

## Chapitre 2 Elément poutre multifibre

## 2.1. Introduction

Les modèles « classiques » E.F. sont des outils puissants pour la simulation du comportement non linéaire des parties complexes des structures (joints, assemblages, ...), leur application à la totalité d'une structure peut s'avérer peu pratique à cause d'un temps de calcul prohibitif ou de la taille mémoire nécessaire à la réalisation de ce calcul. Par contre, une modélisation de type poutre multifibre (voir [Figure 2.1]), possède les avantages des hypothèses simplificatrices d'une cinématique de type poutre d'Euler Bernouli ou Timoschenko tout en offrant une solution pratique et efficace pour une analyse non linéaire complexe d'éléments de structures composites tels que ceux que l'on peut rencontrer par exemple en béton armé. De plus, cette modélisation "intermédiaire" est relativement robuste et peu coûteuse en temps de calcul du fait de l'utilisation de modèles de comportement non linéaires 1D [19].

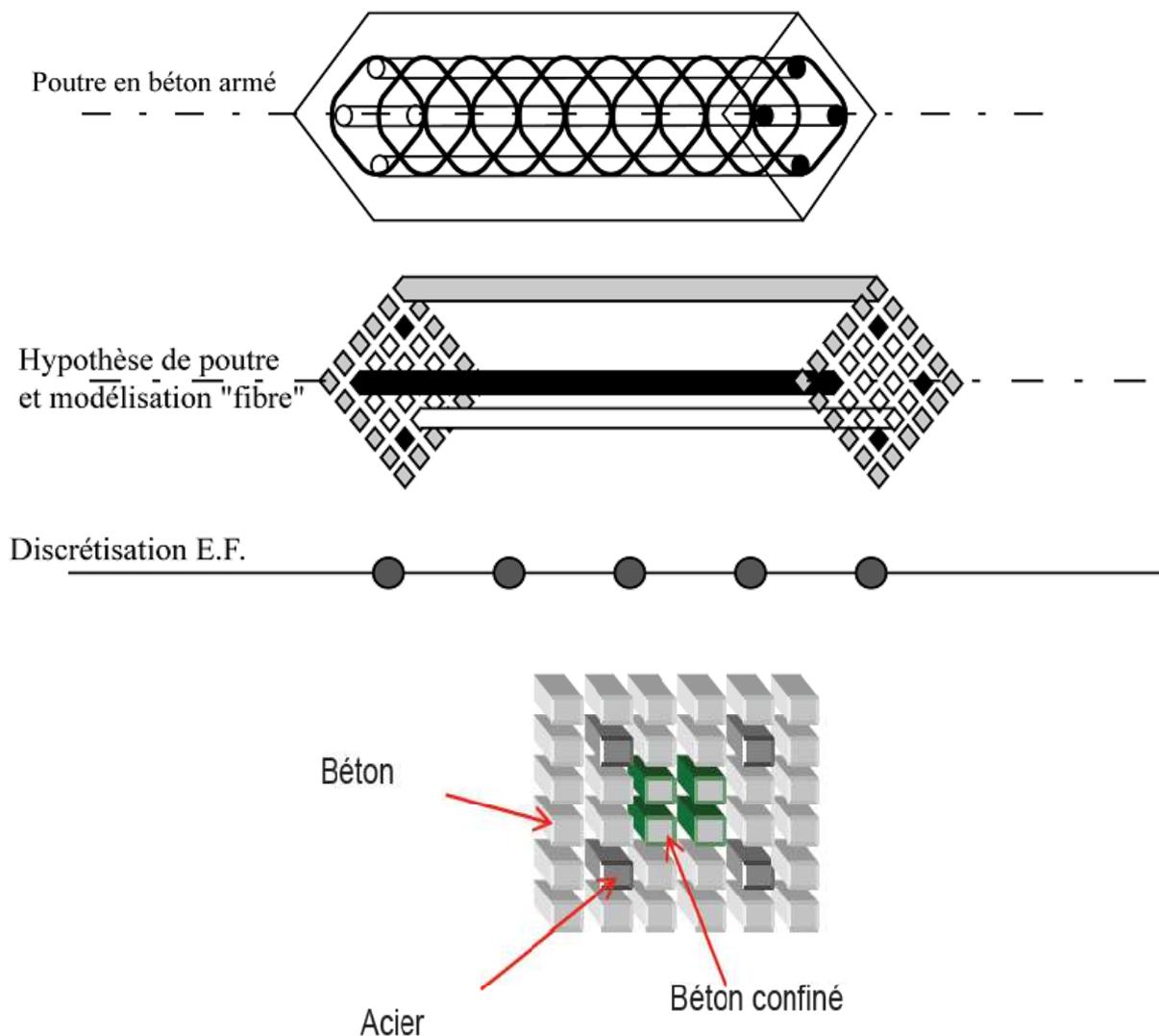


Figure 2.1 : Description d'une modélisation de type poutre multifibre [19]

## 2.2. Élément de la théorie des poutres [19] [20] [21]

Soit une poutre droite 3D de longueur  $L$  (figure 2.2) orientée selon la direction  $x$  et soumise à des efforts distribués  $q_y$ ,  $q_z$ .

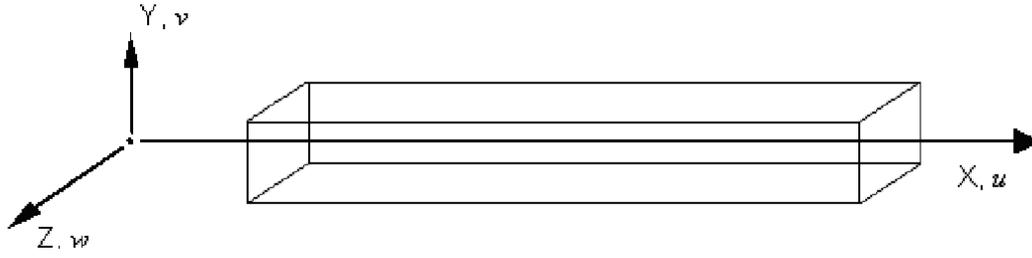


Figure 2.2 Poutre d'Euler 3D

