Chapitre II

Contexte général

« Dans ce chapitre, nous présentons l'environnement du travail et la problématique de notre sujet. »

I- Cahier des charges

II- Modèles d'ordonnancement

Introduction

Gérer un projet cela signifie traditionnellement ordonner, ordonnancer les différentes tâches qui vont permettre de mener à bien ce projet. Cette idée fait habituellement référence à des projets unitaires à lancement répétitif ou non, par exemple, la conception-fabrication des faisceaux électriques où il est nécessaire d'élabore un processus de production. Ce processus est constitué de tâches indépendantes mais qui ont des contraintes de précédences. L'ordonnancement et la planification des tâches composant un projet complexe, qui consiste à identifier dans un horizon de temps le meilleur découpage et enchaînement des tâches indispensables à la réalisation du projet, est un outil incontournable pour une gestion rationnelle de ce projet. Et ce, à travers l'établissement un planning relatif à la réalisation des différentes tâches du projet dont le suivi et le contrôle d'avancement sont simplifiés grâce aux multiples informations figurant sur le planning, à savoir la date de début au plus tôt ou au plus tard d'une tâche, la flexibilité des délais sans retarder le projet complet.

Les différents modèles, d'ordonnancement et planification des tâches, ont été développés dans la littérature, on trouve notamment le diagramme GANTT, le réseau PERT (Program Evaluation and Review Technique), la méthode CPM (Critical Path Method) et la méthode MPM (Méthode des Potentiels Métra). Nous nous intéressons ici plus au réseau PERT, que nous avons utilisé pour établir un planning de pilotage sur un exemple industriel concret dans le chapitre 3.

L'établissement du planning de pilotage conduit à considérer un graphe valué possédant une entrée (début des travaux) et une sortie (fin des travaux), dans lequel tout arc représente une tâche, auquel on associé la durée de réalisation de cette tâche. Nous verrons par la suite que l'ordonnancement des tâches est modélisé par un problème de plus long chemin dans ce graphe et que la détermination de cet ordonnancement revient à déterminer les plus long chemins reliant le sommet "début" et les autres sommets de ce graphe.

Donc, ce chapitre donne la problématique de notre sujet, et les objectifs d'ordonnancement, et aussi les modèles d'ordonnancement et planification pour la résolution du problème de stage.

I. Cahier des charges

1. Contexte

Les retards apportées aux réalisations de projets aux livraisons ponctuelles aux clients dus en général à :

- La mauvaise conception du produit à fabriquer,
- La mauvaise gestion des stocks,

- La fixation arbitraire d’un calendrier de fin des travaux sans rapport ni avec l’évolution réelle des différentes tâches ni avec les moyens dont on dispose effectivement,
- Le manque de coordination entre les responsables des opérations concernant l’ordre de passage des différentes tâches et leur fin,

Donc les apports d’une meilleure organisation des tâches sont une réduction des stocks et des temps de production ainsi qu’une diminution du coût de fabrication, moins de dommages et des pertes, et une plus grande flexibilité grâce à une organisation autour des processus.

Alors, quel est le temps nécessaire pour réaliser l’ensemble du projet ? Et quelles sont les tâches critiques qui ne prennent pas de retard ? A quel moment doit-on lancer une tâche ? Et quelle flexibilité pourrions-nous se permettre sur ce lancement? Autant de questions sur lesquelles l'ordonnancent et la planification des tâches apportent des réponses détaillées.

2. Problématique

Le problème qui se pose c’est de déterminer un calendrier d'exécution de toutes les tâches du projet, respectant les contraintes de précédence, de manière à terminer les travaux dans les meilleurs délais. Egalement, il faudra avoir un calendrier comprenant suffisamment d'informations afin qu'il servira comme un outil d'aide pour le contrôle de l'avancement du projet et le respect des délais.

