, -1)$ et $D(1, 2, 2)$.
3. $A(-1, 2, 4)$, $B(3, -3, 0)$, $C(1, 3, 4)$ et $D(5, 1, -6)$.
4. $A(2, -1, 0)$, $B(0, -4, 5)$, $C(4, -13, 13)$ et $D(-4, 5, -3)$.

Exercice 2011 1. Trouver une équation du plan (P) défini par les éléments suivants.

(a) A, B et C sont des points de (P)

i. $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$ et $C(0, 1, 0)$.

ii. $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 1)$ et $C(-1, 2, 4)$.

iii. $A(5, 0, -1)$, $B(1, 3, -2)$ et $C(-2, 4, 5)$.

(b) A est un point de (P), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de (P)

i. $A(1, 2, 1)$, $\vec{u}(4, 0, 3)$ et $\vec{v}(1, 3, -1)$.

ii. $A(1, 0, 2)$, $\vec{u}(2, -1, 3)$ et $\vec{v}(-1, 4, 5)$.

(c) A est un point de (P), D est une droite contenue dans (P)

i. $A(4, 1, -3)$ et $(D) : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases}$

ii. $A(1, 1, 0)$ et $(D) : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

(d) D et D' sont des droites contenues dans (P)

i. $(D) : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 3x - y - z + 5 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$

ii. $(D) : \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 2x + y - 3z + 7 = 0 \\ 3x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$

2. Montrer que les représentations paramétriques suivantes définissent le même plan : $\begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 1 - s - t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 + 3u - v \\ y = 3 + 3u + v \\ z = 1 - 2u \end{cases}$

Exercice 2012 Les plans suivants sont-ils parallèles ou sécants ? Dans ce dernier cas, donner un vecteur directeur de la droite $(D) = (P) \cap (P')$.

1. $(P) : 5x - y - 1 = 0$ et $(P') : z = 3$.
2. $(P) : x + y + z + 1 = 0$ et $(P') : 2x - y + 3z + 2 = 0$.
3. $(P) : 2x - z + 1 = 0$ et $(P') : 4x - 3y + 2z + 5 = 0$.
4. $(P) : 4x - 6y + 8z - 1 = 0$ et $(P') : -6x + 12y - 9z + 11 = 0$.

Exercice 2013 Quelle est la nature de l'intersection des trois plans suivants ? Si c'est un point en donner les coordonnées, si c'est une droite en donner un vecteur directeur.

1. $(P) : z = 1$, $(P') : x - y - 2 = 0$ et $(P") : 4x - 2y + z + 2 = 0$.
2. $(P) : 4x - 2y + 3z + 5 = 0$, $(P') : 3x + y - z + 2 = 0$ et $(P") : x - y + z + 1 = 0$.
3. $(P) : 4x - 2y + 10z - 4 = 0$, $(P') : -10x + 5y - 25z + 13 = 0$ et $(P") : x + y - z + 1 = 0$.
4. $(P) : 3x - y + 2z - 5 = 0$, $(P') : x - y + 3z - 7 = 0$ et $(P") : 4x + 2y - z + 1 = 0$.
5. $(P) : x - y + 2z - 1 = 0$, $(P') : 2x + y + z + 3 = 0$ et $(P") : x - 4y + 5z - 6 = 0$.
6. $(P) : x - y + 2z - 1 = 0$, $(P') : 2x + y - z + 1 = 0$ et $(P") : x + 5y - 8z + 2 = 0$.

Exercice 2014 Les droites suivantes sont-elles sécantes, parallèles ou non coplanaires ? Si elles sont sécantes donner leur point d'intersection et si elles sont parallèles donner un vecteur directeur.

1. $(D) : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$
2. $(D) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 1 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = 2t \end{cases}$

Exercice 2015 Dans chacun des cas suivants dire si la droite (D) et le plan (P) sont parallèles ou sécants. Donner alors leur point d'intersection.

1. $(D) : \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ et $(P) : 4x - 3y + 7z - 7 = 0$.
2. $(D) : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ et $(P) : -3x + 2y + 3z - 5 = 0$.

Exercice 2016 On considère les cinq points suivants : $A(1, 2, -1)$, $B(3, 2, 0)$, $C(2, 1, -1)$, $D(1, 0, 4)$ et $E(-1, 1, 1)$.

1. Ces quatre points sont-ils coplanaires ?
2. Déterminer la nature du triangle ABC. A, B et C sont-ils alignés, si non donner une équation catésienne du plan P qui les contient.
3. Déterminer les coordonnées du barycentre G des points A, B, C et D.
4. Montrer que O, D et G sont alignés et que la droite OD est perpendiculaire à P.

Exercice 2017 Soient D_1, D_2 et D_3 trois droites concourrantes en Ω et soient P, P' et P'' trois plans tels que aucun ne contient aucune des 3 droites ci dessus. On peut alors définir les 9 points d'intersections : P coupe D_1, D_2, D_3 en A, B, C ; P' coupe D_1, D_2, D_3 en A', B', C' ; P' coupe D_1 D_2, D_3 en A'', B'', C'' ;
On considère aussi les intersections suivantes : $I = (AB') \cap (A'B)$, $J = (AC') \cap (A'C)$,$K = (BC') \cap (B'C)$.
Montrer que les droites $(A''K)$, $B''J)$ et $(C''I)$ sont parallèlles ou concourrantes. (*Indication : utiliser un bon repère affine*).

Exercice 2018 On considère les quatre points suivants : $A(2,0,0)$, $B(-1,\sqrt{3},0)$, $C(-1,-\sqrt{3},0)$, $D(0,0,4)$. Déterminer un vecteur directeur de la droite $(ABC) \cap (ADE)$.

Exercice 2019 Donner une condition sur m pour que les trois plans suivants se coupent sur une même droite. $(P) : x + my - z + 1 = 0$, $(P') : (m+1)x + 3y + 4z - 2 = 0$ et $(P") : y + (2m+4)z - (2m+2) = 0$.

Exercice 2020 On considère la famille de plans $(P_m)_{m\in\mathbb{R}}$ définis par les équations cartésiennes :

$$m^2x + (2m-1)y + mz = 3$$

1. Déterminer les plans P_m dans chacun des cas suivants :
   (a) $A(1,1,1) \in P_m$
   (b) $B(-1,-2,6) \in P_m$
   (c) $C(-1,0,1) \in P_m$
   (d) $\vec{v}(1,1,1)$ est un vecteur directeur de P
   (e) $\vec{n}(0,1,0)$ est normal à P.
2. Montrer qu'il existe un unique point R appartenant à tous les plans P_m.

Exercice 2021 1. Déterminer la distance du point A au plan (P)
   (a) $A(1,1,1)$ et $(P) : x + y + z - 1 = 0$
   (b) $A(1,0,2)$ et $(P) : 2x + y + z + 4 = 0$.
   (c) $A(3,2,1)$ et $(P) : -x + 5y - 4z + 2 = 0$.
   (d) $A(4,5,2)$ et $(P) : 2x - y + z = 0$.
2. Calculer la distance du point $A(1,1,1)$ à la droite $(D) : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$

Exercice 2022 On considère les deux droites $(D) : \begin{cases} y-z=3 \\ -x-y+2=0 \end{cases}$ et $(\Delta) : \begin{cases} -x+3z=1 \\ -x-3y=2 \end{cases}$.

1. Donner un vecteur directeur de D et de Δ.
2. Donner une équation paramétrique de Δ.
3. On fixe un point M_α de Δ dépendant du paramètre α où α est l'abscisse de point M_α. Donner une équation du plan P_α passant par M_α et contenant D.
4. Parmi tous ces plans, y en a-t-il un qui est perpendiculaire à Δ ? Pour quelle valeur α_0 de α est il obtenu ? Donner une équation de ce plan. Donner les coordonnées de M_{α_0}.

Exercice 2023 On se donne 2 droites D_1 et D_2 ayant comme vecteurs directeurs respectifs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

1. Perpendiculaire commune à ces deux droites.

(a) On suppose que $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires et on note $\vec{n} := \vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$.

i. Montrer que le plan P_1 contenant D_1 et admettant $\vec{n}$ comme vecteur directeur et le plan P_2 contenant D_2 et admettant $\vec{n}$ comme vecteur directeur se coupent en une droite Δ.

ii. Montrer que Δ est une perpendiculaire commune à D_1 et D_2 (c'est à dire Δ coupe D_1 et D_2, et est orthogonale à D_1 et à D_2).

iii. Montrer que Δ est la seule perpendiculaire commune à D_1 et D_2.

(b) Comment construire Δ dans le cas où D_1 et D_2 sont parallèlles ?

2. Distance entre ces deux droites.
Soit $H_1 := D_1 \cap \Delta$ et $H_2 := D_2 \cap \Delta$.
Montrer que pour tout $A_1 \in D_1$ et tout $A_2 \in D_2$, on a $d(A_1, A_2) \geqslant d(H_1, H_2)$.
$d(H_1, H_2)$ est appelée *distance entre les deux droites* D_1 *et* D_2.

3. Donner des équations cartésiennes pour Δ et calculer la distance entre les deux droites D_1 et D_2 dans le cas suivant :

(a) $(D_1) : \begin{cases} x - y - z + 4 = 0 \\ -x - 2y - 3z + 9 = 0 \end{cases}$ et $(D_2) : \begin{cases} -x + 2y + z + 2 = 0 \\ -2x + 4y - z + 1 = 0 \end{cases}$

(b) $(D_1) : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ et $(D_2) : \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

(c) $(D_1) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 1 \end{cases}$ et $(D_2) : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = 2t \end{cases}$

(d) $(D_1) : \begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ et $(D_2) : \begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$

Exercice 2024 1. Déterminer les plans bissecteurs de :
$P : x + y + z + 3 = 0$ et $P' : 2x + y + 2z = 1$
$Q : 5x + 3y - 4z = 8$ et $Q' : 4x - 5y - 3z = 2$.

2. Déterminer l'ensemble des points de l'espace équidistants des trois axes de coordonnées.

3. On considère la droite D d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 1 \\ z = -t - 1 \end{cases}$
Donner une équation des deux plans P et P' contenant D à une distance de 1 de l'origine (point O de coordonnées $(0, 0, 0)$).

Exercice 2025 Déterminer l'expression analytique de la réflexion s de plan $x + y - z = 1$. Quelle est l'image par s du plan $x + 2y - 3z + 1 = 0$?

Exercice 2026 Déterminer la distance du point $M = (1, 2, 3)$ aux droites

$$D \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et } \Delta \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Exercice 2027 Soit deux plans $\begin{cases} \pi : & ux + vy + wz + h & = & 0 \\ \pi' : & u'x + v'y + w'z + h' & = & 0 \end{cases}$.

1. Montrer que si π et π' sont sécants, tout plan passant par leur droite d'intersection D a une équation du type
$$\lambda(ux+vy+wz+h)+\mu(u'x+v'y+w'z+h')=0$$
et réciproquement, tout plan ayant une équation de ce type, (pour un couple (λ,μ) donné) passe par D.
2. Si π et π' sont parallèles, que représente l'ensemble des plans d'équation :
$$\lambda(ux+vy+wz+h)+\mu(u'x+v'y+w'z+h')=0$$

Exercice 2028 Écrire l'équation du plan passant par la droite $\left\{\begin{array}{rcl}3x+2y+5z+6&=&0\\x+4y+3z+4&=&0\end{array}\right.$ et parallèle à la droite $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$.

Exercice 2029 Soit la droite d'équations $\left\{\begin{array}{rcl}3x-2y-z+4&=&0\\x-4y-3z-2&=&0\end{array}\right.$. Trouver sa projection sur le plan $5x+2y+2z-7=0$.

Exercice 2030 Soit les droites D et D' non coplanaires :
$$(D)\left\{\begin{array}{rcl}x-y+z+1&=&0\\2x+y-z&=&0\end{array}\right.\quad\text{et}\quad(D')\left\{\begin{array}{rcl}x+2y+z&=&0\\2x-2y-2z-1&=&0\end{array}\right.$$
Trouver des équations de leur perpendiculaire commune.

45.3 Changements de repères, applications affines, isométries

Exercice 2031 On considère les 4 points A, B, C, D donnés. $(A,\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})$ définit-il bien un nouveau repère ? Dans ce cas, trouver les formules de changements de repère exprimant les coordonnées (x,y,z) dans $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en fonction de celles (x',y',z') dans $(A,\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})$.

1. $A(2,-1,0)$, $B(7,-1,-1)$, $C(-3,0,-2)$, $D(3,-6,-3)$
2. $A(4,1,4)$, $B(7,3,1)$, $C(9,0,0)$, $D(5,2,3)$
3. $A(0,-1,3)$, $B(5,-6,4)$, $C(-4,1,-2)$, $D(-3,3,6)$
4. $A(1,1,0)$, $B(1,5,2)$, $C(0,-1,1)$, $D(3,4,-1)$
5. $A(2,-1,4)$, $B(0,0,1)$, $C(3,2,-1)$, $D(1,3,4)$
6. $A(4,4,2)$, $B(5,3,2)$, $C(4,3,3)$, $D(3,5,2)$
7. $A(1,3,1)$,$B(1,2,2)$,$C(2,-1,-4)$, $D(0,8,6)$.

Exercice 2032 Les formules suivantes définissent-elles bien un changement de repère ? Dans ce cas, donner le changement de repère inverse.

1. $\left\{\begin{array}{l}x'=y-z+1\\y'=-x-4y+5z+2\\z'=x-5y+5z+1\end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l}x'=5x+4y+3z-2\\y'=2x+3y+z+2\\z'=4x-y+3z+2\end{array}\right.$

3. $\begin{cases} x' = -2x - 4y + 2z - 2 \\ y' = x + y - 5z + 1 \\ z' = -3x - 4y + 4z - 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 3x - 5y + z + 2 \\ y' = 2x - y + z - 1 \\ z' = -3x - 4y - z - 5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 2x - z + 1 \\ y' = -2x + 2y + 2z - 2 \\ z' = -2x + y - z \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = x - 2y - 3z + 5 \\ y' = -3x + 4y + z - 2 \\ z' = 2x - y + 6z + 3 \end{cases}$

Exercice 2033 On considère les droites et les plans suivants dont les équations sont données dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Donner leurs équations dans le nouveau repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$, sachant que dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $A(4, -1, 2)$, $B(2, -5, 4)$, $C(5, 0, -3)$, $D(1, -5, 6)$.

1. $P : x + y = 1$
2. $P : 2x - 3y + 4z - 1 = 0$
3. $P : x - y + z + 3 = 0$
4. $P : \begin{cases} x = 2t + 3s + 1 \\ y = t - s + 2 \\ z = 4t - 2s - 3 \end{cases}$
5. $(D) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 4z = 3 \end{cases}$
6. $(D) : \begin{cases} 3x - y - z = -1 \\ 4x - 3y - z = -2 \end{cases}$

Exercice 2034 On considère la droite $(D) : \begin{cases} y - z = 3 \\ -x - y + 2 = 0 \end{cases}$.

1. On considère le point $A(-2, 4, 1)$, les vecteurs $\vec{u}(1, 1, 1), \vec{v}(2, 2, -4)$, $\vec{w}(3, -1, , 1)$ et le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On note x', y'et z' les coordonnées dans ce repère. Donner les formules analytiques du changement de repère exprimant x, y, z en fonction de x', y', z'.
2. Utiliser ce changement de repère pour donner dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une équation de D .
3. Donner les formules analytiques du changement de repère inverse.

Exercice 2035 (Transformations affines et Isométries) Soit P un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ quelconque.

1. On considère D une droite d'équation cartésienne $2x - y + 3 = 0$ et $\vec{u}(3, -2)$.
   (a) Soit $A(4, 2)$. Donner une équation paramétrique de D_A droite passant par A de direction $\vec{u}$. En déduire les coordonnées de $A' = D_A \cap D$ projeté de A sur D selon $\vec{u}$.
   (b) Définir plus généralement analytiquement la projection sur D selon $\vec{u}$ en exprimant les coordonnées x', y' de M' projeté de $M(x, y)$ en fonction de x et y.

2. Définir analytiquement les projections sur D selon Δ dans les cas suivants :
   (a) Δ d'équation $x-2y+1=0$.
   (b) Δ d'équation $3x+2y+2=0$.
   (c) Δ d'équation $x+y-1=0$.
   (d) Δ d'équation $2x-2y+4=0$.

Exercice 2036 Soit P un plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ quelconque.

1. Donner l'expression analytique de la translation t_1 de vecteur $(1,2)$.
2. Donner l'expression analytique de la translation t_2 de vecteur $(-1,2)$.
3. Donner l'expression analytique de l'homothétie h_1 de centre l'origine du repère et de rapport 2 et de l'homothétie h_2 de centre $A(2,-1)$ de rapport 3.
4. Donner l'expression analytique de $t_1\circ h_1$, $t_2\circ h_2$, $h_1\circ t_1$, $h_2\circ t_2$.
5. Soit $M(x,y)$ un point de P. Donner les coordonnées du symétrique de M par rapport à la droite d'équation $y=ax+b$.

Exercice 2037 1. On considère S_1 la transformation du plan définie par le système d'équations suivant :
$x'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-1,\ y'=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+2$. Reconnaître cette transformation.

2. De même avec la transformation S_2 définie par $x'=5\sqrt{2}x+5\sqrt{2}y,\ y'=-5\sqrt{2}x+5\sqrt{2}y$.
3. On compose S_1 avec S_2. Donner l'expression de $S_1\circ S_2$, et trouver la nature de cette transformation.

Exercice 2038 1. Soit f la transformation de l'espace définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = & -3x+2y-2z+4 \\ y' = & -8x+5y-4z+8 \\ z' = & -4x+2y-z+4 \end{cases}$$

   (a) Déterminer l'ensemble P des points invariants par f.
   (b) Montrer que pour M d'image M', le milieu de $[MM']$ est dans P, (MM') est parallèle à une direction fixe.
   (c) En déduire une description simple de f.

2. Soit f la transformation de l'espace définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(& 2x-y-z+1) \\ y' = \frac{1}{3}(& -x+2y-z+1) \\ z' = \frac{1}{3}(& -x-y+2z+1) \end{cases}$$

   (a) Déterminer l'ensemble P des points invariants par f.
   (b) Montrer que pour M d'image M' le vecteur $M\vec{M}'$ est colinéaire à un vecteur fixe.
   (c) En déduire une description simple de f.

Exercice 2039 1. Définir analytiquement les projections orthogonales suivantes :
   (a) sur le plan d'équation $2x+2y-z=1$.
   (b) sur le plan d'équation $2x-3y+z=6$.
   (c) sur la droite d'équation $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-z=2 \end{cases}$.

2. Donner l'expression analytique de la projection sur le plan (P) contenant le point $C(2,-1,1)$ et ayant pour vecteurs directeurs $\vec{u}(0,-1,1)$ et $\vec{u'}(-2,0,1)$, selon la droite AB, où $A(1,-1,0)$ et $B(0,-1,3)$.

Exercice 2040 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{OI},\vec{OJ})$.

1. Soit f la transformation du plan définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = & \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y-1) \\ y' = & \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y+2) \end{cases}$$

   (a) Calculer les coordonnées de O', I', J' les images par f des points O, I, J.

   (b) Montrer que le repère $(O',\vec{O'I'},\vec{O'J'})$ est orthonormé, est-il direct ?

   (c) En déduire que f est une isométrie, est-elle directe ?

   (d) Déterminer l'ensemble des points invariants par f et reconnaitre f.

   (e) Donner l'expression analytique de la transformation inverse de f.

   (f) Calculer l'image par f la droite d'équation $2x-y-1=0$.

2. Donner l'expression analytique de la rotation de centre $A(1,1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$, calculer l'image de 0 par cette transformation.

3. Même question pour la symétrie d'axe la droite d'équation $x+y+1=0$

4. Donner l'expression analytique de la composée des deux applications précédentes.

Exercice 2041 Dans le plan cartésien identifié à $\mathbb{C}$, un point M est représenté par son affixe z.

1. Dessiner les ensembles suivants puis les exprimer en fonction de (x,y) $((z=x+iy))$:
   (i) $z+\overline{z}=1$ (ii) $z-\overline{z}=i$ (iii) $iz-i\overline{z}=1$

2. Donner l'expression analytique en complexe des transformations suivantes, puis calculer l'image de i par ces transformations :

   (a) la rotation de centre $1+i$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$,

   (b) la symétrie d'axe la droite d'équation $iz-i\overline{z}=1$,

   (c) la composée des deux applications précédentes.

3. Soit f la transformation du plan définie analytiquement par $z'=(1+i)z+1$.

   (a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

   (b) Donner l'expression analytique de la transformation inverse de f.

   (c) Calculer l'image par f de l'ensemble $z+\overline{z}=1$.

   (d) Ecrire f comme la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Exercice 2042 Tout ce problème se situe dans l'espace euclidien tridimensionnel muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(0,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.

1. On considère les deux droites d et D données par les systèmes d'équations cartésiennes suivant :

$$d\begin{cases} x+y-3z &=0 \\ y+z &=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad D\begin{cases} x-1 &=0 \\ y-z-1 &=0 \end{cases}$$

   (a) i. Donner un point et un vecteur directeur de d. Donner un point et un vecteur directeur de D.

ii. Dire si les droites d et D sont parallèles, sécantes ou non coplanaires.

iii. Justifier l'existence de deux plans parallèles (en donnant pour chacun de ces deux plans un point et deux vecteurs directeurs) tels que d est contenue dans l'un et D est contenue dans l'autre.

(b) i. Soient $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(4,-1,1)$ dans $\mathcal{R}$, $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées $(0,1,1)$ dans $\mathcal{R}$ et Ω le point de coordonnées $(1,1,0)$ dans $\mathcal{R}$.
Déterminer une équation cartésienne pour le plan P de repère cartésien $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, en déduire une équation cartésienne pour le plan Q de repère cartésien $(\Omega,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

ii. Donner des équations paramétriques pour la droite Δ normale à P passant par O. Déterminer les deux points $\Delta \cap P$ et $\Delta \cap Q$ puis calculer la distance entre eux.

Interpréter cette distance.

2. On considère les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{a} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $\overrightarrow{b} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\overrightarrow{c} = (\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
   (a) Montrer que $(0,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ est un repère orthonormé. Est-il direct ?
   (b) Ecrire les formules de changement de repères de $\mathcal{R}$ à $(0,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$.
   (c) Quelle est l'équation dans le repère $(0,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ du plan d'équation $x+2y-2z=0$ dans $\mathcal{R}$? Même question avec le plan d'équation $x+2y-2z=3$ dans $\mathcal{R}$.

Exercice 2043 Tout ce problème se situe dans l'espace euclidien tridimensionnel muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. On définit les trois points : $A = (3,\sqrt{6},3)$, $B = (3,-\sqrt{6},3)$ et $C = (4,0,0)$.

1. (a) Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés et donner une équation cartésienne du plan P contenant O, A et B.
   (b) Calculer les distances OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.
   (c) Les points O, A, B et C sont-ils coplanaires ?
2. Soit G le barycentre des points O, A, B et C, c'est à dire, par définition l'unique point G de l'espace tel que : $\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.
   (b) En déduire les coordonnées de G dans $\mathcal{R}$.
3. (a) Montrer que la droite (GC) est perpendiculaire au plan P.
   (b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de la droite (GC) avec le plan P.
4. Montrer que la transformation de l'espace définie par les formules : $(x'=x, y'=-y, z'=z)$ est une isométrie. Quels sont ses points fixes ? Déterminer les images des points O, A, B, C par cette isométrie. Que remarque-t-on ?

Exercice 2044 L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On définit les points

$$A:\ (1,2,3)\ ;\quad B:\ (2,3,1)\ ;\quad C:\ (3,1,2)\ ;\quad D:\ (1,1,1)$$

et le plan

$$\Pi : 2x-3y+4z=0.$$

1. Montrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
2. Montrer que les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.
3. Donner une équation cartésienne du plan P passant par A, B, C.

4. Calculer la distance de D au plan P.
5. Donner une représentation paramétrique de la droite $d = P \cap \Pi$.

Exercice 2045 Soient A, B et C trois points distincts et non alignés de l'espace affine tridimensionnel $\mathcal{E}$. On note P le plan qui contient A, B et C. Soit O un point de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas à P.

1. (a) Expliquer rapidement pourquoi $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$.
   (b) Dans ce repère $\mathcal{R}$, écrire les coordonnées des points O, A, B et C, et déterminer une équation cartésienne du plan P.
2. Soit A' le point de la droite (OA) tel que $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$. On note P' le plan parallèle à P passant par A'. P' coupe (OB) en B' et (OC) en C'.
   Dans $\mathcal{R}$, écrire les coordonnées des points A', B' et C' et déterminer des équations paramétriques pour les droites (BC') et $(B'C)$, en déduire des équations cartésiennes de ces droites.
   Calculer les coordonnées des points $I = (BC') \cap (B'C)$, $J = (AC') \cap (A'C)$ et $K = (AB') \cap (A'B)$.
3. Soit A'' le point de la droite (OA) tel que $\overrightarrow{OA''} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$. On note P'' le plan parallèle à P passant par A''. P'' coupe (OB) en B'' et (OC) en C''.
   Montrer que les droites (IA''), (JB''), (KC'') sont parallèles.

46 Courbes paramétrées

46.1 Coordonnées cartésiennes

Exercice 2046 Tracer les courbes paramétrées suivantes

$$x(t) = \cos^2(t) \qquad y(t) = \cos^3(t)\sin(t)$$
$$x(t) = \frac{t}{1+t^4} \qquad y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$$
$$x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \qquad y(t) = t + \frac{1}{t}$$
$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad y(t) = t\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$x(t) = \tan(t) + \sin(t) \qquad y(t) = \frac{1}{\cos(t)}$$
$$x(t) = \sin(2t) \qquad y(t) = \sin(3t)$$

Exercice 2047 On fait rouler sans glissement un cercle de rayon 1 sur l'axe (Ox). Déterminer et tracer la courbe décrite par un point du cercle.

Exercice 2048 Tracer la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 3xy$ en la coupant par les droites $y = tx$ où $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2049 Tracer la courbe paramétrée définie par :

$$x(t) = \int_0^t \cos(2u)\sin(u)du, \quad y(t) = \int_0^t \sin(2u)\cos(u)du.$$

Exercice 2050 Tracer la courbe paramétrée définie par :

$$x(t) = t^2 + 2t, y(t) = \frac{1+2t}{t^2}.$$

46.2 Coordonnées polaires

Exercice 2051 Tracer les courbes en polaires suivantes

$$\rho(\theta) = \sin(2\theta)$$
$$\rho(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$$
$$\rho(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}$$
$$\rho(\theta) = \cos(\theta) - \cos(2\theta)$$
$$\rho(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{1 + \sin(\theta)}$$

Exercice 2052 Soit C un cercle du plan de centre $(1, 0)$ et de rayon a. Déterminer et tracer le lieu des projetés orthogonaux de O sur les tangentes de C.

Exercice 2053 Déterminer et tracer les courbes dont la tangente en tout point M fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec $\overrightarrow{OM}$.

Exercice 2054 Grâce aux coordonnées polaires, tracer la courbe définie implicitement par la relation $2xy(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$.

Exercice 2055 Tracer la courbe d'équation polaire :

$$r = 1 + \cos\theta.$$

Exercice 2056 Tracer les courbes d'équations polaires :

$$r = \frac{\tan\theta}{\cos\theta}\ ;\ r^2 = \frac{1}{\sin(2\theta)}.$$

46.3 Divers

Exercice 2057 Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]^2$ de classe C^1, montrer que f ne peut être bijective.

Exercice 2058 Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ continue, et $z \in \mathbb{C}$ quelconque. Montrer :

$$\begin{array}{rcl} \forall\varepsilon & > & 0, \exists\gamma' \in C([0, 1], \mathbb{C}) \text{ tel que :} \\ 1 & : & \forall t \in [0, 1], |\gamma(t) - \gamma'(t)| < \varepsilon, \\ 2 & : & \forall t \in [0, 1], \gamma(t) \neq z. \end{array}$$

47 Propriétés métriques des courbes planes

Exercice 2059 Déterminer la longueur de la courbe $y = \sqrt{x}(1 - \frac{x}{3})$ pour $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Exercice 2060 Déterminer une abscisse curviligne, la longueur et la développée de l'astroïde.

Exercice 2061 Calculer le rayon de courbure de $\rho(\theta) = \cos(\frac{\theta}{3})$ en fonction de ρ.

Exercice 2062 Soit $\mathcal{P}$ la parabole $y^2 = x$. Déterminer une équation paramétrée et une équation cartésienne de Γ la développée de $\mathcal{P}$. Tracer Γ.

Exercice 2063 Soit Γ la courbe $\rho(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$.

1. Tracer cette courbe.
2. Calculer le rayon de courbure.
3. Soient I le centre de courbure en M et H le projeté orthogonal de I sur (OM). Déterminer $\overrightarrow{MH}$.
4. En déduire une construction géométrique de la développée de Γ.

Exercice 2064 Soit $M(s)$ un arc C^2 birégulier paramétré par une abscisse curviligne. Soit $\mathcal{R}$ le repère de Frénet $(M(0), \vec{t}(0), \vec{n}(0))$. On note $(X(s), Y(s))$ les coordonnées dans ce repère d'un point $M(s)$ de la courbe.

1. Montrer que si R_0 est le rayon de courbure en $M(0)$ alors $R_0 = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{X^2(s)}{2Y(s)}$.
2. En déduire le rayon de courbure au point $\theta = 0$ de la courbe $\rho(\theta) = 1 + 2\cos(\frac{\theta}{2})$.

48 Coniques

Exercice 2065 Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyers F et F', M un point fixé de $\mathcal{E}$ et M' un point qui se promène sur $\mathcal{E}$. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les cercles de centres M et M' de rayons MF' et $M'F'$. Soient I le point de $(FM) \cap \mathcal{C}$ tel que $M \in [FI]$ et J le deuxième point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

1. Montrer que (MM') est bissectrice de l'angle $F'MJ$.
2. Que devient J si M' tend vers M (on ne demande pas de preuve) ?
3. Montrer que la tangente à $\mathcal{E}$ en M est bissectrice extérieure de l'angle FMF'.

Exercice 2066 Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$, M un point de $\mathcal{P}$ et H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$. Montrer que la tangente à $\mathcal{P}$ en M est la médiatrice de $[FH]$. En déduire un procédé de construction d'une parabole.

Exercice 2067 Déterminer l'ensemble des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une parabole.

Exercice 2068 Soit $\mathcal{E} = \left\{M(z)/2\,|z|^2 - \frac{i}{2}(z^2 - \bar{z}^2) = 1\right\}$, R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et $\mathcal{E}' = R(\mathcal{E})$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{E}'$ et en déduire le tracé de $\mathcal{E}$.

Exercice 2069 Tracer les courbes suivantes :

1. $13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - 5 = 0$
2. $xy + 3x + 5y - 4 = 0$
3. $(2x + 3y)^2 + 4x + 6y - 5 = 0$

Exercice 2070 Déterminer astucieusement le sommet et l'axe de la parabole $x(t) = t^2 + t + 1$ et $y(t) = t^2 - 2t + 2$.

Exercice 2071 Montrer que la courbe paramétrée $x(t) = \dfrac{1}{t^2 + t + 1}$ et $y(t) = \dfrac{t}{t^2 + t + 1}$ est une ellipse et la tracer.

49 Analyse vectorielle

Exercice 2072 On considère le champ de vecteurs $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$P(x, y) = (2x\mathrm{e}^{x^2-2y}; -2\mathrm{e}^{x^2-2y}).$$

1. Vérifier que la forme différentielle associée à P est fermée.
2. En déduire que P est un champ de gradients et en déterminer un potentiel.
3. Calculer la circulation de P le long du chemin

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\ln(1+t); \mathrm{e}^t + 1).$$

Exercice 2073 Soient a, b des nombres tels que $0 < a < b$ et soit

$$D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid a \leqslant xy \leqslant b,\ y \geqslant x,\ y^2 - x^2 \leqslant 1\}.$$

En effectuant le changement de variable $u = xy, v = y^2 - x^2$, calculer

$$I = \iint_D (y^2 - x^2)(x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Exercice 2074 Soit le champ de vecteurs $\vec{V} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (2xy + e^y, x^2 + xe^y) \end{cases}$. Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de la parabole $x = y^2$ entre les points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Exercice 2075 Soit le champ de vecteurs $\vec{V} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (xy, -z, xz) \end{cases}$. $\vec{V}$ est-il un champ de gradient ? Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de l'hélice $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 2076 Montrer que $\omega(x,y) = \dfrac{(1 - x^2 + y^2)y}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx + \dfrac{(1 + x^2 - y^2)x}{(1 + x^2 + y^2)^2} dy$ est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$ et l'intégrer.

Exercice 2077 Sur $D =]0, +\infty[^2$ on définit $\omega(x,y) = (\dfrac{x}{x+y} + \ln(x^2 + xy))dx + \dfrac{\varphi(y)}{x+y} dy$.

1. Trouver une CNS sur φ pour que ω soit fermée.
2. Montrer qu'alors ω est exacte et l'intégrer.

Exercice 2078 Soit $\omega(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ une forme différentielle C^1 sur un ouvert étoilé U de $\mathbb{R}^3$.

1. A quelle condition ω est-elle exacte ?
2. On suppose qu'elle n'est pas exacte et on cherche alors $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^*$ de classe C^1 telle que $\lambda\omega$ soit exacte. On dit alors que λ est un facteur intégrant. En éliminant λ dans la condition trouvée à la question précédente, trouver une condition nécessaire sur P, Q, R pour qu'il existe un facteur intégrant.

Exercice 2079 Soit $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\}$ et $\omega(x,y,z) = 2xzdx - 2yzdy - (x^2 - y^2)dz$.

1. En utilisant l'exercice précédent (exercice 2078), montrer que ω admet un facteur intégrant.
2. Chercher un facteur intégrant ne dépendant que de z.
3. On suppose qu'un mouvement dans U vérifie l'équation différentielle $2x(t)z(t)\dot{x}(t) - 2y(t)z(t)\dot{y}(t) - (x^2(t) - y^2(t))\dot{z}(t)$. Trouver une intégrale première du mouvement.

Exercice 2080 Calculer l'aire d'une astroïde.

Huitième partie
CORRECTIONS

Correction 1 Remarquons d'abord que pour $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2$ est un nombre réel.

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-24+12i+18i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i.$$

Calculons

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{3} = \frac{1+3i}{3},$$

et

$$\left(\frac{1+i}{2-1}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{3}\right)^2 = \frac{-8+6i}{9} = -\frac{8}{9}+\frac{6}{9}i.$$

Donc

$$\left(\frac{1+i}{2-1}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{8}{9}+\frac{6}{9}-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i = -\frac{67}{45}+\frac{84}{45}i.$$

Soit $z = \frac{2+5i}{1-i}$. Calculons $z+\overline{z}$, nous savons déjà que c'est un nombre réel, plus précisément : $z = -\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$ et donc $z+\overline{z} = -3$.

Correction 3 1. $1+i\sqrt{3}$.

2. $3\cos\frac{\pi}{8} - 3i\sin\frac{\pi}{8} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{3i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Correction 7 $9-7i$; $-6i$; $-0{,}3+1{,}1i$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{i}{3}$.

Correction 8 $\rho = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$, $\theta = \frac{3\pi}{8}$; $\rho = 4$, $\theta = -\frac{\pi}{10}$; $\rho = 1$, $\theta = 2\varphi+\pi$.

Correction 10 Il s'agit juste d'appliquer la formule de Moivre :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta;$$

ainsi que les formules sur les produits de puissances :

$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)} \text{ et } e^{ia}/e^{ib} = e^{i(a-b)}.$$

Correction 11 Nous avons

$$u = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

puis

$$v = 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer le quotient :

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{6}-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Correction 13 D'après la formule de Moivre pour $e^{i\alpha}$ nous avons :

$$e^{e^{i\alpha}} = e^{\cos\alpha + i\sin\alpha} = e^{\cos\alpha} e^{i\sin\alpha}.$$

Or $e^{\cos\alpha} > 0$ donc l'écriture précédente est bien de la forme "module-argument".

De façon générale pour calculer un somme du type $e^{iu} + e^{iv}$ il est souvent utile de factoriser par $e^{i\frac{u+v}{2}}$. En effet

$$\begin{aligned} e^{iu} + e^{iv} &= e^{i\frac{u+v}{2}} \left(e^{i\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)} \right) \\ &= e^{i\frac{u+v}{2}} 2\cos\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right) e^{i\frac{u+v}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui est proche de l'écriture en coordonées polaires.
Pour le cas qui nous concerne :

$$z = e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{\frac{3i\theta}{2}} \left[e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}} \right] = 2\cos\theta e^{\frac{3i\theta}{2}}.$$

Attention le module dans une décomposion en forme polaire doit être positif ! Donc si $\cos\theta/2 \geqslant 0$ (*i.e.* $\theta \in [-\pi + 4k\pi, +\pi + 4k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$) alors $2\cos\theta$ est le module de z et 3θ est son argument ; par contre si $\cos\theta/2 < 0$ le module est $2|\cos\theta|$ et l'argument $3\theta + \pi$ (le $+\pi$ compense le changement de signe car $e^{i\pi} = -1$).

Correction 14

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2} = i.$$

On remarque $1 = i^0 = i^4 = i^8 = \cdots = i^{32}$.

Correction 20 Écrivons $z = \rho e^{i\theta}$, alors $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$. Donc

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=1}^{n} \left(z^k + \overline{z}^k \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \rho^k \left((e^{i\theta})^k + (e^{-i\theta})^k \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \rho^k \left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}) \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} 2\rho^k \cos k\theta \\ &= 2^n.\rho.\rho^2.\ldots.\rho^n \prod_{k=1}^{n} \cos k\theta \\ &= 2^n \rho^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} \cos k\theta. \end{aligned}$$

Correction 21 Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et z le nombre complexe $z=e^{i\alpha}+e^{i\beta}$. Soit $u=\frac{\alpha+\beta}{2}$ et $v=\frac{\alpha-\beta}{2}$. Alors, $\alpha=u+v$ et $\beta=u-v$ et :

$$\begin{aligned} z &= e^{i\alpha}+e^{i\beta} \\ &= e^{iu+iv}+e^{iu-iv} \\ &= e^{iu}(e^{iv}+e^{-iv}) \\ &= 2\cos(v)e^{iu} \\ &= 2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \end{aligned}$$

On en déduit la forme trigonométrique de z :

$$|z| = 2|\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})| \quad \text{ et, lorsque } \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\neq 0 :$$

$$Arg(z)=\begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2}[2\pi] & \text{si } \cos\frac{\alpha-\beta}{2}>0 \\ \pi+\frac{\alpha+\beta}{2}[2\pi] & \text{si } \cos\frac{\alpha-\beta}{2}<0 \end{cases}$$

(Attention, si $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}<0$, $z=2\cos v e^{iu}$ n'est pas la forme trigonométrique de z !).
Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculons z^n de deux façons différentes : d'une part

$$z^n=(e^{i\alpha}+e^{i\beta})^n=\sum_{p=0}^{n} C_n^p e^{ip\alpha}e^{i(n-p)\beta},$$

et d'autre part, en utilisant la forme obtenue plus haut : $z^n=2^n\cos^n v\, e^{inu}$. En comparant les parties réelles des expressions obtenues on obtient :

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \cos[p\alpha+(n-p)\beta]=2^n\cos^n\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(n\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

Correction 23

$$1+e^{i\theta}=e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}})=2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

Comme $\theta\in]-\pi,+\pi[$ alors le module est $2\cos\frac{\theta}{2}\geqslant 0$ et l'argument est $\frac{\theta}{2}$. Géométriquement, on trace le cercle de centre 1 et de rayon 1. L'angle en 0 du triangle $(0,1,1+e^{i\theta})$ est $\frac{\theta}{2}$ et donc est le double de l'angle en 0 du triangle $(1,2,1+e^{i\theta})$ qui vaut θ.
C'est le résulat géométrique (théorème de l'angle au centre) qui affirme que pour un cercle l'angle au centre est le double de l'angle inscrit.