L'hypothèse des sections planes (théorie Timoshenko) permet d'exprimer les déplacements  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  d'un point quelconque de la poutre en fonction des déplacements  $u_s$ ,  $v_s$ ,  $w_s$  d'un point situé sur l'axe de référence  $x$  et des déplacements dus aux rotations

$\theta_{sx}$ ,  $\theta_{sy}$ ,  $\theta_{sz}$  de la section  $S$  :

$$u(x, y, z) = u_s(x) - y\theta_{sz}(x) + z\theta_{sy}(x) \quad (2.1)$$

$$v(x, y, z) = v_s(x) - z\theta_{sx}(x) \quad (2.2)$$

$$w(x, y, z) = w_s(x) + y\theta_{sx}(x) \quad (2.3)$$

Le champ des déformations prend alors la forme suivante

$$\epsilon_{xx} = u'_s(x) - y\theta'_{sz}(x) + z\theta'_{sy}(x) \quad (2.4)$$

$$2\epsilon_{xy} = v'_s(x) - \theta_{sz}(x) - z\theta'_{sx}(x) \quad (2.5)$$

$$2\epsilon_{xz} = w'_s(x) + \theta_{sy}(x) + y\theta'_{sx}(x) \quad (2.6)$$

En introduisant le principe des travaux virtuels dans l'équation (2.1) et (2.6) on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{V_0} (\delta\epsilon_{xx} \cdot \sigma_{xx} + 2\delta\epsilon_{xy} \cdot \sigma_{xy} + 2\delta\epsilon_{xz} \cdot \sigma_{xz}) dV_0 &= \int_0^L (\delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx \\ \Leftrightarrow \int_0^L (N\delta u'_s(x) + T_y\delta\beta_{sy}(x) + T_z\delta\beta_{sz}(x) + M_x\delta\theta'_{sx}(x) + M_y\delta\theta'_{sy}(x) + M_z\delta\theta'_{sz}(x)) \\ &= \int_0^L (\delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx \end{aligned} \quad (2.7)$$