3. Intérêts de l’ordonnancement et la planification

L’ordonnancement et la planification des tâches composant un projet complexe sont devenues des outils incontournables dans la gestion des projets, notamment les projets de grande envergure. Elles consistent à :

- ✓ Planifier et piloter la réalisation d’un projet,
- ✓ Améliorer l’organisation des ateliers,
- ✓ Prévoir la chronologie du déroulement des tâches,
- ✓ Organiser et optimiser l’utilisation des outils disponibles,
- ✓ Augmenter le rendement de chaque tâche dans la zone de production,
- ✓ Garantir la réalisation des projets dans les temps prévus,
- ✓ Définir le suivi des échéances afin de contrôler l’avancement et la fin des tâches, et prendre en compte les écarts entre les prévisions et les réalisations.

II. Modèles d'ordonnancement

Un **ordonnancement** est un calendrier possible pour la réalisation de toutes les tâches du projet, et ce en respectant les contraintes de précédences. Lorsque ce calendrier conduit à la durée totale la plus courte on dit l'**ordonnancement est optimal**.

Dans la perspective de répondre aux besoins des entreprises en termes d'amélioration de la gestion des projets, plusieurs techniques ont été développées dans la littérature, nous allons donner au-dessous, les plus pertinents modèles d'ordonnancement et planification.

1. Méthode PERT

C'est une modélisation du problème central de l'ordonnancement par un graphe, elle permet d'évaluer la durée de réalisation d'un projet complexe et de détecter les parties de ce projet ne supportant aucun retard. Ce graphe porte le nom de graphe PERT (**P**rogram **E**valuation and **R**eview **T**echnique) ou graphe potentiel-étape. Nous donnons ici quelques éléments sur cette modélisation.

Dans cette représentation, les arcs sont associés aux tâches; ils sont valués par la durée des tâches, et les sommets représentent certains événements qui regroupent en général la fin de certaines tâches et le début d'autres.

1.1. Modélisation en graphe

Le graphe orienté et valué G = (X, U) (un graphe où chaque arc de U est associée une valeur réelle de la durée d'une tâche) défini par :

- A chaque tâche x on associe un sommet $i \in X$ de départ et un sommet $j \in X$ de fin tel que $i < j$.
- On définira un arc (i, j) de longueur $d_{i,j}$ pour chaque tâche x avec $d_{i,j}$ la durée d'exécution de la tâche.

Le graphe reflète les précédences requises dans l'exécution des différentes tâches du projet. Ce graphe est sans circuit du fait que l'existence d'un circuit impliquerait une contradiction dans les précédences; une tâche devant en même temps précéder et succéder à une autre. Il est moins facile à représenter ; il faut définir les événements correspondant aux sommets. Certaines contraintes de succession nécessitent l'introduction de tâches fictives. Enfin, la prise en compte de contraintes qui ne sont pas des contraintes de succession peut être plus délicate.

Supposons par exemple que l'on ait les tâches suivantes A, B, C, D avec :

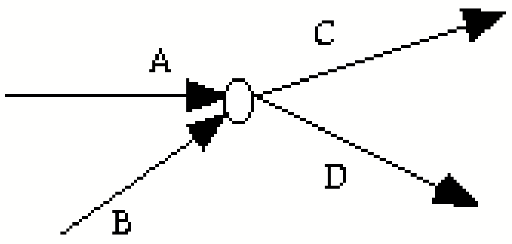
A précède C et D

B précède D

A ces 4 tâches sont associés 4 arcs : A, B, C, D.

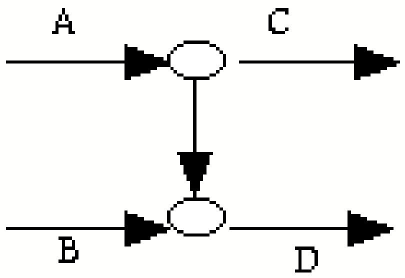
A précède C et D se traduit par : l'extrémité de l'arc correspondant à la tâche A coïncide avec l'origine de l'arc correspondant à la tâche C et avec l'origine de l'arc correspondant à la tâche D.