Correction 27 **Racines carrées.** Soit $z=a+ib$ un nombre complexe avec $a,b\in\mathbb{R}$; nous cherchons les complexes $\omega\in\mathbb{C}$ tels que $\omega^2=z$. Écrivons $\omega=\alpha+i\beta$. Nous raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} \omega^2=z &\Leftrightarrow (\alpha+i\beta)^2=a+ib \\ &\Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta=a+ib \end{aligned}$$

Soit en identifiant les parties réelles entre elles ainsi que les parties imaginaires :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2-\beta^2=a \\ 2\alpha\beta=b \end{cases}$$

Sans changer l'équivalence nous rajoutons la condition $|\omega|^2 = |z|$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ \alpha^2-\beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ \beta^2 = \alpha^2 - a = \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \beta^2 = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \alpha\beta \text{ est du même signe que } b \end{cases}$$

Cela donne deux couples (α, β) de solution et donc deux racines carrées $\omega = \alpha + i\beta$ de z. En pratique on répète facilement ce raisonnement, par exemple pour $z = 8 - 6i$,

$$\begin{aligned} \omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha+i\beta)^2 = 8-6i \\ &\Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta = 8-6i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2-\beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2 = \sqrt{8^2+(-6)^2} = 10 \text{ le module de } z \\ \alpha^2-\beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 18 \\ \beta^2 = 10-\alpha^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ de signes opposés} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \qquad \alpha = 3 \text{ et } \beta = -1 \\ ou \\ \qquad \alpha = -3 \text{ et } \beta = +1 \end{cases} \end{aligned}$$

Les racines de $z = 8 - 6i$ sont donc $\omega = 3 - i$ et $-\omega = -3 + i$.

Correction 28 $2 - i$ et $-2 + i$; $\qquad 5 - i$ et $-5 + i$.

Correction 29 Par la méthode usuelle nous calculons les racines carrées $\omega, -\omega$ de $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, nous obtenons

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

mais nous remarquons que z s'écrit également

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et $e^{i\frac{\pi}{8}}$ vérifie

$$\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = e^{\frac{2i\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Cela signifie que $e^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine carrée de z, donc $e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ est égal à ω ou $-\omega$. Comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ alors $e^{i\frac{\pi}{8}} = \omega$ et donc par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

Correction 30 Soit $P(z) = az^2+bz+c$, et $\Delta = b^2-4ac$, si $\Delta \geqslant 0$ alors les racines sont réelles, seul le cas où $\Delta < 0$ nous intéresse. Première méthode : il suffit de regarder les deux solutions et de vérifier qu'elles sont conjuguées...
Seconde méthode : si z est une racine de P *i.e.* $P(z) = 0$, alors

$$P(\overline{z}) = a\overline{z}^2 + b\overline{z} + c = \overline{az^2 + b^z + c} = \overline{P(z)} = 0.$$

Donc $\overline{z}$ est aussi une racine de P. Or z n'est pas un nombre réel (car $\Delta < 0$) donc $\overline{z} \neq z$. Sachant que le polynôme P de degré 2 a exactement 2 racines, ce sont z et $\overline{z}$ et elles sont conjuguées.

Correction 31 **Équations du second degré.** La méthode génerale pour résoudre les équations du second degré $az^2+bz+c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$) est la suivante : soit $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant complexe et δ une racine carrée de Δ ($\delta^2 = \Delta$) alors les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Dans le cas où les coefficients sont réels, on retrouve la méthode bien connue. Le seul travail dans le cas complexe est de calculer une racine δ de Δ.
Exemple : pour $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$, $\Delta = 3+4i$, dont une racine carrée est $\delta = 2+i$, les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2} \text{ et } z_2 = \frac{\sqrt{3}-2-i}{2}.$$

Correction 36
1. $\Delta = -2i$ dont les racines carrées sont $1-i$ et $-1+i$, d'où les racines $z_1 = 5-2i$ et $z_2 = 6-3i$.
2. Une racine "évidente" $z_1 = i$, d'où la résolution complète en effectuant la division par $z-i$. On trouve $z_2 = i$ et $z_3 = -2i$.

Correction 42 Les solutions sont les complexes $z_k = 2^{-1/2}e^{i(-\pi/12+2k\pi/3)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2$. Et seul z_1 a une puissance quatrième réelle.

Correction 43
1. Les trois racines cubiques ont même module $\sqrt{2}$, et leurs arguments sont $-\pi/12$, $7\pi/12$ et $5\pi/4$. Des valeurs approchées sont $1{,}36603-0{,}36603i$, $-0{,}36603+1{,}36603i$ et $-1-i$.
2. $-1-2i$, $(-1-2i)j$ et $(-1-2i)j^2$ où $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (racine cubique de 1).

Correction 44 $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$; $\tan\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$.
Les racines de $z^{24} = 1$ sont données par $z_k = e^{2ki\pi/24}$ pour $k = 0, 1, \ldots, 23$. Ce sont donc 1, $\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, etc.

Correction 45 1. 3, $3i$, -3 et $-3i$.

2. $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ et $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

Correction 46 Pour 2. Utiliser la formule d'Euler pour $\sin(x/2)$.
Pour 3. Pour $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$Z_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \exp\left(i\,(n-1)\,\frac{x}{2}\right),$$

et pour $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $Z_n = n$.
Remarquer que $Z_n = X_n + iY_n$ pour en déduire que

$$X_n = \frac{\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad Y_n = \frac{\sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Correction 47

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k.$$

Nous devons retrouver le résultat sur la somme $S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$d'une suite géométrique dans le cas où $z \neq 1$ est un réel. Soit maintenant $z \neq 1$ un nombre complexe. Calculons $S_n(1-z)$.

$$\begin{aligned} S_n(1-z) &= (1+z+z^2+\cdots+z^n)(1-z) \text{ développons} \\ &= 1+z+z^2+\cdots+z^n - z - z^2 - \cdots - z^{n+1} \text{ les termes intermédiaires s'annulent} \\ &= 1 - z^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc

$$S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \text{ pour } z \neq 1.$$

Correction 48 **Calcul de racine n-ième.** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$, déjà $|z|^n = 1$ et donc $|z| = 1$. Écrivons $z = e^{i\theta}$. L'équation devient

$$e^{in\theta} = e^0 = 1 \Leftrightarrow n\theta = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Les solution sont donc

$$\mathcal{S} = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Comme le polynôme $z^n - 1$ est de degré n il a au plus n racines. Nous choisissons pour représentants :

$$\mathcal{S} = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k = 0, \ldots, n-1\right\}.$$

De plus si $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathcal{S} = \left\{\varepsilon^k,\ k = 0, \ldots, n-1\right\}$. Ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.
Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$ pour $z \neq 1$. Donc quelque soit $z \in \mathcal{S} \setminus \{1\}$ $P(z) = 0$, nous avons ainsi trouver $n-1$ racines pour P de degré $n-1$, donc l'ensemble des racines de P est exactement $\mathcal{S} \setminus \{1\}$.
Pour conclure soit $Q_p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{kp}$.
Si $p = 0 + \ell n$, $\ell \in \mathbb{Z}$ alors $Q_p(z) = p$.
Sinon $Q_p(z)$ est la somme d'une suite géométrique de raison ε^p :

$$Q_p(z) = \frac{1-(\varepsilon^p)^n}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-(\varepsilon^n)^p}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-1}{1-\varepsilon^p} = 0.$$

Correction 56 Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes *distincts* ayant le même cube.

1. $z_1 \neq 0$ car sinon on aurait $z_1 = z_2 = z_3 = 0$. Ainsi $(\frac{z_2}{z_1})^3 = (\frac{z_3}{z_1})^3 = 1$. Comme les trois nombres $1, (\frac{z_2}{z_1})$ et $(\frac{z_3}{z_1})$ sont distincts on en déduit que ce sont les trois racines cubiques de 1. Ces racines sont $1, j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. A une permutation près des indices 2 et 3 on a donc :
$$z_2 = jz_1 \qquad \text{et} \qquad z_3 = j^2 z_1.$$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :
$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 \Leftrightarrow z^3 \text{ est solution de } Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$$
Etudions l'équation $Z^2+(7-i)Z-8-8i = 0$. $\Delta = (7-i)^2+4(8+8i) = 80+18i = (9+i)^2$. Les solutions sont donc -8 et $1+i$. Nous pouvons reprendre notre suite d'équivalences :
$$\begin{aligned} z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 &\Leftrightarrow z^3 \in \{-8, 1+i\} \\ &\Leftrightarrow z^3 = (-2)^3 \quad \text{ou} \quad z^3 = (\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}})^3 \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, -2e^{\frac{2i\pi}{3}}, -2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\} \text{ ou } z \in \{\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\} \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}. \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est donc :
$$\{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}.$$

Correction 60 Nous identifions $\mathbb{C}$ au plan affine et $z = x+iy$ à $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Remarquons que pour les deux ensembles $z = 5$ n'est pas solution, donc
$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-5|.$$
Ce qui signifie présiment que que les points d'affixe z sont situés à égale distance des points A, B d'affixes respectives $3 = (3,0)$ et $5 = (5,0)$. L'ensemble solution est la médiatrice du segment $[A, B]$.

Ensuite pour
$$\begin{aligned} \left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow |z-3|^2 = \frac{1}{2}|z-5|^2 \\ &\Leftrightarrow (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)} \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - (z+\overline{z}) = 7 \\ &\Leftrightarrow |z-1|^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow |z-1| = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc le cercle de centre le point d'affixe $1 = (1,0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Correction 65 En exprimant qu'un nombre complexe de module 1 peut s'écrire $e^{i\theta}$, on trouve $z = \frac{a-be^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$. On peut encore écrire $z = A + B\cot\frac{\theta}{2}$, où A et B sont indépendants de θ, ce qui montre que le point d'affixe z décrit une droite. Géométriquement, cette droite est bien entendu la médiatrice du segment qui joint les points d'affixes a et b.

Correction 66 Méthode analogue à celle de l'exercice 65. On trouve $z = \frac{a-bke^{i\theta}}{1-ke^{i\theta}}$. On peut vérifier que le point d'affixe z décrit le cercle dont un diamètre joint les points correspondant à $\theta = 0$ et à $\theta = \pi$ (vérifier en cherchant le milieu z_0 de ce segment et en étudiant $|z - z_0|$).

Correction 67 1. Réciproque : $a + jb + j^2c = 0$ ou $a + j^2b + jc = 0$ (cela dépend de l'orientation du triangle).

2. $ADOE$ est un parallélogramme. Les trois triangles OBC, DBA et EAC sont directement isométriques, ce qui d'ailleurs se vérifie immédiatement à l'aide de rotations.

Correction 69

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = (u + v)(\bar{u} + \bar{v}) + (u - v)(\bar{u} - \bar{v}) = 2u\bar{u} + 2v\bar{v} = 2|u|^2 + 2|v|^2.$$

Géométriquement il s'agit de l'identité du parallélogramme. Les points d'affixes $0, u, v, u + v$ forment un parallélogramme. $|u|$ et $|v|$ sont les longueurs des cotés, et $|u + v|, |u - v|$ sont les longueurs des diagonales. Il n'est pas évident de montrer ceci sans les nombres complexes!!

Correction 77 1. Comme $(A_0, \dots, A_4)$ est un pentagone régulier, on a $OA_0 = OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = 1$ et $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_2}) = \frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_3}) = -\frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_4}) = -\frac{2\pi}{5}[2\pi],$. On en déduit : $\omega_0 = 1, \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \omega_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}, \omega_3 = e^{-\frac{4i\pi}{5}} = e^{\frac{6i\pi}{5}}, \omega_4 = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{8i\pi}{5}},$. On a bien $\omega_i = \omega_1^i$. Enfin, comme $\omega_1 \neq 0$, $1 + \omega_1 + \ldots + \omega_1^4 = \frac{1-\omega_1^5}{1-\omega_1} = \frac{1-1}{1-\omega_1} = 0$.

2. $\mathrm{Re}(1 + \omega_1 + \ldots + \omega_1^4) = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{4\pi}{5})$. Comme $\cos(\frac{4\pi}{5}) = 2\cos^2(\frac{2\pi}{5}) - 1$ on en déduit : $4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0$. $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est donc bien une solution de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. Etudions cette équation : $\Delta = 20 = 2^2.5$. Les solutions sont donc $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Comme $\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$, on en déduit que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
3. $BA_2^2 = |\omega_2 + 1|^2 = |\cos(\frac{4\pi}{5}) + i\sin(\frac{4\pi}{5}) + 1|^2 = 1 + 2\cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos^2(\frac{4\pi}{5}) + \sin^2(\frac{4\pi}{5}) = 4\cos^2(\frac{2\pi}{5})$. Donc $BA_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
4. $BI = |i/2 + 1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. $BJ = BI - 1/2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
5. Pour tracer un pentagone régulier, on commence par tracer un cercle C_1 et deux diamètres orthogonaux, qui jouent le rôle du cercle passant par les sommets et des axes de coordonnées. On trace ensuite le milieu d'un des rayons : on obtient le point I de la question 4. On trace le cercle de centre I passant par le centre de C_1 : c'est le cercle $\mathcal{C}$. On trace le segment BI pour obtenir son point J d'intersection avec $\mathcal{C}$. On trace enfin le cercle de centre B passant par J : il coupe C_1 en A_2 et A_3, deux sommets du pentagone. Il suffit pour obtenir tous les sommets de reporter la distance A_2A_3 sur C_1, une fois depuis A_2, une fois depuis A_3. (en fait le cercle de centre B et passant par J', le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à J, coupe C_1 en A_1 et A_4, mais nous ne l'avons pas justifié par le calcul : c'est un exercice!)

Correction 80 D'après la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}
\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \\
\sin 5\theta &= 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta
\end{aligned}$$

Grâce à la formule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on peut continuer les calculs et exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$, et $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

Correction 89 1. $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$ ssi $x = \pi/6 + k\pi/2$ ou $x = \pi/18 + k\pi/3$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ ssi $x=5\pi/14+6k\pi/7$ ou $x=\pi/2+6k\pi/5$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
3. $\cos(3x)=\sin(x)$ ssi $x=\pi/8+k\pi/2$ ou $x=-\pi/4+k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

Correction 90 L'équation $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=m$ a des solutions ssi $m\in[-2,2]$ et pour $m=\sqrt{2}$, les solutions sont $x=\pi/12+2k\pi$ ou $x=-5\pi/12+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Correction 91 $\cos(5x)+\cos(3x)\leqslant\cos x$ ssi $2\cos(4x)\cos(x)\leqslant\cos x$ et $2\cos^2(x)-9\cos(x)+4>0$ ssi $\cos x>1/2$ ssi $x\in\,]-\pi/6+2k\pi,\pi/6+2k\pi[$, $k\in\mathbb{Z}$.

Correction 92
1. $\cos^2(x)-\sin^2(x)=\sin(3x)$ ssi $x=\pi/2+2k\pi$ ou $x=-\pi/10+2k\pi/5$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
2. $\cos^4(x)-\sin^4(x)=1$ ssi $x=k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

Correction 96
1. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}[i]$. Notons $\alpha=a+ib$ et $\beta=c+id$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Alors $\alpha+\beta=(a+c)+i(b+d)$ et $a+c\in\mathbb{Z}$, $b+d\in\mathbb{Z}$ donc $\alpha+\beta\in\mathbb{Z}[i]$. De même, $\alpha\beta=(ac-bd)+i(ad+bc)$ et $ac-bd\in\mathbb{Z}$, $ad+bc\in\mathbb{Z}$ donc $\alpha\beta\in\mathbb{Z}[i]$.
2. Soit $\alpha\in\mathbb{Z}[i]$ inversible. Il existe donc $\beta\in\mathbb{Z}[i]$ tel que $\alpha\beta=1$. Ainsi, $\alpha\neq 0$ et $\frac{1}{\alpha}\in\mathbb{Z}[i]$. Remarquons que tout élément non nul de $\mathbb{Z}[i]$ est de module supérieur ou égal à 1 : en effet $\forall z\in\mathbb{C},|z|\geqslant\sup(|\operatorname{Re}(z)|,|\operatorname{Im}(z)|)$ et si $z\in\mathbb{Z}[i]\setminus\{0\}$, $\sup(|\operatorname{Re}(z)|,|\operatorname{Im}(z)|)\geqslant 1$. Si $|\alpha|\neq 1$ alors $|\alpha|>1$ et $|1/\alpha|<1$. On en déduit $1/\alpha=0$ ce qui est impossible. Ainsi $|\alpha|=1$, ce qui implique $\alpha\in\{1,-1,i,-i\}$.
   Réciproquement, $1^{-1}=1\in\mathbb{Z}[i],(-1)^{-1}=-1\in\mathbb{Z}[i],i^{-1}=-i\in\mathbb{Z}[i],(-i)^{-1}=i\in\mathbb{Z}[i]$. Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont donc $1,-1,i$ et $-i$.
3. Soit $\omega\in\mathbb{C}$. Notons $\omega=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$. soit $E(x)$ la partie entière de x, i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à x : $E(x)\leqslant x<E(x)+1$. Si $x\leqslant E(x)+1/2$, notons $n_x=E(x)$, et si $x>E(x)+1/2$, notons $n_x=E(x)+1$. n_x est le, ou l'un des s'il y en a deux, nombre entier le plus proche de x : $|x-n_x|\leqslant 1/2$. Notons n_y l'entier associé de la même manière à y. Soit alors $z=n_x+in_y$. $z\in\mathbb{Z}[i]$ et $|\omega-z|^2=(x-n_x)^2+(y-n_y)^2\leqslant 1/4+1/4=1/2$. Donc $|\omega-z|<1$.
4. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}[i]$, avec $\beta\neq 0$. Soit alors $q\in\mathbb{Z}[i]$ tel que $|\frac{\alpha}{\beta}-q|<1$. Soit $r=\alpha-\beta q$. Comme $\alpha\in\mathbb{Z}[i]$ et $\beta q\in\mathbb{Z}[i]$, $r\in\mathbb{Z}[i]$. De plus $|\frac{r}{\beta}|=|\frac{\alpha}{\beta}-q|<1$ donc $|r|<|\beta|$.

Correction 103
1. À permutation près, $x=-2$, $y=-2j$ et $z=-2j^2$ (j désigne la racine cubique de l'unité $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$).
2. À permutation près, $x=1$, $y=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ et $z=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$.

Correction 105 Il ne faut pas se laisser impressionner par l'allure de cette assertion. En effet $A\Rightarrow B$ est une écriture pour B ou (non$A$) ; ici A (la proposition $(1=2)$) est fausse, donc (non$A$) est vraie et B ou (non$A$) l'est également. Donc l'assertion $A\Rightarrow B$ est vraie, quand A est fausse et quelque soit la proposition B.

Correction 106
1. (a) est fausse. Car sa négation qui est $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}\quad x+y\leqslant 0$ est vraie. Étant donné $x\in\mathbb{R}$ il existe toujours un $y\in\mathbb{R}$ tel que $x+y\leqslant 0$, par exemple on peut prendre $y=-(x+1)$ et alors $x+y=x-x-1=-1\leqslant 0$.
2. (b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y=-x+1$ et alors $x+y=1>0$. La négation de (b) est $\exists x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\quad x+y\leqslant 0$.
3. (c) : $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\quad x+y>0$ est fausse, par exemple $x=-1$, $y=0$. La négation est $\exists x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}\ x+y\leqslant 0$.
4. (d) est vraie, on peut prendre $x=-1$. La négation est : $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}\quad y^2\leqslant x$.

Correction 107 Dans ce corrigé, nous donnons une justification, ce qui n'était pas demandé.

1. Cette assertion se décompose de la manière suivante : (Pour tout $x \in \mathbb{R}$) ($f(x) \leqslant 1$). La négation de "(Pour tout $x \in \mathbb{R}$)" est "Il existe $x \in \mathbb{R}$" et la négation de "($f(x) \leqslant 1$)" est $f(x) > 1$. Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) > 1$.
2. Rappelons comment se traduit l'assertion "L'application f est croissante" : "pour tout couple de réels (x_1, x_2), si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Cela se décompose en : "(pour tout couple de réels x_1 et x_2) ($x_1 \leqslant x_2$ implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$)". La négation de la première partie est : "(il existe un couple de réels (x_1, x_2))" et la négation de la deuxième partie est : "($x_1 \leqslant x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$)". Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leqslant x_2$ et $f(x_1) > x_2$".
3. La négation est : l'application f n'est pas croissante ou n'est pas positive. On a déjà traduit "l'application f n'est pas croissante", traduisons "l'application f n'est pas positive" : "il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$". Donc la négation de l'assertion complète est : " Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \geqslant x_2$, ou il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$".
4. Cette assertion se décompose de la manière suivante : "(Il existe $x \in \mathbb{R}^+$) ($f(x) \leqslant 0$)". La négation de la première partie est : "(pour tout $x \in \mathbb{R}^+$), et celle de la seconde est :"($f(x) > 0$)". Donc la négation de l'assertion complète est : " Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) > 0$".
5. Cette assertion se décompose de la manière suivante : "($\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$". La négation de la première partie est "($\forall x \in \mathbb{R}$), celle de la seconde est ($\exists y \in \mathbb{R}$), et celle de la troisième est ($x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$). Donc la négation de l'assertion complète est : " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$".

Correction 108 1. $\Leftarrow$

2. $\Leftrightarrow$
3. $\Rightarrow$

Correction 109 1. Cette proposition est vraie. En effet soit $\varepsilon > 0$, définissons $M_1 = (\frac{2}{\varepsilon}, 0) \in F_1$ et $M_2 = (\frac{2}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2}) \in F_2$, alors $M_1M_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Ceci étant vrai quelque soit $\varepsilon > 0$ la proposition est donc démontrée.

2. Soit deux points fixés M_1, M_2 vérifiant cette proposition la distance $d = M_1M_2$ est aussi petite que l'on veut donc elle est nulle, donc $M_1 = M_2$; or les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints. Donc la proposition est fausse. La négation de cette proposition est :
$$\forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0, +\infty[\quad / \quad M_1M_2 \geqslant \varepsilon$$
et cela exprime le fait que les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints.
3. Celle ci est également fausse, en effet supposons qu'elle soit vraie, soit alors ε correspondant à cette proposition. Soit $M_1 = (\varepsilon + 2, 0)$ et $M_2 = (1, 1)$, on a $M_1M_2 > \varepsilon + 1$ ce qui est absurde. La négation est :
$$\forall \varepsilon \in]0, +\infty[\quad \exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \quad / \quad M_1M_2 \geqslant \varepsilon$$
C'est-à-dire que l'on peut trouver deux points aussi éloignés l'un de l'autre que l'on veut.
4. Cette proposition est vraie il suffit de choisir $\varepsilon = M_1M_2 + 1$. Elle signifie que la distance entre deux points donnés est un nombre fini !

Correction 110 "Il existe un habitant de la rue du Havre qui a les yeux bleus, qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans."

Correction 111 1. P et non Q ;

2. "non P ou Q" ce qui la même chose que "$P \Rightarrow Q$" ;
3. (non P) ou ((non Q) ou (non R)) (on peut supprimer les parenthèses) ;
4. non P et (non Q ou R) (ici les parenthèses sont importantes) ;
5. P et Q et R et non S ;

Correction 112 1. Un triangle dont aucun angle n'est droit n'est pas rectangle.

2. Il existe une écurie dans laquelle il y a (au moins) un cheval dont la couleur n'est pas noire.
3. Sachant que la proposition en langage mathématique s'écrit
$$\forall x \in \mathbb{Z} \ \ \exists y \in \mathbb{Z} \ \ \forall z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \Leftrightarrow z < x + 1),$$
la négation est
$$\exists x \in \mathbb{Z} \ \ \forall y \in \mathbb{Z} \ \ \exists z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \text{ et } z \geqslant x + 1).$$
4. $\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \alpha > 0 \quad (|x - 7/5| < \alpha \text{ et } |5x - 7| \geqslant \varepsilon)$.

Correction 119 Remarquons d'abord que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+1}{n+2} \leqslant 2$ car $2n + 1 \leqslant 2(n + 2)$. Étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons donc
$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon$$
Maintenant nous cherchons une condition sur n pour que l'inégalité
$$2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$
soit vraie.
$$\begin{aligned} 2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} &\Leftrightarrow (2 - \varepsilon)(n + 2) < 2n + 1 \\ &\Leftrightarrow 3 < \varepsilon(n + 2) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 2 \end{aligned}$$

Ici ε nous est donné, nous prenons un $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$, alors pour tout $n \geqslant N$ nous avons $n \geqslant N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$ et par conséquent : $2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$. Conclusion : étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons trouvé un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$ et $\frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon$.
En fait nous venons de prouver que la limite de la suite de terme $(2n + 1)/(n + 2)$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

Correction 120 1. $\exists M \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \ f(x) \leqslant x$;

2. $\exists M \in \mathbb{R} \ \exists m \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ m \leqslant f(x) \leqslant x$;
3. $\forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = f(-x)$;
4. $\forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = -f(-x)$;
5. $\forall x \in \mathbb{R} \ f(x) \neq 0$;
6. $\exists a \in \mathbb{R}^* \ \forall x \in \mathbb{R} f(x + a) = f(x)$;
7. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ (x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y))$;
8. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ (x \leqslant y \Rightarrow f(x) > f(y))$;
9. $\exists x \in \mathbb{R} \ f(x) \neq 0$;

10. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$;
11. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = n$;
12. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leqslant g(x)$;
13. $\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) > g(x)$.

Correction 122 Nous allons démontrer l'assertion 1. de deux manières différentes.

1. Tout d'abord de façon “directe". Nous supposons que A et B sont telles que $A \cap B = A \cup B$. Nous devons montrer que $A = B$.

   Pour cela étant donné $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B. Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Ainsi $x \in B$.

   Maintenant nous prenons $x \in B$ et le même raisonnement implique $x \in A$. Donc tout élément de A est dans B et tout élément de B est dans A. Cela veut dire $A = B$.
2. Ensuite, comme demandé, nous le montrons par contraposition. Nous supposons que $A \neq B$ et non devons monter que $A \cap B \neq A \cup B$.

   Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus B$ ou alors un élément $x \in B \setminus A$. Quitte à échanger A et B, nous supposons qu'il existe $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

Correction 123

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ et } x \in \complement B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ ou } x \in \complement \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cup \complement B. \end{aligned}$$

Correction 124 Montrons quelques assertions.
$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Si $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$, or $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$ et de même $x \in B$ donc $y \in f(B)$. D'où $y \in f(A) \cap f(B)$. Tout élément de $f(A \cap B)$ est un élément de $f(A) \cap f(B)$ donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Remarque : l'inclusion réciproque est fausse. Exercice : trouver un contre-exemple.

$f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F \setminus A) &\Leftrightarrow f(x) \in F \setminus F \setminus A \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin A \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \text{ car } f^{-1} = \{x \in E \ / \ f(x) \in A\} \\ &\Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(A) \end{aligned}$$

Correction 136 $I_1 = 3$ et $I_2 = [-2, 5]$.

Correction 137 $I_1 = [0, 2]$ et $I_2 =]1, +\infty[$.

Correction 144 1. $B \setminus A \subset X \subset B$.

2. $B \subset X \subset B \cup \cup \complement A$.

Correction 150 Par l'absurde, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$. Deux applications sont égales si et seulement si elles prennent les mêmes valeurs.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = f_p(n).$$

En particulier pour $n = p$, $f(p) = f_p(p)$. D'autre part la définition de f nous donne $f(p) = f_p(p) + 1$. Nous obtenons une contradiction car $f(p)$ ne peut prendre deux valeurs distinctes. En conclusion, quelque soit $p \in \mathbb{N}$ $f \neq f_p$.

Correction 151 1. Montrons en fait la contraposée.

S'il existe i tel que p_i divise $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ (i est fixé) alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $N = kp_i$ donc

$$p_i(k - p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r) = 1$$

soit $p_i q = 1$ (avec $q = k - p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r$ un nombre entier) Donc $p_i \in \mathbb{Z}$ et $1/p_i = q \in \mathbb{Z}$, alors p_i vaut 1 ou -1. Et donc p_i n'est pas un nombre premier.

Conclusion : par contraposition il est vrai que N n'est divisible par aucun des p_i

2. Raisonnons par l'absurde : s'il n'existe qu'un nombre fini r de nombres premiers $p_1, \dots, p_r$ alors $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ est un nombre premier car divisible par aucun nombre premier autre que lui même (c'est le 1.).

Mais N est strictement supérieur à tous les p_i. Conclusion on a construit un nombre premier N différent des p_i, il y a donc au moins $r + 1$ nombres premiers, ce qui est absurde.

Correction 153 Rédigeons la deuxième égalité. Soit $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion suivante :

$$(\mathcal{A}_n) \quad \sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

– $\mathcal{A}_0$ est vraie $(1 = 1)$.
– Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que $\mathcal{A}_n$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} +(n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve $\mathcal{A}_{n+1}$.

– Par le principe de récurrence nous venons de montrer que $\mathcal{A}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction 155 1. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n > 3$. Soit l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n): \quad x_n > 3.$$

- La proposition $\mathcal{H}_0$ est vraie car $x_0 = 4 > 3$.
- Soit $n \geqslant 0$, supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est alors vraie.

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2}.$$

  Par hypothèse de récurrence $x_n > 3$, donc $x_n + 2 > 0$ et $2{x_n}^2 - 3x_n - 9 > 0$ (ceci par étude de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 3x - 9$ pour $x > 3$). Donc $x_{n+1} - 3$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Nous avons montrer

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$$

  et comme $\mathcal{H}_0$ est vraie alors $\mathcal{H}_n$ est vraie quelque soit n. Ce qui termine la démonstration.

2. Montrons que $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$ est positif.

$$x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{1}{2}\frac{{x_n}^2 + 3x_n + 12}{x_n + 2}$$

   Ce dernier terme est positif car $x_n > 3$.

3. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$. Soit notre nouvelle l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) \quad x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3.$$

   - La proposition $\mathcal{H}_0$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 0$, supposons que $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée.
     D'après la question précédente $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ et par hypothèse de récurrence $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$; en réunissant ces deux inégalités nous avons $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(\left(\frac{3}{2}\right)^n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.
   - Nous concluons en résumant la situation :
     $\mathcal{H}_0$ est vraie, et $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$ quelque soit n. Donc $\mathcal{H}_n$ est toujours vraie.

4. La suite (x_n) tend vers $+\infty$ et n'est donc pas convergente.

Correction 156 Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la proposition suivante :

$$\mathcal{H}_n : \quad n \text{ droites en position générale découpent le plan en } \ R_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \text{ régions.}$$

- pour $n = 1$ alors une droite divise le plan en deux régions. $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 2$ et supposons que $\mathcal{H}_{n-1}$ soit vraie, et montrons $\mathcal{H}_n$. Soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ n droites en position générale, la droite Δ_n rencontre les droites $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ en $n-1$ points, donc Δ_n traverse (et découpe en deux) n régions du découpage $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$. Le découpage par Δ_n donne donc la relation $R_n = R_{n-1} + n$.
  Or par hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_{n-1}$: $R_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} + 1$ donc

$$R_n = R_{n-1} + n = \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

  Et $\mathcal{H}_n$ est vraie.
  Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{H}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{H}_n$.

- Conclusion : par récurrence on a montré que $\mathcal{H}_n$ est vraie quelque soit $n \geqslant 1$.

Correction 157 1. Montrons la proposition demandée par récurrence : soit $\mathcal{A}_n$ l'assertion $f^{n+1} = f \circ f^n$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons $\mathcal{A}_n$ vraie. Alors

$$f^{n+2} = f^{n+1} \circ f = (f \circ f^n) \circ f = f \circ (f^n \circ f) = f \circ f^{n+1}.$$

Nous avons utiliser la definition de f^{n+2}, puis la proposition $\mathcal{A}_n$, puis l'associativité de la composition, puis la définition de f^{n+1}. Donc $\mathcal{A}_{n+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence

$$\forall \in \mathbb{N} \quad f^n \circ f = f \circ f^n.$$

2. On procède de même par récurrence : soit $\mathcal{A}_n$ l'assertion $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons $\mathcal{A}_n$ vraie. Alors

$$(f^{-1})^{n+1} = (f^{-1})^n \circ f^{-1} = (f^n)^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ f^n)^{-1} = (f^n \circ f)^{-1} = (f^{n+1})^{-1}.$$

Donc $\mathcal{A}_{n+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence

$$\forall \in \mathbb{N} \quad (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}.$$

Correction 185 Si $f \circ g = g \circ f$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f \circ g(x) = g \circ f(x).$$

Nous allons montrer que c'est faux, en exhibant un contre-exemple. Prenons $x = 0$. Alors $f \circ g(0) = f(-1) = -2$, et $g \circ f(0) = g(1) = 0$ donc $f \circ g(0) \neq g \circ f(0)$. Ainsi $f \circ g \neq g \circ f$

Correction 191 1. f n'est pas injective car $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$. f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent : en effet l'équation $f(x) = 2$ devient $2x = 2(1 + x^2)$ soit $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solutions réelles.

2. $f(x) = y$ est équivalent à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 \geqslant 0$ donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1, 1]$. Nous venons de montrer que $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1, 1]$.

3. Soit $y \in [-1, 1]$ alors les solutions x possibles de l'équation $g(x) = y$ sont $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La seule solution $x \in [-1, 1]$ est $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ en effet $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1, 1]$. Donc pour $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ nous avons trouvé un inverse $h : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ défini par $h(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$. Donc g est une bijection.

4. $f'(x) = \frac{2-2x^2}{1+x^2}$, donc f' est strictement positive sur $]-1, 1[$ donc f est strictement croissante sur $[-1, 1]$ avec $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$. Donc la restriction de f, $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$, est une bijection.

Correction 193 1. Supposons $g \circ f$ injective, et montrons que f est injective : soit a, $a' \in A$ avec $f(a) = f(a')$ donc $g \circ f(a) = g \circ f(a')$ or $g \circ f$ est injective donc $a = a'$. Conclusion on a montré :

$$\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

c'est la définition de f injective.

2. Supposons $g \circ f$ surjective, et montrons que g est surjective : soit $c \in C$ comme $g \circ f$ est surjective il existe $a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$; posons $b = f(a)$, alors $g(b) = c$, ce raisonnement est valide quelque soit $c \in C$ donc g est surjective.

3. Un sens est simple ($\Leftarrow$) si f et g sont bijectives alors $g\circ f$ l'est également. De même avec $h\circ g$.

   Pour l'implication directe ($\Rightarrow$) : si $g\circ f$ est bijective alors en particulier elle est surjective et donc d'après le deuxième point g est surjective.

   Si $h\circ g$ est bijective, elle est en particulier injective, donc g est injective (c'est le 1.). Par conséquent g est à la fois injective et surjective donc bijective.

   Pour finir $f = g^{-1}\circ(g\circ f)$ est bijective comme composée d'applications bijectives, de même pour h.

Correction 197 1. Pour $z = x+iy$, le module de $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ est e^x et son argument est y.

2. Les résultats : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$, $e^{-z} = (e^z)^{-1}$, $(e^z)^n = e^{nz}$.
3. La fonction exp n'est pas surjective car $|e^z| = e^x > 0$ et donc e^z ne vaut jamais 0. La fonction exp n'est pas non plus injective car pour $z\in\mathbb{C}$, $e^z = e^{z+2i\pi}$.

Correction 198 L'inverse de $f_{a,b}$ est $g_{a,b}$ avec $g_{a,b}(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$. Autrement dit $f_{a,b}^{-1} = g_{a,b} = f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}$.

Correction 199 Soit $x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$ alors $f(x) = x$ donc $f\circ f(x) = f(x) = x$. Soit $x\notin[0,1]\cap\mathbb{Q}$ alors $f(x) = 1-x$ donc $f\circ f(x) = f(1-x)$, mais $1-x\notin[0,1]\cap\mathbb{Q}$ (vérifiez-le !) donc $f\circ f(x) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$. Donc pour tout $x\in[0,1]$ on a $f\circ f(x) = x$. Et donc $f\circ f = id$.

Correction 200 Montrons que la restriction de f, $\phi : [0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}$, $t\mapsto e^{it}$ est bijective. Où $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$ donné par l'équation ($|z| = 1$).

- ϕ est surjective car tout nombre complexe de $\mathbb{U}$ s'écrit sous la forme polaire $e^{i\theta}$, et l'on peut choisir $\theta\in[0,2\pi[$.
- ϕ est injective :

$$\begin{aligned}\phi(t) = \phi(t') &\Leftrightarrow e^{it} = e^{it'}\\ &\Leftrightarrow t = t' + 2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow t = t' \text{ car } t,t'\in[0,2\pi[\text{ et donc } k = 0.\end{aligned}$$

En conclusion ϕ est injective et surjective donc bijective.

Correction 202 • f est injective :

$$\begin{aligned}f(x) = f(y) &\Rightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1\\ &\Rightarrow x = \pm y \text{ où } x,y\in[1,+\infty[\text{ donc } x,y \text{ sont de même signe}\\ &\Rightarrow x = y.\end{aligned}$$

- f est surjective : soit $y\in[0,+\infty[$. Nous cherchons un élément $x\in[1,+\infty[$ tel que $y = f(x) = x^2-1$. Le réel $x = \sqrt{y+1}$ convient !

Correction 209 1. Soit z, z', z'' des complexes quelconques.

- Reflexivité : $z\mathcal{R}z$ car $|z| = |z|$.
- Symétrie : $z\mathcal{R}z' \Rightarrow z'\mathcal{R}z$ car $|z| = |z'|$ et donc $|z'| = |z|$.
- Transitivité : $z\mathcal{R}z'$ et $z'\mathcal{R}z''$ alors $|z| = |z'| = |z''|$ donc $z\mathcal{R}z''$.

En fait, nous avons juste retranscrit que l'égalité $=$ est une relation d'équivalence.