Avec :

L'effort normal :

$$N = \int_S \sigma_{xx} dS \quad (2.8)$$

Les efforts tranchants :

$$T_y = \int_S \sigma_{xy} dS ; \quad T_z = \int_S \sigma_{xz} dS \quad (2.9)$$

Les moments de flexion :

$$M_y = \int_S z \sigma_{xx} dS ; \quad M_z = \int_S -y \sigma_{xx} dS \quad (2.10)$$

Le moment de torsion :

$$M_x = \int_S (-z \sigma_{xy} + y \sigma_{xz}) dS \quad (2.11)$$

$$\beta_{sy}(x) = v'_s(x) - \theta_{sz}(x) ; \quad \beta_{sz}(x) = w'_s(x) + \theta_{sy}(x) \quad (2.12)$$

La théorie des poutres et les équations d'élasticité donnent:

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} ; \quad \sigma_{xy} = 2G \cdot \varepsilon_{xy} ; \quad \sigma_{xz} = 2G \cdot \varepsilon_{xz} ; \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \quad (2.13)$$

Avec  $E$  le module de Young de la section et  $G$  le module de cisaillement.

Dans le cadre de la théorie d'Euler - Bernoulli (les sections planes restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre), les équations précédentes prennent la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_s(x) - y\theta_{sz}(x) + z\theta_{sy}(x) \quad (2.14)$$

$$v(x, y, z) = v_s(x) \quad (2.15)$$

$$w(x, y, z) = w_s(x) \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_{xx} = u'_s(x) - y\theta'_{sz}(x) + z\theta'_{sy}(x) \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = 0 \quad (2.18)$$

Contrairement à la poutre Timochenko, la poutre Euler - Bernoulli néglige les déformations dues au cisaillement (équation 2.18). En appliquant le principe des travaux virtuels, nous obtenons finalement :

$$\int_0^L (N\delta u'_s(x) + M_y\delta\theta'_{sy}(x) + M_z\delta\theta'_{sz}(x)) dx = \int_0^L (\delta v_s(x)q_y + \delta w_s(x)q_z) dx \quad (2.19)$$

Avec :

$$N = \int_S \sigma_{xx} dS ; \quad M_y = \int_S z \sigma_{xx} dS ; \quad M_z = \int_S -y \sigma_{xx} dS \quad (2.20)$$

Le moment de torsion  $M_x$  et les efforts tranchants  $T_y$  et  $T_z$  ne peuvent pas être calculés par intégration des contraintes de cisaillement puisque ces dernières sont négligées. Dans la suite nous présentons en détail plusieurs éléments finis poutre multifibre existants dans la littérature basées sur la théorie de Timoshenko ou d'Euler - Bernoulli.

### 2.3. Élément fini poutre multifibre Timoshenko à deux noeuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur [20] [21] [22]

Prenons une poutre Timoshenko 3D à 2 noeuds, de longueur  $L$ , soumise à des efforts distribués  $q_y$  et  $q_z$  (figure 2.2).  $S$  est la section de la poutre discrétisée en fibres de coordonnées  $y, z$ . Nous présentons ici une généralisation où l'axe de référence choisi pour la poutre est indépendant de toute considération géométrique, inertielle ou mécanique.

La discrétisation en éléments "exacts" de poutre s'effectue sur un élément linéique à deux noeuds et six degrés de liberté par noeuds. Ces degrés de liberté sont les trois translations  $u, v, w$  et les trois rotations  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  [Figure 2.3].