B précède D est traduit par : l'extrémité de l'arc correspondant à la tâche B coïncide avec l'origine de l'arc correspondant à la tâche D. Cela peut conduire à la représentation suivante :



Dans cette représentation, C et D ont même origine ce qui impose la contrainte : B précède également C qui n'était pas dans les données du problème.

Il faut alors introduire une **tâche fictive** de longueur 0.



1.2. Ordonnancement au plus tôt

On appelle **date de début au plus tôt** d'une tâche la plus petite date à laquelle elle peut être lancée.

Le calendrier de l'ensemble des tâches est appelé **"ordonnancement au plus tôt".**

<u>Proposition 1</u>

La date de début au plus tôt d'une tâche est égale à la longueur du plus long chemin entre le sommet "début" et le sommet représentant cette tâche dans le graphe.

<u>Preuve</u>

A chaque **contrainte de précédence** on associe un arc (i, j) : la contrainte $t_j \geq t_i + d_{i,j}$ est associée l'arc (i, j) de **longueur** $d_{i,j}$, où t_i représente la date de début de la tâche i.

Si on additionne ces inégalités pour tous les arcs du chemin, on arrive à $t_i \geq t_{début\ +}$ somme des longueurs des arcs de n'importe quel chemin reliant le sommet début et au sommet i.
Comme $t_{début} = 0$, on en déduit que la date de début de la tâche i est au moins égale à la longueur du plus long chemin.

Ce résultat est vrai pour tous les chemins reliant le sommet "début" au sommet i, la date de début au plus tôt de la tâche i est égale à la longueur du plus long chemin du sommet "début" au sommet i.

Remarque

Si on considère le sommet "fin" associé à la fin des travaux, la date t_{Fin} qui représente la durée des travaux est au moins égale à la longueur de n'importe quel chemin du sommet "début" au sommet "fin", donc au plus long d'entre eux.

Calcul des dates au plus tôt

D'après la proposition précédente, le calcul des dates au plus tôt revient à calculer celui de la longueur d'un plus long chemin. On peut donc utiliser les algorithmes adaptés à la détermination de plus longs chemins.

Nous allons nous intéresser aux algorithmes qui permettent la détermination des plus longs chemins sur un graphe orienté, valué et sans circuit dans la section suivante.

1.3. Ordonnancement au plus tard

Il s'agit en l'occurrence de déterminer la date à laquelle chacune des tâches doit impérativement avoir commencé si on veut que la durée totale des travaux soit respectée.

Définition

On appelle **date de début au plus tard** d'une tâche la date à laquelle elle doit impérativement avoir commencé afin que la date de fin de travaux soit respectée.

Le calendrier correspondant est l'**ordonnancement au plus tard.**

Proposition 2

La date de début au plus tard d'une tâche est égale à la différence entre la date de fin des travaux et la longueur du plus long chemin du sommet représentant cette tâche dans le graphe au sommet "fin".

Calcul des dates au plus tard

Pareillement au calcul de date au plus tôt, le calcul des dates au plus tard revient à un calcul de plus long chemin dans un graphe valué. Plus précisément, on détermine, en suivant un ordre de sommet décroissant, le plus long chemin entre chaque sommet i et le sommet "fin" à l'aide d'un algorithme du plus long chemin. On en déduit ensuite la date au plus tard par une simple soustraction (d'après la proposition 2).

1.4. Marges libres et marges totales

Définition

La **marge libre** d'une tâche représentera concrètement le retard maximal qu'on pourra prendre dans la réalisation d'une tâche sans retarder le début des tâches suivantes, on la notera **ML**.

La **marge totale** d'une tâche représentera concrètement le retard maximal qu'on pourra prendre dans la réalisation d'une tâche sans retarder l'ensemble du projet, on la notera **MT**.

Calcul des marges

Soit ij la tâche allant du sommet i au sommet j, donc la marge libre et la marge totale d'une tâche ij sont calculer respectivement :

$$ML_{ij} = t_j - t_i - d_{ij}$$

$$MT_{ij} = T_j - t_i - d_{ij}$$

1.5. Tâches critiques et chemins critiques

On qualifiera de **critique**, une tâche dont la marge totale est nulle, c'est en quelque sorte une tâche "urgente", une tâche sur laquelle il ne faut pas prendre de retard si l'on ne veut pas augmenter la durée totale du projet.