2. La classe d'équivalence d'un point $z \in \mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes qui sont en relation avec z, *i.e.* l'ensemble des complexes dont le module est égal à $|z|$. Géométriquement la classe d'équivalence de z est le cerlce $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon $|z|$.

$$\mathcal{C} = \{|z|e^{i\theta} \ / \ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Correction 210 Le raisonnement est faux.
L'erreur est due au manque de quantification. En effet, rien ne prouve que pout tout x un tel y existe. Il peut exister un élément x qui n'est en relation avec personne (même pas avec lui).

Correction 220 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = (1+x)^n$. Par la formule du binôme de Newton nous savons que

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k.$$

1. En calculant $f(1)$ nous avons $2^n = \sum_{k=1}^n C_n^k$.
2. Maintenant calculons $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k x^{k-1}$. Évaluons $f'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k$.
3. Il s'agit ici de calculer une primitive F de f : $F(x) = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1}$. En $F(1) = \frac{1}{n+1}2^{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}C_n^k$.

Correction 222 L'astuce consiste à écrire $2 = 3 - 1$ (!)

$$2^n = (3-1)^n = 3 \times p + (-1)^n$$

Où $3 \times p$ ($p \in \mathbb{Z}$) représente les n premiers termes de $\sum_{k=0}^n C_n^k 3^k (-1)^{n-k}$ et $(-1)^n$ est le dernier terme. Donc $2^n - (-1)^n = 3p$. Si n est impair l'égalité s'écrit $2^n + 1 = 3p$ et donc $2^n + 1$ est divisible par 3. Si n est pair $2^n - 1 = 3p$ donc $2^n + 1 = 3p + 2$ qui n'est pas divisible par 3.
Pour l'autre assertion regarder $3 = 7 - 4$.

Correction 228 Il s'agit de comparer les deux écritures de la fonction

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Pour $x = 1$ et $x = -1$ nous obtenons respectivement les assertions (a) et (b). En dérivant la fonction f et en calculant $f'(1)$, nous obtenons (b). Pour (d) il faut dériver une nouvelle fois.

Correction 229 $A = (1+i)^n$ a pour module $2^{n/2}$ et pour argument $n\frac{\pi}{4}$ (et B est son conjugué). On en tire grâce à la formule du binôme, et en séparant partie réelle et partie imaginaire : $S_1 = 2^{n/2}\cos n\frac{\pi}{4}$ et et $S_2 = 2^{n/2}\sin n\frac{\pi}{4}$. On a aussi $S_1 = \frac{A+B}{2}$ et $S_2 = \frac{B-A}{2}i$.

Correction 230 L'application Φ est une bijection : son inverse est Φ elle-même.
Supposons que E soit un ensemble fini. Notre bijection Φ envoie un ensemble $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(E)$ sur un ensemble de même cardinal.
Choisissons E un ensemble à n éléments, et soit $p \leqslant n$. Soit $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(E)$:

$$\mathcal{Q} = \{F \subset E, \quad \operatorname{Card} F = p\}.$$

Nous savons que $\operatorname{Card} \mathcal{Q} = C_n^p$ (c'est la définition de C_n^p). De plus

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathcal{Q}) &= \{\Phi(F), \quad F \subset E, \quad \operatorname{Card} F = p\} \\
&= \left\{\complement F, \quad F \subset E, \quad \operatorname{Card} F = p\right\} \\
&= \{G \subset E, \quad \operatorname{Card} G = n - p\}.
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Card} \Phi(\mathcal{Q}) = C_n^{n-p}$. Et comme Φ est une bijection, $\operatorname{Card} \Phi(\mathcal{Q}) = \operatorname{Card}(\mathcal{Q})$, donc $C_n^{n-p} = C_n^p$.

Correction 236 Tout d'abord si deux ensembles finis P et Q sont disjoints alors Card $P \cup Q =$ Card $P +$ Card Q. L'idée est donc d'écrire $A\Delta B$ comme union de deux ensembles disjoints.

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)).$$

Ces deux ensembles $A \setminus (A \cap B)$ et $B \setminus (A \cap B)$ sont disjoints. En utilisant que pour $R \subset S$ nous avons Card $S \setminus R =$ Card $S -$ Card R, nous obtenons :

$$\text{Card}\, A\Delta B = \text{Card}\, A \setminus (A \cap B) + \text{Card}\, B \setminus (A \cap B) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B - 2\text{Card}\, (A \cap B).$$

Correction 237 Fixons un élément de A ; dans $E \setminus A$ (de cardinal $n-p$), nous pouvons choisir C_{n-p}^k ensembles à k éléments ($k = 0, 1, \ldots, n$). Le nombre d'ensembles dans le complémentaire de A est donc

$$\sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^k = 2^{n-p}.$$

Pour le choix d'un élément de A nous avons p choix, donc le nombre total d'ensembles qui vérifie la condition est :

$$p2^{n-p}.$$

Correction 249 Écrivons la décomposition de $15! = 1.2.3.4 \ldots 15$ en facteurs premiers. $15! = 2^{11}.3^6.5^3.7^2.11.13$. Un diviseur de 15! s'écrit $d = 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma.7^\delta.11^\varepsilon.13^\eta$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 11$, $0 \leqslant \beta \leqslant 6$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 3$, $0 \leqslant \delta \leqslant 2$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. De plus tout nombre d de cette forme est un diviseur de 15!. Le nombre de diviseurs est donc $(11+1)(6+1)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 4032$.

Correction 250 Il sagit de calculer 100^{1000} modulo 13. Tout d'abord $100 \equiv 9[13]$ donc $100^{1000} \equiv 9^{1000}[13]$. Or $9^2 \equiv 81 \equiv 3[13]$, $9^3 \equiv 9^2.9 \equiv 3.9 \equiv 1[13]$, Or $9^4 \equiv 9^3.9 \equiv 9[13]$, $9^5 \equiv 9^4.9 \equiv 9.9 \equiv 3[13]$. Donc $100^{1000} \equiv 9^{1000} \equiv 9^{3.333+1} \equiv (9^3)^{333}.9 \equiv 1^{333}.9 \equiv 9[13]$.

Correction 251 La seule chose à voir est que pour une division euclidienne le reste doit être plus petit que le quotient. Donc les divisions euclidiennes s'écrivent : $96842 = 256 \times 378 + 74$ et $96842 = 258 \times 375 + 92$.

Correction 254 Raisonnons modulo 8 :

$$7 \equiv -1 \pmod 8.$$

Donc

$$7^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod 8.$$

Le reste de la division euclidienne de $7^n + 1$ par 8 est donc $(-1)^n + 1$ donc Si n est impair alors $7^n + 1$ est divisible par 8. Et si n est pair $7^n + 1$ n'est pas divisible par 8.

Correction 257 Il suffit de constater que pour 4 nombres consécutifs il y a nécessairement : un diviseur de 2, un diviseur de 3, un diviseur de 4 (tous distincts). Donc le produit de 4 nombres consécutifs est divisible par $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Correction 267 Ecrire $n = p^2 + q^2$ et étudier le reste de la division euclidienne de n par 4 en distinguant les différents cas de parité de p et q.

Correction 270 2) Si p divise $b - a$ alors p divise aussi $b^n - a^n$ d'après la formule $(*)$.
3) On utilise le résultat de la question précédente avec $n = p - k - 1$ pour écrire b^{p-k-1} en fonction de a^{p-k-1} modulo p dans

$$\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}.$$

On peut alors conclure.

Correction 285 1. Soit n un nombre impair, alors il s'écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Maintenant $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2+4p+1 = 4p(p+1)+1$. Donc $n^2 \equiv 1[8]$.

2. Si n est pair alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. Et $n^2 = 4p^2$. Si p est pair alors p^2 est pair et donc $n^2 = 4p^2$ est divisible par 8, donc $n^2 \equiv 0[8]$. Si p est impair alors p^2 est impair et donc $n^2 = 4p^2$ est divisible par 4 mais pas par 8, donc $n^2 \equiv 4[8]$.
3. Comme a est impair alors d'après la première question $a^2 \equiv 1[8]$, et de même $c^2 \equiv 1[8]$, $c^2 \equiv 1[8]$. Donc $a^2+b^2+c^2 \equiv 1+1+1 \equiv 3[8]$. Pour l'autre reste, écrivons $a = 2p+1$ et $b = 2q+1$, $c = 2r+1$, alors $2ab = 2(2p+1)(2q+1) = 8pq+4(p+q)+2$. Alors $2(ab+bc+ca) = 8pq+8qr+8pr+8(p+q+r)+6$, donc $2(ab+bc+ca) \equiv 6[8]$.
4. Montrons par l'absurde que le nombre $a^2+b^2+c^2$ n'est pas le carré d'un nombre entier. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^2+b^2+c^2 = n^2$. Nous savons que $a^2+b^2+c^2 \equiv 3[8]$. Si n est impair alors $n^2 \equiv 1[8]$ et si n est pair alors $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$. Dans tous les cas n^2 n'est pas congru à 3 modulo 8. Donc il y a une contradiction. La conclusion est que l'hypothèse de départ est fausse donc $a^2+b^2+c^2$ n'est pas un carré. Le même type de raisonnement est valide pour $2(ab+bc+ca)$.

   Pour $ab+bc+ca$ il faut rafiner un peut l'argument. Si $ab+bc+ca = n^2$ alors selon la parité de n nous avons $2(ab+bc+ca) \equiv 2n^2 \equiv 2[8]$ ou à $0[8]$. Nous remarquons enfin que ab, bc, ca sont trois nombres impairs, et donc leur somme est impaire. Par conséquent n est impair (sinon n^2 serait pair), donc $ab+bc+ca =\equiv n^2 \equiv 1[8]$. Ce qui aboutit à une contradiction. Nous avons montrer que $ab+bc+ca$ n'est pas un carré.

Correction 290 Il s'agit ici d'utiliser la décomposition des nombres en facteurs premiers.

1. $126 = 2.3^2.7$ et $230 = 2.5.23$ donc le pgcd de 126 et 230 est 2.
2. $390 = 2.3.5.13$, $720 = 2^4.3^2.5$, $450 = 2.3^2.5^2$ et donc le pgcd de ces trois nombres est $2.3.5 = 30$.
3. $\mathrm{pgcd}(180, 606, 750) = 6$.

Correction 292 Soient a, b deux entiers de pgcd 18 et de somme 360. Soit a', b' tel que $a = 18a'$ et $b = 18b'$. Alors a' et b' sont premiers entre eux, et leur somme est $360/18 = 20$.
Nous pouvons facilement énumérer tous les couples d'entiers naturels (a', b') $(a' \leqslant b')$ qui vérifient cette condition, ce sont les couples :

$$(1,20), (3,17), (6,14), (7,13), (8,12), (9,11).$$

Pour obtenir les couples (a, b) recherchés $(a \leqslant b)$, il suffit de multiplier les couples précédents par 18 :

$$(18,360), (54,306), (108,252), (126,234), (144,216), (162,198).$$

Correction 296 1. $\mathrm{pgcd}(18480, 9828) = 84$;

2. $25 \times 18480 + (-47) \times 9828 = 84$.

Correction 298 Comme le pgcd de 955 et 183 est 1, donc d'après le théorème de Bézout cette équation a des solutions. Par exemple une solution particulière est $(m_0, n_0) = (-32, 167)$. Les solutions sont exactement les couples $(m, n) = (m_0 - 83k, n_0 + 37k)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

Correction 303 1. $a = 9b + 10$.

2. Calculons le pgcd par l'algorithme d'Euclide. $a = 9b+10$, $b = 12345678 \times 10 + 9$, $10 = 1 \times 9 + 1$. Donc le pgcd vaut 1 ;

3. Nous reprenons les équations précédentes en partant de la fin : $1 = 10 - 9$, puis nous remplaçons 9 grâce à la deuxième équation de l'algorithme d'Euclide : $1 = 10 - (b - 12345678 \times 10) = -b + 1234679 \times 10$. Maintenant nous remplaçons 10 grâce à la première équation : $1 = -b + 12345679(a - 9b) = 1234579a - 111111112b$.

Correction 305 En divisant par 45 nous obtenons l'équation équivalente : $37x + 83y = 1$. Comme le pgcd de 37 et 83 est 1, donc d'après le théorème de Bézout cette équation a des solutions. Par exemple une solution particulière est $(x_0, y_0) = (9, -4)$. Les solutions sont exactement les couples $(x, y) = (x_0 - 83k, y_0 + 37k)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

Correction 336 Montrons plutôt la contraposée. Soit $p = ab$ un entier avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $2^p - 1$ n'est pas premier.
Nous savons que

$$x^b - 1 = (x - 1)(x^{b-1} + \cdots + x + 1),$$

pour $x = 2^a$ nous obtenons :

$$2^p - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)\left(2^{a(b-1)} + \cdots + 2^a + 1\right).$$

De plus $2^a - 1$ n'est ni 1 ni 2^{ab} donc nous avons décomposer $2^p - 1$ en produit d'entier différents de 1. Donc $2^p - 1$ n'est pas premier.
Par contraposition nous obtenons que si $2^p - 1$ est premier alors p est premier.

Correction 337 Soit a et b des entiers premiers entre eux. Raisonnons par l'absurde et supposons que ab et $a+b$ ne sont pas premiers entre eux. Il existe alors δ un nombre premier divisant ab et $a + b$. L'entier δ ne peut diviser a et b car a et b sont premiers entre eux. Par exemple supposons que δ ne divise pas b cela implique que δ et b sont premiers entre eux.
D'après le théorème de Gauss, comme δ divise ab et δ premier avec b alors δ divise a.
Maintenant δ divise a et divise $a + b$ alors δ divise $a + b - a = b$. δ est un facteur premier de a et de b ce qui est absurde.

Correction 339

1. Étant donné $0 < i < p$, nous avons

$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-(i+1))}{i!}$$

Comme C_p^i est un entier alors $i!$ divise $p(p-1)\dots(p-(i+1))$. Mais $i!$ et p sont premiers entre eux (en utilisant l'hypothèse $0 < i < p$). Donc d'après le théorème de Gauss : $i!$ divise $(p-1)\dots(p-(i+1))$, autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ki! = (p-1)\dots(p-(i+1))$. Maintenant nous avons $C_p^i = pk$ donc p divise C_p^i.

2. Il s'agit de montrer le petit théorème de Fermat : pour p premier et $a \in \mathbb{N}^*$, alors $a^p \equiv a[p]$. Fixons p. Soit l'assertion

$$(\mathcal{H}_a) \quad a^p \equiv a[p].$$

Pour $a = 1$ cette assertion est vraie ! Étant donné $a \leqslant 1$ supposons que $\mathcal{H}_a$ soit vraie. Alors

$$(a+1)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i a^i.$$

Mais d'après la question précédente pour $0 < i < p$, p divise C_p^i. En termes de modulo nous obtenons :

$$(a+1)^p \equiv C_p^0 a^0 + C_p^p a^p \equiv 1 + a^p[p].$$

Par l'hypothèse de récurrence nous savons que $a^p \equiv a[p]$, donc

$$(a+1)^p \equiv a+1[p].$$

Nous venons de prouver que $\mathcal{H}_{a+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence alors quelque soit $a \in \mathbb{N}^*$ nous avons :

$$a^p \equiv a[p].$$

Correction 341 1. Fixons n et montrons la récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. La formule est vraie pour $k=0$. Supposons la formule vraie au rang k. Alors

$$\begin{aligned}(2^{2^n}-1)\times\prod_{i=0}^{k}(2^{2^{n+i}}+1) &= (2^{2^n}-1)\times\prod_{i=0}^{k-1}(2^{2^{n+i}}+1)\times(2^{2^{n+k}}+1)\\ &= (2^{2^{n+k}}-1)\times(2^{2^{n+k}}+1) = (2^{2^{n+k}})^2-1 = 2^{2^{n+k+1}}-1.\end{aligned}$$

Nous avons utiliser l'hypothèse de récurrence dans ces égalités. Nous avons ainsi montrer la formule au rang $k+1$. Et donc par le principe de récurrence elle est vraie.

2. Écrivons $m = n+k$, alors l'égalité précédente devient :

$$F_m + 2 = (2^{2^n}-1)\times\prod_{i=n}^{m-1}F_i.$$

Soit encore :

$$F_n \times (2^{2^n}-1)\times\prod_{i=n+1}^{m-1}F_i \quad - \quad F_m = 2.$$

Si d est un diviseur de F_n et F_m alors d divise 2 (ou alors on peut utiliser le théorème de Bézout). En conséquent $d=1$ ou $d=2$. Mais F_n est impair donc $d=1$. Nous avons montrer que tous diviseurs de F_n et F_m est 1, cela signifie que F_n et F_m sont premiers entre eux.

3. Supposons qu'il y a un nombre fini de nombres premiers. Nous les notons alors $\{p_1,\ldots,p_N\}$. Prenons alors $N+1$ nombres de la famille F_i, par exemple $\{F_1,\ldots,F_{N+1}\}$. Chaque F_i, $i=1,\ldots,N+1$ est divisible par (au moins) un facteur premier p_j, $j=1,\ldots,N$. Nous avons $N+1$ nombres F_i et seulement N facteurs premiers p_j. Donc par le principe des tiroirs il existe deux nombres distincts F_k et $F_{k'}$ (avec $1 \leqslant k,k' \leqslant N+1$) qui ont un facteur premier en commun. En conséquent F_k et $F_{k'}$ ne sont pas premiers entre eux. Ce qui contredit la question précédente. Il existe donc une infinité de nombres premiers.

Correction 348 1. X est non vide car, par exemple pour $k=2$, $4k+3=11$ est premier.

2. $(4k+1)(4\ell+1) = 16k\ell+4(k+\ell)+1 = 4(4k\ell+k+\ell)+1$. Si l'on note l'entier $k' = 4k\ell+k+\ell$ alors $(4k+1)(4\ell+1) = 4k'+1$, ce qui est bien de la forme voulue.

3. Remarquons que 2 est le seul nombre premier pair, les autres sont de la forme $4k+1$ ou $4k+3$. Ici a n'est pas divisible par 2, supposons –par l'absurde– que a n'a pas de diviseur de la forme $4k+3$, alors tous les diviseurs de a sont de la forme $4k+1$. C'est-à-dire que a s'écrit comme produit de nombre de la forme $4k+1$, et par la question précédente a peut s'écrire $a = 4k'+1$. Donc $a \equiv 1[4]$. Mais comme $a = 4p_1p_2\ldots p_n - 1$, $a \equiv -1 \equiv 3[4]$. Nous obtenons une contradiction. Donc a admet une diviseur premier p de la forme $p = 4\ell+3$.

4. Dans l'ensemble $X = \{p_1, \dots, p_n\}$ il y a tous les nombres premiers de la formes $4k+3$. Le nombre p est premier et s'écrit $p = 4\ell + 3$ donc p est un élément de X, donc il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $p = p_i$. Raisonnons modulo $p = p_i$: $a \equiv 0[p]$ car p divise a. D'autre part $a = 4p_1 \dots p_n - 1$ donc $a \equiv -1[p]$. (car p_i divise $p_1 \dots p_n$). Nous obtenons une contradiction donc X est infini : il existe une infinité de nombre premier de la forme $4k+3$. Petite remarque, tous les nombres de la forme $4k+3$ ne sont pas des nombres premiers, par exemple pour $k = 3$, $4k+3 = 15$ n'est pas premier.

Correction 349 1. Supposons que $a^n + 1$ est premier. Nous allons montrer la contraposée. Supposons que n n'est pas de la forme 2^k, c'est-à-dire que $n = p \times q$ avec p un nombre premier > 2 et $q \in \mathbb{N}$. Nous utilisons la formule

$$x^p + 1 = (x+1)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{p-1})$$

avec $x = a^q$:

$$a^n + 1 = a^{pq} + 1 = (a^q)^p + 1 = (a^q + 1)(1 - a^q + (a^q)^2 \dots + (a^q)^{p-1}).$$

Ces deux derniers facteurs sont > 1. Et donc $a^n + 1$ n'esp pas premier. Par contraposition si $a^n + 1$ est premier alor $n = 2^k$.

2. Cette conjecture est fausse, mais pas facile à vérifier sans une bonne calculette ! En effet pour $n = 5$ nous obtenons :

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417.$$

Correction 364 1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$, $B = X^2 + 2X + 3$, le quotient de A par B est $3X^3 - 6X^2 + 3X + 16$ et le reste $-47 - 41X$.

2. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$, $B = X^3 + X + 2$ le quotient de A par B est $3X^2 + 2X - 3$ et le reste est $7 - 9X^2 - X$.

3. $A = X^4 - X^3 - X - 2$, $B = X^2 - 2X + 4$, le quotient de A par B est $X^2 + X - 2$ de reste $6 - 9X$.

Correction 366 $X^4 + X^3 - 2X + 1 = (X^2 + X + 1)(2X^2 - 3X + 1) + X^3(2 - X)$.

Correction 370 Les solutions sont les polynômes de la forme

$$P = \frac{1}{16}(5X^7 - 21X^5 + 35X^3 - 35X) + A(X-1)^4(X+1)^4$$

où A est un polynôme quelconque ; une seule solution de degré $\leqslant 7$.

Correction 371 1. Quotient $Q = X^3 - X^2 - X + 1$, reste $R = X$.

2. Quotient $Q = 1 - X^2 - X^4$, reste $R = X^5(1 + 2X + X^2)$.

Correction 375 Soient $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$, $B = X^2 - 5X + 4$, le quotient de A par B est $X^3 - 2\,X^2 - 14\,X - 63$, le reste étant $261 - 268\,X$.

Correction 378 Ce sont les polynômes de la forme $\lambda(X-a)^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda, a \in \mathbb{C}$.

Correction 379 1. $\operatorname{pgcd}(X^3 - X^2 - X - 2, X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2) = X - 2$.

2. $\operatorname{pgcd}(X^4 + X^3 - 2X + 1, X^3 + X + 1) = 1$.

Correction 380 1. $\operatorname{pgcd}(X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1, X^4 + 2X^3 + X + 2) = X^3 + 1$.

2. $\operatorname{pgcd}(X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1, X^3 + X^2 - X - 1) = X + 1$

3. $\text{pgcd}(X^5+5X^4+9X^3+7X^2+5X+1, X^4+2X^3+2X^2+X+1)=1$.

Correction 387 1. $D = X^2+3X+2 = A(\frac{1}{18}X-\frac{1}{6})+B(-\frac{1}{18}X^2+\frac{1}{9}X+\frac{5}{18})$.

2. $D = 1 = A(-X^3)+B(X^5+X^3+X+1)$.

Correction 401

$$\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$

Correction 409 L'ordre de multiplicité est 2.

Correction 410 Pour $a=\frac{1}{64}$; la racine multiple est $-\frac{1}{2}$.

Correction 412 1. $\left\{\begin{array}{rcl} X^3-3 & = & (X-\sqrt[3]{3})(X^2+\sqrt[3]{3}\,X+\sqrt[3]{9}) \\ & = & (X-\sqrt[3]{3})(X+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2})(X+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}). \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcl} X^{12}-1 & = & (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)\times \\ & & \quad (X^2-\sqrt{3}\,X+1)(X^2+\sqrt{3}\,X+1) \\ & = & (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)\times \\ & & \quad \left(X-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\times \\ & & \quad \left(X-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)\left(X-\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(X-\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right). \end{array}\right.$

Correction 423 1. $X^6+1 = -\left(X^2+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)$.

2. $X^9+X^6+X^3+1 = -\left(X^2+1\right)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)(X+1)$.

Correction 426 Utiliser la formule d'interpolation de Lagrange ! $P=\frac{1}{3}(X^2-4X-3)$.

Correction 427 Utiliser la formule d'interpolation de Lagrange ! $P=\frac{1}{2}(3X^3-4X^2-X+2)$.

Correction 444 1. $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1} = X^2-2X-1-\frac{5}{X-1}$.

2. $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2} = 2X+7-\frac{3}{X-1}+\frac{19}{X-2}$.

3. $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1} = 2X+5+\frac{3}{(X-1)^2}+\frac{7}{X-1}$.

4. $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1} = X^2+3+\frac{2}{X-1}-\frac{2}{X+1}$.

5. $\frac{X}{X^2-4} = \frac{1/2}{X+2}+\frac{1/2}{X-2}$.

6. $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X} = X^2+X+1-\frac{1}{X}+\frac{1/2}{X+1}+\frac{3/2}{X-1}$.

7. $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4} = 1+\frac{1}{X}+\frac{3}{(X-1)^4}+\frac{6}{(X-1)^3}+\frac{10}{(X-1)^2}+\frac{4}{X-1}$.

8. $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1+\frac{3/4}{(X-1)^3}+\frac{3/2}{(X-1)^2}+\frac{37/16}{X-1}-\frac{1/8}{(X+1)^2}-\frac{5/16}{X+1}$.

9. $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3} = X-3+\frac{7X+13}{(X^2+X+2)^3}-\frac{7X+21}{(X^2+X+2)^2}+\frac{14}{X^2+X+2}$.

10. $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} = \frac{2+i}{X-i}+\frac{1-3i}{X+2i}$.

11. $\frac{X+i}{X^2+i} = \frac{\frac{-\sqrt{2}+2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}+\frac{\frac{\sqrt{2}+2}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}}$.

12. $\frac{X}{(X+i)^2} = \frac{1}{X+i}-\frac{i}{(X+i)^2}$.

13. $\frac{X^2+1}{X^4+1} = \frac{1/2}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\frac{1/2}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.

14. $\frac{X}{X^4+1} = -\frac{\sqrt{2}/4}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\frac{\sqrt{2}/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{-\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.

15. $\frac{X^2+X+1}{X^4+1} = \frac{(2-\sqrt{2})/4}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\frac{(2+\sqrt{2})/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{-\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.

16. $\frac{X^5+X+1}{X^4-1} = X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} - \frac{X+\frac{1}{2}}{X^2+1} = X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} + \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i}{X-i} + \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{X+i}$.
17. $\frac{X^5+X+1}{X^6-1} = \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/6}{X+1} + \frac{\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}}{X^2-X+1} = \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/6}{X+1} - \frac{\frac{1}{3}j}{X+j} - \frac{\frac{1}{3}j^2}{X+j^2}$, où on a posé de façon standard $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
18. $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2} = -\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{3X+5}{X^2+X+1} =$ $-\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{\frac{1}{3}j^2}{(X-j)^2} + \frac{\frac{1}{3}j}{(X-j^2)^2} + \frac{\frac{3}{2}-\frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j} + \frac{\frac{3}{2}+\frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j^2}$, où on a posé de façon standard $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
19. $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+1} - \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+4} = \frac{1/6}{X-i} + \frac{1/6}{X+i} - \frac{1/6}{X-2i} - \frac{1/6}{X+2i}$.
20. $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} = -\frac{4/3}{X^2+1} + \frac{7/3}{X^2+4} = \frac{\frac{2}{3}i}{X-i} + \frac{-\frac{2}{3}i}{X+i} + \frac{-\frac{7}{12}i}{X-2i} + \frac{\frac{7}{12}i}{X+2i}$.

Correction 445 Commencer bien sûr par la division suivant les puissances décroissantes (la faire faire par les étudiants) : $\Phi = x + 1 + \Phi_1$ avec $\Phi_1 = \frac{4x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$.
Puis factoriser le dénominateur et faire donner le type de décomposition de Φ_1 :

$$\Phi_1 = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x - \frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Expliquer qu'on obtient alors A en multipliant les deux membres de (3) par x^2 et en passant à la limite quand x tend vers 0 ($A = -1$). On obtient de même C par multiplication par $x - \frac{1}{2}$ et calcul de la limite quand x tend vers $\frac{1}{2}$ ($C = -2$). Enfin on trouve B en identifiant pour une valeur particulière non encore utilisée, par exemple $x = 1$, ou mieux en multipliant les deux membres de (3) par x et en passant à la limite pour $x \to \infty$ ($B = 4$). Faire remarquer que pour un cas aussi simple, les calculs peuvent se faire *de tête* en écrivant simplement les coefficients A, B, C au fur et à mesure qu'on les obtient.

$$\frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2} = x + 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - \frac{2}{x - \frac{1}{2}}.$$

Correction 446 La division suivant les puissances décroissantes donne : $\Phi = 2 + \Phi_1$ avec

$$\Phi_1 = \frac{4x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}.$$

Faire remarquer que la méthode de l'exercice précédent permettrait d'obtenir facilement A et D par multiplication par x^3 et par $(x-1)^2$, mais qu'il resterait encore 3 coefficients à déterminer. Il y a ici une méthode plus efficace : effectuer la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3 (qui est l'exposant du facteur x) du numérateur $1-4x+8x^2-10x^3+4x^4$ par $(x-1)^2$, ou plutôt par $1-2x+x^2$:

$$1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4 = (1 - 2x + x^2) \times (1 - 2x + 3x^2) + (-2x^3 + x^4). \tag{4}$$

En divisant les deux membres de (4) par $x^3(x-1)^2$, on obtient A, B et C d'un seul coup :

$$\Phi_1 = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} + \frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

Le calcul de D et E est alors immédiat par décomposition de $\frac{x-2}{(x-1)^2}$: méthode de l'exercice précédent, ou division suivant les puissances décroissantes de $x-2$ par $x-1$: $x-2 = (x-1)-1$.

$$\frac{2x^5 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2} = 2 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}.$$

Remarque : cette méthode est efficace pour un exposant assez grand (en gros à partir de 3). Elle peut être utilisée pour une fraction du type $\frac{P(x)}{(x-a)^n Q(x)}$, mais il faut commencer par le changement de variable $u = x - a$ avant de faire la division, puis bien entendu revenir ensuite à la variable x.

Correction 447 Pas de division préliminaire dans ce cas… Forme de la décomposition :

$$\Phi = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)^3} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2} + \frac{Fx + G}{x^2+1}. \tag{5}$$

La méthode du premier exercice permet d'obtenir A, puis B et C (pour ces derniers : multiplication des deux membres de (5) par x^2+1, puis limite quand x tend vers i ou vers $-i$, avec séparation des parties réelle et imaginaire), mais c'est bien insuffisant pour conclure : il faut encore soustraire $\frac{Bx+C}{(x^2+1)^3}$, simplifier par x^2+1, calculer D et E… (le faire faire quand même à titre d'entraînement).
On va ici se contenter de trouver A ($A = 3$), puis faire la soustraction $\Phi_1 = \Phi - \frac{A}{x}$. Faire faire le calcul aux étudiants ; leur faire remarquer que, sauf erreur de calcul, la fraction Φ_1 *doit* se simplifier par x. On trouve :

$$\Phi = \frac{3}{x} + \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^3}.$$

La fin de la décomposition se fait par divisions successives suivant les puissances décroissantes : division du numérateur $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2$ par x^2+1, puis du quotient obtenu par x^2+1.

$$\frac{4x^6 - 2x^5 + 11x^4 - x^3 + 11x^2 + 2x + 3}{x(x^2+1)^3} = \frac{3}{x} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{3}{(x^2+1)^2} + \frac{x-2}{x^2+1}.$$

Remarque : cette méthode des divisions successives est très pratique quand la fraction à décomposer a un dénominateur *simple*, c'est à dire comportant un dénominateur du type Q^n où Q est du premier degré, ou du second degré sans racine réelle. Faire remarquer aussi comment on peut simplifier petit à petit en éliminant du dénominateur un dénominateur *simple* (méthode utilisée dans l'exercice 3 par le calcul de $\Phi - \frac{A}{x}$).

Correction 451

1. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p', q' tels que $r + x = \frac{p'}{q'}$. Donc $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{qp' - pq'}{qq'} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$.
   De la même façon si $rx \in \mathbb{Q}$ alors $rx = \frac{p'}{q'}$ Et donc $x = \frac{p'}{q'}\frac{q}{p}$. Ce qui est absurde.
2. Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p, q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. De plus nous pouvons supposer que la fraction est irréductible (p et q sont premiers entre eux). En élevant l'égalité au carré nous obtenons $q^2 \times 2 = p^2$. Donc p^2 est un nombre pair, cela implique que p est un nombre pair (si vous n'êtes pas convaincu écrivez la contraposée "p impair $\Rightarrow p^2$ impair"). Donc $p = 2 \times p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$, d'où $p^2 = 4 \times p'^2$. Nous obtenons $q^2 = 2 \times p'^2$. Nous en déduisons maintenant que q^2 est pair et comme ci-dessus que q est pair. Nous obtenons ainsi une contradiction car p et q étant tous les deux pairs la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible et aurait pu être simplifier. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. Soient r, r' deux rationnels avec $r < r'$. Notons $a = \sqrt{2}(r' - r)$. Choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \sqrt{2}$. Et posons
   $$x = r + \frac{a}{n}.$$
   D'une part $x \in]r, r'[$ et d'après les deux premières questions $\sqrt{2}\left(\frac{r'-r}{n}\right) \notin \mathbb{Q}$. Et donc x est un nombre irrationnel compris entre r et r'.

Correction 457 1. Soit $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$. Pour $p(\frac{\alpha}{\beta}) = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^i = 0$. Après multiplication par β^n nous obtenons l'égalité suivante :

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta + \cdots + a_1\alpha\beta^{n-1} + a_0\beta^n.$$

En factorisant les derniers termes de cette somme par β, nous écrivons $a_n\alpha^n + \beta q = 0$. Ceci entraîne que β divise $a_n\alpha^n$, mais comme β et α^n sont premier entre eux (car $\alpha \wedge \beta = 1$) alors par le théorème de Gauss β divise a_n. De même en factorisant les premiers termes de la somme ci-dessus par α nous obtenons $\alpha q' + a_0\beta^n = 0$ et par un raisonnement similaire α divise a_0.

2. Notons $\gamma = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Alors $\gamma^2 = 5 + 2\sqrt{2}\sqrt{3}$ Et donc $(\gamma^2 - 5)^2 = 4 \times 2 \times 3$, Nous choisissons $p(x) = (x^2 - 5)^5 - 24$, qui s'écrit aussi $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$. Vu notre choix de p, nous avons $p(\gamma) = 0$. Si nous supposons que γ est rationnel, alors $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ et d'après la première question α divise le terme constant de p, c'est-à-dire 1. Donc $\alpha = \pm 1$. De même β divise le coefficient du terme de plus au degré de p, donc β divise 1, soit $\beta = 1$. Ainsi $\gamma = \pm 1$, ce qui est évidemment absurde !

Correction 459 1. Soit $p = 2001\,2001\ldots 2001$ et $q = 10000\,0000\ldots 0000 = 10^{4n}$. Alors $N_n = \frac{p}{q}$.

2. Remarquons que $10\,000 \times M = 2001, 2001\,2001\ldots$ Alors $10\,000 \times M - M = 2001$; donc $9999 \times M = 2001$ d'où $M = \frac{2001}{9999}$.
3. $0,111\ldots = \frac{1}{9}$, $0,222\ldots = \frac{2}{9}$, etc. D'où $P = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{9}{9} = \frac{1+2+\cdots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$.

Correction 461 Par l'absurde supposons que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est un rationnel. Il s'écrit $\frac{p}{q}$ avec p, q des entiers (positif) premiers entre eux. On obtient $q\ln 3 = p\ln 2$. En prenant l'exponentielle : $\exp(q\ln 3) = \exp(p\ln 2)$ soit $q^3 = p^2$. Donc q divise p^2. Comme p et q sont premiers entre eux, alors par le théorème de Gauss q divise p. Donc $q = 1$. Et alors $p = 1$. Donc $\frac{\ln 3}{\ln 2} = 1$, ce qui est faux (car par exemple $\ln 3 > \ln 2$). Donc $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Correction 464 Explicitons la formule pour $\max(x, y)$. Si $x \geqslant y$, alors $|x - y| = x - y$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x$. De même si $x \leqslant y$, alors $|x - y| = -x + y$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = y$.
Pour 3 élément, nous avons $\max(x, y, z) = \max\big(\max(x, y), z\big)$, donc d'après les formules pour 2 éléments :

$$\begin{aligned}\max(x, y, z) &= \frac{\max(x, y) + z + |\max(x, y) - z|}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) + z + \left|\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) - z\right|}{2}.\end{aligned}$$

Correction 465 $(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc le seul majorant de A est $+\infty$ et donc $\sup A = +\infty$. D'autre part toutes les valeurs de (u_n) sont positives et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc $\inf A = 0$.

Correction 466 1. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1, +\infty[$. Les minorants : $]-\infty, 0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.

2. $]0, 1[\cap\mathbb{Q}$. Les majorants : $[1, +\infty[$. Les minorants : $]-\infty, 0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Il nexiste pas de plus grand élément ni de plus petit élément.
3. $\mathbb{N}$. Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $]-\infty, 0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.

4. $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Les majorants : $[\frac{5}{4}, +\infty[$. Les minorants : $]-\infty, -1]$. La borne supérieure : $\frac{5}{4}$. La borne inférieure : -1. Le plus grand élément : $\frac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Correction 476 1. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On sait que $\operatorname{Sup} A$ est un majorant de A, c'est à dire, $\forall a \in A,\ a \leqslant \operatorname{Sup} A$. De même, $\forall b \in B,\ b \leqslant \operatorname{Sup} B$. On veut montrer que $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$ est un majorant de $A+B$. Soit donc $x \in A+B$. Cela signifie que x est de la forme $a+b$ pour un $a \in A$ et un $b \in B$. Or $a \leqslant \operatorname{Sup} A$, et $b \leqslant \operatorname{Sup} B$, donc $x = a+b \leqslant \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$. Comme ce raisonnement est valide pour tout $x \in A+B$ cela signifie que $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$ est un majorant de $A+B$.

2. On veut montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$. On prend donc un $\varepsilon > 0$ quelconque, et on veut montrer que $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B - \varepsilon$ ne majore pas $A+B$. On s'interdit donc dans la suite de modifier ε. Comme $\operatorname{Sup} A$ est le plus petit des majorants de A, $\operatorname{Sup} A - \varepsilon/2$ n'est pas un majorant de A. Cela signifie qu'il existe un élément a de A tel que $a > \operatorname{Sup} A - \varepsilon/2$. *Attention : $\operatorname{Sup} A - \varepsilon$ n'est pas forcément dans A. $\operatorname{Sup} A$ non plus. Et il n'est pas non plus vrai que $\forall a \in A\ a > \operatorname{Sup} A - \varepsilon/2$. On ne choisit donc pas ce a.* De la même manière, il existe $b \in B$ tel que $b > \operatorname{Sup} B - \varepsilon/2$. Or l'élément x défini par $x = a+b$ est un élément de $A+B$, et il vérifie $x > (\operatorname{Sup} A - \varepsilon/2) + (\operatorname{Sup} B - \varepsilon/2) = \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B - \varepsilon$. Ceci implique que $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$.

3. $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$ est un majorant de $A+B$ d'après la partie 1. Mais, d'après la partie 2., dès qu'on prend un $\varepsilon > 0$, $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$. Donc $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$ est bien le plus petit des majorants de $A+B$, i.e. $\operatorname{Sup}(A+B) = \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$.

Correction 477 1. Vrai.

2. Vrai.
3. Vrai.
4. Faux. L'égalité peut ne pas être stricte.
5. Vrai.
6. Vrai.

Correction 491

$$\begin{aligned} &\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leqslant 2(a+b) \end{aligned}$$

car les termes sont positifs, et la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b} \leqslant 2(a+b) \\ &\Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 2. \end{aligned}$$

La denière proposition est toujours vraie, et donc par équivalence, nous obtenons l'inégalité recherchée.