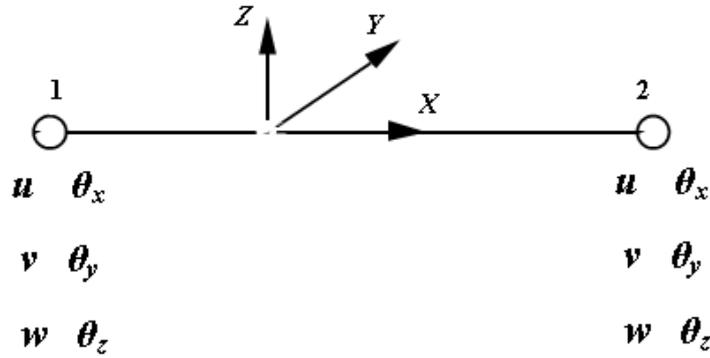


Figure 2.3 : Élément poutre

Pour chaque nœud, on stocke d'abord les grandeurs liées aux trois translations, puis celles liées aux trois rotations. Par exemple, un vecteur déplacement sera structuré de la manière suivante :

$$\{U^T\} = \{u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2}\} \quad (2.21)$$

### 2.3.1 Fonctions d'interpolation

Nous considérons le champ de déplacements continus en tout point de la ligne moyenne  $x$  en fonction du champ de déplacements discrétisés :

$$U_s = [N] \cdot \{U\} \quad (2.22)$$

$$\text{Avec } \{U_s\}^T = \{u_s(x) \ v_s(x) \ w_s(x) \ \theta_{sx}(x) \ \theta_{sy}(x) \ \theta_{sz}(x)\} \quad (2.23)$$

Le choix des fonctions d'interpolation  $[N]$  conditionne la performance numérique de l'élément. Le phénomène du blocage par cisaillement (apparition de rigidité 'parasite' quand l'élément est élancé) est présent dans tous les éléments finis de poutre Timoshenko où les déplacements transversaux et les rotations sont discrétisés séparément [Stolarski et al. 1983].

Afin d'affranchir ce problème, la formulation présentée ci-dessous opte pour une interpolation polynomiale de degré supérieur pour les déplacements transversaux (par exemple cubique) et les rotations (par exemple quadratique) qui ne sont plus indépendants. Ce type d'approche conduit à des éléments finis à plus de deux nœuds (deux nœuds aux extrémités + des nœuds intérieurs), [Ibrahimbegovic et al. 1992] ou à des éléments finis à deux nœuds dont les fonctions d'interpolation dépendent des propriétés des matériaux [De Ville de Goyet 1989], [Friedman et al. 1993], [Kotronis et al. 2004, 2005], [Mazars et al. 2006]. Dans cette dernière formulation les fonctions d'interpolation prennent la forme suivante :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3^* & 0 & -N_4^* & 0 & 0 & 0 & N_5^* & 0 & -N_6^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_7^* & 0 & N_8^* & 0 & 0 & 0 & -N_9^* & 0 & N_{10}^* & 0 \\ 0 & N_7 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & N_9 & 0 & 0 & 0 & N_{10} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (2.25)$$

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad (2.26)$$

$$N_3 = \frac{1}{1+\phi} \left\{ 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \phi \left( \frac{x}{L} \right) + 1 + \phi \right\} \quad (2.27)$$

$$N_4 = \frac{L}{1+\phi} \left\{ \left( \frac{x}{L} \right)^3 - \left( 2 + \frac{\phi}{2} \right) \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \left( 1 + \frac{\phi}{2} \right) \left( \frac{x}{L} \right) \right\} \quad (2.28)$$

$$N_5 = -\frac{1}{1+\phi} \left\{ 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \phi \left( \frac{x}{L} \right) \right\} \quad (2.29)$$

$$N_6 = \frac{L}{1+\phi} \left\{ \left( \frac{x}{L} \right)^3 - \left( 1 - \frac{\phi}{2} \right) \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \frac{\phi}{2} \left( \frac{x}{L} \right) \right\} \quad (2.30)$$