Le **chemin critique** est le plus long chemin du sommet "début" au sommet "fin". Il est constitué des arêtes associées à des tâches critiques. Il n'est pas nécessairement unique.

2. Diagramme de Gantt

Le diagramme de Gantt, couramment utilisé en gestion de projet, est l'un des outils les plus efficaces pour représenter visuellement l'état d'avancement des différentes activités (tâches) qui constituent un projet.

- Chaque tâche est représentée par une barre de longueur proportionnelle à sa durée.
- Les contraintes de succession entre tâche sont matérialisées par des flèches.

Si les tâches sont positionnées à leur date de début au plus tôt, on dit que les tâches sont calées à gauche.

On constate sur ce diagramme qu'il est possible de déplacer les tâches A, C et F tout en respectant les contraintes de succession sans retarder la fin des travaux.

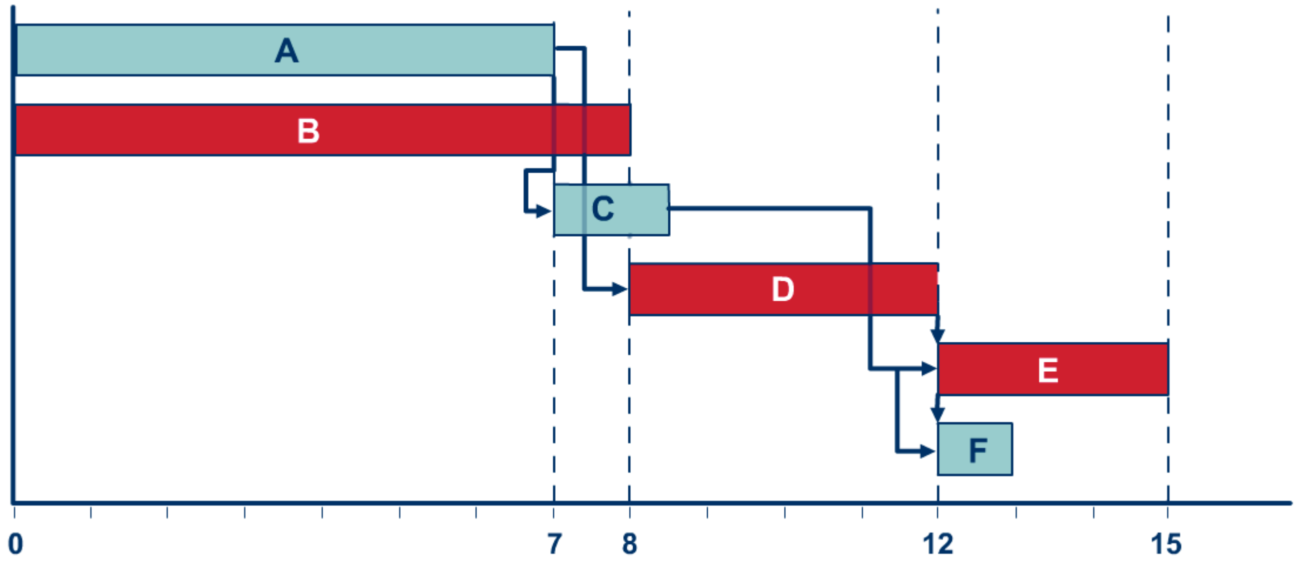


Figure 6 : Exemple de diagramme de Gantt.

Ce diagramme permet donc de visualiser d'un seul coup d'œil :

- Les différentes tâches à envisager
- La date de début et la date de fin de chaque tâche
- La durée escomptée de chaque tâche
- Le chevauchement éventuel des tâches, et la durée de ce chevauchement
- La date de début et la date de fin du projet dans son ensemble

En résumé, un diagramme de Gantt répertorie toutes les tâches à accomplir pour mener le projet à bien, il indique la date à laquelle ces tâches doivent être effectuées (le planning).