Correction 497 1. Calculons d'abord $f(0)$. $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$ Donc $f(0) = 0$. Montrons le résultat demandé par récurrence : pour $n = 1$, nous avons bien $f(1) = 1 \times f(1)$. Si $f(n) = nf(1)$ alors $f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1)$.

2. $0 = f(0) = f(-1+1) = f(-1) + f(1)$. Donc $f(-1) = -f(1)$. Puis comme ci-dessus $f(-n) = nf(-1) = -nf(1)$.
3. Soit $q = \frac{a}{b}$. Alors $f(a) = f(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots \frac{a}{b}) = f(\frac{a}{b}) + \cdots + f(\frac{a}{b})$ (b termes dans cette somme). Donc $f(a) = bf(\frac{a}{b})$. Soit $af(1) = bf(\frac{a}{b})$. Ce qui s'écrit aussi $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}f(1)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$ Soit (α_i) une suite croissante de rationnels qui tend vers x. Soit (β_i) une suite décroissante de rationnels qui tend vers x :
$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots \leqslant x \leqslant \cdots \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_1.$$
Alors comme $\alpha_i \leqslant x \leqslant \beta_i$ et que f est croissante nous avons $f(\alpha_i) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta_i)$. D'après la question précédent cette inéquation devient : $\alpha_i f(1) \leqslant f(x) \leqslant \beta_i f(1)$. Comme (α_i) et (β_i) tendent vers x. Par le théorème des "gendarmes" nous obtenons en passant à la limite : $xf(1) \leqslant f(x) \leqslant xf(1)$. Soit $f(x) = xf(1)$.

Correction 505
1. Vraie. Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite.
2. Faux. Un contre-exemple est la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_{2n})_n$ est la suite constante (donc convergente) de valeur 1, et $(u_{2n+1})_n$ est constante de valeur -1. Cependant la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.
3. Vraie. La convergence de la suite $(u_n)_n$ vers ℓ, que nous souhaitons démontrer, s'écrit :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
Fixons $\varepsilon > 0$. Comme, par hypothèse, la suite $(u_{2p})_p$ converge vers ℓ alors il existe N_1 tel
$$2p \geqslant N_1 \Rightarrow |u_{2p} - \ell| < \varepsilon.$$
Et de même, pour la suite $(u_{2p+1})_p$ il existe N_2 tel que
$$2p+1 \geqslant N_1 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon.$$
Soit $N = \max(N_1, N_2)$, alors
$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
Ce qui prouve la convergence de $(u_n)_n$ vers ℓ.

Correction 506 Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par définition
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
Choisissons $\varepsilon = 1$, nous obtenons le N correspondant. Alors pour $n \geqslant N$, nous avons $|u_n - \ell| < 1$, soit $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$. Notons $M = \max_{n=1,\ldots,N}\{u_n\}$ et puis $M' = \max(M, \ell+1)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leqslant M'$. De même en posant $m = \min_{n=1,\ldots,N}\{u_n\}$ et $m' = \min(m, \ell-1)$ nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m'$.

Correction 507 Beaucoup d'entre vous ont compris que u_n n'avait pas de limite, mais peu sont arrivé à en donner une démonstration formelle. En effet, dès lors qu'on ne sait pas qu'une suite (u_n) converge, on ne peut pas écrire $\lim u_n$, c'est un nombre qui n'est pas défini. Par exemple l'égalité
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n + 1/n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

n'a pas de sens. Par contre voilà ce qu'on peut dire : *Comme la suite $1/n$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, la suite u_n est convergente si et seulement si la suite $(-1)^n$ l'est. De plus, dans le cas où elles sont toutes les deux convergentes, elles ont même limite.* Cette affirmation provient tout simplement du théorème suivant

Théorème : Soient u_n et v_n deux suites convergeant vers deux limites l et l'. Alors la suite $w_n = u_n + v_n$ est convergente (on peut donc parler de sa limite) et $\lim w_n = l + l'$.

De plus, il n'est pas vrai que toute suite convergente doitforcément être croissante et majorée ou décroissante et minorée. Par exemple, $(-1)^n/n$ est une suite qui converge vers 0 mais qui n'est ni croissante, ni décroissante. A ce propos d'ailleurs, on ne dit pas d'une suite qu'elle est *croissante pour n pair et décroissante pour n impair* même si je comprends ce que cela signifie. On dit qu'une telle suite n'est ni croissante ni décroissante (et c'est tout).

Voici maintenant un exemple de rédaction de l'exercice. On veut montrer que la suite u_n n'est pas convergente. Supposons donc par l'absurde qu'elle soit convergente et notons $l = \lim_{n\to\infty} u_n$. (Cette expression a un sens puisqu'on suppose que u_n converge).

Rappel 1. Une *sous-suite* de u_n (on dit aussi *suite extraite* de u_n) est une suite v_n de la forme $v_n = u_{\phi(n)}$ où ϕ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Cette fonction ϕ correspond "au choix des indices qu'on veut garder" dans notre sous-suite. Par exemple, si on ne veut garder dans la suite u_n que les termes pour lesquels n est un multiple de trois, on pourra poser $\phi(n) = 3n$, c'est à dire $v_n = u_{3n}$.

Considérons maintenant les sous-suites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ de (u_n). On a que $v_n = 1 + 1/2n \to 1$ et que $w_n = -1 + 1/(2n+1) \to -1$. Or on a le théorème suivant sur les sous-suites d'une suite convergente :

Théorème : Soit u_n une suite convergeant vers la limite l (le théorème est encore vrai si $l = +\infty$ ou $l = -\infty$). Alors, toute sous suite v_n de u_n a pour limite l.

Par conséquent, ici, on a que $\lim v_n = l$ et $\lim w_n = l$ donc $l = 1$ et $l = -1$ ce qui est une contradiction. L'hypothèse disant que (u_n) était convergente est donc fausse. Donc u_n ne converge pas.

Montrons que u_n est bornée. On a que

$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$$

$$0 \leqslant 1/n \leqslant 1$$

donc

$$-1 \leqslant u_n \leqslant 2$$

donc u_n est bornée.

Rappel 2. Le théorème de Bolzano-Weïerstrass dit ceci : Soit (u_n) une suite de réels bornée. Alors, il existe une sous-suite de (u_n) qui est convergente. (C'est un théorème très puissant).

Ici, on nous demande d'exhiber une sous-suite de u_n qui soit convergente. Mais on a déjà vu que $v_n = u_{2n} \to 1$. $v_n = u_{2n}$ est donc une suite extraite convergente.

Remarque : Il y a d'autres sous-suites convergentes : (u_{4n}) (u_{2^n}), $(u_{n!})$ et (u_{3^n}) sont des sous-suites convergentes de u_n.

Correction 518 1. Suite non convergente car non bornée.

2. Suite convergente vers 0.
3. Suite non convergente car la sous-suite $u_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$ est toujours plus grande que 1. Alors que la sous-suite $u_{2p+1} = -1 + \frac{1}{2p+1}$ est toujours plus petite que 0.

Correction 519 Soit $(u_n)_n$ une suite d'entiers qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Dans l'intervalle $I =]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}[$ de longueur 1, il existe au plus un élément de $\mathbb{N}$. Donc $I \cap \mathbb{N}$ est soit vide soit un singleton $\{a\}$.
La convergence de $(u_n)_n$ s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon = \frac{1}{2}$, nous obtenons le N correspondant. Et pour $n \geqslant N$, $u_n \in I$. Mais de plus u_n est un entier, donc

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n \in I \cap \mathbb{N}.$$

En conséquent, $I \cap \mathbb{N}$ n'est pas vide (par exemple u_N en est un élément) donc $I \cap \mathbb{N} = \{a\}$. L'implication précédente s'écrit maintenant :

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n = a.$$

Donc la suite $(u_n)_n$ est stationnaire (au moins) à partir de N. En prime, elle est bien évidemment convergente vers $\ell = a \in \mathbb{N}$.

Correction 520

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ donc
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$$
(C'est un encadrement de l'aire de l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $x \in [n, n+1]$ et $0 \leqslant y \leqslant 1/x$ par l'aire de deux rectangles.) Nous obtenons l'inégalité :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$
2. $H_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1$, nous majorons chaque terme de cette somme en utilisant l'inégalité $\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$ obtenue précédemment : nous obtenons $H_n \leqslant \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n-1) - \ln(n-2) + \cdots + \ln 2 - \ln 1 + 1$. Cette somme est télescopique (la plupart des termes s'éliminent et en plus $\ln 1 = 0$) et donne $H_n \leqslant \ln n + 1$.
L'autre inégalité s'obtient de la façon similaire en utilisant l'inégalité $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.
3. Comme $H_n \geqslant \ln(n+1)$ et que $\ln(n+1) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ alors $H_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.
4. $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (\ln n + 1 - \ln n) \leqslant 0$ d'après la première question. Donc $u_{n+1} - u_n = f(\frac{1}{n+1}) \leqslant 0$. Donc $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite (u_n) est décroissante. Enfin comme $H_n \geqslant \ln(n+1)$ alors $H_n \geqslant \ln n$ et donc $u_n \geqslant 0$.
5. La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers un réel γ. Ce réel γ est la constante d'Euler (Leonhard Euler, 1707-1783, mathématicien d'origine suisse). Cette constante vaut environ $0,5772156649\ldots$ mais on ne sait pas si γ est rationnel ou irrationnel.

Correction 524

1. $u_{n+q} = \cos \frac{2(n+q)\pi}{q} = \cos \frac{2(n)\pi}{q} + 2\pi = \cos \frac{2(n+q)\pi}{q} = u_n$.
2. $u_{nq} = \cos \frac{2(nq)\pi}{q} = \cos 2n\pi = 1 = u_0$ et $u_{nq+1} = \cos \frac{2(nq+1)\pi}{q} = \cos \frac{2\pi}{q} = u_1$. Supposons, par l'absurde que (u_n) converge vers ℓ. Alors la sous-suite $(u_{nq})_n$ converge vers ℓ comme $u_{nq} = u_0 = 1$ pout tout n alors $\ell = 1$. D'autre part la sous-suite $(u_{nq+1})_n$ converge aussi vers ℓ, mais $u_{nq+1} = u_1 = \cos \frac{2\pi}{q}$, donc $\ell = \cos \frac{2\pi}{q}$. Nous obtenons une contradiction car pour $q \geqslant 2$, nous avons $\cos \frac{2\pi}{q} \neq 1$. Donc la suite (u_n) ne converge pas.

Correction 539

1. La fonction polynomiale $P(x) := x^3 - 3x + 1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $P'(x) = 3x^2 - 3$, qui est strictement négative sur $]-1, +1[$. Par conséquent P est strictement décroissante sur $]-1, +1[$. Comme $P(0) = 1 > 0$ et $P(1/2) = -3/8 < 0$ il en résulte grâce au théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un réel unique $\alpha \in]0, 1/2[$ tel que $P(\alpha) = 0$.
2. Comme $f(x) - x = (x^3 - 3x + 1)/9$ il en résulte que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans $]0, 1/2[$.
3. Comme $f'(x) = (x^2 + 2)/3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = 1/9$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit que $f(\mathbb{R}^+) = [1/9, +\infty[$. Comme $x_1 = f(x_0) = 1/9 > 0 = x_0$, et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit par récurrence que $x_{n+1} > x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui prouve que la suite (x_n) est croissante.
4. Un calcul simple montre que $f(1/2) < 1/2$. Comme $0 = x_0 < 1/2$ et que f est croissante on en déduit par récurrence que $x_n < 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. D'après les questions précédentes, la suite (x_n) est croissante et majorée elle converge donc vers un nombre réel $l \in]0, 1/2]$. De plus comme $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit par continuité de f que $\ell = f(\ell)$. Comme $f(1/2) < 1/2$, On en déduit que $\ell \in]0, 1/2[$ et vérifie l'équation $f(\ell) = \ell$. D'après la question 2, on en déduit que $\ell = \alpha$ et donc (x_n) converge vers α.

Correction 563 Remarquons d'abord que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{1-k^2}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k.k}$. En écrivant les fractions de u_n sous la cette forme, l'écriture va se simplifier radicalement :

$$u_n = \frac{(2-1)(2+1)}{2.2}\frac{(3-1)(3+1)}{3.3}\cdots\frac{(k-1)(k+1)}{k.k}\frac{(k)(k+2)}{(k+1).(k+1)}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n.n}$$

Tous les termes des numérateurs se retrouvent au dénominateur (et vice-versa), sauf aux extrémités. D'où :

$$u_n = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.$$

Donc (u_n) tends vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction 568

1. 0.
2. 1.
3. 7/30.
4. 1/2.
5. 1.
6. $-3/2$.
7. 1.
8. 3.
9. 1 ; 2.
10. 3/4.
11. 0.
12. 0.
13. 1/3.

Correction 569 1.

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4}\left(\frac{u_n^2+a}{u_n}\right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4u_n^2}(u_n^4 - 2au_n^2 + a^2) \\ &= \frac{1}{4}\frac{(u_n^2-a)^2}{u_n^2} \end{aligned}$$

2. Il est clair que pour $n \geqslant 0$ on a $u_n \geqslant 0$. D'après l'égalité précédente pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1}^2 - a$ et comme u_{n+1} est positif alors $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$.

   Soit $n \geqslant 1$. Calculons le quotient de u_{n+1} par u_n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{u_n^2}\right)$ or $\frac{a}{u_n^2} \leqslant 1$ car $u_n \geqslant \sqrt{a}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc elle converge vers une limite $\ell > 0$. D'après la relation

   $$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

   quand $n \to +\infty$ alors $u_n \to \ell$ et $u_{n+1} \to \ell$. À la limite nous obtenons la relation

   $$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right).$$

   La seule solution positive est $\ell = \sqrt{a}$. Conclusion (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. La relation

   $$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}$$

   s'écrit aussi

   $$(u_{n+1}-a)(u_{n+1}+a) = \frac{(u_n-a)^2(u_n+a)^2}{4u_n^2}.$$

   Donc

   $$\begin{aligned} u_{n+1} - a &= (u_n-a)^2 \frac{1}{4(u_{n+1}+\sqrt{a})}\left(\frac{u_n+\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\ &\leqslant (u_n-a)^2\frac{1}{4(2\sqrt{a})}\left(1+\frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\ &\leqslant (u_n-a)^2\frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

5. Par récurrence pour $n = 1$, $u_1 - \sqrt{a} \leqslant 1$. Si la proposition est vraie rang n, alors

   $$\begin{aligned} u_{n+1} - a &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n-a)^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(2\sqrt{a})^2\left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 \\ &\leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n} \end{aligned}$$

6. Soit $u_0 = 3$, alors $u_1 = \frac{1}{2}(3 + \frac{10}{3}) = 3,166\ldots$. Comme $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant u_1$ donc $u_1 - \sqrt{10} \leqslant 0.166\ldots$. Nous pouvons choisir $k = 0,17$. Pour que l'erreur $u_n - \sqrt{a}$ soit inférieure à 10^{-8} il suffit de calculer le terme u_4 car alors l'erreur (calculée par la formule de la question précédente) est inférieure à $1,53 \times 10^{-10}$. Nous obtenons $u_4 = 3,16227766\ldots$

Correction 570 1. La suite (u_n) est strictement croissante, en effet $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. La suite (v_n) est strictement décroissante :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}(\frac{2}{n} - 1).$$

Donc pour à partir de $n \geqslant 2$, la suite (v_n) est strictement décroissante.

2. Comme $u_n \leqslant v_n \leqslant v_2$, alors (u_n) est une suite croissante et majorée. Donc elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. De même $v_n \geqslant u_n \leqslant u_0$, donc (v_n) est une suite décroissante et minorée. Donc elle converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$. De plus $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$. Et donc $(v_n - u_n)$ tend vers 0 ce qui prouve que $\ell = \ell'$.
3. Supposons que $\ell \in \mathbb{Q}$, nous écrivons alors $\ell = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Nous obtenons pour $n \geqslant 2$:

$$u_n \leqslant \frac{p}{q} \leqslant v_n.$$

Ecrivons cette égalité pour $n = q$: $u_q \leqslant \frac{p}{q} \leqslant v_q$ et multiplions par $q!$: $q!u_q \leqslant q!\frac{p}{q} \leqslant q!v_q$. Dans cette double inégalité toutes les termes sont des entiers ! De plus $v_q = u_q + \frac{1}{q!}$ donc :

$$q!u_q \leqslant q!\frac{p}{q} \leqslant q!u_q + 1.$$

Donc l'entier $q!\frac{p}{q}$ est égal à l'entier $q!u_q$ ou à $q!u_q + 1 = q!v_q$. Nous obtenons que $\ell = \frac{p}{q}$ est égal à u_q ou à v_q. Supposons par exemple que $\ell = u_q$, comme la suite (u_n) est strictement croissante alors $u_q < u_{q+1} < \cdots < \ell$, ce qui aboutit à une contradiction. Le même raisonnement s'applique en supposant $\ell = v_q$ car la suite (v_n) est strictement décroissante. Pour conclure nous avons montrer que ℓ n'est pas un nombre rationnel.

En fait ℓ est le nombre $e = \exp(1)$.

Correction 571 1. Si $u_0 \leqslant u_1$ alors comme f est croissante $f(u_0) \leqslant f(u_1)$ donc $u_1 \leqslant u_2$, ensuite $f(u_1) \leqslant f(u_2)$ soit $u_2 \leqslant u_3$... Par récurrence on montre que (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par a alors elle converge. Si $u_0 \leqslant u_1$ alors la suite (u_n) est croissante et majorée par b donc converge.

Notons ℓ la limite de $(u_n)_n$. Comme f est continue alors $(f(u_n))$ tend vers $f(\ell)$. De plus la limite de $(u_{n+1})_n$ est aussi ℓ. En passant à la limite dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$ nous obtenons l'égalité $\ell = f(\ell)$.

2. La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $[0, 4]$ et $f([0, 4]) \subset [0, 4]$. La fonction f est croissante (calculez sa dérivée). Comme $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$ alors (u_n) est décroissante. Calculons la valeur de sa limite ℓ. ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ soit $4x+5 = x(x+3)$. Comme $u_n \geqslant 0$ pour tout n alors $\ell \geqslant 0$. La seule solution positive de $4x+5 = x(x+3)$ est $\ell = \frac{1+\sqrt{21}}{2} = 2,7912\ldots$
3. Si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante (car $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow f \circ f(x) \leqslant \circ f \circ f(y)$). Nous appliquons la première question avec la fonction $f \circ f$. La suite $(u_0, u_2 = f \circ f(u_0), u_4 = f \circ f(u_2), \ldots)$ est monotone et convergente. De même pour la suite $(u_1, u_3 = f \circ f(u_1), u_5 = f \circ f(u_3), \ldots)$.

4. La fonction $f(x) = (1-x)^2$ est continue et dérivable de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Elle est décroissante sur cette intervalle. Nous avons $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{9}{16}$, $u_3 = 0,19\ldots$,... Donc la suite (u_{2n}) est croissante, nous savons qu'elle converge et notons ℓ_p sa limite. La suite (u_{2n+1}) et décroissante, notons ℓ_i sa limite. Les limites ℓ_p et ℓ_i sont des solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$. Cette équation s'écrit $(1 - f(x))^2 = x$, ou encore $(1-(1-x)^2)^2 = x$ soit $x^2(2-x)^2 = x$. Il y a deux solutions évidentes 0 et 1. Nous factorisons le polynôme $x^2(2-x)^2 - x$ en $x(x-1)(x-\lambda)(x-\mu)$ avec λ et μ les solutions de l'équation $x^2 - 3x + 1$: $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,3819\ldots$ et $\mu = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$. Les solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$ sont donc $\{0, 1, \lambda, \mu\}$. Comme (u_{2n}) est croissante et que $u_0 = \frac{1}{2}$ alors (u_{2n}) converge vers $\ell_p = 1$ qui est le seule point fixe de $[0,1]$ supérieur à $\frac{1}{2}$. Comme (u_{2n+1}) est décroissante et que $u_1 = \frac{1}{4}$ alors (u_{2n+1}) converge vers $\ell_i = 0$ qui est le seule point fixe de $[0,1]$ inférieur à $\frac{1}{4}$.

Correction 572 1. Soient $a, b > 0$. On veut démontrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, cette inégalité est équivalente à $ab \leqslant (\frac{a+b}{2})^2$. De plus,

$$\begin{aligned} ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\Leftrightarrow 4ab \leqslant a^2 + 2ab + b \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

ce qui est toujours vrai car $a^2 - 2ab + b^2$ est un carré parfait. On a donc bien l'inégalité voulue.

2. Quitte à échanger a et b (ce qui ne change pas les moyennes arithmétique et géométrique, et qui préserve le fait d'être compris entre a et b), on peut supposer que $a \leqslant b$. Alors en ajoutant les deux inégalités

$$\begin{aligned} a/2 \leqslant a/2 \leqslant b/2 \\ a/2 \leqslant b/2 \leqslant b/2, \end{aligned}$$

on obtient

$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b.$$

De même, comme tout est positif, en multipliant les deux inégalités

$$\begin{aligned} \sqrt{a} \leqslant \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \\ \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \leqslant \sqrt{b} \end{aligned}$$

on obtient

$$a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$

3. Il faut avant tout remarquer que $\forall n$, u_n et v_n sont strictement positifs, ce qui permet de dire que les deux suites sont bien définies. On le démontre par récurrence : c'est clair pour u_0 et v_0, et si u_n et v_n sont strictement positifs alors leurs moyennes géométrique (u_{n+1}) et arithmétique (v_{n+1}) sont strictement positives.

   (a) On veut montrer que $\forall n\ u_n \leqslant v_n$. L'inégalité est claire pour $n = 0$ grâce aux hypothèses faites sur u_0 et v_0. Si maintenant n est plus grand que 1, u_n est la moyenne géométrique de u_{n-1} et v_{n-1} et v_n est la moyenne arithmétique de u_{n-1} et v_{n-1}, donc, par 1., $u_n \leqslant v_n$.

   (b) On sait d'après 2. que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $u_n \leqslant u_{n+1}$ i.e. (u_n) est croissante. De même, d'après 2., $u_n \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $v_{n+1} \leqslant v_n$ i.e. (v_n) est décroissante.

(c) Pour tout n, on a $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. (u_n) est donc croissante et majorée, donc converge vers une limite l. Et (v_n) est décroissante et minorée et donc converge vers une limite l'. De plus comme $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et puisque $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$, l et l' doivent vérifier

$$l = \sqrt{ll'} \text{ et } l' = \frac{l+l'}{2}$$

d'où $l = l'$.

Il y a une autre méthode un peu plus longue mais toute aussi valable.

Définition Deux suites u_n et v_n sont dites *adjacentes* si

1. $u_n \leqslant v_n$,
2. u_n est croissante et v_n est décroissante,
3. $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Alors, on a le théorème suivant :

Théorème : Si u_n et v_n sont deux suites adjacentes, elles sont toutes les deux convergentes et ont la même limite.

Pour appliquer ce théorème, vu qu'on sait déjà que u_n et v_n vérifient les points 1 et 2 de la définition, il suffit de démontrer que $\lim(u_n - v_n) = 0$. On a d'abord que $v_n - u_n \geqslant 0$. Or, d'après (a)

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Donc, si on note $w_n = v_n - u_n$, on a que $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n/2$. Donc, on peut démontrer (par récurrence) que $0 \leqslant w_n \leqslant \frac{w_0}{2^n}$, ce qui implique que $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Donc $v_n - u_n$ tend vers 0, et ceci termine de démontrer que les deux suites u_n et v_n sont convergentes et ont même limite en utilisant le théorème sur les suites adjacentes.

Correction 574 Notons $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x^k \quad - 1.$$

1. La fonction f_n est continue sur $[0,1]$. De plus $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n - 1 \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f_n, admet un zéro dans l'intervalle $[0,1]$. De plus elle strictement croissante (calculez sa dérivée) sur $[0,1]$ donc ce zéro est unique.
2. Calculons $f_n(a_{n-1})$.

$$\begin{aligned} f_n(a_{n-1}) &= \sum_{i=1}^{n} a_{n-1}^k - 1 \\ &= a_{n-1}^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1}^k - 1 \\ &= a_{n-1}^n + f_{n-1}(a_{n-1}) \\ &= a_{n-1}^n \quad (\text{car } f_{n-1}(a_{n-1}) = 0 \text{ par définition de } a_{n-1}). \end{aligned}$$

Nous obtenons l'inégalité

$$0 = f_n(a_n) < f_n(a_{n-1}) = a_{n-1}^n.$$

Or f_n est strictement croissante, l'inégalité ci-dessus implique donc

$$a_n < a_{n-1}.$$

Nous venons de démontrer que la suite $(a_n)_n$ est décroissante.
Remarquons avant d'aller plus loin que $f_n(x)$ est la somme d'une suite géométrique :

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2.$$

Évaluons maintenant $f_n(\frac{1}{2})$, à l'aide de l'expression précédente

$$f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1 - \frac{1}{2}^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 2 = -\frac{1}{2^n} < 0.$$

Donc $f_n(\frac{1}{2}) < f_n(a_n) = 0$ entraîne $\frac{1}{2} < a_n$.
Pour résumé, nous avons montrer que la suite $(a_n)_n$ est strictement décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.

3. Comme $(a_n)_n$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ alors elle converge, nous notons ℓ sa limite :

$$\frac{1}{2} \leqslant \ell < a_n.$$

Appliquons f_n (qui est strictement croissante) à cette inégalité :

$$f_n(\frac{1}{2}) \leqslant f_n(\ell) < f_n(a_n),$$

qui s'écrit aussi :

$$-\frac{1}{2^n} \leqslant f(\ell) < 0,$$

et ceci quelque soit $n \geqslant 1$. La suite $(f_n(\ell))_n$ converge donc vers 0 (théorème des "gendarmes"). Mais nous savons aussi que

$$f_n(\ell) = \frac{1 - \ell^{n+1}}{1 - \ell} - 2;$$

donc $(f_n(\ell))_n$ converge vers $\frac{1}{1-\ell} - 2$ car $(\ell^n)_n$ converge vers 0. Donc

$$\frac{1}{1 - \ell} - 2 = 0, \text{ d'où } \ell = \frac{1}{2}.$$

Correction 609 Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes racines carrées, il est utile de faire intervenir "l'expression conjuguées" :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Les racines au numérateur ont "disparu" en utilisant l'identité $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.

Appliquons ceci sur un exemple :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}\\
&= \frac{(\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m})((\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}))}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}\\
&= \frac{1+x^m-(1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}\\
&= \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}\\
&= \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}
\end{aligned}$$

Et nous avons

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}} = 1.$$

Donc l'étude de la limite de f en 0 est la même que celle de la fonction $x \mapsto x^{m-n}$.
Distinguons plusieurs pour la limite de f en 0.

– Si $m > n$ alors x^{m-n} et donc $f(x)$ tend vers 0.
– Si $m = n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ vers 1.
– Si $m < n$ alors $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^k}$ avec $k = n-m$ un exposant positif. Si k est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$. Pour k impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$. Conclusion pour $k = n-m > 0$ pair, la limite de f en 0 vaut $+\infty$ et pour $k = n-m > 0$ impair f *n'a pas de limite en* 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

Correction 612 1. Soit $p > 0$ la période : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+p) = f(x)$. Par une récurrence facile on montre :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+np) = f(x).$$

Comme f n'est pas constante il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Notons $x_n = a+np$ et $y_n = b+np$. Supposons que f a une limite ℓ en $+\infty$. Comme $x_n \to +\infty$ alors $f(x_n) \to \ell$. Mais $f(x_n) = f(a+np) = f(a)$, donc $\ell = f(a)$. De même avec la suite (y_n) : $y_n \to +\infty$ donc $f(y_n) \to \ell$ et $f(y_n) = f(b+np) = f(b)$, donc $\ell = f(b)$. Comme $f(a) \neq f(b)$ nous obtenons une contradiction.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et majorée par $M \in \mathbb{R}$. Notons

$$f = f(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

F est un ensemble (non vide) de $\mathbb{R}$, notons $\ell = \sup F$. Comme $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de F, alors $\ell < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, par les propriétés du sup il existe $y_0 \in F$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant y_0 \leqslant \ell$. Comme $y_0 \in F$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = y_0$. Comme f est croissante alors :

$$\forall x \geqslant x_0 \qquad f(x) \geqslant f(x_0) = y_0 \geqslant \ell - \varepsilon.$$

De plus par la définition de ℓ :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant \ell.$$

Les deux propriétés précédentes s'écrivent :

$$\forall x \geqslant x_0 \qquad \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell.$$

Ce qui exprime bien que la limite de f en $+\infty$ est ℓ.

Correction 616

1. La limite à droite vaut $+2$, la limite à gauche -2 donc il n'y a pas de limite.
2. $-\infty$
3. 4
4. 2
5. $\frac{1}{2}$
6. 0
7. $\frac{1}{3}$ en utilisant que $a^3 - 1 = (a-1)(1+a+a^2)$ pour $a = \sqrt[3]{1+x^2}$.
8. $\frac{1}{n}$

Correction 623

1. $-\infty$
2. 0
3. $+\infty$
4. $+\infty$
5. $\frac{3}{2}$
6. $-\infty$
7. 0
8. 0
9. 0
10. 0
11. -2
12. $-\infty$
13. 1
14. e^4
15. 1
16. e
17. e
18. 0
19. 0
20. 0

Correction 628

1. Montrons d'abord que la limite de

$$f(x) = \frac{x^k - \alpha}{x - \alpha}$$

en α est $k\alpha^{k-1}$. Un calcul montre que $f(x) = x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \cdots + \alpha^{k-1}$, et donc la limite en $x = \alpha$ est $k\alpha^{k-1}$. Une autre méthode consiste à dire que $f(x)$ est la taux d'accroissement de la fonction x^k, et donc la limite de f en α est exactement la valeur de la dérivée de x^k en α, soit $k\alpha^{k-1}$. Ayant fait ceci revenons à la limite de l'exercice : comme

$$\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n} = \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x-\alpha} \times \frac{x-\alpha}{x^n-\alpha^n}.$$

Le premier terme du produit tend vers $(n+1)\alpha^n$ et le second terme, étant l'inverse d'un taux d'accroissement, tend vers $1/(n\alpha^{n-1})$. Donc la limite cherchée est

$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\alpha.$$

2. La fonction s'écrit aussi $f(x) = \frac{1-\cos x}{\cos x(\cos 2x - \cos x)}$. Or $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Posons $u = \cos x$, alors

$$f(x) = \frac{1-u}{u(2u^2-u-1)} = \frac{1}{u(-1-2u)}$$

Lorsque x tend vers 0, $u = \cos x$ tend vers 1, et donc $f(x)$ tend vers $-\frac{1}{3}$.

3.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sqrt{x}} \\
&= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}
\end{aligned}$$

Quand $x \to +\infty$ alors $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ et $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} \to 0$, donc la limite recherchée est $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. La fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}-1}{\sqrt{x+\alpha}}.$$

Notons $g(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}$ alors à l'aide de l'expression conjuguée

$$g(x) = \frac{x-\alpha}{(\sqrt{x-\alpha})(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})} = \frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}.$$

Donc $g(x)$ tend vers 0 quand $x \to \alpha^+$. Et maintenant $f(x) = \frac{g(x)-1}{\sqrt{x+\alpha}}$ tend vers $\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.

5. Pour tout réel y nous avons la double inégalité $y-1 \leqslant E(y) \leqslant y$, donc $\frac{y-1}{y} \leqslant \frac{E(y)}{y} \leqslant 1$. On en déduit que lorsque y tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) alors $\frac{E(y)}{y}$ tend 1. En posant $y = 1/x$, et en faisant tendre x vers 0, alors $xE(\frac{1}{x}) = \frac{E(y)}{y}$ tend vers 1.

6.

$$\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{1}{x+3}.$$

La limite de $\frac{e^x-e^2}{x-2}$ en 2 vaut e^2 (c'est la taux d'accroissement de la fonction e^x), la limite voulue est $\frac{e^2}{5}$.

7. En calculant les valeurs de f en $2k\pi$ et en $2k\pi+\frac{\pi}{2}$ on prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$ pour $\alpha \leqslant 4$. Reste le cas $\alpha < 4$. Il existe β tel que $\alpha < \beta < 4$.

$$f(x) = \frac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x} = \frac{x^{4-\beta}}{\frac{1}{x^\beta}+\frac{x\alpha}{x^\beta}\sin^2 x}.$$

Le numérateur tend $+\infty$ car $4-\beta>0$. $\frac{1}{x^\beta}$ tend vers 0 ainsi que $\frac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2 x$ (car $\beta > \alpha$ et $\sin^2 x$ est bornée par 1). Donc le dénominateur tend vers 0 (par valeur positive). La limite est donc de type $+\infty/0^+$ (qui n'est pas indéterminée !) et vaut donc $+\infty$.

Correction 634 Réponse : $\frac{2}{3}$

Correction 635 Réponses : $\frac{1}{e}, 0, e$.

Correction 636 Réponse : 1.

Correction 637 Réponse : $\sup(a,b)$.

Correction 638 Réponse : $\sqrt{ab}$.

Correction 639 1. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ $|x-y| \geqslant |\,|x|-|y|\,|$ (c'est la deuxième formulation de l'inégalité triangulaire). Donc pour tout $x \in I$:$|\,|f(x)|-|f(a)|\,| \leqslant |f(x)-f(a)|$. L'implication annoncée résulte alors immédiatement de la définition de l'assertion $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

2. Si f, g sont continues alors $\alpha f + \beta g$ est continue sur I, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Donc les fonctions $f+g$ et $f-g$ sont continues sur I. L'implication de 1. prouve alors que $|f-g|$ est continue sur I, et finalement en réutilisant l'argument donné ci dessus, on peut conclure : La fonction $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ est continue sur I.

Correction 642 1. $g(a) = f(\frac{a+b}{2}) - f(a)$ et $g(\frac{a+b}{2}) = f(b) - f(\frac{a+b}{2})$. Comme $f(a) = f(b)$ alors $f(a) = -g(\frac{a+b}{2})$. Donc $g(a) \leqslant 0$ et $g(\frac{a+b}{2}) \geqslant 0$ ou bien $g(a) \geqslant 0$ et $g(\frac{a+b}{2}) \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule en c pour un c entre a et $\frac{a+b}{2}$.

2. t dénote le temps (en heure). $d(t)$ dénote la distance parcourue (en km) entre les instants 0 et t, nous supposons que la fonction $t \mapsto d(t)$ est continue. Soit $f(t) = d(t) - 4t$. $f(0) = 0$ et par hypothèse $f(1) = 0$. Appliquons la question précédente avec $a = 0$, $b = 1$. Il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c+\frac{1}{2}) = f(c)$. Donc $d(c+\frac{1}{2}) - d(c) = 4(c+\frac{1}{2}) - 4c = 2$. Donc entre c et $c+\frac{1}{2}$, (soit 1/2 heure), la parcourt est de 2 km.

Correction 643 Il existe $x < 0$ tel que $f(x) < 0$ et $y > 0$ tel que $f(y) > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in]x, y[$ tel que $f(z) = 0$. Donc f s'annule. Les polynômes de degré impair vérifient les propriétés des limites, donc s'annulent. Ceci est faux, en général, pour les polynômes de degré pair, par exemple regardez $f(x) = x^2 + 1$.

Correction 645 Comme $f(x)^2 = 1$ alors $f(x) = \pm 1$. (Atttention ! Cela ne veut pas dire que la fonction est constante égale à 1 ou -1.) Suposons, par exemple, qu'il existe x tel que $f(x) = +1$. Montrons que f est constante égale à $+1$. S'il existe $y \neq x$ tel que $f(y) = -1$ alors f est positive en x, négative en y et continue sur I. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z entre x et y tel que $f(z) = 0$, ce qui contredit $f(z)^2 = 1$. Donc f est constante égale à $+1$.

Correction 646 Notons ℓ la limite de f en $+\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad x > A \Rightarrow \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon = +1$, nous obtenons un A correspondant tel que pour $x > A$, $f(x) \leqslant \ell + 1$. Nous venons de montrer que f est bornée "à l'infini". La fonction f est continue sur l'intervalle fermé

borné $[0, A]$, donc f est bornée sur cet intervalle : il existe M tel que pour tout $x \in [0, A]$, $f(x) \leqslant M$. En prenant $M' = \max(M, \ell+1)$, nous avons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant M'$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.
La fonction n'atteint pas nécessairement ses bornes : regardez $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Correction 653

1. Soit $f(0) = 0$ et c'est fini, on a trouver le point fixe ! Soit $f(0)$ n'est pas nul. Donc $f(0) > 0$ et $0 \in E$. Donc E n'est pas vide.
2. Maintenant E est un partie de $[0, 1]$ non vide donc $\sup E$ existe et est fini. Notons $c = \sup E \in [0, 1]$. Nous allons montrer que c est un point fixe.
3. Soit (x_n) une suite de E telle que $x_n \to c$ et $x_n \leqslant c$. Une telle suite existe d'après les propriétés de $c = \sup E$. Comme $x_n \in E$ alors $x_n < f(x_n)$. Et comme f est croissante $f(x_n) \leqslant f(c)$. Donc pour tout n, $x_n < f(c)$; comme $x_n \to c$ alors à la limite nous avons $c \leqslant f(c)$.
4. Soit (y_n) une suite telle que $y_n \to c$, $y_n \leqslant c$ et telle que $f(y_n) \leqslant y_n$. Une telle suite existe car sinon ℓ ne serait pas égal à $\sup E$. Nous avons $f(c) \leqslant f(y_n) \leqslant y_n$ et donc à la limite $f(c) \leqslant c$.

   Nous concluons donc que $c \leqslant f(c) \leqslant c$, donc $f(c) = c$ et c est un point fixe de f.

Correction 660

1. Soit $x \in [0, 1]$ et $y = f(x) \in [0, 1]$. Alors $f(y) = y$ car $f(f(x)) = f(x)$. Donc $E_f \neq \varnothing$. Nous venons de montrer que $I = f([0, 1])$ est inclus dans E_f.
2. Montrons réciproquement E_f est inclus dans I. Soit $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$ alors $x \in I = f([0, 1])$ (car $x = f(x)$!). Ainsi $E_f = f([0, 1])$. Mais l'image de l'intervalle $[0, 1]$ par la fonction continue f est un intervalle donc E_f est un intervalle.
3. Les fonctions continues qui vérifient $(*)$ sont les fonctions qui vérifient $E_f = f([0, 1])$.