$$N_7 = \frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \left( \frac{x}{L} \right) \right\} \quad (2.31)$$

$$N_8 = \frac{L}{1+\phi} \left\{ 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - (4+\phi) \left( \frac{x}{L} \right) + (1+\phi) \right\} \quad (2.32)$$

$$N_9 = -\frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \left( \frac{x}{L} \right) \right\} \quad (2.33)$$

$$N_{10} = \frac{1}{(1+\phi)} \left\{ 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - (2-\phi) \left( \frac{x}{L} \right) \right\} \quad (2.34)$$

$$N_i^* = N_i (\phi^*) \quad (2.35)$$

Les rapports entre la rigidité de flexion et la rigidité de cisaillement dans les axes y et z deviennent :

$$\phi = \frac{12}{L^2} \left( \frac{\int_S E y^2 dS}{\int_S G dS} \right) \quad (2.36)$$

$$\phi^* = \frac{12}{L^2} \left( \frac{\int_S E z^2 dS}{\int_S G dS} \right) \quad (2.37)$$

### 2.3.2 Matrices de rigidités

La relation entre les forces et les déformations « généralisées » dans la section prend la forme suivante [Guedes et al. 1994] :

$$\{F\} = [K_s] \cdot \{D\} \quad (2.38)$$

Avec :

$$\{F\}^T = \{N, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z\} \quad (2.39)$$

$$\{D\}^T = \{u'_s(x), v'_s - \theta_{sz}(x), w'_s + \theta_{sy}(x), \theta'_{sx}(x), \theta'_{sy}(x), \theta'_{sz}(x)\} \quad (2.40)$$

La matrice de rigidité de la section devient finalement :

$$[K_S] = \begin{bmatrix} K_{S11} & 0 & 0 & 0 & K_{S15} & K_{S16} \\ & K_{S22} & 0 & K_{S24} & 0 & 0 \\ & & K_{S33} & K_{S34} & 0 & 0 \\ & & & K_{S44} & 0 & 0 \\ Sym & & & & K_{S55} & K_{S56} \\ & & & & & K_{S66} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$K_{S11} = \int_S EdS ; K_{S15} = \int_S EzdS ; K_{S16} = - \int_S EydS ; K_{S22} = k_y \int_S GdS \quad (2.42)$$

$$K_{S24} = -k_y \int_S GzdS ; K_{S33} = k_z \int_S GdS ; K_{S34} = k_z \int_S GydS \quad (2.43)$$

$$K_{S44} = \int_S G(k_z y^2 + k_y z^2) dS ; K_{S55} = \int_S Ez^2 dS \quad (2.44)$$

$$K_{S56} = - \int_S EyzdS ; K_{S66} = \int_S Ey^2 dS \quad (2.45)$$

Les variables  $k_y$  et  $k_z$  sont les coefficients de correction de cisaillement de la section définies dans [Cowper 1966]. L'introduction des équations 2.38 à 2.45 dans le principe des travaux virtuels conduit à :

$$\int_0^L \delta \{D\}^T [K_S] \{D\} dx = \int_0^L (\delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx \quad (2.46)$$

La déformation généralisée est calculée par :

$$\{D\} = [B] \cdot \{U\} \quad (2.47)$$

Avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_3 - N_7 & 0 & 0 & 0 & N'_4 - N_8 & 0 & N'_5 - N_9 & 0 & 0 & 0 & N'_6 - N_{10} \\ 0 & 0 & N'_3 - N_7 & 0 & -N'_4 + N_8 & 0 & 0 & 0 & N'_5 - N_9 & 0 & -N'_6 + N_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_7 & -N'_7 & 0 & N'_8 & 0 & 0 & 0 & -N'_9 & 0 & N'_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_8 & 0 & N'_9 & 0 & 0 & 0 & N'_{10} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

La matrice de rigidité de l'élément est finalement donnée par :

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T [K_S] [B] dx \quad (2.49)$$