3. Méthode des Potentiels Métra (MPM)

Définition

La Méthode des Potentiels et antécédents Métra (MPM) est une méthode d'ordonnancement basée sur la théorie des graphes, et visant à optimiser la planification des tâches d'un projet. Semblable au PERT, les principales différences entre les deux méthodes reposent essentiellement dans la construction du graphe.

Les conditions préalables à la construction du graphe MPM

La méthode MPM suit une démarche logique qui impose au préalable de satisfaire les étapes suivantes :

- Etablir une liste des tâches à réaliser et déterminer la durée de chaque tâche.
- Pour chacune des tâches, déterminer les tâches précédentes (relations d'antécédence et de succession).

- Identifier les tâches dépendantes (qui ne peuvent commencer que si certaines autres tâches sont exécutées partiellement ou terminées).
- Identifier les tâches pouvant être réalisées simultanément (sous réserve d'une disponibilité des ressources nécessaires).

Modélisation en graphe

Le graph MPM se présente tel qu’il suit :

- Chaque tâche est représentée par un sommet, et les arcs entre les sommets traduisent uniquement les relations d'antériorité des tâches.
- chaque tâche (ou sommet) est renseignée sur la date à laquelle elle peut commencer au plus tôt (date de début au plus tôt) et terminer au plus tard (date de fin au plus tard) pour respecter le délai optimal de réalisation du projet.
- A chaque arc est associée une valeur numérique qui représente soit une durée d’opération, soit un délai, et la longueur des arcs n’est pas proportionnelle à cette durée.
- le graphe commence et termine sur 2 sommets, respectivement appelés « Début » et « Fin » symbolisant les début et fin des opérations. Ces deux sommets ne correspondent pas une tâche.
- Le graphe se lit de gauche à droite (du sommet "DÉBUT" à celui de "FIN").

4. Méthode CPM

La méthode CPM (Critical Path Method) est une technique de schématisation d’un ensemble d’activités (un réseau d’activités) sous forme de diagramme fléché ou les boîtes (ou nœuds) représentent les activités et les flèches les relations logiques entre les activités. CPM est une technique d’analyse dont le but est d’identifier le chemin critique, c’est-à-dire la série d’activités sur lesquelles le Project Manager devra focaliser son attention en termes de contrôle de délais et de respect des jalons. En effet, c’est le chemin critique qui représente le risque le plus important en termes de décalage projet. Cette technique d’analyse se déroule en 3 étapes :

1) Calculer la date de fin du projet.
2) Calculer les marges possibles de décalage de chaque activité du projet sans que cela ne décale la date de fin du projet lui-même.
3) Identifier les activités critiques, c’est-à-dire les activités pour lesquelles un décalage entraîne un décalage de l’ensemble du projet.

5. Algorithmes de plus long chemin

Nous avons vu que l'établissement d'un calendrier optimal, en adoptant le modèle PERT, nécessite la résolution des deux problèmes d'ordonnancement (au plus tôt et au plus tard) et que eux-mêmes se ramènent à la détermination des plus longs chemins sur un graphe orienté, valué (avec des poids positifs) et sans circuit. Ce paragraphe est consacré aux algorithmes qui permettent de déterminer ces plus longs chemins.

5.1. Algorithme de Ford

5.1.1. Cas générale

G=(X,U) un graphe valué avec X={x_0, x_1, x_2, ….., x_n}

Déterminer la longueur du plus long chemin de x_0 à tout autre sommet x_i de G

On associe à tout sommet x_i une pondération (poids) λ_i.

Initialisation : Prendre : $\lambda_0 = 0$

Et : $\lambda_i = -\infty$ pour tout $i \neq 0$.

Itération de base: Étant donné l'arc (x_i , x_j) de G

Si $\lambda_i + l(x_i , x_j) > \lambda_j$ Alors faire $\lambda_j = \lambda_i + l(x_i , x_j)$

Répéter l'itération de base jusqu'à la stabilisation de toutes les pondérations λ_i.