Correction 662 Non, par exemple $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Avec $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. f n'est pas continue (en 0), mais pour tout a, b et pour tout $y \in [f(a), f(b)]$ il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

Correction 669

1. Pour tout $x \in]a, b[$, on a $x \in [a, b]$ donc $f(x) \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$. Par conséquent $\sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ est un majorant de f sur l'intervalle $]a, b[$, donc il est plus grand que le plus petit des majorants : $\sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.
2. f est continue sur un intervalle fermé et borné, donc elle est bornée et elle atteint ses bornes. Soit x_0 le réel où le maximum est atteint : $f(x_0) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.
   - si $x_0 = a$, considérons la suite $a_n = a + 1/n$. Pour $n \geqslant \frac{1}{b-a}$ on a $a_n \in [a, b]$, donc on peut considérer la suite $(f(a_n))_{n \geqslant \frac{1}{b-a}}$. Or a_n tend vers a quand n tend vers $+\infty$, et comme f est continue, ceci implique que $f(a_n)$ tend vers $f(a)$ quand n tend vers $+\infty$. Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(a_n) \leqslant f(x_0)$, ce qui implique que $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$.
   - si $x_0 = b$ on obtient le résultat de manière identique en considérant la suite $b_n = b - 1/n$.
   - si $a < x_0 < b$: $f(x_0)$ est majoré par le sup de f sur $]a, b[$, donc

     $$f(x_0) \leqslant \sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = f(x_0)$$

     donc $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$.
3. Avec la fonction g, on a $\sup_{0<x<1} g(x) = 0$ car $\forall x \in]0, 1[, g(x) = 0$, et $\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} g(x) = 1$ car $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. La propriété démontrée précédemment n'est pas vraie dans notre cas, car la fonction g ne remplit pas la condition essentielle d'être continue.

Correction 672 Soit $x_0 \neq 0$, alors la fonction f est continue en x_0, car elle s'exprime sous la forme d'un quotient de fonctions continues où le dénominateur ne s'annule pas en x_0. Reste à étudier la continuité en 0. Mais

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$

donc f est continue en 0.

Correction 677

1. La fonction en définie sur $\mathbb{R}^*$. Et elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il faut déterminer un éventuel prolongement par continuité en $x = 0$, c'est-à-dire savoir si f a une limite en 0.

$$|f(x)| = |\sin x||\sin 1/x| \leqslant |\sin x|.$$

Donc f a une limite en 0 qui vaut 0. Donc en posant $f(0) = 0$, nous obtenons une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue.

2. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la situation en 0. f est la taux d'accroissement en 0 de la fonction $g(x) = \ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Donc si les objets suivants existent : la limie de f en 0 est égale à la valeur de g' en 0. Calculons g' sur $\mathbb{R}^*$:

$$g'(x) = \big(\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}\big)' = \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

Quand $x \to 0$ alors le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 2, donc $g'(x)$ tend vers 0. Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. En posant $f(0) = 0$ nous obtenons une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$.

3. f est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1+x}{(1-x)(1+x)} == \frac{-1}{(1+x)}.$$

Donc f a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. En -1 la fonction f ne peut être prolongée continuement, car en -1, f n'admet de limite finie.

Correction 680 Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $f(y) = f(2y)$ en prenant $y = x/2$ nous obtenons $f(\frac{1}{2}x) = f(x)$. Puis en prenant $y = \frac{1}{4}x$, nous obtenons $f(\frac{1}{4}x) = f(\frac{1}{2}x) = f(x)$. Par une récurrence facile nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(\frac{1}{2^n}x) = f(x).$$

Notons (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{2^n}x$ alors $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Par la continuité de f en 0 nous savons alors que : $f(u_n) \to f(0)$ quand $n \to +\infty$. Mais $f(u_n) = f(\frac{1}{2^n}x) = f(x)$, donc $(f(u_n))_n$ est une suite constante égale à $f(x)$, et donc la limite de cette suite est $f(x)$! Donc $f(x) = f(0)$. Comme ce raisonnement est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous venons de montrer que f est une fonction constante.

Correction 686

1. Il faut que le dénominateur ne s'annule pas donc $x \neq \frac{5}{2}$. En plus il faut que le terme sous la racine soit positif ou nul, c'est-à-dire $(2 + 3x) \times (5 - 2x) \geqslant 0$, soit $x \in [-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}]$. L'ensemble de définition est donc $[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}[$.
2. Il faut $x^2 - 2x - 5 \geqslant 0$, soit $x \in]-\infty, 1-\sqrt{6}] \cup [1+\sqrt{6}, +\infty[$.
3. Il faut $4x + 3 > 0$ soit $x > -\frac{3}{4}$, l'ensemble de définition étant $]-\frac{3}{4}, +\infty[$.

Correction 690 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$0 \leqslant |f(x)| = \frac{|\cos x|}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1.$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-1, 1]$ donc f est minorée (-1 est un minorant), majorée (1 est un majorant) et $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \leqslant 1$. Comme $f(0) = 1$ on a nécessairement $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \geqslant 1$. Conclusion :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1.$$

Correction 698 1. La fonction f_1 est dérivable en dehors de $x = 0$. Pour savoir si f_1 est dérivable en 0 regardons le taux d'accroissement :

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = x \cos \frac{1}{x}.$$

Mais $x \cos(1/x)$ tend vers 0 (si $x \to 0$) car $|\cos 1/x| \leqslant 1$. Donc le taux d'accroissement tend vers 0. Donc f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0) = 0$.

2. Encore une fois f_2 est dérivable en dehors de 0. Le taux d'accroissement en $x = 0$ est :

$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} \sin \frac{1}{x}$$

Nous savons que $\frac{\sin x}{x} \to 1$ et que $\sin 1/x$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite, donc f_2 n'est pas dérivable en 0.

3. La fonction f_3 s'écrit :

$$f_3(x) = \frac{|x||x-1|}{x-1}.$$

– Donc pour $x \leqslant 1$ on a $f_3(x) = x$, pour $0 \leqslant x < 1$ on $f_3(x) = -x$. Pour $x < 0$ on a $f_3(x) = x$.
– La fonction f_3 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
– La fonction f_3 n'est pas continue en 1, en effet $\lim_{x\to 1+} f_3(x) = +1$ et $\lim_{x\to 1-} f_3(x) = -1$. Donc la fonction n'est pas dérivable en 1.
– La fonction f_3 est continue en 0. Le taux d'accroissement pour $x > 0$ est

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$$

et pour $x < 0$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = +1.$$

Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite en 0 et donc f_3 n'est pas dérivable en 0.

Correction 699 Il faut d'abord que la fonction soit continue en $x = 1$. La limite à gauche est $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{x} = +1$ et à droite $\lim_{x\to 1^-} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$. Donc

$$a + b + 1 = 1.$$

Il faut maintenant que les dérivées à droites et à gauches soient égales : $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 1^+} 2ax + b = 2a + b$. Donc

$$2a + b = \frac{1}{2}.$$

Le seul couple (a, b) solution des deux équations est $(a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2})$.

Correction 700 f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Comme $|\sin 1/x| \leqslant 1$ alors f tend vers 0 quand $x \to 0$. Donc en posant $f(0) = 0$. la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Le taux d'accroissement est
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}.$$
Comme ci-dessus il y a une limite (qui vaut 0) en $x = 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
3. Sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$, Donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc f' n'est pas continue en 0.

Correction 701 1. Selon que $n \equiv 0[4], 1[4], 2[4], 3[4]$ alors $f^{(n)}(x)$ vaut respectivement $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$.

2. La dérivée de $\sin^2 x$ est $2 \sin x \cos x = \sin 2x$. Et donc les dérivées suivantes seront : $2\cos 2x, -4\cos 2x, 8\sin 2x, 16\cos 2x,$... Et selon que $n \equiv 1[4], 2[4], 3[4], 0[4]$, alors $g^{(n)}(x)$ vaut respectivement $2^{n-1}\sin 2x$, $2^{n-1}\cos 2x$, $-2^{n-1}\sin 2x$, $-2^{n-1}\cos 2x$.
3. $\sin(x)^3 + \cos(x)^3 = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x) + \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$ et on dérive...

Correction 709 La limite de f en 0 est 0, donc f est continue en 0. De même le taux d'accroissement de f en 0 est $f(x)/x$ qui tend vers 0. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. En dehors de 0, on a $f'(x) = 2e^{-x^{-2}}x^{-3}$ donc f' est continue en 0.
On continue de la même façon en remarquant que si $f^{(n)}(x) = P(1/x)\exp(-1/x^2)$ où P est un polynôme et $f^{(n)}(0) = 0$. Donc $f^{(n)}(x)$ tend vers 0 si x tend vers 0. Donc $f^{(n)}$ est continue. De plus $f^{(n)}$ est dérivable en 0 car son taux d'accroissement vaut $1/xP(1/x)\exp(-1/x^2)$ qui tend vers 0, donc $f^{(n+1)}(0) = 0$. En dehors de 0 on $f^{(n+1)}(x) = Q(1/x)\exp(-1/x^2)$ où Q est un polynôme. Et on recommence...

Correction 715 $Q_n(t) = (1-t^2)^n$ est un polynôme de degré $2n$, on le dérive n fois, on obtient un polynôme de degré n. -1 et $+1$ sont des racines d'ordre n de Q_n, donc $Q_n(1) = Q'_n(1) = \ldots = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$, même chose en -1. $Q(-1) = 0 = Q(+1)$ donc d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]-1, 1[$ telle que $Q'_n(c) = 0$. Donc $Q'_n(-1) = 0$, $Q'_n(c) = 0$, $Q'_n(-1) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle deux fois (sur $[-1, c]$ et sur $[c, +1]$), on obtient l'existence de racines d_1, d_2 pour Q''_n, auxquelles il faut rajouter -1 et $+1$. On continue ainsi par récurrence. On obtient pour $Q_n^{(n-1)}$, $n+1$ racines : $-1, e_1, \ldots, e_{n-1}, +1$. Nous appliquons le théorème de Rolle n fois. Nous obtenons n racines pour $P_n = Q_n^{(n)}$. Par constructions ces racines sont réelles distinctes (donc simples). Comme un polynôme de degré n a au plus n racines, nous avons obtenu toutes les racines.

Correction 717 1. Par l'absurde on suppose qu'il y a (au moins) quatre racine distinctes pour $P_n(X) = X^n + aX + b$. Notons les $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Par le théorème de Rolle appliqué trois fois (entre x_1 et x_2, entre x_2 et x_3,...) il existe $x'_1 < x'_2 < x'_3$ des racines de P'_n. On applique deux fois Rolle entre x'_1 et x'_2 et entre x'_2 et x'_3. On obtient deux racines distinctes pour P''_n. Or $P''_n = n(n-1)X^{n-2}$ ne peut avoir que 0 comme racines. Donc nous avons obtenu une contradiction.

2. Autre méthode : Le résultat est évident si $n \leqslant 3$. On suppose donc $n \geqslant 3$. Soit P_n l'application $X \mapsto X^n + aX + b$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Alors $P'_n(X) = nX^{n-1} + a$ s'annulle en au plus deux valeurs. Donc P_n est successivement croissante-décroissante-croissante ou bien décroissante-croissante-décroissante. Et donc P_n s'annule au plus trois fois.

Correction 718 Comme f' est dérivable, elle est continue. Comme f s'annulle $n+1$ fois, f' change de signe (au moins) $n+1$ fois donc s'annulle (au moins) n fois. On peut bien sûr recommencer, le résultat en découle.

Correction 721 $f(\beta)-f(\alpha)=f'(c)(\beta-\alpha)$. Donc $a(\beta^2-\alpha^2)+b(\beta-\alpha)=(2ac+b)(\beta-\alpha)$. Donc $c=\frac{\alpha+\beta}{2}$.
Géométriquement, cela signifie que la droite qui passe par $(\alpha,f(\alpha))$ et $(\beta,f(\beta))$, est parallèle à la tangente qui passe en $(\frac{\alpha+\beta}{2},f(\frac{\alpha+\beta}{2}))$.

Correction 724

1. Soit $g(t)=\ln t$. Appliquons le théorème des accroissement finis sur $[x,y]$. Il existe $c\in]x,y[$, $g(y)-g(x)=g'(c)(y-x)$. Soit $\ln y-\ln x=\frac{1}{c}(y-x)$. Donc $\frac{\ln y-\ln x}{y-x}=\frac{1}{c}$. Or $x<c<y$ donc $\frac{1}{y}<\frac{1}{c}frac1x$. Ce qui donne les inégalités recherchées.
2. $f'(\alpha)=\frac{x-y}{\alpha x+(1-\alpha)y}-\ln x+\ln y$. Et $f''(\alpha)=-\frac{(x-y)^2}{(\alpha x+(1-\alpha)y)^2}$. Comme f'' est négative alors f' est décroissante sur $[0,1]$. Or $f'(0)=\frac{x-y-y(\ln x-\ln y)}{y}>0$ d'après la première question et de même $f'(1)<0$. par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c\in[x,y]$ tel que $f'(c)=0$. Maintenant f' est positive sur $[0,c]$ et négative sur $[c,1]$. Donc f est croissante sur $[0,c]$ et décroissante sur $[c,1]$. Or $f(0)=0$ et $f(1)=0$ donc pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)\geqslant 0$. Cela prouve l'inégalité demandée.
3. Géométriquement nous avons prouver que la fonction $\ln$ est concave, c'est-à-dire que la corde (le segment qui va de $(x,f(x))$ à $(y,f(y))$ est sous la courbe d'équation $y=f(x)$.

Correction 725 Le théorème des accroissement finis donne : $\ln(n+1)-\ln(n)=\frac{1}{c_n}(n+1-n)=\frac{1}{c_n}$, avec $c_n\in[n,n+1]$. Or $c_n\geqslant n$ donc $\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{c_n}$. Donc :

$$S_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=1}^n\frac{1}{c_k}=\sum_{k=1}^n\ln(k+1)-\ln(k)=\ln(n+1).$$

La dernière égalité s'obtient car la somme est téléscopique. Donc $S_n\geqslant\ln(n+1)$, donc $S_n\to+\infty$.

Correction 727 Pour simplifier nous supposons $x>0$.

1. Appliquer le théorème des accroissements finis ne va pas être suffisant. En effet, soit $f(x)=e^x-1-x$. Alors il existe $c\in]0,x[$ tel que $f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)$. Soit $f(x)=(e^c-1)x$. Soit maintenant $g(x)=e^x-1$ alors, par le théorème des accroissements finis sur $[0,c]$ il existe $d\in]0,c[$ tel que $g(c)-g(0)=g'(d)(c-0)$, soit $e^c-1=e^dc$. Donc $e^x-1-x=f(x)=(e^c-1)x=e^dcx$. Comme $d\leqslant c\leqslant x$, alors $e^x-1-x\leqslant e^xx^2$.
Cela donne une inégalité, mais il manque un facteur $1/2$.
2. Nous allons obtenir l'inégalité par application du théorème de Rolle. Soit maintenant $f(t)=e^t-1-t-k\frac{t^2}{2}$. Nous avons $f(0)=0$, $x>0$ étant fixé, nous choisisons k tel que $f(x)=0$, (un tel k existe car $e^x-1-x>0$ et $x^2>0$). Comme $f(0)=0=f(x)$ alors par Rolle il existe $c\in]0,x[$ tel que $f'(c)=0$. Mais $f'(t)=e^t-t-kt$, donc $f'(0)=0$. Maintenant $f'(0)=0=f'(c)$ donc il existe (par Rolle toujours !) $d\in]0,c[$ tel que $f''(d)=0$. Or $f''(t)=e^t-k$, donc $f''(d)=0$ donne $k=e^d$. Ainsi $f(x)=0$ devient $e^x-1-x=e^d\frac{x^2}{2}$. Comme $d\leqslant x$ alors $e^x-1-x\leqslant e^x\frac{x^2}{2}$.

Correction 728 $f'(x)=2(1-k)^3x+3(1+k)x^2$, $f''(x)=2(1-k)^2+6(1+k)x$. Nous avons $f'(0)=0$ et $f''(0)=2(1-k)^3$. Donc si $k\neq 1$ alors 0 est un extremum local. Si $k=1$ alors $f(x)=2x^3$ et 0 n'est pas un extremum local.

Correction 733 $f'(x)=4x^3-3x^2=x^2(4x-3)$ donc les extremums sont dans $\{0,\frac{3}{4}\}$. Comme $f''(x)=12x^2-6x=6x(2x-1)$. Alors f'' ne s'annule pas en $\frac{3}{4}$ donc $\frac{3}{4}$ donne un extremum (minimum absolu). Par contre $f''(0)=0$ et $f'''(0)\neq 0$ donc 0 est un point d'inflexion qui n'est pas un extremum (même pas relatif, pensez à x^3).

Correction 734 1. $f'_\lambda(x) = \lambda^x + 2x$, $f''_\lambda(x) = \lambda e^x + 2$. Les points d'inflexions sont les racines de f''_λ, donc si $\lambda \geqslant 0$ il n'y a pas de point d'inflexion, si $\lambda < 0$ alors il y a un point d'inflexion en $x_\lambda = \ln(-2/\lambda)$.

2. Si $\lambda \geqslant 0$ alors f''_λ est toujours strictement positive, donc f'_λ est strictement croissante, en $-\infty$ f'_λ est négative, en $+\infty$ f'_λ est positive donc il existe un unique réel y_λ tel que $f'_\lambda(y_\lambda) = 0$. f_λ est décroissante sur $]-\infty, y_\lambda]$ et croissante sur $[y_\lambda, +\infty[$. Et en y_λ nous avons un extremum absolu.
3. Nous supposons $\lambda < 0$. Alors f''_λ s'annule seulement en x_λ. f'_λ est croissante sur $]-\infty, x_\lambda]$ et décroissante sur $[x_\lambda, +\infty[$. Donc f'_λ est des racines si et seulement si $f'(x_\lambda) \geqslant 0$. Or $f'(x_\lambda) = -2 + 2x_\lambda$.
   (a) Si $\lambda = -2/e$ alors $f'_\lambda(x_\lambda) = 0$. comme $f''_\lambda(x_\lambda) = 0$. et f'''_λ ne s'annule pas. Alors x_λ n'est pas un extremum local.
   (b) Si $\lambda > -2/e$ alors $f'_\lambda(x_\lambda) < 0$ donc f'_λ est négative donc f est strictement décroissante. Il n'y a pas d'extremum local.
   (c) Si $-2/e < \lambda < 0$ alors $f'_\lambda(x_\lambda) > 0$. Donc f'_λ s'annule en deux points, une fois sur $]-\infty, x_\lambda[$ et une sur $]x_\lambda, +\infty[$. Ce sont des extremums locaux (minimum et maximum respectivement).

Correction 738 1. Le théorème de Rolle dit que si $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

2. (a) Supposons par l'absurde, qu'il existe $x_0 \in]a, b]$ tel que $g(x_0) = g(a)$. Alors en appliquant le théorème de Rolle à la restriction de g à l'intervalle $[a, x_0]$ (les hypothèses étant clairement vérifiées), on en déduit qu'il existe $c \in]a, x_0[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui contredit les hypothèses faites sur g. Par conséquent on a démontré que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b]$.
   (b) D'après la question précédente, on a en particulier $g(b) \neq g(a)$ et donc p est un nombre réel bien défini et $h = f - p \cdot g$ est alors une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Un calcul simple montre que $h(a) = h(b)$. D'après le théorème de Rolle il en résulte qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$. Ce qui implique la relation requise.
   (c) Pour chaque $x \in]a, b[$, on peut appliquer la question 2.b aux restrictions de f et g à l'intervalle $[x, b]$, on en déduit qu'il existe un point $c(x) \in]x, b[$, dépendant de x tel que
   $$(*) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$
   Alors, comme $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$ et $\lim_{x \to b^-} c(x) = b$, on en déduit en passant à la limite dans $(*)$ que
   $$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$
   Ce résultat est connu sous le nom de "Théorème de l'Hôpital".
3. Considérons les deux fonctions $f(x) = \operatorname{Arccos} x$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ pour $x \in [0, 1]$. Il est clair que ces fonctions sont continues sur $[0, 1]$ et dérivables sur $]0, 1[$ et que $f'(x) = -1/\sqrt{x^2 - 1}$ et que $g'(x) = -x/\sqrt{x^2 - 1} \neq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$. En appliquant les résultats de la question 2, on en déduit que
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\operatorname{Arccos} x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1.$$

Correction 739 1. (a) Il est clair que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ puisque c'est une fonction rationnelle sans pôle dans cet intervalle. De plus d'après la formule de la dérivée d'un quotient, on obtient

$$f'(x) = \frac{n(x^n - 1)}{(1+x)^{n+1}}, \ x \geqslant 0.$$

(b) Il résulte clairement de l'expression précédente que $f'(x)$ est du signe de $x^{n+1} - 1$ sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent on obtient : $f'(x) \leqslant 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 1$. Il en résulte que f est décroissante sur $[0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$ et par suite f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^+$ au point 1 et ce minimum vaut $f(1) = 2^{1-n}$.

2. (a) Il résulte de la question 1.b que $f(x) \geqslant f(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et donc

$$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

(b) En appliquant l'inégalité précédente avec $x = b/a$, on en déduit immédiatement l'inégalité requise.

Correction 740 1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions dérivables, et sur $\mathbb{R}_-^*$ car elle est nulle sur cet intervalle ; étudions donc la dérivabilité en 0.
On a

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \begin{cases} e^{1/t}/t & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

or $e^{1/t}/t$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs négatives. Donc f est dérivable à gauche et à droite en 0 et ces dérivées sont identiques, donc f est dérivable et $f'(0) = 0$.

2. On a

$$f'(t) = \begin{cases} -e^{1/t}/t^2 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

donc le taux d'accroissement de f' au voisinage de 0 est

$$\frac{f'(t) - f'(0)}{t} = \begin{cases} -e^{1/t}/t^3 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

et il tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc f admet une dérivée seconde en 0, et $f''(0) = 0$.

3. (a) On a déjà trouvé que $f'(t) = -e^{1/t}/t^2$, donc $f'(t) = P_1(t)/t^2 e^{1/t}$ si on pose $P_1(t) = 1$. Par ailleurs, $f''(t) = e^{1/t}/t^4 + e^{1/t}(-2/t^3) = \frac{1-2t}{t^4}e^{1/t}$ donc la formule est vraie pour $n = 2$ en posant $P_2(t) = 1 - 2t$.

(b) Supposons que la formule est vraie au rang n. Alors $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}$ d'où

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{P_n'(t)t^{2n} - P_n(t)(2n)t^{2n-1}}{t^{4n}}e^{1/t} + \frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}(-1/t^2) \\ &= \frac{P_n'(t)t^2 - (2nt+1)P_n(t)}{t^{2(n+1)}}e^{1/t} \end{aligned}$$

donc la formule est vraie au rang $n+1$ avec

$$P_{n+1}(t) = P_n'(t)t^2 - (2nt+1)P_n(t).$$

4. Sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ f est indéfiniment dérivable, donc il suffit d'étudier ce qui se passe en 0.

   Montrons par récurrence que f est indéfiniment dérivable en 0, et que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} = 0$. On sait que c'est vrai au rang 1. Supposons que f est n-fois dérivable, et que $f^{(n)} = 0$. Alors le taux d'accroissement de $f^{(n)}$ en 0 est :

$$\frac{f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)}{t} = \begin{cases} P_n(t)e^{1/t}/t^{2n} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

   et sa limite est 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0, et $f^{(n+1)}(0) = 0$. Donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $n+1$.

   Par conséquent, f est de classe C^∞.

Correction 746 1. Soit $f(a) = \operatorname{Arcsin} a - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ sur $]0,1[$, $f'(a) \geqslant 0$ (faite le calcul !) donc f est strictement croissante et $f(0) = 0$ donc $f(a) > 0$ pout tout $a \in]0,1[$.

2. $g(a) = \operatorname{Arctan} a - \frac{a}{1+a^2}$ alors $g'(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1+a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{2a^2}{(1+a^2)^2} > 0$ Donc g est strictement croissante et $g(0) = 0$ donc g est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

Correction 747 1. $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$ donc $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$. Donc $\sin \arccos x = \pm\sqrt{1-\cos^2 \arccos x} = \pm\sqrt{1-x^2}$ et comme $\arccos x \geqslant 0$ on a $\sin \arccos x = +\sqrt{1-x^2}$.

2. De la même manière $\cos \arcsin x = +\sqrt{1-x^2}$.

3. On utilise $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1-\sin^2 x}$ ce qui permet d'avoir $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{1+\tan^2 x}$. Ensuite on calcule $\tan 3y$ en utilisant deux fois la formule de $\tan(a+b)$ on trouve $\tan 3y = \frac{3\tan y - (\tan y)^3}{1-3(\tan y)^2}$. Cela permet d'avoir

$$\sin(3\arctan x) = 4\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Correction 749 1. En prenant le sinus de l'équation $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin} \frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin} \frac{3}{5}$ on obtient $x = \sin(\operatorname{Arcsin} \frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin} \frac{3}{5})$, donc $x = \frac{2}{5}\cos \operatorname{Arcsin} \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cos \operatorname{Arcsin} \frac{2}{5}$. En utilisant la formule $\cos \arcsin x = +\sqrt{1-x^2}$. On obtient $x = \frac{2}{5}\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{8}{25} + \frac{3\sqrt{21}}{25}$.

2. En prenant le cosinus de l'équation $\operatorname{Arccos} x = 2\operatorname{Arccos} \frac{3}{4}$ on obtient $x = \cos(2\operatorname{Arccos} \frac{3}{4})$ on utilise la formule $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$ et on arrive à : $x = 2(\frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{1}{8}$.

3. En prenant la tangente et à l'aide de $\tan(a+b) = \cdots$ on obtient : $x = \tan 2\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$.

Correction 752 1. Soit f la fonction sur $[-1,1]$ définie par $f(x) = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x$ alors $f'(x) = 0$ pour $x \in]-1,1[$ donc f est une fonction constante sur $[-1,1]$ (car continue aux extrémités). Or $f(0) = \frac{\pi}{2}$ donc pour tout $x \in [-1,1]$,$f(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. Soit $g(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$, la fonction est définie sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. On a $g'(x) = 0$ donc g est constante sur chacun des ses intervalle de définition. $g(x) = c_1$ sur $]-\infty,0[$ et $g(x) = c_2$ sur $]0,+\infty[$. En calculant $g(1)$ et $g(-1)$ on obtient $c_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $c_2 = +\frac{\pi}{2}$.

Correction 758 1. Si f existe alors pour $x = 1$ on a $f(\operatorname{ch} 1) = e$ et pour $x = -1$ on $f(\operatorname{ch} -1) = f(\operatorname{ch} 1) = 1/e$. Une fonction ne peut prendre deux valeurs différentes au même point (ici $t = \operatorname{ch} 1$).

2. Notons $X = e^x$, l'équation devient
$$f(X) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(X + \frac{1}{X}).$$
Comme la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, alors l'unique façon de définir f sur $]0, +\infty[$ est par la formule $f(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$.
3. Comme e^x est toujours non nul, alors f peut prendre n'importe quelle valeur en 0. $f(0) = c \in \mathbb{R}$ et $f(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$ pour $t > 0$. Il y a une infinité de solutions. Mais aucune de ces solutions n'est continue car la limite de $f(t)$ quand $t > 0$ et $t \to 0$ est $+\infty$.

Correction 759 Réponses :

1. $+\infty$;
2. $\ln 2$.

Correction 764 Soit $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

1. $$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = \frac{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}{2} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin(y + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos(y)}.$$
2. De même $\operatorname{sh} x = \tan y$.
3. $\operatorname{th} x = \sin y$.

Correction 773 1. Soit $f(x) = \ln(1+x) - x + x^2/2$ alors $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$. Donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et comme $f(0) = 0$ alors $f(x) > f(0) = 0$ pour $x > 0$. Ce qui donne l'inégalité recherchée.

2. De même avec $g(x) = e^x - x - 1$, $g'(x) = e^x - 1$. Sur $[0, +\infty[$ $g'(x) \geqslant 0$ et g est croissante sur $]-\infty, 0]$, $g'(x) \leqslant 0$ et g est décroissante. Comme $g(0) = 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \geqslant 0$.

Correction 776
$$x^y = y^x \Leftrightarrow e^{y\ln x} = e^{x\ln y} \Leftrightarrow y\ln x = x\ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$$
(la fonction exponentielle est bijective). Etudions la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $[1, +\infty[$.
$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0,$$
donc f est croissante sur $[1, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$. Donc pour $z \in]0, f(e) = 1/e[$, l'équation $f(x) = z$ a exactement deux solutions, une dans $]1, e[$ et une dans $]e, +\infty[$.
Revenons à l'équation $x^y = y^x$ équivalente à $f(x) = f(y)$. Prenons y un entier, si $y = 1$ alors $f(y) = z = 0$ on doit donc résoude $f(x) = 0$ alors $x = 1$; si $y = 2$ alors il faut résoudre l'équation $f(x) = \frac{\ln 2}{2} \in]0, 1/e[$. Alors d'après l'étude précédente, il existe deux solutions une sur $]0, e[$ qui est $x = 2$ (!) et une sur $]e, +\infty[$ qui est 4, en effet $\frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$. Soit $2^2 = 2^2$ et $2^4 = 4^2$.
Si $y \geqslant 3$ alors $y > e$ donc il y a une solution x de l'équation $g(y) = g(y)$ dans $]e, +\infty$ qui $x = y$, et une solution dans l'intervalle $]1, e[$. Mais comme x est un entier alors $x = 2$, cas que nous avons déjà étudié.
Conclusion les couples d'entiers qui vérifient l'équation $x^y = y^x$ sont les couples $(x, y = x)$ et les couples $(2, 4)$ et $(4, 2)$.

Correction 805 $S = \dfrac{\pi}{(1-\lambda^2)^{3/2}}$.

Correction 806 $L = \dfrac{3\pi a}{2}$, $\quad A_1 = \dfrac{5\pi - 9\sqrt{3}}{32}a^2$, $\quad A_2 = \dfrac{5\pi + 18\sqrt{3}}{32}a^2$.

Correction 807 $A = 4\pi^2 Rr$, $\quad V = 2\pi^2 Rr^2$.

Correction 808 $L = 8R$, $\quad A = 3\pi R^2$, $\quad V_1 = 5\pi^2 R^3$, $\quad V_2 = 6\pi^3 R^3$, $\quad A_1 = \dfrac{64\pi R^2}{3}$, $\quad A_2 = 16\pi^2 R^2$.

Correction 809 $L = 8(n+1)r = 8\dfrac{n+1}{n}R$, $\quad A = \pi(n+1)(n+2)r^2 = \pi\dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2}R^2$, $\quad S = \dfrac{128\pi R^2}{5}$, $\quad V = \dfrac{64\pi R^3}{3}$.

Correction 810 $L = 4R\big(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\big)$.

Correction 824 Résultats valables sur chaque intervalle du domaine de définition.

1. $\frac{1}{x^2+a^2}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + k$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + k$.
3. $\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$. Primitives : $\frac{x^2}{2} + \ln(x^2-4)^2 + k$.
4. $\frac{4x}{(x-2)^2} = \frac{4}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}$. Primitives : $4\ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + k$.
5. $\frac{1}{x^2+x+1}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + k$.
6. $\frac{1}{(t^2+2t-1)^2} = \frac{1}{8(t+1+\sqrt{2})^2} + \frac{\sqrt{2}}{16(t+1+\sqrt{2})} + \frac{1}{8(t+1-\sqrt{2})^2} + \frac{-\sqrt{2}}{16(t+1-\sqrt{2})}$.
   Primitives : $-\frac{t+1}{4(t^2+2t-1)} + \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{t+1+\sqrt{2}}{t+1-\sqrt{2}}\right| + k$.
7. $\frac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$ est un élément simple.
   Primitives : $-\frac{3}{2(t^2-2t+10)} + \frac{2(t-1)}{9(t^2-2t+10)} + \frac{2}{27}\arctan(\frac{t-1}{3}) + k$.
8. $\frac{3t+1}{t^2-2t+10}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{3}{2}\ln(t^2-2t+10) + \frac{4}{3}\arctan(\frac{t-1}{3}) + k$.
9. $\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{3(t+1)} - \frac{t-2}{3(t^2-t+1)}$. Primitives : $\frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}) + k$.
10. $\frac{x^3+2}{(x+1)^2} = x - 2 + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$. Primitives : $\frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + k$.
11. $\frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x-2)} + \frac{3}{2(x-2)^2}$. Primitives : $\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{3}{2(x-2)} + k$.
12. $\frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2} = \frac{1}{2}(x^3 - x^2 + 3) - \frac{3}{2x}$. Primitives : $\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{2} - \frac{3}{2}\ln|x| + k$.
13. $\frac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)} = \frac{1}{4^3(x+1)} + \frac{1-x}{4^3(x^2+3)} + \frac{1-x}{4^2(x^2+3)^2} - \frac{3(1-x)}{4(x^2+3)^3}$.
    Primitives : $-\frac{x+3}{4^2(x^2+3)^2} - \frac{2x-3}{3.2^5(x^2+3)} - \frac{1}{2^7}\ln(x^2+3) - \frac{1}{3\sqrt{3}\,2^6}\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{4^3}\ln|x+1| + k$.
14. $\frac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2} = x^2 - 2 - \frac{1}{x} + \frac{x+4}{x^2+1} + \frac{x-6}{(x^2+1)^2}$.
    Primitives : $\frac{x^3}{3} - 2x - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \arctan x - \frac{6x+1}{2(x^2+1)} + k$.
15. $\frac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x^2+1}$.
    Primitives : $-\frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + 3\ln|x-1| - \arctan x + k$.

Correction 825

1. $\frac{1}{x^2+2}$ est un élément simple. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Décomposition : $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x-1}$. Intégrale : $\int_{-1/2}^{1/2}\frac{dx}{1-x^2} = \ln 3$.

3. Pas besoin de décomposer la fraction rationnelle, car $2x+1$ est la dérivée de x^2+x-3 ! $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = \ln 3$.
4. On peut évidemment décomposer la fraction rationnelle en éléments simples : $\frac{x}{x^4+16} = \frac{\sqrt{2}/8}{x^2-2x\sqrt{2}+4} - \frac{\sqrt{2}/8}{x^2+2x\sqrt{2}+4}$, mais il est bien plus simple de faire le changement de variables $x^2 = u$. Alors $\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{du}{u^2+16} = \frac{\pi}{32}$.
5. La décomposition de $\frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}$ est $x+18+\frac{163}{x-4}+\frac{507}{(x-4)^2}+\frac{565}{(x-4)^3}$; les primitives sont $\frac{x^2}{2}+18x-\frac{1014x-3491}{2(x-4)^2}+163\ln|x-4|+C$. Enfin, $\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\,dx = \frac{5565}{32}-326\ln 2$.
6. Décomposition : $\frac{1}{x^3-7x+6} = \frac{1}{20(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{5(x-2)}$. Primitives : $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5}\right| + C$, d'où $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6} = \frac{1}{10}\ln(27/4)$.
7. Décomposition : $\frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8} = 2x+3+\frac{2}{x+2}+\frac{3x-1}{x^2-2x+4}$. Les primitives sont : $x^2+3x+\ln(x+2)^2+\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+4)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$. Intégrale : $\int_{-1}^1 \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,dx = 6+\frac{7\ln 3-3\ln 7}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}$.
8. Décomposition : $\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$. Primitives : $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\arctan x + C$, d'où $\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx = \ln\frac{3}{2}+2\arctan\frac{1}{7}$.
9. La décomposition est $\frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2} = 1 + \frac{4/3}{(x-1)^2} + \frac{11/9}{x-1} - \frac{11/9}{x+2}$. On trouve alors $\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\,dx = \frac{5}{3}-\frac{22}{9}\ln 2$.
10. La décomposition de $\frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}$ est $\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^2+2}-\frac{6}{(x^2+2)^2}-\frac{12x-16}{(x^2+2)^3}$; les primitives sont $-\frac{1}{x^3}+\frac{2x+3}{(x^2+2)^2}+\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. Enfin $\int_1^2 \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}\,dx = \frac{37}{72}+2\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
11. Décomposition de la fraction rationnelle : $\frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4} = \frac{2x+3}{x^2+1} - \frac{2x+5}{x^2+4}$. Primitives : $\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+4}\right| + 3\arctan x - \frac{5}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$. Alors $\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx = \ln\left|\frac{a^2+1}{a^2+4}\right| + 3\arctan a - \frac{5}{2}\arctan\frac{a}{2} + 2\ln 2$. Enfin $\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{4}+2\ln 2$.
12. Pour factoriser le dénominateur, penser à faire $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2$; on trouve alors $\frac{1}{x^4+1} = \frac{(x\sqrt{2}+2)/4}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{(x\sqrt{2}-2)/4}{x^2-x\sqrt{2}+1}$. Les primitives s'écrivent
$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\arctan(x\sqrt{2}+1)+\arctan(x\sqrt{2}-1)\Big) + C$$
ce qui donne $\int_0^2 \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{33+20\sqrt{2}}{17} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\pi - \arctan\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big)$.

Correction 832

1. Changement de variable $u = \sin^2 x$ (ou d'abord $u = \sin x$) ; $e^{\sin^2 x} + C$.
2. Deux méthodes : changement de variable $u = \sin t$ (ou $u = \sinh t$), ou linéarisation.
$\frac{1}{15}(15\sin t - 10\sin^3 t + 3\sin^5 t) + C$ ou $\frac{1}{80}\sin 5t + \frac{5}{48}\sin 3t + \frac{5}{8}\sin t + C$;
$\sinh t + \frac{1}{3}\sinh^3 t + C$ ou $\frac{1}{12}\sinh 3t + \frac{3}{4}\sinh t + C$;
$\frac{1}{32}(\sin 4t + 8\sin 2t + 12t) + C$; $\frac{1}{32}(\sinh 4t - 8\sinh 2t + 12t) + C$.
3. Intégrations par parties : $(x^3-3x^2+6x-6)e^x + C$.
4. Intégration par parties : $x\ln x - x + C$; $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$; $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.
5. Intégrations par parties : $\frac{1}{2}(\sinh t\sin t - \cosh t\cos t) + C$.
6. Changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$; $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$ sur chaque intervalle…

7. Changement de variable $x = a\sin u$; $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$.
8. Changement de variable $u = e^x$; $\frac{2}{3}\sqrt{e^x + 1}(e^x - 2) + C$.
9. Intégrations par parties : $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C$; $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(-b\cos bx + a\sin bx) + C$.
10. Changement de variable $t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$; $2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C$.
11. Changement de variable $t = \arcsin x$; $\frac{1}{2}(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}) + C$.
12. Changements de variable $u = \tan\frac{x}{2}$, $t = 1+u$; $\arctan(\tan\frac{x}{2}+1)+C$ sur chaque intervalle... Mais, au fait, ne cherchait-on pas une primitive *sur* $\mathbf{R}$?
13. Changement de variable $x^3 = u^2$; $\frac{2}{3}\arcsin\sqrt{\frac{x^3}{a^3}} + C$.
14. Multiplier et diviser par $\cosh x - \sinh x$, ou passer en e^x ; $\frac{x}{2} + \frac{\sinh 2x}{4} - \frac{\cosh 2x}{4} + C$ ou $\frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$.