### 2.3.3 Intégration dans le cas non-linéaire (matrice de rigidité)

Lorsque le comportement du matériau est non linéaire, pour permettre une intégration correcte des efforts internes, il est nécessaire d'avoir au moins deux points d'intégration le long de la poutre. On utilise deux points de Gauss. La matrice de rigidité est calculée avec l'équation suivante :

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T \cdot [K_S] \cdot [B] dx = J \sum_{i=1}^2 w_i [B(x_i)]^T \cdot K_S \cdot [B(x_i)] \quad (2.50)$$

Où :  $x_i$  est la position du point de Gauss  $i$  dans un élément de référence de longueur 1, c'est-à-dire :

$$1 \mp \frac{0.5773502698963}{2}$$

$w_i$  est le poids du point de Gauss  $i$ . On prend ici  $w_i = 0.5$  pour chacun des 2 points ;  $J$  est le Jacobien.

Cette formule est utilisée également avec les autres types de poutre multifibre que nous présentons dans la suite.

### 2.3.4 Matrices de masse

Le travail virtuel des efforts d'inertie et la matrice de masse de la section prennent la forme suivante [Guedes et al. 1994] :

$$W_{int} = \int_0^L \int_S \rho \left( \delta u(x, y, z) \cdot \frac{d^2 u(x, y, z)}{dt^2} + \delta v(x, y, z) \cdot \frac{d^2 v(x, y, z)}{dt^2} + \delta w(x, y, z) \cdot \frac{d^2 w(x, y, z)}{dt^2} \right) ds \cdot dx$$

$$W_{int} = \int_0^L \delta \{U_s\}^T \cdot [M_s] \cdot \frac{d^2 \{U_s\}}{dt^2} \cdot dx \quad (2.51)$$

Avec  $U_s$  le vecteur des déplacements "généralisés".

Ce qui donne pour la matrice de masse :

$$[M_s] = \begin{pmatrix} M_{s11} & 0 & 0 & 0 & M_{s15} & M_{s16} \\ & M_{s22} & 0 & M_{s24} & 0 & 0 \\ & & M_{s33} & M_{s34} & 0 & 0 \\ & & & M_{s44} & 0 & 0 \\ & Sym & & & M_{s55} & M_{s56} \\ & & & & & M_{s66} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

$$M_{s11} = \int_S \rho dS ; M_{s15} = \int_S \rho z dS ; M_{s16} = - \int_S \rho y dS ; M_{s22} = k_y \int_S \rho dS \quad (2.53)$$

$$M_{s24} = -k_y \int_S \rho z dS ; M_{s33} = k_z \int_S \rho dS ; M_{s34} = k_z \int_S \rho y dS \quad (2.54)$$

$$M_{s44} = \int_S \rho (k_z y^2 + k_y z^2) dS ; M_{s55} = \int_S \rho z^2 dS \quad (2.55)$$

$$M_{s56} = - \int_S \rho y z dS ; M_{s66} = \int_S \rho y^2 dS \quad (2.56)$$

Avec  $\rho$  masse volumique qui peut varier en fonction de  $y$  et  $z$ .

La matrice de masse de l'élément est finalement donnée par :

$$[M_{elem}] = \int_0^L [N]^T [M_s] [M] dx \quad (2.57)$$

**Remarque :** Cette expression de la matrice de masse est rarement présentée dans la littérature. Dans la plupart des codes éléments finis elle est remplacée par la matrice de masse de type

Euler - Bernoulli (ainsi les termes de correction de cisaillement interviennent uniquement dans la matrice de raideur). Pour le cas d'une poutre courte avec  $L / r \approx 12$ , ( $r = \sqrt{\frac{I}{S}}$  le rayon de giration de la section,  $I$  le moment d'inertie), de section circulaire pleine  $S$ , l'utilisation de la matrice de masse de type Euler - Bernoulli conduit à une erreur relative de l'ordre de 30% dès le quatrième mode, alors que l'erreur est quasi nulle pour la matrice de masse de l'équation 2.56 [Corn 1998].