Fin.

Remarque 1 : On démontre qu'à la fin de l'algorithme, la pondération λ_i représente la longueur du plus long chemin du sommet x_0 au sommet x_i. En plus, ce résultat est valable indépendamment des signes des valeurs des arcs.

Remarque 2 : Si on effectue l'initialisation $\lambda_i = +\infty$ (pour $i \neq 0$), et on remplace la condition de l'itération de base par : « Si $\lambda_i + l(x_i , x_j) < \lambda_j$ Alors faire $\lambda_j = \lambda_i + l(x_i , x_j)$ »

Alors λ_i représente la longueur du plus court chemin.

Remarque 3 : L'algorithme de Ford est général, mais ne précise pas l'ordre du parcourt des arcs du graphe. Le parcourt des arcs de G peut se réaliser en visitant tous les sommets de G (dans un ordre donné) et puis en parcourant les arcs incidents vers l'extérieur (ou l'intérieur) de chaque sommet visité.

5.1.2. Cas d'un graphe sans cycle

Remarque : Si x_0 est un point entré de G=(X, U) et si l'on parcourt les sommets de G dans un ordre topologique, les pondérations se stabilisent à la fin du premier parcourt.

L'algorithme de FORD de plus long chemin devient :

- Prendre $\lambda_0 = 0$
- Parcourir les sommets de G suivant un ordre topologique. Pour chaque sommet x_i visité faire : $\lambda_j = \text{Max}(\lambda_i + l(x_i, x_j))$ tel que : $x_i \in U^-(x_j)$ ' Prédécesseurs de x_j '

Fin.

5.2. Algorithme de Moore-DIJKSTRA (ou DANTZIG)

Considérons sur le graphe G = (X,U) le sommet de départ x_1, le sommet d'arrivée x_n et déterminons pour tout sommet x_i un nombre $\lambda(x_i)$, qui sera la distance (respectivement le temps) minimale d'arrivée en x_i.

Etape 0. Au début, on pose $\lambda(x_i) = 0$, $A_1 = \{x_1\}$

Etape 1. Supposons qu'a la $K^{ème}$ itération, on ait défini la fonction λ sur un ensemble $A_k = \{x_1, \ldots, x_k\}$;

On associera à chaque sommet $x_j \in A_k$ un sommet $y_j \notin A_k$ tel que : $(x_j , y_j) \in U$ et tel que : la longueur $l(x_j , y_j)$ soit minimale.

Etape 2. On cherchera le sommet $x_q \in A_k$ tel que : $\lambda(x_q) + l(x_q , y_q) = \min(\lambda(x_j) + l(x_j , y_j))$

On suppose alors $A_{k+1} = A_k \cup \{y_q\}$

$\lambda(y_q) = \lambda(x_q) + l(x_q , y_q)$

Etape 3. On revient à l'étape 1 jusqu'à atteindre x_n (si l'on veut seulement déterminer le chemin de valeur minimal entre x_1 et x_n.

Fin

Remarque 1 : L'algorithme de DANTZIG est valable lorsque les valuations des arcs sont positives.

Remarque 2 : Il n'est pas possible de transformer cet algorithme en un algorithme pour la détermination les longueurs des plus longs chemins.

Conclusion

Plusieurs modèles d'ordonnancement et de planification des tâches d'un projet ont été exposés ; le réseau PERT, le Diagramme de GANTT, et les modèles MPM et CPM. Les étapes nécessaires à la construction du réseau PERT ont été données en détail, la détermination des plus longs chemins est l'étape la plus difficile. Nous avons présenté l'algorithme de Ford qui permet la résolution d'un problème de plus long chemin entre deux sommets sur un graphe valué sans cycle.

Nous allons mettre en pratique, dans le chapitre suivant, ses aspects théoriques afin de réaliser un calendrier d'un projet de production de faisceau électrique au sein de l'entreprise SEWS CABIND Maroc.