Correction 847 1. On cherche une solution particulière de (E), de la forme $y(x) = ax$ pour $x \in]0, \infty[$. Alors en injectant $y(x)$ dans (E) on a

$$a - \frac{ax}{x} - a^2x^2 = -9x^2$$

donc $a^2 = 9$. On prend donc $y_0(x) = 3x$ comme solution particulière de (E) définie sur $]0, \infty[$.

2. On fait le changement de fonction inconnue suivant : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ où z est une fonction définie sur $]0, \infty[$ à trouver. Ici $y_0(x) = 3x$ donc $y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}$. On calcule les dérivées et le carré de $y(x)$ pour l'injecter dans (E) : On a

$$y'(x) = 3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} \text{ et } y^2(x) = 9x^2 - \frac{6x}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)},$$

donc en injectant dans (E) on a

$$3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} - 3 + \frac{1}{xz(x)} - 9x^2 + \frac{6x}{z(x)} - \frac{1}{z^2(x)} = 9x^2,$$

d'où en simplifiant et en arrangeant on a :

$$(E1) \qquad z'(x) + \big(6x + \frac{1}{x}\big)z(x) = 1.$$

Correction 851 Les primitives de la fonction $a(x) = 2x$ sont les fonctions $A(x) = x^2/2 + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante réelle quelconque. Donc les solutions de l'équation homogène associée à E sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ du type : $y(x) = ce^{-x^2}$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire. On cherche maintenant une solution particulière de E sous la forme $y_p(x) = c(x)e^{-x^2}$ (méthode de la variation de la constante). On a :
$y_p'(x) + 2xy_p(x) = c'(x)e^{-x^2}$. Donc y_p est solution de E si et seulement si : $c'(x) = xe^{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On choisit la fonction c parmi les primitives de la fonction xe^{x^2}, par exemple : $c(x) = 1/2e^{x^2}$. Donc la fonction y_p telle que $y_p(x) = 1/2e^{x^2}e^{-x^2} = 1/2$ est solution de E.
Par conséquent les solutions de E sont toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}\, c \in \mathbb{R}.$$

Pour y solution de E_1, la condition $y(0) = 1$ équivaut à : $c = 1/2$.

Correction 863 $y'' - 3y' + 2y = e^x$. Le polynôme caractéristique est $f(r) = (r-1)(r-2)$ et les solutions de l'équation homogène sont donc toutes les fonctions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^x$, on est dans la situation $(\imath\imath)$ la condition $(*)$ sur P est : $P'' - P' = 1$, et $P(x) = -x$ convient. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2 e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction 864 $y'' - y = -6\cos x + 2x \sin x$. Ici $f(r) = (r-1)(r+1)$ et l'équation homogène a pour solutions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On remarque que la fonction $3\cos x$ vérifie l'équation : $y'' - y = -6\cos x$, il nous reste donc à chercher une solution y_1 de l'équation $y'' - y = 2x\sin x$, car $y_p(x) = 3\cos x + y_1(x)$ sera une solution de l'équation considérée. Pour cela, on remarque que $2x \sin x = \mathrm{Im}(2xe^{ix})$ et on utilise la méthode décrite plus haut pour trouver une solution z_1 de l'équation : $y'' - y = 2xe^{ix}$. On cherche z_1 sous la forme $P(x)e^{ix}$ où P est un polynôme de degré 1 car $f(i) = -2 \neq 0$. On a $f'(i) = 2i$, la condition $(*)$ sur P est donc : $2iP'(x) - 2P(x) = 2x$ ce qui donne après identification $P(x) = -x - i$. Alors $y_1(x) = \mathrm{Im}((-x+i)e^{ix}) = -x\sin x - \cos x$. Les solutions sont par conséquent les fonctions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2\cos x - x \sin x \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Autre méthode pour trouver une solution de $y'' - y = 2x\sin x$: On la cherche de la forme $y_1(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x$ où A, B sont des polynômes de degré 1 car i n'est pas racine de l'équation caractéristique (*danger* : pour un second membre du type $Q(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}$ la discussion porte sur $\alpha + i\beta$ et non sur α ou β...). On calcule y_1', y_1'' et on applique l'équation étudiée à y_1 ...on obtient la condition :

$$(A'' - A - 2B')\sin x + (B'' - B - 2A') = 2x\sin x$$

qui sera réalisée si : $\begin{cases} A'' - A - 2B' = 2x \\ B'' - B - 2A' = 0 \end{cases}$.
On écrit : $A(x) = ax + b$ et $B(x) = cx + d$, après identification on obtient : $a = d = -1$, $b = c = 0$, ce qui détermine y_1.

Correction 865 $4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}$. L'équation caractéristique a 2 racines complexes $r_1 = -1/2 + i$ et $r_2 = \overline{r_1}$ et les solutions de l'équation homogène sont :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

On a $\sin x e^{-x/2} = \mathrm{Im}(e^{(-1/2+i)x})$, on commence donc par chercher une solution z_p de l'équation avec le nouveau second membre $e^{(-1/2+i)x}$.Comme $-1/2+i$ est racine de l'équation caractéristique, on cherchera $z_p(x) = P(x)e^{(-1/2+i)x}$ avec P de degré 1. Par conséquent la condition $(*)$ sur P :

$$4P'' + f'(-1/2+i)P' + f(-1/2+i)P = 1$$

s'écrit ici : $8iP' = 1$ ($P'' = 0$, $f(-1/2+i) = 0$ et $f'(-1/2+i) = 8i$), on peut donc prendre $P(x) = -i/8x$ et $z_p(x) = -i/8xe^{(-1/2+i)x}$, par conséquent sa partie imaginaire $y_p(x) = \mathrm{Im}(-i/8xe^{(-1/2+i)x}) = 1/8x\sin xe^{-x/2}$ est une solution de notre équation. Les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1 \cos x + (c_2 + 1/8x)\sin x) \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction 866 1. Le polynôme caractéristique associé à E est : $p(x) = x^2 + 2x + 4$; son discriminant est $\Delta = -12$ et il a pour racines les 2 nombres complexes $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :

$$y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x)$$

obtenues lorsque a, b décrivent $\mathbb{R}$.

2. Le second membre est de la forme $e^{\lambda x}Q(x)$ avec $\lambda = 1$ et $Q(x) = x$. On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $y_p(x) = R(x)e^x$ avec R polynôme de degré égal à celui de Q puisque $p(1) \neq 0$. On pose donc $R(x) = ax + b$. On a

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax + 7b + 4a)e^x.$$

Donc y_p est solution si et seulement si $7ax + 7a + 4b = x$. On trouve après identification des coefficients :

$$a = \frac{1}{7} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{-4}{49}.$$

La fonction $y_p(x) = \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x$ est donc solution de E et la forme générale des solutions de E est :

$$y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x) + \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x \ ; \ a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Soit h une solution de E. Les conditions $h(0) = 1$, $h(1) = 0$ sont réalisées ssi

$$a = \frac{53}{49} \qquad \text{et} \qquad b = -\frac{53\cos\sqrt{3} + 3e^2}{49\sin\sqrt{3}}.$$

4. (a) On a : $g'(x) = e^x f'(e^x)$ et $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^{2x}f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \log e^x = xe^x$$

donc g est solution de E.

(b) Réciproquement pour $f(t) = g(\log t)$ où g est une solution de E on montre que f est 2 fois dérivable et vérifie l'équation donnée en 4. Donc les fonctions f recherchées sont de la forme :

$$\frac{1}{t}(a\cos(\sqrt{3}\log t) + b\sin(\sqrt{3}\log t)) + \frac{t}{7}(\log t - \frac{4}{7}) \ ; \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Correction 872 1. L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ a une racine (double) $r = 2$ donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{2x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Pour $d(x) = e^{-2x}$ on peut chercher une solution particulière de la forme : $y_1(x) = ae^{-2x}$ car -2 n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $y_1'(x) = -2e^{-2x}$ et $y_1''(x) = 4ae^{-2x}$. Par conséquent y_1 est solution si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (4a - 4(-2a) + 4a)e^{-2x} = e^{-2x}$$

donc si et seulement si $a = \frac{1}{16}$.

Pour $d(x) = e^{2x}$ on cherche une solution de la forme $y_2(x) = ax^2e^{2x}$, car 2 est racine double de l'équation caractéristique. On a $y_2'(x) = (2ax + 2ax^2)e^{2x}$ et $y_2''(x) = (2a + 4ax + 4ax + 4ax^2)e^{2x} = (4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x}$. Alors y_2 est solution si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (4ax^2 + 8ax + 2a - 4(2ax + 2ax^2) + 4ax^2)e^{2x} = e^{2x}$$

donc si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

3. On déduit du principe de superposition que la fonction
$$y_p(x) = \frac{1}{4}(y_1(x) + y_2(x)) = \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2e^{2x}$$
est solution de l'équation pour le second membre donné dans cette question, et la forme générale des solutions est alors :
$$y(x) = (c_1x + c_2)e^{2x} + \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2e^{2x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction 880 Réponse : $(\lambda x + \mu)\, e^{-x} + \frac{e^x}{25}\,[(3x-4)\cos x - (4x-2)\sin x] + (\sin x - x\cos x)\, e^{-x}$.

Correction 881 Réponse : $\frac{1}{2}(-x\cos x + \sin x) + \lambda \cos x + \mu \sinh x$.

Correction 884 Réponse : $x \to \frac{\lambda x + \mu}{\sqrt{1+x^2}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Correction 885 Réponse : $x \to \lambda x \sinh x + \mu x \cosh x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Correction 886

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet :
   (a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in E_1$.
   (b) Soient $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}$ deux éléments de E_1. On a donc $x+y-z = x+y+z = 0$ et $x'+y'-z' = x'+y'+z' = 0$. Donc $(x+x')+(y+y')-(z+z') = (x+x')+(y+y')+(z+z') = 0$ et $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+x') & (y+y') & (z+z') \end{pmatrix}$ appartient à E_1.
   (c) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in E_1$. Alors la relation $x+y-z = x+y+z = 0$ implique que $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0$ donc que $\lambda \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix}$ appartient à E_1.

   Posons $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z = 0\}$. F_1 est un plan passant par l'origine donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On a les inclusions *strictes* : $\{0\} \subset E_1$ et $E_1 \subset F_1 \subset \mathbb{R}^3$. Par la première on obtient $0 < \dim(E_1)$, par la seconde $\dim(F_1) < 3$ puis $\dim(E_1) < 2$ c'est à dire $\dim(E_1) = 1$.
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - z^2 = 0\}$ c'est à dire $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = z \text{ ou } x = -z\}$. Donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à E_1 mais $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à E_1 qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin E_3$ donc E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à E_4 mais leur somme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne lui appartient pas donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction 888
- E_1 : non si $a \neq 0$ car alors $0 \notin E_1$; oui, si $a = 0$ car alors E_1 est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y = 0\}$ et $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$.
- E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- E_3 : non, car la fonction nulle n'appartient pas à E_3.
- E_4 : non car le polynôme nul n'appartient pas à E_4.
- E_5 : non, en fait E_5 n'est même pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$ car $(2,0) \in E_5$ mais $-(2,0) = (-2,0) \notin E_5$.

Correction 908 Pour que deux ensembles X et Y soient égaux, il faut et il suffit que $X \subset Y$ et $Y \subset X$.Dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, la situation est un peu plus simple : pour que $E = F$ il faut et il suffit que $F \subset E$ et $\dim(E) = \dim(F)$. Appliquons ce critère : E est engendré par deux vecteurs donc dim $(E) \leqslant 2$. Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants donc dim $(E) \geqslant 2$ c'est à dire dim $(E) = 2$. Un raisonnement identique montre dim $(F) = 2$. Enfin, les égalités $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ montrent que $F \subset E$ c'est à dire $E = F$.

Correction 914 $v \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est équivalent à l'existence de deux réels λ, μ tels que $v = \lambda e_1 + \mu e_2$.
Alors $(-2, x, y, 3) = \lambda(1, -1, 1, 2) + \mu(-1, 2, 3, 1)$ est équivalent à

$$\begin{cases} -2 &= \lambda - \mu \\ x &= -\lambda + 2\mu \\ y &= \lambda + 3\mu \\ 3 &= 2\lambda + \mu \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda &= 1/3 \\ \mu &= 7/3 \\ x &= 13/3 \\ y &= 22/3 \end{cases}.$$

Le couple qui convient est donc $(x, y) = (13/3, 22/3)$.

Correction 916 À partir de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ nous considérons une combinaison linéaire (qui ne correspond qu'à un nombre *fini* de termes).
Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels distincts, considérons La famille (finie) : $(f_{\alpha_i})_{i=1,\ldots,n}$. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Cela signifie que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$; en particulier pour $x = \alpha_j$ l'égalité devient $\lambda_j = 0$ car $f_{\alpha_i}(\alpha_j)$ vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. En appliquant le raisonnement ci-dessus pour $j = 1$ jusqu'à $j = n$ on obtient : $\lambda_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Donc la famille $(f_\alpha)_\alpha$ est une famille libre.

Correction 923 Les fonctions de E qui ne sont pas dans F sont Les fonctions h qui vérifient $h(0) \neq 0$ **ou** $h'(0) \neq 0$. Par exemple les fonctions constantes $x \mapsto b$, $(b \in \mathbb{R})$, ou les homothéties $x \mapsto ax$, $(a \in \mathbb{R})$ n'appartiennent pas à F.
Posons

$$G = \left\{x \mapsto ax + b; (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Montrons que G est un supplémentaire de F dans E.
Soit $f \in F \cap G$ alors $f(x) = ax + b$ (car $f \in G$) et $f(0) = b$ et $f'(0) = a$; mais $f \in F$ donc $f(0) = 0$ donc $b = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $a = 0$. Maintenant f est la fonction nulle : $F \cap G = \{0\}$.
Soit $h \in E$, alors remarquons que pour $f(x) = h(x) - h(0) - h'(0)x$ la fonction f vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $f \in F$. Si nous écrivons l'égalité différemment nous obtenons

$$h(x) = f(x) + h(0) + h'(0)x.$$

Posons $g(x) = h(0) + h'(0)x$, alors la fonction $g \in G$ et

$$h = f + g,$$

ce qui prouve que toute fonction de E s'écrit comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G : $E = F + G$.
En conclusion nous avons montrer que $E = F \oplus G$.

Correction 930 Montrons que la famille $\{x, \ldots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est libre. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi^{n-1}(x) = 0$. Alors : $\varphi^{n-1}(\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi^{n-1}(x)) = 0$. Mais comme de plus $\varphi^n = 0$, on a l'égalité $\varphi^{n-1}(\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi^{n-1}(x)) = \varphi^{n-1}(\lambda_0 x) + \varphi^n(\lambda_1 x + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi^{n-2}(x)) = \lambda_0\varphi^{n-1}(x)$. Comme $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$ on obtient $\lambda_0 = 0$.
En calculant ensuite $\varphi^{n-2}(\lambda_1\varphi(x) + \cdots + \lambda_{n-1}\varphi^{n-1}(x))$ on obtient $\lambda_1 = 0$ puis, de proche en proche, $\lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_0 = 0$. La famille $\{x, \ldots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est donc libre. Elle compte n vecteurs. Comme dim $(E) = n$ elle est libre maximale et forme donc une base de E.

Correction 941 Montrons ceci par récurence : Pour $n = 1$, l'assertion est triviale : $x \notin \ker\varphi \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$. Supposons que si $x \notin \ker\varphi$ alors $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$, $(n \geqslant 2)$. Fixons $x \notin \ker\varphi$, Alors par hypothèses de récurrence $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$, mais $\varphi^{n-1}(x) = \varphi(\varphi^{n-2}(x)) \in \operatorname{Im}\varphi$ donc $\varphi^{n-1}(x) \notin \ker\varphi$ grâce à l'hypothèse sur φ. Ainsi $\varphi(\varphi^{n-1}(x)) \neq 0$, soit $\varphi^n(x) \neq 0$. Ce qui termine la récurrence.

Correction 943 (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $\ker f = \operatorname{Im} f$. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \operatorname{Im} f$ donc $f(x) \in \ker f$, cela entraine $f(f(x)) = 0$; donc $f^2 = 0$. De plus d'après la formule du rang $\dim\ker f + \operatorname{rg} f = n$, mais $\dim\ker f = \dim\operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$, ainsi $2\operatorname{rg} f = n$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $f^2 = 0$ alors $\operatorname{Im} f \subset \ker f$ car pour $y \in \operatorname{Im} f$ il existe x tel que $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$. De plus si $2\operatorname{rg} f = n$ alors par la formule Du rang $\dim\ker f = \operatorname{rg} f$ c'est-à-dire $\dim\ker f = \dim\operatorname{Im} f$. Nous savons donc que $\operatorname{Im} f$ est inclus dans $\ker f$ mais ces espaces sont de même de dimension donc sont égaux : $\ker f = \operatorname{Im} f$.

Correction 949 Pour montrer l'égalité $\ker f \cap \operatorname{Im} f = f(\ker f^2)$, nous montrons la double inclusion.
Soit $y \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$, alors $f(y) = 0$ et il existe x tel que $y = f(x)$. De plus $f^2(x) = f(f(x)) = f(y) = 0$ donc $x \in \ker f^2$. Comme $y = f(x)$ alors $y \in f(\ker f^2)$. Donc $\ker f \cap \operatorname{Im} f \subset f(\ker f^2)$.
Pour l'autre inclusion, nous avons déjà que $f(\ker f^2) \subset f(E) = \operatorname{Im} f$. De plus $f(\ker f^2) \subset \ker f$, car si $y \in f(\ker f^2)$ il existe $x \in \ker f^2$ tel que $y = f(x)$, et $f^2(x) = 0$ implique $f(y) = 0$ donc $y \in \ker f$. Par conséquent $f(\ker f^2) \subset \ker f \cap \operatorname{Im} f$.

Correction 963

1. Montrons que si φ est un isomorphisme, l'image de toute base de E est une base de F : soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et nommons $\mathcal{B}'$ la famille $\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}$.
   (a) $\mathcal{B}'$ est libre. Soient en effet $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1\varphi(e_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(e_n) = 0$. Alors $\varphi(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0$ donc, comme φ est injective, $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ puis, comme $\mathcal{B}$ est libre, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
   (b) $\mathcal{B}'$ est génératrice. Soit $y \in F$. Comme φ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Comme $\mathcal{B}$ est génératrice, on peut choisir $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Alors $y = \lambda_1\varphi(e_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(e_n)$.
2. Supposons que l'image par φ de toute base de E soit une base F. Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ la base $\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}$.
   (a) Im (φ) contient $\mathcal{B}'$ qui est une partie génératrice de F. Donc φ est surjective.
   (b) Soit maintenant $x \in E$ tel que $\varphi(x) = 0$. Comme $\mathcal{B}$ est une base, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Alors $\varphi(x) = 0 = \lambda_1\varphi(e_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(e_n)$ donc puisque $\mathcal{B}'$ est libre : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. En conséquence si $\varphi(x) = 0$ alors $x = 0$: φ est injective.

Correction 979 det $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$ donc la famille $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, 1/3)$.
$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, -2/3)$.
$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Donc ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(2/3, -2/3, -1/3)$.

Correction 1019 E est engendré par trois vecteurs et F est engendré par deux vecteurs. Donc dim $(E) \leqslant 3$ et dim $(F) \leqslant 2$. Clairement e_4 et e_5 ne sont pas liés donc dim $(F) \geqslant 2$ c'est à dire dim $(F) = 2$. Enfin, $\det\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\3&1&1\end{pmatrix} = -1 \neq 0$. La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est donc libre, soit dim $(E) \geqslant 3$ i.e. dim $(E) = 3$.
$E \cap F \subset F$ donc dim $(E \cap F) \leqslant 2$. De plus : dim $(E+F) =$ dim $(E) +$ dim $(F) -$ dim $(E \cap F)$. Comme $E + F \subset \mathbb{R}^5$, on a dim $(E+F) \leqslant 5$ d'où on tire l'inégalité $1 \geqslant$ dim $(E \cap F)$. Donc soit dim $(E \cap F) = 1$ soit dim $(E \cap F) = 2$.
Supposons que dim $(E \cap F)$ soit égale à 2. Comme $E \cap F \subset F$ on aurait dans ce cas $E \cap F = F$. En particulier il existerait $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $e_4 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. On vérifie aisément que ce n'est pas le cas, donc que dim $(E \cap F)$ n'est pas égale à 2.
On peut donc conclure : dim $(E \cap F) = 1$ puis dim $(E + F) = 4$.

Correction 1052 Un calcul donne $A^3 - A = 4I$. Donc $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I) = I$, ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-4&2\\1&-2&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}.$$

Correction 1053

$$A = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Correction 1056 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Soient $M = \begin{pmatrix}a&0&c\\0&b&0\\c&0&a\end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix}a'&0&c'\\0&b'&0\\c'&0&a'\end{pmatrix}$ deux éléments de E. Alors $M + M' = \begin{pmatrix}a+a'&0&c+c'\\0&b+b'&0\\c+c'&0&a+a'\end{pmatrix} \in E$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda M = \begin{pmatrix}\lambda a&0&\lambda c\\0&\lambda b&0\\\lambda c&0&\lambda a\end{pmatrix}$ appartient à E, tout comme la matrice 0. Donc E est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
Soit $M = \begin{pmatrix}a&0&c\\0&b&0\\c&0&a\end{pmatrix}$ un élément de E. Alors $M = a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.
Posons $M_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$. Les matrices M_1, M_2 et M_3 appartiennent à E et la relation qui précéde montre que elles engendrent E. D'autre part, si

$\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$, alors $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille $\{M_1, M_2, M_3\}$ est libre et engendre E. C'est une base de E.

Correction 1057 F est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ donc dim $(F) \in \{0, \dots, 4\}$. Comme $F \neq M_2(\mathbb{R})$ on a aussi dim $(F) \neq 4$. D'autre part les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à F et sont linéairement indépendantes. En effet, si $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$ alors $\begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c'est à dire $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc dim $(F) \geqslant 3$ c'est à dire dim $(F) = 3$. Enfin $\{M_1, M_2, M_3\}$ est une famille libre de trois vecteurs dans F qui est un espace de dimension 3. C'est donc une base de F.

Correction 1080

1. $A = \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$
2. $U_n = A^n U_0$
3. C'est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le rang est 1.
4. C'est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
5. Ce sont deux vecteurs non colinéaires. On a
$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
6. On a $A = PDP^{-1}$ donc $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -3^{n+1} & -2 \cdot 3^{n+1} \\ 2 \cdot 3^n & 4 \cdot 3^n \end{pmatrix}$
7. Donc
$$\begin{cases} x_n &= -137 \cdot 3^{n+1} - 36 \cdot 3^{n+1} \\ y_n &= 274(3^n) + 72 \cdot 3^n \end{cases}$$

Correction 1098 Posons : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_{3,\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, e_{4,\beta} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Notons $\varphi_{\alpha,\beta}$ l'application linéaire associée à $M_{\alpha,\beta}$ et $F = \text{Vect } \{e_1, e_2\}$. Par définition de la matrice associée à une application linéaire, Im $(\varphi_{\alpha,\beta}) = \text{Vect } \{e_1, e_2, e_{3,\alpha}, e_{4,\beta}\}$. En particulier, $F \subset$ Im $(\varphi_{\alpha,\beta})$. Comme e_1 et e_2 sont linéairement indépendants, rg$(\varphi_{\alpha,\beta}) \geqslant 2$. Ainsi $\varphi_{\alpha,\beta}$ est surjective si et seulement si l'un des deux vecteurs $e_{3,\alpha}$ ou $e_{4,\beta}$ n'appartient pas à F. En ce cas en effet, rg$(\varphi_{\alpha,\beta}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Or $e_{3,\alpha}$ et $e_{4,\beta}$ appartiennent à F si et seulement si il existe $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R}$ tels que : $e_{3,\alpha} = \lambda e_1 + \mu e_2$ et $e_{4,\beta} = \lambda' e_1 + \mu' e_2$. Un petit calcul montre donc que $\varphi_{\alpha,\beta}$ n'est pas surjective si et seulement si $\alpha = 22$ et $\beta = 4$. Donc $\varphi_{\alpha,\beta}$ est surjective si et seulement si $\alpha \neq 22$ ou $\beta \neq 4$.

Correction 1100 $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{R})$ donc est de dimension finie n^2. La famille $\{id_E, \varphi, \dots, \varphi^{n^2}\}$ compte $n^2 + 1$ vecteurs donc est liée c'est à dire : il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}$ dans $\mathbb{R}$, non tous nuls et tels que $\lambda_0 id_E + \lambda_1 \varphi + \cdots + \lambda_{n^2} \varphi^{n^2} = 0$. Le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$ répond donc à la question.

Correction 1151 1. Dans le cas $n = 2$, $n = 4$ les matrice suivantes conviennent :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J' = \begin{pmatrix} J & (0) \\ (0) & J \end{pmatrix}.$$

2. Supposons qu'un tel morphisme existe. Soit J sa matrice pour une base fixée. Alors $J^2 = -I_n$ où I_n est la matrice identité de taille n. En termes de déterminant nous avons : $\det(J^2) = \det I_n$, ce qui s'écrit $(\det J)^2 = (-1)^n$. Donc n est pair car $(\det J)^2$ est positif.

Correction 1157 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\det A = 0$, mais $\det B = a^2$ est non nul si $a \neq 0$.

Correction 1166 (S_1) : solution unique si $m^2 \neq 4$, impossible sinon. (S_2) : solution unique si $m^2 \neq 1/2$, infinité sinon.

Correction 1167 (S_1) : $a = b$ ou $b = c$ ou $c = a$.
(S_2) : $2abc + bc + ca + ab = 1$.

Correction 1168 (S_1) : solution unique quels que soient b_1, b_2, b_3, b_4.
(S_2) : solutions si $b_2 = b_1 + b_3$.
(S_3) : solutions si $b_1 + b_2 - 2b_4 = 0$ et $2b_1 - b_3 - 2b_4 = 0$.
(S_4) : solutions si $b_2 = -2b_1$ et $b_3 = -b_1$ et $b_4 = 3b_1$.

Correction 1169 Solution unique si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -4$.
Si $\lambda = -4$, pas de solution si $a + b + c + d \neq 0$, infinité sinon.
Si $\lambda = 0$, pas de solution si $a \neq b$ ou $a \neq c$ ou $a \neq d$, infinité sinon.

Correction 1170 Pas de solution si $\lambda^2 + \lambda - 2 \neq 0$ ($\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$). Si $\lambda = 1$, pas de solution si $a + 1 \neq 0$, infinité de solutions sinon. Si $\lambda = -2$, solution unique.

Correction 1202 L'équation caractéristique est :

$$r^2 - r - 1 = 0$$

dont les solution sont $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc u_n est de la forme

$$u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$$

pour α, β des réels que nous allons calculer grâce à u_0 et u_1. En effet $u_0 = 1 = \alpha\lambda^0 + \beta\mu^0$ donc $\alpha + \beta = 1$. Et comme $u_1 = 1 = \alpha\lambda^1 + \beta\mu^1$ nous obtenons $\alpha\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1$. En résolvant ces deux équations nous obtenons $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\lambda)$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mu)$. Nous écrivons donc pour finir :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}\big).$$

Correction 1204 L'équation caractéristique est :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

dont les solutions sont $\lambda = 2$ et $\mu = 1$. Donc u_n est de la forme

$$u_n = \alpha 2^n + \beta 1^n = \alpha 2^n + \beta$$

Or la suite $(2^n)_n$ tend vers $+\infty$. Donc si $(u_n)_n$ est bornée alors $\alpha = 0$. Donc $(u_n)_n$ est la suite constante égale à β. Réciproquement toute suite constante qui vérifie $u_n = \beta$ pour $n \in \mathbb{N}$ vérifie bien la relation de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Donc les suites cherchées sont les suites constantes.

Correction 1216

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} = -1/2.$$

Correction 1217

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)} = 0.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(x))}{\tan(6\,x)} = 1/6.$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\ln(e+x))^{x^{-1}} = e^{e^{-1}}.$
4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\ln(1+e^{-x})\right)^{x^{-1}} = e^{-1}.$

Correction 1219

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{\sqrt{2}}{8\,x^3}$
3. $\frac{a^3}{b^3}$
4. -1
5. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$
6. $\frac{1}{2}x^2$
7. $-\frac{3}{2}\left(-\frac{\pi}{4}+x\right)$
8. $\sqrt{e}$
9. $\frac{1}{\pi}$
10. 1
11. x

Correction 1229

1. Pour tout $n \geqslant 2$ on a : $P_n(0) = -1$ et $P_n(1) = 3$. Comme l'application $X \mapsto P_n(X)$ est continue, elle s'annule en (au moins) un point de l'intervalle $]0,1[$. Comme par ailleurs, pour tout X positif, $P_n'(X) = nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + 2X + 1$ est strictement positif, l'application $X \mapsto P_n(X)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et s'annule en au plus un point de $\mathbb{R}_+$. En conséquence P_n a une unique racine positive λ_n qui de plus satisfait à l'inégalité $0 < \lambda_n < 1$.
2. Pour tout $X \in]0,1[$, $P_n(X) - P_{n-1}(X) = X^n - X^{n-2} < 0$. En particulier $P_n(\lambda_{n-1}) < 0$ donc $\lambda_n > \lambda_{n-1}$. La suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 2}$ est donc croissante et majorée (cf 1.) : elle est convergente.
3. Pour tout $n \geqslant 2$ on a : $\lambda_n^n + \lambda_n^{n-1} = -\lambda_n^2 - \lambda_n + 1$. Or $P_n\left(\dfrac{3}{4}\right) > \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{3}{4} - 1 > 0$ donc la suite $(\lambda_n^n + \lambda_n^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait aux inégalités $0 < \lambda_n^n + \lambda_n^{n-1} < \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}$ et converge vers 0. Il en va de même de la suite $(-\lambda_n^2 - \lambda_n + 1)_{n\geqslant 2}$. En passant à la limite, on obtient l'égalité : $\ell^2 + \ell - 1 = 0$. La seule solution positive de cette équation étant $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, on a l'égalité : $\ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarques

1. L'inégalité $0 < \lambda_n < 1$ (pour tout $n \geqslant 2$) n'implique pas que $(\lambda_n^n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0. Par exemple la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = (1 - \dfrac{1}{n})^n$ converge vers $\dfrac{1}{e}$. (Pour le vérifier appliquer le 1. du problème à log (v_n).)

2. La propriété $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+k}\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big) = 0$ n'implique pas que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big) = 0$.

   Par exemple... $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \log\,(2)$.

Correction 1233 1. $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)$. Comme f est continue, ε est continue sur $]a,b[-\{c\}$ et la continuité en c de ε équivaut à la dérivabilité de f en c. L'unicité est évidente.

2. Pour tout $n \geqslant 1, S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} < 0$ (par exemple parce que $\frac{1}{2n+2} < \frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n}$ donc $\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} < 2\times\frac{1}{2n}$) donc la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Elle est minorée (par 0) donc elle converge.

3. Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n}$ donc $(n+1)\times\frac{1}{2n} \leqslant S_n \leqslant (n+1)\times\frac{1}{n}$ d'où, en passant à la limite, l'inégalité $\frac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1$.

4. Soit ε l'application de $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = f'(0)x + \varepsilon(x)$. Pour tous $n,k \in \mathbb{N}, n > 0$, on a l'égalité :

$$f\Big(\frac{1}{n+k}\Big) = \frac{1}{n+k}f'(0) + \frac{1}{n+k}\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)$$

   donc $\sigma_n(f) - f'(0)S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)$. Comme, pour tout $k \geqslant 0$, on a $\frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n}$, on en déduit les inégalités :

$$|\sigma_n(f) - f'(0)S_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\Big|\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)\Big| \leqslant \frac{n+1}{n}\max_{0\leqslant k\leqslant n}\Big|\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)\Big|.$$

   Comme $\max_{0\leqslant k\leqslant n}\Big|\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)\Big| \leqslant \sup_{x\in[0,\frac{1}{n}]}|\varepsilon(x)|$, cette quantité converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini (puisque ε est continue et s'annulle en 0).

5. Des égalités $\log\Big(1+\frac{1}{n+k}\Big) = \log\Big(\frac{n+k+1}{n+k}\Big) = \log\,(n+k+1) - \log\,(n+k)$ on déduit que :

$$\sigma_n(f) = \log\,(2n+1) - \log\,(n) = \log\Big(\frac{2n+1}{n}\Big) = \log\Big(2+\frac{1}{n}\Big).$$

   Comme la fonction logarithme est continue, $(\sigma_n(f))_{n\geqslant 1}$ converge vers $\log\,(2)$ lorsque n tend vers l'infini. Ainsi $S = \log\,(2)$.

6. Par les deux questions qui précédent il est immédiat que $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \log\,(2)$.

7. Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Soit ε l'application de $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = f'(0)x + \varepsilon(x)$.
   On pose, pour tous $n,k \in \mathbb{N}, n > 0$:

$$\sigma_n(p,f) = \sum_{k=0}^{pn} f\big(\frac{1}{n+k}\big) \text{ et } S_{n,p} = \sum_{k=0}^{pn}\frac{1}{n+k}.$$

Pour tous $n, k \in \mathbb{N}, n > 0$ on a l'égalité : $f\Big(\dfrac{1}{n+k}\Big) = \dfrac{1}{n+k}f'(0) + \dfrac{1}{n+k}\varepsilon\Big(\dfrac{1}{n+k}\Big)$ d'où

$$|\sigma_n(p,f) - f'(0)S_{n,p}| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{pn}\Big|\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)\Big| \leqslant \frac{pn+1}{n}\sup_{x\in[0,\frac{1}{n}]}\Big|\varepsilon\Big(\frac{1}{n+k}\Big)\Big|$$

donc cette différence converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Lorsque f est la fonction $x \mapsto \log(1+x)$, on obtient (comme précédemment) que :

$$\sigma_n(p,f) = \log\left((p+1)n+1\right) - \log\left(n\right) = \log\left(1+p+\frac{1}{n}\right)$$

puis que $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(p,f) = \log\left(p+1\right)$ c'est à dire $S_p = \log\left(p+1\right)$.

Correction 1237

1. $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o\left(x^6\right)$.
2. $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o\left(x^7\right)$.
3. $\sin(\tan x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right)$.
4. $(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right)$.
5. $\exp(\sin x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right)$.
6. $\sin^6 x = x^6 + o\left(x^6\right)$.

Correction 1239

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)-\sin(x)}{\tan(x)-\arcsin(x)} = -1.$$

Correction 1240

1. $\ln\cos x = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o\left(x^7\right)$.
2. $\dfrac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x} = 2 - \frac{11}{10}x^2 + o\left(x^3\right)$.
3. $\ln(\tan(1/2\,x + 1/4\,\pi)) = x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right)$.
4. $\ln\sin x = \ln(1/2\,\sqrt{2}) + x - \frac{\pi}{4} - \left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$.
5. $\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x} = 2/3\,\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^4})$.
6. $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e - 1/2\,ex + \frac{11}{24}\,ex^2 - \frac{7}{16}\,ex^3 + o\left(x^3\right)$.
7. $x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right) = 1/8\,\frac{\sqrt{2}}{x^2} + o(x^{-5})$.

Correction 1248

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)-x}{x^2} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\arctan(x)-x^4}{\cos(x^2)-1} = 0.$$

Correction 1262 1. La fonction g est définie en x sauf si $\sin(x) = 0$ ou $x = 0$. Son domaine de définition est donc $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. On peut prolonger g en une fonction continue en 0 si et seulement si elle y admet une limite. Elle est dérivable en ce point si et seulement si elle y admet un développement limité à l'ordre 1. Toutefois, comme l'énoncé demande la position du graphe de g par rapport à sa tangente en 0, nous allons calculer directement le développement limité à l'ordre 2 de g en 0.

   Le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + x^5\varepsilon_1(x)$.

   Or $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon_2(x)$. Donc $\sin^3 x = x^3 - \dfrac{x^5}{2} + \dfrac{13x^7}{120} + x^7\varepsilon_3(x)$ et $\dfrac{1}{\sin^3 x} = \dfrac{1}{x^3}(1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{9x^4}{40} + x^4\varepsilon_4(x))$. On en déduit que :
   $\dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^3}(x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{31x^5}{120} + x^5\varepsilon_5(x)) - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{31x^2}{120} + x^2\varepsilon_5(x)$.

   Ainsi on peut prolonger g en une fonction continue en 0 en posant $g(0) = \dfrac{1}{6}$. La fonction obtenue est dérivable en 0 et sa dérivée est nulle. La tangente en 0 à son graphe est la droite d'équation $y = \dfrac{1}{6}$. Enfin le graphe de g est au-dessus de cette droite au voisinage de 0.

Correction 1280 1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ est convergente (en fait elle vaut $\sqrt{\pi}$).

2. $\displaystyle\int_1^\infty x^x dx$ est divergente.
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\sin(x^{-1})}{\ln(1+x)}dx$ est divergente.
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln(2+\sqrt{3})$.
5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^5}{x^{12}+1}dx = 1/12\,\pi$.
6. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx = 2$.
7. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sinh(x)}dx = -\ln \operatorname{th}(1/2)$.

Correction 1291 Réponses : $\frac{\pi}{2} - \ln 2, \pi, \frac{1}{(n-1)^2}$.

Correction 1311 1. Oui.

2. Non. Le seul élément qui peut être l'élément neutre est 1 qui n'appartient pas à l'ensemble.
3. Non. 0 n'a pas d'inverse.
4. Oui.

Correction 1314 Le premier ensemble n'est pas un groupe car, par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne peut avoir pour inverse que $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ qui n'appartient pas à l'ensemble.
Notons $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) : \det M = 1\}$ et montrons que G est un sous-groupe de $Gl(2, \mathbb{R})$.
– la matrice identité appartient à G.

– si $A, B \in G$ alors $AB \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ et $\det AB = \det A \times \det B = 1 \times 1 = 1$, et donc $AB \in G$.
– Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{Z})$ alors $\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ appartient à G et est l'inverse de A.

Correction 1322 1. L'ensemble G des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \leqslant 1$ n'est pas un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$. En effet les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ appartiennent à G et leur produit $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à G.

2. L'ensemble H des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ est un sous groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$.
En effet,
- I_2 élément neutre de $Gl_2(\mathbb{R})$ appartient à H.
- Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$ deux éléments de H alors $MM' = \begin{pmatrix} ac & ad + bc^{-1} \\ 0 & (ac)^{-1} \end{pmatrix}$ donc le produit de deux éléments de H appartient à H.
- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. Alors $M^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ appartient à H.

3. Soit K_M l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $a \leqslant M$.
Nous allons montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il n'existe pas de valeur $M \in \mathbb{R}$ telle que K_M forme un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$.
Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que K_M forme un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$. Alors I_2 appartient à K_M donc $M \geqslant 1$. Ainsi, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à K_n donc le produit $AA_n = \begin{pmatrix} 1+n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à K_n. En conséquence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 + n \leqslant M$, ce qui est absurde.