### 2.3.5 Efforts internes et efforts résultants

Le calcul des forces nodales dues à un état de contraintes internes donné se fait finalement par l'intégrale suivante:

$$\{F_{int}\} = \int_0^L [B]^T \cdot \{F\} \cdot dx \quad (2.58)$$

Avec  $\{F\}$  le vecteur des forces de la section issu de l'intégration des contraintes dans les fibres (équations 2.8-2.11, 2.39) et  $[B]$  qui est donné par l'équation 2.48.

Les efforts résultants sont donnés par :  $\{F_{res}\} = \int_0^L [N]^T \cdot \{Q\} \cdot dx \quad (2.59)$

Avec  $[N]$  qui est donné par les équations 2.24-2.37.

Le vecteur  $Q$  dépend du chargement extérieur :  $\{Q\}^T = (0 \quad q_y \quad q_z \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (2.60)$

Si nous considérons que les efforts distribués sont constants, nous obtenons le vecteur des forces résultantes suivant :

$$\{F_{res}\}^T = \left( 0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right) \quad (2.61)$$

#### Remarques :

- Pour des sections homogènes de comportement linéaire et quand l'axe de référence coïncide avec l'axe neutre de la poutre la matrice de rigidité de l'élément ainsi calculée est la même que la matrice de rigidité exacte d'un élément Timoshenko [Przemieniecki 1985]. Un seul élément fini est donc suffisant pour calculer les déplacements exacts d'une poutre soumise à des chargements statiques. Pour des sections hétérogènes la qualité des résultats dépend de la précision de calculs des propriétés élastiques de la section.

- Lorsque l'élanement devient grand  $\phi \rightarrow 0$  et  $\phi^* \rightarrow 0$  et donc la matrice de rigidité tend vers celle d'un élément Bernoulli (voir §2.5)

## 2.4. Élément fini poutre multifibre Timoshenko à deux nœuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1 [20] [21] [22]

### 2.4.1 Fonctions d'interpolation

La matrice des fonctions d'interpolation  $[N]$  est de la forme :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (2.63)$$

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad (2.64)$$

## 2.4.2 Matrices de rigidité

La matrice de rigidité de la section  $[K_s]$  est donnée par les équations 2.41 à 2.45. La déformation généralisée est calculée comme avant par  $\{D\} = [B]\{U\}$  avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & N'_1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$N'_1 = -\frac{1}{L} \quad , \quad N'_2 = \frac{1}{L} \quad (2.66)$$

La matrice de rigidité d'élément est finalement donnée selon l'équation (2.49):

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T [K_s] [B] dx$$

### Remarque :

Le terme  $v'_s(x) - \theta_{sz}(x)$  de la déformation généralisée s'écrit normalement sous la forme :

$$\begin{aligned} v'_s(x) - \theta_{sz}(x) &= -\frac{1}{L}v_1 - \frac{L-x}{L}\theta_{z1} + \frac{1}{L}v_2 - \frac{x}{L}\theta_{z2} \\ &= -\frac{1}{L}v_1 - \frac{1}{2}\theta_{z1} + \frac{1}{L}v_2 - \frac{1}{2}\theta_{z2} + \frac{1}{2}(\theta_{z1} - \theta_{z2})\left(x - \frac{L}{2}\right)\frac{2}{L} \\ w'_s(x) + \theta_{sy}(x) &= -\frac{1}{L}w_1 + \frac{L-x}{L}\theta_{y1} + \frac{1}{L}w_2 + \frac{x}{L}\theta_{y2} \\ &= -\frac{1}{L}w_1 + \frac{1}{2}\theta_{y1} + \frac{1}{L}w_2 + \frac{1}{2}\theta_{y2} + \frac{1}{2}(\theta_{y2} - \theta_{y1})\left(x - \frac{L}{2}\right)\frac{2}{L} \end{aligned}$$