Correction 1323 • Si $H \subset K$ alors $H \cup K = K$, qui est un sous-groupe de H. Même chose si $K \subset H$.
• Réciproquement, supposons que $H \cup K$ est un sous-groupe de G. Par l'absurde supposons que $H \not\subset K$ et $K \not\subset H$. Alors il existe $x \in H \setminus K$ et $y \in K \setminus H$. Comme $x, y \in H \cup K$ et que $H \cup K$ est un groupe alors $x.y \in H \cup K$. Donc $x.y \in H$ ou $x.y \in K$. Par exemple supposons $x.y \in H$ alors comme $x \in H$, $x^{-1} \in H$ et donc comme H est un groupe $x^{-1}.x.y \in H$ et donc $y \in H$. Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $y \in K \setminus H$. En conclusion, parmi les sous-groupes H, K l'un est inclus dans l'autre.

Correction 1326 Soit $G = \langle a, b \rangle$, tout élément g de G S'écrit $g = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \ldots a^{\alpha_n} b^{\beta_n}$ avec $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$. Si $h \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, alors en particulier $h \in \langle a \rangle$ et $h = a^\mu$ avec $\mu \in \mathbb{Z}$, donc h commute avec a^{α_i} pour tout α_i dans $\mathbb{Z}$ (en effet $a^{\alpha_i} a^\mu = a^{\alpha_i + \mu} = a^\mu a^{\alpha_i}$. De même $h \in \langle b \rangle$ donc h s'écrit également $h = b^\nu$ $(\nu \in \mathbb{Z})$ et h commute avec b^{β_i}. Donc $hg = (ha^{\alpha_1}) b^{\beta_1} \ldots = (a^{\alpha_1} h) b^{\beta_1} \ldots = a^{\alpha_1}(hb^{\beta_1}) \ldots = a^{\alpha_1}(b^{\beta_1} h) \ldots = \cdots$ Finalement $hg = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \ldots a^{\alpha_n} b^{\beta_n} h = gh$. Ainsi h commute avec tout élément de G et appartient ainsi au centre de G.

Correction 1336 Notons G l'ensemble des éléments d'ordre fini de H. Montrons que G est un sous-groupe de H.
– $G \subset H$ et $0 \in G$.
– Si $x \in G$ alors $(-x) + (-x) + \cdots + (-x) = -(x + x + \cdots + x) = 0$. Donc $-x \in G$.

– Si $x, y \in G$ alors $(x+y)+\cdots+(x+y) = (x+\cdots+x)+(y+\cdots+y) = 0+0 = 0$. Donc $x+y \in G$.

Nous venons de montrer que G est un sous-groupe de H. De plus comme H est commutatif alors G l'est aussi !

Correction 1337 1. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est d'ordre 2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas d'ordre fini puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Notons e_G et e_H les éléments neutres respectifs de G et de H. Soit g un élément de G d'ordre n.

   - Alors $\varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(e_G) = e_H$. Donc $\varphi(g)$ est d'ordre inférieur ou égal à n, ordre de g.

   - Supposons φ injectif et $\varphi(g)$ d'ordre strictement inférieur à n, c'est à dire qu'il existe $p < n$ tel que : $\varphi(g)^p = e_H$. Alors $\varphi(g^p) = e_H$ donc, puisque φ est injectif et $\varphi(e_G) = e_H$, on a aussi : $g^p = e_G$, ce qui est impossible puisque l'ordre de g est n.

3. Raisonnons par l'absurde : Soit G un groupe fini. Supposons qu'il existe dans G un élément g n'étant pas d'ordre fini. Comme G est un groupe, on peut considérer $X = \{g^k \; k \in \mathbb{N}\}$. Or, pour $i \neq j \;:\; g^i \neq g^j$. En effet, supposons $i < j$. Si $g^i = g^j$ alors $g^{j-i} = e_G$ et g est d'ordre inférieur ou égal à $j-i$, donc fini, ce qui est impossible. X est donc un ensemble infini. G contient un ensemble infini donc est infini, ce qui est absurde, donc g ne peut être que d'ordre fini.

Correction 1340 Rappelons d'abord que pour x un élément d'ordre n, alors

$$x^q = e \Longrightarrow n | q.$$

– Si n est pair alors $ord(x^2) = n/2$: en effet $(x^2)^{\frac{n}{2}} = x^n = e$ et pour $p \geqslant 1$ tel que $(x^2)^p = e$ alors $x^{2p} = e$ et $n | 2p$ donc $p \geqslant \frac{n}{2}$. Donc $n/2$ est le plus petit des entiers q (non nul) tel que $x^q = e$ et par conséquent $n/2$ est l'ordre de x.
– Si n est impair alors $ord(x) = n$. Tout d'abord $(x^2)^n = (x^n)^2 = e$ et pour p tel que $(x^2)^p = e$ alors $n | 2p$ mais 2 et n sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, $n | p$ et en particulier $p \geqslant n$.

Correction 1341 1. Déjà $(xy)^{mn} = x^{mn} y^{mn} = (x^m)^n (y^n)^m = e.e = e$. Soit p tel que $(xy)^p = e$, alors $e = (xy)^{mp} = x^{mp} y^{mp} = y^{mp}$, et donc mp est divisible par l'ordre de y , c'est-à-dire n. Comme m et n sont premiers entre eux alors d'après le théorème de Gauss n divise p. Un raisonnement semblable à partir de $(xy)^{np} = e$ conduit à : m divise p. Finalement $m | p$ et $n | p$ donc $mn | p$ car m et n sont premiers entre eux.

   Voici un contre exemple dans le cas où m et n ne sont pas premiers entre eux : dans le groupe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$: $\bar{2}$ est d'ordre 6, $\bar{4}$ est d'ordre 3, mais $\bar{2} + \bar{4} = \bar{6}$ est d'ordre $2 \neq 3 \times 6$.

2. A est d'ordre 4, B est d'ordre 3, $(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est jamais la matrice identité pout $n \geqslant 1$.

Correction 1342 Par l'absurde supposons que $(\mathbb{Q}, +)$ est engendré par un seul élément $\frac{p}{q}$ (p et q premiers entre eux) alors tout élément de $\mathbb{Q}$ s'écrit $n\frac{p}{q}$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Il s'ensuit que $\frac{p}{2q}$ (qui appartient à $\mathbb{Q}$) doit s'écrire $n\frac{p}{q}$, mais alors $2n = 1$ avec $n \in \mathbb{Z}$ ce qui est impossible. Conclusion $(\mathbb{Q}, +)$ n'est pas monogène.

Correction 1343 Soit $f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ un morphisme de groupe. Comme tout morphisme f vérifie $f(0) = 0$. Notons $a = f(1)$. Alors

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = a + a = 2.a.$$

De même, pour $n \geqslant 0$:

$$f(n) = f(1 + \cdots + 1) = f(1) + \cdots + f(1) = n.f(1) = n.a.$$

Enfin comme

$$0 = f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1) = a + f(-1),$$

alors $f(-1) = -a$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(n) = n.a.$$

Donc tous les morphisme sont de la forme $n \mapsto n.a$, avec $a \in \mathbb{Z}$.

Un morphisme $n \mapsto n.a$ est injectif si et seulement si $a \neq 0$, et surjectif si et seulement si $n = \pm 1$.

Correction 1345

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times) \\ x &\mapsto e^{ix} \end{aligned}$$

Vérifions que f est un morphisme de groupe. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$f(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = f(x) \times f(y),$$

et

$$f(x^{-1}) = e^{i(-x)} = \frac{1}{e^{ix}} = f(x)^{-1}.$$

Donc f est un morphisme de groupe.
Montrons que f n'est pas injective en prouvant que le noyau n'est pas réduit à 0 :

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) = 1\} = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } e^{ix} = 1\right\} = \{x = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Enfin

$$\operatorname{Im} f = \left\{y \in \mathbb{C}^*, y = e^{ix}\right\}$$

est l'ensemble des complexes de module 1, c'est-à-dire le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Correction 1354 Soit $\phi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ un morphisme entre les deux groupes multiplicatifs $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R}^*$. Notons $a = \phi(i) \in \mathbb{R}^*$. Alors $\phi(-1) = \phi(i^2) = \phi(i)^2 = a^2$, de même $1 = \phi(1) = \phi((-1)^2) = \phi(-1)^2 = a^4$; donc $a^4 = 1$ et nécessairement $a^2 = 1$. Le morphisme ϕ n'est pas injectif car $\phi(1) = \phi(-1) = 1$, *a fortiori* ϕ n'est pas un isomorphisme.

Correction 1386 Soit $x \neq e$ un élément de G, soit $H = \{e, x, x^2, \dots\}$ le sous-groupe engendré par x. H est un sous-groupe de G donc $\operatorname{Card} H$ divise $\operatorname{Card} G = p$ qui un nombre premier. En conséquent $\operatorname{Card} H = 1$ ou p mais $H \neq \{e\}$ donc $\operatorname{Card} H = p$ et $H = G$.
Nous venons de montrer que G est engendré par x donc G est cyclique, de plus le raisonnement est valide quelque soit $x \neq e$ alors tout élément de $G \setminus \{e\}$ est un générateur de G.

Correction 1387 1. $H \cap H'$ est un sous-groupe de H donc Card $H \cap H'$ divise Card $H = p$. Or p est premier donc Card $H \cap H' = 1$ ou p. Mais $H \cap H' \neq H$ donc Card $H \cap H' \neq p$ et donc $H \cap H' = \{e\}$.

2. Soit E l'ensemble des éléments d'ordre p que l'on suppose non vide. Notons que pour $x \in E$ le sous-groupe H_x engendré par x est d'ordre p et de plus tout $z \in H_x \setminus \{e\}$ est d'ordre p car H_x est cyclique et p est premier. Donc H_x contient $p-1$ élément d'ordre p. Si E ne contient qu'un seule élément x alors $E = H_x \setminus \{e\}$ et donc E contienet $p-1$ éléments.

   Sinon, soit $x, y \in E$ avec $x \neq y$. Alors d'après la première question $H_x \cap H_y = \{e\}$. Donc E se décompose en une union disjointe de $H_x \setminus \{e\}$. Donc Card E est multiple de $p-1$.

Correction 1389 1. Notons d'abord que pour $x \in G$ $x^2 = e$ et donc $x^{-1} = x$. Soit maintenant $x, y \in G$. Alors $xy \in G$ et $(xy)^2 = e$ donc $xy = (xy)^{-1}$ et par suite $xy = y^{-1}x^{-1} = yx$ car x et y sont d'ordre 2. Le produit de deux éléments quelconques de G commute donc G est commutatif.

2. Notons E l'ensemble des éléments d'ordre 2.

$$E = \{x \in G \ / \ x^2 = e \text{ et } x \neq e\} = \{x \in G \ / \ x = x^{-1} \text{ et } x \neq e\}.$$

   Par l'absurde supposons que H est l'ensemble vide. Alors quelque soit $x \neq e$ dans G $x \neq x^{-1}$. Donc nous pouvons décomposer $G \backslash \{e\}$ en deux ensembles disjoints $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $F' = \{{x_1}^{-1}, \ldots, {x_n}^{-1}\}$ qui sont de même cardinal n. Donc le cardinal de G est $2n+1$ (le $+1$ provient de l'élément neutre). Ce qui contredit l'hypothèse « G d'orde pair ».

Correction 1412 1. $|S_n| = n!$ donc $|S_3| = 3! = 6$. Montrons plus généralement qu'il n'existe pas d'élément d'ordre $n!$ dans S_n ($n \geqslant 3$). Par l'absurde soit α un tel élément. Alors par hypothèse S_n est engendré par α et donc S_n est un groupe commutatif. Mais $(1,2)(2,3) \neq (2,3)(1,2)$ ce qui est absurde. En conclusion il n'existe pas d'éléments d'ordre 6.

2. Explicitons S_3 :

$$S_3 = \left\{id; \tau_1 = (1,2); \tau_2 = (2,3); \tau_3 = (1,3); \sigma_1 = (1,2,3); \sigma_2 = \sigma_1^{-1} = (3,2,1)\right\}.$$

   Remarquons

   Les sous-groupes d'ordre 2 sont de la forme $\{id; \tau\}$ avec $\tau^2 = id$. Les seuls éléments d'ordre 2 sont les transpositions et donc se sont les groupes $\{id; (1,2)\}$,{ id ; (1,3) }, $\{id; (2,3)\}$. Les sous-groupes d'ordre trois sont de la forme $\{id, \sigma, \sigma^2\}$ avec $\sigma^2 = \sigma^{-1}$. Et donc le seul sous-groupe d'ordre 3 est $\{id; (1,2,3); (3,2,1)\}$.

3. Les sous-groupes de S_3 ont un ordre qui divise $|S_3| = 6$. Donc un sous-groupe peut-être d'ordre $1, 2, 3$ ou 6. L'unique sous-groupe d'ordre 1 est $\{id\}$, et l'unique sous-groupe d'ordre 6 est S_3. Les sous-groupes d'ordre 2 et 3 ont étés donnés à la question précédente.

Correction 1418 1. $\sigma = (1,3)(2,7,9,5) = (2,7,9,5)(1,3)$ et $\sigma^k = (1,3)^k(2,7,9,5)^k$. Les transpositions sont d'ordre 2 donc $(1,3)^k = \text{id}$ si $k \equiv 0 (\mod 2)$ et $(1,3)^k = (1,3)$ si $k \equiv 1 (\mod 2)$. Le cycle $(2,7,9,5)$ est d'ordre 4, et $(2,7,9,5)^k$ est respectivement égale à $\text{id}, (2,7,9,5), (2,9)(7,5), (5,9,7,2)$ si k est respectivement congru à $0, 1, 2, 3$ modulo 4. Le calcul de σ^k donne donc $\text{id}, (1,3)(2,7,9,5), (2,9)(7,5)$ ou $(1,3)(5,9,7,2)$ selon que k est congru à $0, 1, 2$ ou 3 modulo 4.

2. L'écriture de $\varphi = (10,3,4,1)(8,7)(4,7)(5,6)(2,6)(2,9)$ est une décomposition en produit de cycles mais ils ne sont pas à supports disjoints. Écrivons φ sous la forme :

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ce qui se décompose $\varphi = (1,10,3,4,8,7)(2,9,5,6) = (2,9,5,6)(1,10,3,4,8,7)$. Le calcul de $\varphi^k = (1,10,3,4,8,7)^k(2,9,5,6)^k$ est similaire au calcul précédent (selon $k(\mod 12)$)

Correction 1426 1. $\mathcal{S}_N$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1,2,\dots,N\}$. Dans $\mathcal{S}_{n+2}$ notons τ la permutation $(n+1,n+2)$. Nous définissons une application $\phi : \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_{n+2}$ par les relations

$$\phi(\sigma) = \sigma \text{ si } \varepsilon(\sigma) = +1 \quad ; \quad \phi(\sigma) = \sigma \circ \tau \text{ sinon} ;$$

où ε désigne la signature. Alors ϕ est un morphisme de groupe, de plus quelque soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ alors $\varepsilon(\phi(\sigma)) = +1$ (si $\varepsilon(\sigma) = +1$ c'est clair, sinon $\varepsilon(\phi(\sigma)) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\tau) = (-1) \times (-1) = +1$). Donc $\phi(\mathcal{S}_n)$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}_{n+2}$.

Enfin ϕ est injective : en effet soit σ tel que $\phi(\sigma) = \mathrm{id}$. Soit $\varepsilon(\sigma) = +1$ et alors $\phi(\sigma) = \sigma = \mathrm{id}$; soit $\varepsilon(\sigma) = -1$ et alors $\phi(\sigma) = \sigma \circ \tau$, pour $j \in \{1,2,\dots,n\}$ $j = \phi(\sigma)(j) = \sigma \circ \tau(j) = \sigma(j)$, et donc quelque soit $j \in \{1,2,\dots,n\}$ $\sigma(j) = j$ et donc $\sigma = \mathrm{id}$. On vient de démontrer que la composée de deux permutations à supports disjoint est l'identité si et seulement si les permutations sont déjà l'identité !

Notons encore $\phi : \mathcal{S}_n \longrightarrow \phi(\mathcal{S}_n)$ le morphisme induit par ϕ. Il est injectif et surjectif, donc $\mathcal{S}_n$ est isomorphe $\phi(\mathcal{S}_n)$ qui est un sous-groupe de $\mathcal{A}_{n+2}$.

2. $\mathcal{A}_5$ est de cardinal $5!/2 = 60$, et comme $24 = \operatorname{Card} \mathcal{S}_4$ ne divise pas 60 alors $\mathcal{A}_5$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 24.
3. C'est un peu plus délicat car $\operatorname{Card} \mathcal{S}_5 = 5! = 120$ divise $\operatorname{Card} \mathcal{A}_6 = 6!/2 = 360$ donc l'argument ci-dessus n'est pas valide. Cependant s'il existe un isomorphisme entre $\mathcal{S}_5$ et un sous-groupe de $\mathcal{A}_6$ alors un cycle d'ordre 5 de $\mathcal{S}_5$ est envoyé sur une permutation $\sigma \in \mathcal{A}_6$ d'ordre 5.

   Décomposons σ en produit de cycles à supports disjoints, $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots$. Comme les cycles σ_i sont à supports disjoints, il y a au plus trois cycles (de longueur $\geqslant 2$) dans la décomposition (car dans $\mathcal{A}_6$ on peut permuter au plus 6 éléments).
   - Le cas $\sigma = \sigma_1$ n'est pas possible car alors σ_1 serait un cycle d'ordre 5 et donc de signature -1 dans $\mathcal{A}_6$.
   - Si $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ alors les longueurs de σ_1 et σ_2 sont $(4,2)$ ou $(2,2)$, et l'ordre de leur composée $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est donc 4 ou 2 mais pas 5.
   - Si $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ alors les σ_i sont des transpositions, et la signature de σ est alors -1 ce qui contredit $\sigma \in \mathcal{A}_6$.

Correction 1428 $HK = \{hk \ / h \in H, k \in K\}$.

1. Soit $\phi : H \times K \to HK$ définie par $\phi(h,k) = hk$. Montrons que ϕ est bijective : ϕ est surjective par définition de HK et si $\phi(h,k) = \phi(h',k')$ alors $hk = h'k'$ et donc $h'^{-1}h = k'k^{-1}$ or $H \cap K = \{e_G\}$ et donc $h'^{-1}h = e_G$ et donc $h = h'$, de même $k = k'$ et donc ϕ est injective.

   Comme ϕ est bijective $\operatorname{Card} H \times K = \operatorname{Card} HK$ et donc $\operatorname{Card} HK = \operatorname{Card} H.\operatorname{Card} K$.
2. Supposons qu'il existe deux sous-groupes H et K distincts et d'ordre p. Montrons d'abord que $H \cap K = \{e_G\}$. En effet $H \cap K$ est un sous-groupe de H et donc le cardinal de $H \cap K$ divise $\operatorname{Card} H = p$ avec p premier. Or comme $H \neq K$ alors $H \cap K \neq H$ et donc $\operatorname{Card} H \cap K = 1$, c'est ce que nous voulions démontrer.

   Maintenant d'après la première question HK est un sous-groupe de cardinal p^2 dans le groupe G de cardinal $pq < p^2$. Donc il ne peut exister deux sous-groupe d'ordre p.

   Supposons maintenant que H soit un sous-groupe d'ordre p, c'est donc l'unique sous-groupe d'ordre p d'après ce que nous venons de démontrer. Pour $g \in G$ le sous-groupe

gHg^{-1} est du même ordre que H (car pour g fixé le morphisme θ_g de G dans G, $\theta_g(h) = ghg^{-1}$ est un automorphisme et en particulier un biction donc Card $\theta_g(H) = \operatorname{Card} H$). Par conséquent $gHg^{-1} = H$ et donc H est un sous-groupe distingué.

Correction 1435 Soit G sous-groupe de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, alors $\operatorname{Card} G$ divise $\operatorname{Card} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = 8$. Donc $\operatorname{Card} G \in \{1, 2, 4, 8\}$. De plus si G contient la classe $\bar{n}$ d'un nombre impair, alors G contient le sous-groupe engendré par $\bar{n}$ qui est $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ car alors n et 8 sont premiers entre eux, donc $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
Étude des cas. Si $\operatorname{Card} G = 8$ alors $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Si $\operatorname{Card} G = 4$ alors G ne peut contenir que des classes d'entiers pairs d'après la remarque précédente, mais comme il y a exactement 4 classes d'entiers pairs alors $G = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Si $\operatorname{Card} G = 2$ alors $G = \{\bar{0}, x\}$ et x est un élément d'ordre 2, le seul élément d'ordre 2 de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est $\bar{4}$. Donc $G = \{\bar{0}, \bar{4}\}$. Enfin si $\operatorname{Card} G = 1$ alors $G = \{\bar{0}\}$.

Correction 1438 La relation d'équivalence associée au quotient $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+$ est :

$$x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} > 0.$$

Si $x > 0$ alors $x \sim +1$ car $x(1)^{-1} > 0$ (en fait x est équivalent à n'importe quel réel strictement positif) ; si $x < 0$ alors $x \sim -1$ car $x(-1)^{-1} > 0$, enfin -1 et $+1$ ne sont pas équivalents. Il y a donc deux classes d'équivalence : $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+ = \{\overline{+1}, \overline{-1}\}$.
L'application $\phi : \mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+ \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $\phi(\overline{+1}) = \tilde{0}$ et $\phi(\overline{-1}) = \tilde{1}$ est un isomorphisme entre les deux groupes.

Correction 1442

1. Il faut montrer que pour $x \in G$ et $y \in D(G)$, $xyx^{-1} \in D(G)$. Commençons par montrer ceci pour y un générateur de $D(G)$. Si $y = ghg^{-1}h^{-1}$ avec $g, h \in G$. Nous remarquons que :

$$xyx^{-1} = \left(xghx^{-1}(gh)^{-1}\right)\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)\left(hgx(hg)^{-1}x^{-1}\right)$$

qui est un produit d'éléments de $D(G)$. Donc xyx^{-1} est un élément de $D(G)$.
Soit maintenant y un élément quelconque de $D(G)$, alors il s'écrit comme produit de générateurs :

$$y = y_1 y_2 \dots y_n, \qquad \text{avec } y_i = g_i h_i g_i^{-1} h_i^{-1}.$$

Écrivons $xyx^{-1} = (xy_1x^{-1})(xy_2x^{-1}) \dots (xy_nx^{-1})$. Chaque xy_ix^{-1} appartient à $D(G)$. Et donc xyx^{-1}. Donc $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

2. Soit $\alpha, \beta \in G/D(G)$, alors il existe $a, b \in G$ tels que $\bar{a} = \alpha$ et $\bar{b} = \beta$. Nous savons que $aba^{-1}b^{-1} \in D(G)$ et donc $\overline{aba^{-1}b^{-1}} = \varepsilon$ où ε est l'élément neutre de $G/D(G)$. Mais

$$\overline{aba^{-1}b^{-1}} = \bar{a}\overline{ba^{-1}b^{-1}} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1} = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}.$$

Donc $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \varepsilon$, autrement dit $\alpha\beta = \beta\alpha$. Et ceci quelque soit α et β, donc $G/D(G)$ est commutatif. Généralisation : si H est un sous-groupe distingué.

- Si $D(G) \subset H$ alors $G/D(G)$ est un sous-groupe de G/H donc G/H est commutatif car $G/D(G)$ l'est.
- Si G/H est commutatif alors pour $g, h \in G$ la classe de $ghg^{-1}h{-}1$ dans G/H vérifie :

$$\overline{ghg^{-1}h{-}1} = \bar{g}\overline{hg^{-1}h^{-1}} = \bar{g}\overline{g^{-1}}\overline{hh^{-1}} = \varepsilon.$$

Mais les éléments dont la classe dans G/H est l'élément neutre sont exactement les éléments de H. Donc $ghg^{-1}h^{-1}$ appartient à H. Ainsi tous les générateurs de $D(G)$ sont dans H et donc $D(G) \subset H$.

Correction 1446 Notons $C = AB = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Un calcul donne $C^8 = I$ et pour $1 \leqslant k \leqslant 7$, $C^k \neq I$. Donc le groupe H engendré par C est d'ordre 8. Attention ! même si $A^2 = I$ et $B^2 = I$ on a $(AB)^2 \neq I$ car $AB \neq BA$.
2. Pour montrer que H est distingué il suffit de montrer que ACA^{-1} et BCB^{-1} sont dans H. Mais $ACA^{-1} = ACA = AABA = BA = (AB)^{-1} \in H$. De même $BCB^{-1} = (AB)^{-1}$. Donc H est distingué dans H.

   Un élément M de G s'écrit
   $$M = A^{a_1}B^{b_1}A^{a_2}\dots A^{a_n}B^{b_n} \quad a_i, b_i \in \mathbb{Z}.$$
   Mais dans G/H tout terme $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$ vaut $\overline{I}$ Donc $G/H = \{\overline{I}, \overline{A}, \overline{A}^2, \overline{A}^3, \dots, \overline{B}, \overline{B}^2, \overline{B}^3, \dots\}$ mais comme $A^2 = B^2 = I$ et $AB \in H$ alors G/H s'écrit simplement :
   $$G/H = \left\{\overline{I}, \overline{A}\right\}.$$

   Enfin, par la formule $|G| = |H| \times |G/H|$ nous obtenons $|G| = 8 \times 2 = 16$.

Correction 1447 1. (a) $f((x,y) + (x',y')) = f(x+x', y+y') = 3(x+x') + 6(y+y') = 3x + 6y + 3x' + 6y' = f(x,y) + f(x',y')$.

   (b) $\operatorname{Ker} f = \{(x,y); f(x,y) = 0\} = \{(x,y); 3x + 6y = 0\} = \{(x,y); x = -2y\} = \{(-2k,k); k \in \mathbb{Z}\}$. Si $\operatorname{Ker} f = p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}$ alors $f(p,0) = 0$ donc $3p = 0$ soit $p = 0$. De même $f(0,q) = 0$ implique $q = 0$ et alors $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$, ceci contredit le fait que $f(-2,1) = 0$.

   (c) On a $f(\mathbb{Z}^2) = 3\mathbb{Z}$, le morphisme $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 3\mathbb{Z}$ définit par passage au quotient par le noyau un morphisme injectif $\bar{f} : \mathbb{Z}^2/\operatorname{Ker} f \longrightarrow 3\mathbb{Z}$ (c'est le théorème de factorisation). De plus comme f est surjectif alors $\bar{f}$ l'est aussi. Ainsi $\bar{f}$ est un isomorphisme entre $\mathbb{Z}^2/\operatorname{Ker} f = \mathbb{Z}^2/(-2,1)\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$.

2. Définissons $g : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $g(x,y) = (\bar{x}, \bar{y})$ où $\bar{n}$ désigne la classe de n dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le noyau de g est $2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} = \langle(2,0);(0,2)\rangle = G$. Le passage au quotient par le noyau définit l'isomorphisme $\bar{g}$ cherché.

Correction 1554 1. $< u_k(x), a >= k < x, a >< a, a > + < x, a >= (k+1) < x, a >$ donc $x = \frac{-k}{k+1} < u_k(x), a > a + u_k(x)$. On en déduit que u_k est inversible, et que $u_k^{-1} = u_{\frac{-k}{k+1}}$.

2. L'adjoint d'un endomorphisme u est l'unique endomorphisme v qui satisfait : $\forall (x,y) \in E^2, < u(x), y >=< x, u(y) >$. Or $< u_k(x), y >= k < x, a >< y, a > + < x, y >=< x, u_k(y) >$. Donc u_k est égal à son adjoint.
3. Si u_k est orthogonal, on doit avoir $\|u_k(a)\| = \|a\| = 1$, soit $|k+1| = 1$. Ainsi $k = 0$ ou $k = -2$.

   Pour $k = 0$, $u_k = \mathrm{id}$ est bien orthogonal. Pour $k = -2$, $u_{-2}^{-1} = u_{\frac{-2}{-2+1}} = u_{-2} = {}^t u_{-2}$. Donc u_{-2} est bien orthogonal. Il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\{a\}^\perp$
4. Si $k = 0$, 1 est la seule valeur propre et $E_1 = E$

   Si $k \neq 1$, $\forall x \in \{a\}^\perp, u_k(x) = x$ donc 1 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$. De plus $u_k(a) = (k+1)a$ donc $(k+1)$ est valeur propre. Finalement, 1 est valeur propre de multiplicité exactement $n-1$, avec pour espace propre $\{a\}^\perp$, et $k+1$ est valeur propre simple avec espace propre $\mathbb{R}a$.

Correction 1579 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors le polynôme caractéristiaque de u est aussi un polynôme annulateur de u.
Preuve si χ_u est scindé à racines simples : u est alors diagonalisable et il existe donc une base B dans laquelle $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Alors $Mat_B(\chi_u(u)) = \begin{pmatrix} \chi_u(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_u(\lambda_n) \end{pmatrix}$.
Et comme $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ on a $\chi_u(\lambda_i) = 0$, on en déduit que $\chi_u(u) = 0$.

Correction 1611

1. Soit $(v, w) \in \text{Com}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. $u(\lambda v + \mu w) = \lambda uv + \mu uw = \lambda vu + \mu wu = (\lambda v + \mu w)u$. Donc Com est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, E)$.
2. Soit $x \in E_\lambda$. $u(v(x)) = uv(x) = vu(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ donc $v(x) \in E_\lambda$.
3. Chaque valeur propre est de multiplicité 1 donc chaque espace propre est de dimension 1. Ainsi, si $x \in E_\lambda \setminus \{0\}$, $E_\lambda = \mathbb{R}x$. Comme $v(x) \in E_\lambda$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}, v(x) = \alpha x$. Donc x est un vecteur propre de v.
4. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de vecteurs propres de u. C'est aussi une base de vecteurs propres pour tout élément de Com. Tout élément de Com est donc représenté par une matrice diagonale dans $(e_1, ..., e_n)$. Réciproquement, tout endomorphisme représenté dans cette base par une matrice diagonale commute avec u. Donc
$$\text{Com} = \{v \in \mathcal{L}(E, E), \exists(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, M_{v/(e_1,...,e_n)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}\}$$
On en déduit que Com est de dimension n.
5. $u\,u^i = u(u \cdots u) = (u \cdots u)u = u^i\,u$. Donc $\forall i \in \{0, ..., n-1\}, u^i \in \text{Com}$. Ainsi $\text{Vect}(\text{id}, u, ..., u^{n-1}) \subset$ Com.
6. Soit $x_k \in E_{\lambda_k} \setminus \{0\}$. $u^i(x) = \lambda_k^i\, x$. Donc $(\sum \alpha_i u^i)x = \sum \alpha_i u^i(x) = (\sum \alpha_i \lambda_k^i)x = 0$. Donc $\forall k \in \{1, ..., n\}, \sum \alpha_i \lambda_k^i = 0$.
7. Le déterminent du système $(*)$ est non nul. Il s'agit donc d'un système de Cramer : il n'a qu'une solution, $\alpha_0 = ... = \alpha_{n-1} = 0$. La famille $(\text{id}, u, ..., u^{n-1})$ est donc libre.
8. On a $\dim \text{Vect}(\text{id}, u, ..., u^{n-1}) = n = \dim \text{Com}$ et $\text{Vect}(\text{id}, u, ..., u^{n-1}) \subset \text{Com}$ donc $\text{Vect}(\text{id}, u, ..., u^{n-1})$ Com

Correction 1635 $\chi_A = (-1 - X)(2 - X)^2$. Donc A est diagonalisable ssi $\dim\ker(A - 2I) = 2$. Or $\text{rg}(A - 2I) = 2$, donc $\dim\ker(A - 2I) = 1$ donc A n'est pas diagonalisable. Cependant, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est triangularisable sur $\mathbb{R}$.
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A + I) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y+4z=0 \\ -x+4y-z=0 \\ -2x-y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$ donc $\ker(A + I) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
De même,
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - 2I) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+4z=0 \\ -x+y-z=0 \\ -2x-y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ z=-y \end{cases}$ donc $\ker(A + I) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
On sait que $\ker((A - 2I)^2)$ est de dimension 2, et que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(A - 2I) \subset \ker((A - 2I)^2)$.
On cherche donc un deuxième vecteur dans $\ker((A-2I)^2)$, linéairement indépendant de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 18 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient. De plus : $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Donc en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction 1636 On a $A^3 = A$, donc $P = X^3 - X = (X-1)(X+1)X$ est un polynôme annulateur de A. Il s'agit d'un poynôme scindé à racine simples donc A est diagonalisable. Les valeurs propres de A sont des racines de P donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 1, -1\}$. On a $\mathrm{rg}\, A = 2$ donc 0 est valeur propre de multiplicité 2. La résolution de système $(A+I)X = 0$ montre que $\ker(A+I) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc -1 est valeur propre de multiplicité 1 donc 1 est nécessairement valeur propre de multiplicité 1 : on en déduit que $\chi_A = X^2(X-1)(X+1)$.

Correction 1641

1. A est triangulaire inférieure donc ses valeurs sont ses coefficients diagonaux : 1, 2 et 3. A a trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.
2. $\chi_B = -(X-1)(X+1)^2$. $B + I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(B+I) = 2$, $\dim(\ker B + I) = 1 < 2$ donc B n'est pas diagonalisable.

   $\chi_B(B) = 0$ donc $B(B^2 + B - I) = I$, soit $B^{-1} = B^2 + B - I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction 1642

1. ${}^tA = A$ donc A est diagonalisable dans une base orthonormée.
2. Par exemple : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et ${}^tQ = Q^{-1}$

Correction 1672 $\mathrm{tr} a = \mathrm{tr} A = -1$, $\det a = \det A = -6$

$$P_a(X) = X^2 - \mathrm{tr} X + \det a = X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3).$$

Donc le spectre est $\{2, -3\}$, il est de taille 2 comme l'espace est de dimension 2. D'après le cours, a est diagonalisable et les espaces propres de dimension 1. L'espace propre associé à la valeur propre 2 est l'ensemble des (x, y) tels que $7x - 10y = 2x$ ou $x = 2y$. On peut prendre $\vec{f_1} = (2, 1)$ pour base de cet espace propre. L'espace propre associé à la valeur propre -3 est l'ensemble des (x, y) tels que $7x - 10y = -3x$ ou $x = y$. On peut prendre $\vec{f_2} = (1, 1)$ pour base de cet espace propre. Alors si $f = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ on a

$$P = [\mathrm{id}_E]^e_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = [\mathrm{id}_E]^f_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = [a]^f_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$D^{50} = [a^{50}]^f_f = \begin{bmatrix} 2^{50} & 0 \\ 0 & (-3)^{50} \end{bmatrix}, \; A^{50} = [a^{50}]^e_e = PD^{50}P^{-1} = \begin{bmatrix} 2.2^{50} - (-3)^{50} & -2.2^{50} + 2.(-3)^{50} \\ 2^{50} - (-3)^{50} & -2^{50} + 2.(-3)^{50} \end{bmatrix}$$

Donc $\lim_{n\infty} \frac{1}{3^{2n}}[a^{2n}]^f_f = L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, et $\lim_{n\infty} \frac{1}{3^{2n}}[a^{2n}]^e_e = PLP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Correction 1673 Si $X = (x_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in F$, il est clair que $X = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_{ij} F_{ij}$. C'est donc une famille génératrice. Elle est indépendante, car si $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_{ij} F_{ij}$ est la matrice nulle, cela implique que $x_{ij} = 0$ pour tous i et j. C'est donc une base de F. Elle est de taille n^2, donc F est de dimension n^2. Ensuite, si $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ et si $X = (x_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ alors le coefficient (i, j) de la matrice $\Phi(X) = \alpha XD + \beta DX$ est $(\alpha d_j + \beta d_i)x_{ij}$. Donc $\Phi(F_{ij}) = (\alpha d_j + \beta d_i)F_{ij}$, ce qui est dire que F_{ij} est un vecteur propre de Φ pour la valeur propre $\alpha d_j + \beta d_i$. L'espace F admet donc une base de vecteurs propres de Φ. D'après le cours, cela entraîne que Φ est diagonalisable. Si on le représente dans la base de vecteurs propres, le déterminant de Φ est donc le produit des éléments diagonaux, c'est à dire $\det \Phi = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (\alpha d_j + \beta d_i)$. Plus généralement $\det(\Phi - \lambda \mathrm{id}_F) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (\alpha d_j + \beta d_i - \lambda)$.

Correction 1674 Notons $D_n = \det B$. Alors $D_1 = 2\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ et $D_2 = 4\cos^2\theta - 1 = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$. Si $n > 2$, développons D_n par rapport à la dernière ligne, en recommencant encore une fois avec un des déterminants d'ordre $n-1$ obtenus. On obtient $D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2}$. Faisons l'hypothèse de récurrence que $D_k = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ pour $k < n$. On a vu que c'est vrai pour $k = 1$ et 2. Alors par des identités trigonométriques classiques $D_n = \frac{2\cos\theta\sin n\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, et la récurrence est étendue. Puisque $\sin x = 0 \Leftrightarrow$ il existe un entier relatif k tel que $x = k\pi$ alors $D_n = 0$ si et seulement si il existe $k = 1, 2, \dots, n$ tel que $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$ les autres valeurs de k étant exclues car $0 < \theta < \pi$. Par définition de P_A on a $P_A(-2\cos\theta) = D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ qui s'annule pour les n nombres distincts $-2\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, 2, \dots, n$ qui sont nécessairement toutes les valeurs propres de A. Les valeurs propres de $2I_n + A$ sont donc $2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1} = 4\sin^2\frac{k\pi}{2n+2} > 0$. Le spectre de $2I_n - A$ est le même.

Correction 1702

1. $u\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^N \alpha_i u(u^i(x_0)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_{i+1}$. Donc $\forall x \in F$, $u(x) \in F$.
2. Si à un rang k, x_{k+1} est une combinaison linéaire des x_i pour $i \leqslant k$: $x_{k+1} = \sum_{i=0}^k a_i x_i$. On en déduit que $x_{k+2} = \sum_{i=0}^k a_i x_{i+1}$, et donc que $x_{k+2} \in Vect(x_1, \dots, x_{k+1}) \subset Vect(x_0, \dots, x_k)$, et par récurrence, on obtient finalement que $\forall p > k, x_p \in Vect(x_0, \dots, x_k)$. On en déduit que le rang de la famille $\{x_0, \dots, x_m\}$, est strictement croissant avec m puis éventuellement constant à partir d'un certain rang. Comme E est de dimension finie n, on en déduit que ce rang est constant à partir d'un rang $k \leqslant n$: la famille $(x_0, \dots, x_k)$ est alors libre, et x_{k+1} est une combinaison linéaire de $(x_0, \dots, x_k)$.
3. $x_{k+1} - \sum_{i=0}^k a_i x_i = u^{k+1}(x_0) - \sum_{i=0}^k a_i u^i(x_0) = 0$ donc $P_0(u)(x_0) = 0$.
4. Si $x \in F$ alors $x = \sum_{i=0}^N \alpha_i u^i(x_0)$. En posant $P = \sum_{i=0}^N \alpha_i X^i$, on a $x = P(u)(x_0)$.
5. Soit $P = QP_0 + R$ la division euclidienne de P par P_0, alors $\deg(R) < \deg(P_0) = k+1$. Notons $R = \sum_{i=0}^k r_i X^i$. On a $x = P(u)(x_0) = Q(u)P_0(u)(x_0) + R(u)(x_0) = R(u)(x_0)$
6. La famille $(x_0, \dots, x_k)$ est donc libre et génératrice dans F : c'est une base.
7. La matrice de $u_{|F}$ dans cette base est la matrice compagnon associée au polynôme P_0, et $\chi_{u_{|F}} = P_0$.
8. On choisit un vecteur $y \in E \setminus F$, et on recommence le même travail avec ce vecteur, et on continue ainsi jusqu'à avoir obtenu une base de tout l'espace. La matrice de u dans la base finale est alors du type demandé.

Correction 1710 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\chi_A = (2-X)(\omega - X)(\bar\omega - X)$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$\ker(A - 2I) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - \omega I) \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\omega)x + y = 0 \\ (1-\omega)y + z = 0 \\ (1-\omega)z + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (\omega-1)x \\ z = (\omega-1)^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \omega^2 x \\ z = \omega^4 x \end{cases}$ donc $\ker(A - \omega I) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \end{pmatrix}$

On en déduit que $\ker(A - \bar\omega I) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ \bar\omega^2 \\ \bar\omega^4 \end{pmatrix}$

Ainsi en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \bar\omega^2 \\ 1 & \omega^4 & \bar\omega^4 \end{pmatrix}$ on obtient $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \bar\omega \end{pmatrix}$

On en déduit que les solutions sont les suites de la forme $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^n & 0 \\ 0 & 0 & \bar\omega^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ soit : $\begin{cases} x_n = a+b\ \omega^n + c\ \bar\omega^n \\ y_n = a+b\ \omega^{n+2} + c\ \bar\omega^{n+2} \\ z_n = a+b\ \omega^{n+4} + c\ \bar\omega^{n+4} \end{cases}$ où a, b, c sont trois complexes.

En résolvant le système $\begin{cases} a+b+c & =2 \\ a+b\omega^2+c\bar\omega^2 & =1 \\ a+b\omega^4+c\bar\omega^4 & =1 \end{cases}$ on obtient la solution particulière cherchée : c'est la solution associée à $a = 4/3, b = c = 1/3$.

$$\begin{cases} x_n = & 4/3 & + & 2/3\cos(n\pi/3) \\ y_n = & 4/3 & + & 2/3\cos((n+2)\pi/3) \\ z_n = & 4/3 & + & 2/3\cos((n+4)\pi/3) \end{cases}$$

Correction 1712

1. $A\,{}^tA = (a^2+b^2+c^2+d^2)\mathrm{id}$. Ainsi $\det A * \det {}^tA = (\det A)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$ et donc $\det A = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.
2. Dans l'expression $\det A = \sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}...\alpha_{4\sigma(4)}$ où les coefficients de A sont notés α_{ij}, le seul terme en a^4 est obtenu pour $\sigma = \mathrm{id}$, soit $\varepsilon(\sigma) = +1$. On en déduit que $\det A = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. Pour obtenir le polynôme caractéristique de A, on remplace a par $a-X$ dans A, et on calcule le déterminant. On a donc $\chi_A = ((a-X)^2+b^2+c^2+d^2)^2$
3. $\forall\lambda\in\mathbb{R}, \chi_A(\lambda) > 0$ car $(b,c,d) \neq (0,0,0)$. Donc A n'a pas de valeur propre réelle, donc A n'est ni diagonalisable ni triangularisable sur $\mathbb{R}$.
4. $A(i\sqrt3,1,1,1) = (1-i\sqrt3(i\sqrt3,1,1,1))$ et $A(-1,i\sqrt3,-1,1) = (1-i\sqrt3(-1,i\sqrt3,-1,1))$. Pour la seconde valeur propre, qui est le conjugué de $1-i\sqrt3$, on utilise les vecteurs conjugués. Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} i\sqrt3 & -1 & -i\sqrt3 & -1 \\ 1 & i\sqrt3 & 1 & -i\sqrt3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2\bar\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\bar\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega \end{pmatrix} = D$.
5. Soit $X_n = (u_n, v_n, w_n, h_n)$. On a $\forall n\in\mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$, d'où $\forall n\in\mathbb{N}, X_n = A^nX_0$. Or $A^nX_0 = PD^nP^{-1}X_0$. On en déduit que $X_n = \begin{pmatrix} 2^n\bar\omega^n i\sqrt3 & -2^n\bar\omega^n & -2^n\omega^n i\sqrt3 & -2^n\omega^n \\ 2^n\bar\omega^n & 2^n\bar\omega^n i\sqrt3 & 2^n\omega^n & -2^n\omega^n i\sqrt3 \\ 2^n\bar\omega^n & -2^n\bar\omega^n & 2^n\omega^n & -2^n\omega^n \\ 2^n\bar\omega^n & 2^n\bar\omega^n & 2^n\omega^n & 2^n\omega^n \end{pmatrix}$.
Posons $Y_0 = P^{-1}X_0$. En résolvant le système $PX_0 = Y_0$, on obtient $Y_0 = (1/2i\sqrt3, 0, -1/2i\sqrt3, 0)$, et finalement :
$$X_n = 1/2i\sqrt3 \begin{pmatrix} 2^n(\bar\omega^n+\omega^n)i\sqrt3 \\ 2^n(\bar\omega^n-\omega^n) \\ 2^n(\bar\omega^n-\omega^n) \\ 2^n(\bar\omega^n-\omega^n) \end{pmatrix} = 2^n\begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{3} \\ -\sin\frac{n\pi}{3} \\ -\sin\frac{n\pi}{3} \\ -\sin\frac{n\pi}{3} \end{pmatrix}$$

Correction 1900

I

1. Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales. Supposons $\mathcal{P}$ de dimension finie n. Notons f_k la fonction $x\mapsto x^k$. Alors la famille $\{f_0,\cdots,f_n\}$ qui compte $n+1$ éléments est liée, donc il existe $a_0,\cdots,a_n$ des scalaires non tous nuls tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$ on ait $a_0+a_1x+\cdots a_nx^n = 0$. Il en résulte que le polynôme non nul à coefficients réels $a_0+a_1X+\cdots a_nX^n$ a une infinité de racines, ce qui est absurde.
2. Posons $M = \sup(\bar X)$. On doit vérifier que, *i)* pour tout $x\in X, x\leqslant M$ et *ii)* pour tout $\varepsilon>0$ il existe $x\in X$ tel que $M-\varepsilon\leqslant x$. Comme $X\subset\bar X$ et, pour tout $x\in\bar X, x\leqslant M$ la

propriété *i)* est vérifiée par M. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe $x \in \bar{X}$ tel que $M - \frac{\varepsilon}{2} < x$. Comme $x \in \bar{X}$, il existe aussi $y \in X$ tel que $|x - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $M - \varepsilon < y$ et M satisfait à *ii)*.

Remarque : on note également que $\sup(X) \in \bar{X}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons un élément $x_n \in X$ tel que $x_n \geqslant \sup(x) - \frac{1}{n}$. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituée d'éléments de X converge dans $\mathbb{R}$ vers $\sup(X)$ qui appartient donc à $\bar{X}$. On peut bien sûr en déduire la propriété *ii)* de M.

II

1. Il est clair $\mathcal{L}$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{C}^1$ et $x, y \in [0,1]$, avec $x < y$. Par le théoréme des accroissements finis, il existe $c_x \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c_x)(y - x)$. Or f' est continue, donc bornée sur $[0,1]$. Soit $M = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)|$. On a l'inégalité $|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$ qui montre que $f \in \mathcal{L}$. Il en résulte que $\mathcal{L}$ contient $\mathcal{P}$ donc est de dimension infinie.
2. (a) Il suffit de vérifier que si $N_1(f) = 0$ et $N_2(g) = 0$, alors $f = g = 0$, les autres propriétés étant claires. Or si $N_1(f) = 0$, alors f est constante et $f(0) = 0$, donc $f = 0$. Il en va de même pour N_2.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = 1$. Posons $X_n = \{\frac{|f_n(x) - f_n(0)|}{|x|}, x \neq 0\}$. Comme $f_n(0) = 0$, on voit que $N_1(f_n) = \sup(X_n)$. Or $|f_n'(0)| = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|f_n(x) - f_n(0)|}{|x|}$, appartient à $\bar{X}_n$ donc, en appliquant I 2) on constate que $|f_n'(0)| \leqslant \sup(\bar{X}_n) = \sup(X_n)$. Enfin $f_n'(0) = 2\pi n$ donc $N_2(f_n) \geqslant 2\pi n$. Il n'exite donc pas $K > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_2(f_n) < K\|f_n\|_\infty$ soit N_2 et $\|\ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

   Remarques : a) on peut obtenir ce résultat (et le préciser) en remarquant que la fonction $f_n : x \mapsto \frac{\sin(2\pi nx)}{x}$ définie sur $]0,1]$ se prolonge en une fonction continue en 0 en posant $f_n(0) = 2\pi n$. Puis noter (en fait c'est un cas particulier de I 2)) que $\sup\limits_{]0,1]} |f_n| = \sup\limits_{[0,1]} |f_n|$ et montrer (par une étude classique de fonction) que cette dernière quantité est $2\pi n$.

   b) Ce qui fait l'intérêt pour ce problème des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est qu'elles sont bornées par 1 mais que leur pente en l'origine peut-être rendue arbitrairement grande avec n. On peut donc obtenir le même résultat avec la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $k_n(x) = nx$ si $x \leqslant \frac{1}{n}$ et 1 sinon, pour laquelle un calcul direct donne $N_1(k_n) = n$ et $\|k_n\|_\infty = 1$.

   (c) Comme, pour tout $f \in \mathcal{L}$, $N_1(f) \geqslant N_2(f)$, on déduit de ce qui précéde que N_1 n'est pas équivalente ni à $\|\ \|_\infty$. Posons $g_n(x) = x^n$, pour $n \geqslant 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, $N_2(g_n) = 1$. De plus $g_n'(1) = n$, donc, par un raisonnement identique à celui qui précéde, $N_1(g_n) \geqslant n$ ce qui montre que N_1 n'est pas équivalente à N_2.

   Remarque : ce qui fait l'intérêt pour ce problème des fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est qu'elles sont bornées par 1 mais que leur pente en 1 peut-être rendue arbitrairement grande avec n. On peut donc obtenir le même résultat avec la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $l_n(x) = 0$ si $x \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$ et $nx - (n-1)$ sinon.

(d) On pose $g_n(x) = x$ si $x \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n}$ sinon. Il est clair que $g_n \in \mathcal{L}$, $\|g_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$ et $N_2(g_n) = 1$. Il n'existe donc pas de constante $K' \in \mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|g_n\|_\infty \geqslant K' N_2(g_n)$ donc N_2 n'est pas équivalente à $\| \, \|_\infty$. Enfin $N_2(g_n) = N_1(g_n)$, ce qui établit le même résultat pour N_1.

(e) Il est clair que pour tout $f \in \mathcal{L}$, que $\lambda(f) \geqslant N_1(f)$. Soit $x \in]0,1]$. De l'identité $f(x) = f(0) + x\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ on déduit que $|f(x)| \leqslant |f(0)| + |\dfrac{f(x)-f(0)}{x}|$ (car $|x| \leqslant 1$) soit $|f(x)\| \leqslant N_1(f)$. L'application $x \mapsto f(x)$ étant continue sur $[0,1]$ (ou en appliquant I 2)) on en déduit que, pour tout $x \in [0,1]$ on a également $|f(x)\| \leqslant N_1(f)$. En d'autre termes $\|f|_\infty \leqslant N_1(f)$ et $\lambda(f) \leqslant 2N_1(f)$. Les normes λ et N_1 sont donc équivalentes.

3. On pose, pour tout $f \in \mathbb{C}^1$: $\nu_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ et $\nu(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(a) On constate aisément que si $\nu_1(f) = 0$, alors f est constante et, comme de plus $f(0) = 0$, elle est nulle. Les autre propriétés sont immédiates, donc ν et ν_1 sont des normes sur $\mathbb{C}^1$.

(b) Soit $f \in \mathbb{C}^1$, notons $X = \{\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}; (x,y) \in [0,1]^2, x \neq y\}$. Pour montrer que $\nu_1(f) = N_1(f)$, il suffit de vérifier que $\sup(X) = \|f'\|_\infty$. Soient $x, y \in [0,1], x \neq y$. Par le théorème des accroissements finis, il existe c compris entre x et y tel que $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = f'(c) \leqslant \|f'\|_\infty$, donc $\sup(X) \leqslant \|f'\|_\infty$. Comme f' est continue, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f'(x_0) = \|f'\|_\infty$. Alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ appartient à $\bar{X}$, donc, en appliquant I 2), $\|f'\|_\infty \leqslant \sup(\bar{X}) = \sup(X)$.

Remarque : on peut formuler ce raisonnement de la manière suivante : soit $Y = \{f'(x); x \in [0,1]\}$. Par le théorème des accroissements finis, $X \subset Y$. On a ensuite, par définition de la dérivée, $Y \subset \bar{X}$. Donc $\sup(X) \leqslant \sup(Y) \leqslant \sup(\bar{X})$, puis on applique I 2).

(c) Les normes ν et ν_1 sont équivalentes. En effet, il est clair que $\nu_1(f) \leqslant \nu(f)$ pour tout $f \in \mathbb{C}^1$. Soit $t_0 \in [0,1]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(t_0)|$. Si $t_0 = 0$ alors $\nu_1(f) \leqslant \nu(f)$. Sinon, par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, t_0[$ tel que $f(t_0) = f(0) + f'(c)t_0$ ce dont on déduit que $\|f\|_\infty \leqslant \nu_1(f)$, puis que $\nu(f) \leqslant 2\nu_1(f)$.

4. (a) Soit $x \in [0,1]$. La suite de nombres réel $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, elle est convergente. On pose $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. La suite (f_n) étant de Cauchy, il existe N tel que, si $m, n \geqslant N$ alors $\|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Soient $x \in [0,1]$ et $m, n \geqslant N$. On a $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$ et, ceci étant vrai pour tout $m \in \mathbb{N}$, on en déduit, par passage à la limite suivant m, que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, soit $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Ainsi f est la limite, pour la convergence uniforme, d'une suite de fonctions continues donc est continue.

(b) Par définition de ν, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy pour ν est de Cauchy pour $\| \, \|_\infty$, donc (uniformément) convergente par la question qui précéde. De même $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour $\| \, \|_\infty$, donc converge uniformèment vers une fonction continue g. Il en résulte que f est dérivable et a pour dérivée la fonction continue g. Enfin $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour ν donc $(\mathbb{C}^1, \nu)$ est complet.

Soit maintenant $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathbb{C}^1, \nu_1)$. Comme ν_1 est équivalente à ν, elle est de Cauchy pour ν donc convergente. Il existe donc $h \in \mathbb{C}^1$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(h - g_n) = 0$. Mais puisque ν_1 est équivalente à ν, on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_1(h - g_n) = 0$ donc $(\mathbb{C}^1, \nu_1)$ est complet.

(c) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}, \lambda)$. Comme $\lambda(f_n) \geqslant \|f_n\|_\infty$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également de Cauchy dans $(\mathbb{C}^0, \|\ \|_\infty)$. Comme $(\mathbb{C}^0, \|\ \|_\infty)$ est complet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue qu'on notera f.

(d) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe N tel que, pour $m, n \geqslant N$ on ait, pour tout x, y et $z \in [0, 1]$, avec $x \neq y$:

$$|f_n(z) - f_m(z)| + \left|\frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_m(y))}{x - y}\right| < \varepsilon.$$

En faisant tendre m vers l'infini, on en déduit :

$$|f_n(z) - f(z)| + \left|\frac{(f_n(x) - f(x)) - (f_n(y) - f(y))}{x - y}\right| < \varepsilon,$$

donc

$$\sup_{z\in[0,1]} |f_n(z) - f(z)| + \sup_{x,y\in[0,1],x\neq y} \left|\frac{(f_n(x) - f(x)) - (f_n(y) - f(y))}{x - y}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme λ. Par ailleurs, on déduit de la seconde inégalité que, pour tout $x, y \in [0, 1]$, avec $x \neq y$: $|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(y)| < \varepsilon|x - y|$, donc que pour n assez grand $f - f_n$ appartient à $\mathcal{L}$. Or $\mathcal{L}$ est un espace vectoriel et $f_n \in \mathcal{L}$ donc f appartient à $\mathcal{L}$.

(e) Toute suite de Cauchy de $\mathcal{L}$ admet une limite dans $\mathcal{L}$ qui est donc complet.

Neuvième partie
QCM et FORMULAIRES

QCM de révisions

Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).

Logique

Question 1 *Soit l'équation* $E : x^n = 27$.

1. ☐ E *a une unique solution réelle quel que soit* $n \geqslant 1$.
2. ☐ E *a au moins une solution réelle quel que soit* $n \geqslant 1$.
3. ☐ E *a* n *solutions réelles quel que soit* $n \geqslant 1$.
4. ☐ E *a au moins* n *solutions complexes quel que soit* $n \geqslant 1$.
5. ☐ E *a exactement* n *solutions complexes quel que soit* $n \geqslant 1$.

Question 2 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$.

1. ☐ f *est injective.*
2. ☐ f *n'est pas injective.*
3. ☐ f *est surjective.*
4. ☐ f *n'est pas surjective.*
5. ☐ *La restriction de* f, $f_| : [1,2] \to [2,5]$ *est bijective.*

Question 3 *Soit* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2 + 1$.

1. ☐ f *est injective.*
2. ☐ f *n'est pas injective.*
3. ☐ f *est surjective.*
4. ☐ f *n'est pas surjective.*
5. ☐ *La restriction de* f, $f_| : [1,2] \to [2,5]$ *est bijective.*

Question 4 *Pour* $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $z = x + iy$, *on pose* $e^z = e^x \times e^{iy} = e^{x+iy}$.

1. ☐ $|e^z| = e^x$.
2. ☐ $|e^z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. ☐ *Arg* $e^z = y$.
4. ☐ *Arg* $e^z = x + y$.
5. ☐ *La fonction* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z$ *est injective.*

Question 5 *Par quoi doit on compléter les pointillés pour que les* **deux** *assertions suivantes soient vraies :*

$$z \in \mathbb{C} \quad z = \overline{z} \ldots\ldots z \in \mathbb{R} \quad ; \quad z \in \mathbb{C} \quad z^3 = -1 \ldots\ldots z = -1$$

1. ☐ $\Rightarrow$ *et* $\Leftarrow$.
2. ☐ $\Leftrightarrow$ *et* $\Leftrightarrow$.

3. ☐ $\Leftarrow$ *et* $\Leftrightarrow$.
4. ☐ $\Rightarrow$ *et* $\Rightarrow$.
5. ☐ $\Leftrightarrow$ *et* $\Leftarrow$.

Question 6 *Soit la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par* $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

1. ☐ $\exists N > 0 \quad \forall n \quad (n \geqslant N \Rightarrow x_n \geqslant 0)$.
2. ☐ $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \leqslant \varepsilon$.
3. ☐ $\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \exists n \geqslant N \ / \ x_n < 0$.
4. ☐ $\exists n \in \mathbb{N}^* \quad x_n = 0$.
5. ☐ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n \geqslant N \Rightarrow |x_n| \leqslant \varepsilon)$.

Question 7 *Soit* E *un ensemble,* $A, B \subset E$*, soit* $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$*. Les assertions suivantes sont elles vraies quels que soient* A *et* B *inclus dans* E *?*

1. ☐ $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. ☐ $A\Delta B = \complement A \cap \complement B$.
3. ☐ *Si* $B \subset A$ *alors* $A\Delta B = A$.
4. ☐ *Si* E *est un ensemble fini,* $\mathit{Card}\,(A\Delta B) \leqslant \mathit{Card}\,A + \mathit{Card}\,B$.
5. ☐ *Si* E *est un ensemble fini,* $\mathit{Card}\,(A\Delta B) < \mathit{Card}\,A + \mathit{Card}\,B$.

Question 8 *Soit la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $x_0 = 1$ *puis pour* $n \geqslant 1$ $x_n = \frac{x_{n-1}}{n}$.

1. ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 0$.
2. ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \leqslant x_n$.
3. ☐ $\exists N \in \mathbb{N} \quad \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Rightarrow x_n = c)$.
4. ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \frac{1}{2}\frac{1}{n!}$.
5. ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{n!}$.

Question 9 *On lance de façon aléatoire deux dés identiques à* 6 *faces (numérotées de* 1 *à* 6*). On ne tient pas compte de l'ordre, par exemple le tirage* 1 *puis* 5 *est le même que* 5 *puis* 1*, mais les tirages* 3 *puis* 3*, et* 3 *puis* 4 *sont distincts.*

1. ☐ *Il y a* 36 *tirages distincts possibles.*
2. ☐ *Il y a* 30 *tirages distincts possibles.*
3. ☐ *Il y a* 21 *tirages distincts possibles.*
4. ☐ *La somme des deux chiffres a plus de chances d'être* 7 *que* 2.
5. ☐ *La somme des deux chiffres a strictement plus de chances d'être* $\geqslant 11$ *que* $\leqslant 3$.

Question 10 *Soit* E *un ensemble fini de cardinal* n*, soit* $A \subset E$ *un ensemble à* p *éléments, et* $B \subset E$ *un ensemble à* q *éléments. On note* $\mathcal{S} = \{(a, b) \in A \times B \ / \ a \neq b\}$ *et* $\mathcal{T} = \{(I, b)$ *avec* $I \subset A; \mathit{Card}\, I = r; b \in B\}$.

1. ☐ *Si* $A \cap B = \emptyset$ *alors* $\mathit{Card}\,\mathcal{S} = p + q$.
2. ☐ *Si* $A \cap B = \emptyset$ *alors* $\mathit{Card}\,\mathcal{S} = pq$.
3. ☐ *Si* $A \subset B$ *alors* $\mathcal{S} = \emptyset$.
4. ☐ $\mathit{Card}\,\mathcal{T} = C_n^p \times r$.
5. ☐ $\mathit{Card}\,\mathcal{T} = C_p^r \times q$.

Arithmétique

Question 11 *Les propositions suivantes sont-elles vraies quels que soient* $l \geqslant 2$ *et* $p_1, \dots, p_l$ *des nombres premiers* > 2.

1. ☐ $p_1 p_2 \dots p_l$ *est un nombre premier.*
2. ☐ *le carré de* p_1 *est un nombre premier.*
3. ☐ $p_1 p_2 \dots p_l + 1$ *est un nombre premier.*
4. ☐ $\prod_{i=1}^{l} p_i$ *est un nombre impair.*
5. ☐ $\sum_{i=1}^{l} p_i$ *est un nombre impair.*

Question 12

1. ☐ *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *un entier, alors* $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ *est divisible par* 24.
2. ☐ *Soit* $n \geqslant 4$ *un entier pair alors* $\frac{n}{2}$ *est impair.*
3. ☐ *La somme et le produit de deux nombres pairs est un nombre pair.*
4. ☐ $a|b$ *et* $a'|b' \quad \Rightarrow \quad aa'|bb'$.
5. ☐ $a|b$ *et* $a'|b' \quad \Rightarrow \quad a + a'|b + b'$.

Question 13

1. ☐ *Le pgcd de* 924, 441 *et* 504 *est* 21.
2. ☐ 627 *et* 308 *sont premiers entre eux.*
3. ☐ *Si* $p \geqslant 3$ *est premier, alors* $p!$ *est premier.*
4. ☐ *Soit* $n \geqslant 2$ *alors* n *et* $n+1$ *sont premiers entre eux.*
5. ☐ *Soit* $n \geqslant 2$ *un entier, le pgcd de* $\{in^i \text{ pour } i = 1, \dots, 100\}$ *est* n.

Question 14

1. ☐ $ab = pgcd(a,b) \times ppcm(a,b)$.
2. ☐ $abc = pgcd(a,b,c) \times ppcm(a,b,c)$.
3. ☐ $ppcm(a,b,c)$ *est divisible par* c.
4. ☐ $ppcm(1932, 345) = 19320$.
5. ☐ $ppcm(5, 10, 15) = 15$.

Question 15

1. ☐ *Si* $a|bc$ *et* a *ne divise pas* b *alors* $a|c$.
2. ☐ *Sachant que* 7 *divise* 86419746×111 *alors* 7 *divise* 86419746.
3. ☐ *Si* $a = bq + r$ *est la division euclidienne de* a *par* b *alors* $pgcd(a,b) = pgcd(b,r)$.
4. ☐ *Il existe* $u, v \in \mathbb{Z}$ *tels que* $195u + 2380v = 5$.
5. ☐ *Sachant qu'il existe* u, v *tels que* $2431u + 65520v = 39$ *alors* $pgcd(2431, 65520) = 39$.

Question 16

1. ☐ $\exists P \in \mathbb{Z}[X]$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) > 0$.
2. ☐ $\forall P \in \mathbb{Z}[X] \quad \exists x \in \mathbb{R}\ P(x) > 0$.
3. ☐ $\forall P \in \mathbb{Q}[X] \quad x \in \mathbb{Q} \Rightarrow P(x) \in \mathbb{Q}$.
4. ☐ $\forall P \in \mathbb{C}[X]$ *de degré* $\geqslant 1 \quad \exists z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 0$.
5. ☐ *Tout polynôme de degré* 2 *est positif.*

Question 17 *Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes non nuls $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, soit $I_P = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$, soit $val(P) = \min I_P$.*

1. ☐ $val(-X^7 + X^3 + 7X^2) = 2$.
2. ☐ $val(P + Q) \geqslant \min(val(P), val(Q))$.
3. ☐ $val(P \times Q) = val(P) + val(Q)$.
4. ☐ $val(k.P) = k.val(P)$ *où* $k \in \mathbb{N}^*$.
5. ☐ *Si* $Q|P$ *alors* $val(P/Q) = val(P) - val(Q)$.

Question 18

1. ☐ $X^4 + X^3 - X^2 - X$ *est divisible par* $X(X-1)$.
2. ☐ *Le reste la division euclidienne de* $X^3 + X^2 + 3$ *par* $X - 1$ *est* $X + 4$.
3. ☐ *Le quotient de* $X^5 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1$ *par* $X^2 + 1$ *est* $X^3 + X + 1$.
4. ☐ $X - 1$ *divise* $X^n - 1$ *pour* $n \geqslant 1$
5. ☐ $X + 1$ *divise* $X^n + 1$ *pour* $n \geqslant 1$

Question 19

1. ☐ *Soit* $P \in \mathbb{C}[X]$. $X - a$ *divise* P *ssi* $P(a) = 0$.
2. ☐ *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *de degré impair. Il existe* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $P(x) = 0$.
3. ☐ *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$, *les racines de* P^2 *sont d'ordre au moins* 2.
4. ☐ *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$, x *est racine simple ssi* $P(x) = 0$.
5. ☐ *Un polynôme* $P \in \mathbb{C}[X]$ *de degré* n *a* n *racines réelles.*

Question 20

1. ☐ $X^4 + 1$ *est irréductible dans* $\mathbb{R}[X]$.
2. ☐ $X^2 + 7$ *est irréductible dans* $\mathbb{Q}[X]$.
3. ☐ $X^2 + 7$ *est irréductible dans* $\mathbb{C}[X]$.
4. ☐ *Dans* $\mathbb{Z}[X]$, $pgcd(X(X-1)^2(X^2+1), X^2(X-1)(X^2-1)) = X(X-1)$.
5. ☐ *Dans* $\mathbb{Z}[X]$, $pgcd(X^4 + X^3 + X^2 + X, X^3 - X2 - X + 1) = X + 1$.

Réels

Question 21 *Réel et rationnels*

1. ☐ $(x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}) \Rightarrow x + y \in \mathbb{Q}$
2. ☐ $(x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \Rightarrow x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
3. ☐ $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\ (\forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\ x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{Q} \mid x < z < y)$
4. ☐ $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\ (\forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\ x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid x < z < y)$
5. ☐ *Pour* $n \geqslant 3$, n *impair* $\Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Question 22 *Soient* A, B, C *des parties de* $\mathbb{R}$

1. ☐ *Si* $\sup A$ *existe alors* $\max A$ *existe.*
2. ☐ *Si* $\max A$ *existe alors* $\sup A$ *existe.*
3. ☐ *Pour* A, B *majorées et* $C \subset A \cap B$ *alors* $\sup C \leqslant \sup A$ *et* $\sup C \leqslant \sup B$.
4. ☐ *Si* $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + 1 \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ *alors* $\inf A = 0$ *et* $\sup A = 1$.

5. ☐ *Si* $B = \left\{ \frac{E(x)}{x} \mid x > 0 \right\}$ *alors* $\inf B = 0$ *et* $\sup B = 1$.

Question 23 *Limites de suites*

1. ☐ *Si* $u_n = n\sin(\frac{1}{n})$ *alors* (u_n) *tend vers* 1.
2. ☐ *Si* $u_n = \ln(\ln(n))$ *alors* (u_n) *a une limite finie.*
3. ☐ $u_n = \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$ *alors* (u_n) *tend vers* $+\infty$.
4. ☐ $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ *alors* (u_n) *diverge.*
5. ☐ $u_n = \sin(n)$, *il existe une sous-suite de* (u_n) *convergente.*

Question 24 *Suites définies par récurrence. Soit* $f(x) = 2x(1-x)$ *et la suite définie par* $u_0 \in [0,1]$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. ☐ $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in [0,1]$
2. ☐ *Quelque soit* u_0 *dans* $[0,1]$, (u_n) *est monotone.*
3. ☐ *Si* (u_n) *converge vers* ℓ *alors* $\ell = 0$ *ou* $\ell = 1$.
4. ☐ *Si* (u_n) *converge vers* ℓ *alors* $\ell = 0$ *ou* $\ell = \frac{1}{2}$.
5. ☐ *Si* $u_0 \in]0,1[$ *alors* (u_n) *ne converge pas vers* 0.

Question 25 *Fonctions continues*

1. ☐ *La somme, le produit et le quotient de deux fonctions continues est continue.*
2. ☐ *La fonction* $\sqrt{\sqrt{x}}\ln x$ *est prolongeable par continuité en* 0.
3. ☐ *Il existe* $a, b \geqslant 0$ *tels que fonction définie par* $f(x) = -e^x$ *si* $x < 0$ *et* $f(x) = ax^2 + b$ *si* $x \geqslant 0$ *soit continue.*
4. ☐ *Toute fonction impaire de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est continue en* 0.
5. ☐ *La fonction* $\frac{\sqrt{|x|}}{x}$ *est prolongeable par continuité en* 0.

Question 26 *Théorème des valeurs intermédiaires, fonctions bornées*

1. ☐ *La méthode de dichotomie est basée sur le théorème des valeurs intermédiaires.*
2. ☐ *Tout polynôme de degré* $\geqslant 3$ *a au moins une racine réelle.*
3. ☐ *La fonction* $f(x) = \frac{1}{x^3(x^2+1)}$ *admet au moins une racine réelle sur* $]-1,+1[$.
4. ☐ *Pour* $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue admettant une limite finie en* $+\infty$, f *est bornée.*
5. ☐ *Pour* $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue admettant une limite finie qui vaut* $f(0)$ *en* $+\infty$ *alors* f *est bornée et atteint ses bornes.*

Question 27 *Dérivation*

1. ☐ *La fonction* $f(x) = 1/x$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}^*$.
2. ☐ *La fonction* $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ *est continue et dérivable en* 0.
3. ☐ *La fonction définie par* $x \mapsto 0$ *si* $x \in \mathbb{Q}$ *et* $x \mapsto x^2$ *si* $x \notin \mathbb{Q}$ *est dérivable en* 0.
4. ☐ *Si* $f(x) = P(x)e^x$ *avec* P *un polynôme alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *il existe un polynôme* Q_n *tel que* $f^{(n)}(x) = Q_n(x)e^x$.
5. ☐ *Si* $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ *si* $x \in \mathbb{R}^*$ *et* $f(0) = 0$ *alors* f *est dérivable en* 0.

Question 28 *Théorème de Rolle et des accroissements finis*

1. ☐ *Si* f *est dérivable sur* $[a,b]$ *avec* $f(a) = f(b)$ *il existe un unique* $c \in]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

2. ☐ *Si f fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et $f'(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a alors f est dérivable en a et $f'(a)=\ell$.*
3. ☐ *Soit $f(x)=\ln x$ si $x>0$ et $f(0)=0$, pour $x>0$ il existe $c\in]0,x[$ tel que $\ln x=\frac{x}{c}$.*
4. ☐ *Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\lim f(x)=+1$ quand $x\to+\infty$ et $\lim f(x)=+1$ quand $x\to-\infty$ alors il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $f'(c)=0$.*
5. ☐ $\forall x>0\ e^x\leqslant xe^x+1$

Question 29 *Fonctions usuelles*

1. ☐ $\forall n\in\mathbb{N}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$
2. ☐ $\forall x\in\mathbb{R}\ \operatorname{ch}x\geqslant\operatorname{sh}x$
3. ☐ $\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$ *tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.*
4. ☐ $\operatorname{ch}2x=1+2\operatorname{sh}^2x$
5. ☐ $\operatorname{th}(a+b)=\frac{\operatorname{th}a+\operatorname{th}b}{1-\operatorname{th}a\operatorname{th}b}$

Question 30 *Fonctions réciproques*

1. ☐ *Un fonction continue $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ strictement décroissante est bijective.*
2. ☐ *Si f est une fonction continue bijective croissante alors f^{-1} est croissante.*
3. ☐ *Si f est une fonction continue bijective ne s'annulant jamais alors $(\frac{1}{f})^{-1}=f$.*
4. ☐ $\operatorname{Arcsin}(\sin x)=x$ *pour tout $x\in[0,2\pi[$.*
5. ☐ *Si $f(x)=\operatorname{Arctan}(x^2)$ alors $f'(x)=\frac{1}{1+x^4}$.*

Primitives usuelles

C désigne une constante arbitraire. Les intervalles sont à préciser.

$$\int e^{\alpha t}\,dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + C \quad (\alpha \in \mathbb{C}^*)$$

$$\int t^{\alpha}\,dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan } t + C$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{Arcsin } t + C$$

$$\int \cos t\,dt = \sin t + C$$

$$\int \sin t\,dt = -\cos t + C$$

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C$$

$$\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\text{cotan } t + C$$

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C$$

$$\int \tan t\,dt = -\ln|\cos t| + C$$

$$\int \text{cotan } t\,dt = \ln|\sin t| + C$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\alpha}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2+\alpha}\right| + C$$

$$\int \text{ch } t\,dt = \text{sh } t + C$$

$$\int \text{sh } t\,dt = \text{ch } t + C$$

$$\int \frac{dt}{\text{ch}^2 t} = \text{th } t + C$$

$$\int \frac{dt}{\text{sh}^2 t} = -\text{coth } t + C$$

$$\int \frac{dt}{\text{ch } t} = 2\text{Arctan } e^t + C$$

$$\int \frac{dt}{\text{sh } t} = \ln\left|\text{th } \frac{t}{2}\right| + C$$

$$\int \text{th } t\,dt = \ln(\text{ch } t) + C$$

$$\int \text{coth } t\,dt = \ln|\text{sh } t| + C$$

Développements limités usuels

(au voisinage de 0)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Fonctions circulaires et hyperboliques

Propriétés trigonométriques : remplacer cos par ch et sin par $i.\,\mathrm{sh}$.

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a.\cos b - \sin a.\sin b\\
\cos(a-b) &= \cos a.\cos b + \sin a.\sin b\\
\sin(a+b) &= \sin a.\cos b + \sin b.\cos a\\
\sin(a-b) &= \sin a.\cos b - \sin b.\cos a\\
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}\\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 2a &= 2.\cos^2 a - 1\\
&= 1 - 2.\sin^2 a\\
&= \cos^2 a - \sin^2 a\\
\sin 2a &= 2.\sin a.\cos a\\
\tan 2a &= \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos a.\cos b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]\\
\sin a.\sin b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]\\
\sin a.\cos b &= \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2.\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}\\
\cos p - \cos q &= -2.\sin\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2}\\
\sin p + \sin q &= 2.\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}\\
\sin p - \sin q &= 2.\sin\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(a+b) &= \mathrm{ch}\,a.\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a.\mathrm{sh}\,b\\
\mathrm{ch}(a-b) &= \mathrm{ch}\,a.\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,a.\mathrm{sh}\,b\\
\mathrm{sh}(a+b) &= \mathrm{sh}\,a.\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,b.\mathrm{ch}\,a\\
\mathrm{sh}(a-b) &= \mathrm{sh}\,a.\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,b.\mathrm{ch}\,a\\
\mathrm{th}(a+b) &= \frac{\mathrm{th}\,a + \mathrm{th}\,b}{1 + \mathrm{th}\,a.\mathrm{th}\,b}\\
\mathrm{th}(a-b) &= \frac{\mathrm{th}\,a - \mathrm{th}\,b}{1 - \mathrm{th}\,a.\mathrm{th}\,b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}\,2a &= 2.\mathrm{ch}^2 a - 1\\
&= 1 + 2.\mathrm{sh}^2 a\\
&= \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a\\
\mathrm{sh}\,2a &= 2.\mathrm{sh}\,a.\mathrm{ch}\,a\\
\mathrm{th}\,2a &= \frac{2\,\mathrm{th}\,a}{1+\mathrm{th}^2 a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}\,a.\mathrm{ch}\,b &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b)\right]\\
\mathrm{sh}\,a.\mathrm{sh}\,b &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b)\right]\\
\mathrm{sh}\,a.\mathrm{ch}\,b &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{sh}(a-b)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}\,p + \mathrm{ch}\,q &= 2.\mathrm{ch}\,\frac{p+q}{2}.\mathrm{ch}\,\frac{p-q}{2}\\
\mathrm{ch}\,p - \mathrm{ch}\,q &= 2.\mathrm{sh}\,\frac{p+q}{2}.\mathrm{sh}\,\frac{p-q}{2}\\
\mathrm{sh}\,p + \mathrm{sh}\,q &= 2.\mathrm{sh}\,\frac{p+q}{2}.\mathrm{ch}\,\frac{p-q}{2}\\
\mathrm{sh}\,p - \mathrm{sh}\,q &= 2.\mathrm{sh}\,\frac{p-q}{2}.\mathrm{ch}\,\frac{p+q}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{avec } t = \tan\frac{x}{2} \begin{cases} \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan x &= \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

$$\text{avec } t = \operatorname{th}\frac{x}{2} \begin{cases} \operatorname{ch} x &= \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \operatorname{sh} x &= \frac{2t}{1-t^2} \\ \operatorname{th} x &= \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Dérivées : la multiplication par i n'est plus valable

$$\cos' x = -\sin x$$
$$\sin' x = \cos x$$
$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\operatorname{cotan}' x = -1 - \operatorname{cotan}^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$$
$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$$
$$\operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$
$$\operatorname{coth}' x = 1 - \operatorname{coth}^2 x = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

$$\operatorname{Arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$
$$\operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$
$$\operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\operatorname{Arccotan}' x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{Argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$$
$$\operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\operatorname{Argth}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$$
$$\operatorname{Argcoth}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| > 1)$$