La matrice  $[B]$  devait être alors :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L-x}{L} & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x}{L} \\ 0 & 0 & N'_1 & 0 & \frac{L-x}{L} & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$N'_1 = \frac{-1}{L} \quad , \quad N'_2 = \frac{1}{L} \quad (2.68)$$

Pour affranchir le problème de blocage par cisaillement, les déformations généralisées de cisaillement ( $v'_s(x) - \theta_{sz}(x)$  et  $w'_s(x) + \theta_{sy}(x)$ ) ont été simplifiées en éliminant les termes linéaires  $\frac{1}{2}(\theta_{z1} - \theta_{z2})\left(x - \frac{L}{2}\right)\frac{2}{L}$  et  $\frac{1}{2}(\theta_{y2} - \theta_{y1})\left(x - \frac{L}{2}\right)\frac{2}{L}$  [Donea et al. 1987], [Pegon 1994].

### 2.4.3 Matrices de masse

La matrice de masse de la section et la matrice de masse de l'élément sont données par les équations (2.52 à 2.57 voir §2.3.4).

### 2.4.4 Efforts internes

Voir paragraphe (voir §2.3.5).

## 2.5 Élément fini poutre multifibre Euler – Bernoulli [20] [21] [22]

### 2.5.1 Fonctions d'interpolation

La matrice des fonctions d'interpolation  $[N]$  est de la forme :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & -N_4 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & -N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N'_3 & 0 & N'_4 & 0 & 0 & 0 & -N'_5 & 0 & N'_6 & 0 \\ 0 & N'_3 & 0 & 0 & 0 & N'_4 & 0 & -N'_5 & 0 & 0 & 0 & N'_6 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Avec les fonctions d'interpolation suivantes, et leurs dérivées utiles :

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad ; \quad N'_1 = -\frac{1}{L} \quad (2.70)$$

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad ; \quad N'_2 = \frac{1}{L} \quad (2.71)$$

$$N_3 = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \quad ; \quad N'_3 = -\frac{6x}{L^2} + 6\frac{x^2}{L^3} \quad (2.72)$$

$$N_4 = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad ; \quad N'_4 = 1 - \frac{4x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \quad (2.73)$$

$$N_5 = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \quad ; \quad N'_5 = \frac{6x}{L^2} - 6\frac{x^2}{L^3} \quad (2.74)$$

$$N_6 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad ; \quad N'_6 = -\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \quad (2.75)$$

### 2.5.2 Matrices de rigidité

La matrice de rigidité de la section devient :

$$\{F\} = [K_s].\{D\} \quad (2.76)$$

Où :

$$\{F\}^T = \{N, M_y, M_z, M_x\} \quad (2.77)$$

$$\{D\}^T = \{u'_s(x), \theta'_{sy}(x), \theta'_{sz}(x), \theta'_{sx}(x)\} \quad (2.78)$$

La matrice  $K_s$  peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$K_s = \begin{pmatrix} K_{s11} & K_{s12} & K_{s13} & 0 \\ & K_{s22} & K_{s23} & 0 \\ \text{sym} & & K_{s33} & 0 \\ & & & K_{s44} \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

Avec

$$K_{s11} = \int_S E \cdot dS ; \quad K_{s12} = \int_S E \cdot z dS ; \quad K_{s13} = \int_S E \cdot y \cdot dS \quad (2.80)$$

$$K_{s22} = \int_S E \cdot z^2 \cdot dS ; \quad K_{s23} = \int_S E \cdot y \cdot z \cdot dS ; \quad K_{s33} = \int_S E \cdot y^2 \cdot dS \quad (2.81)$$

### Remarque

Le terme de torsion  $K_{s44}=G.J_x$  est donné par l'utilisateur à l'aide de la donnée de  $J_x$ .

Les déformations généralisées sont calculée par (Ds est donnée à l'équation [éq 11] et [éq 12])

$$[D] = [B][U] \quad (2.82)$$

Avec la matrice B suivante :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N''_3 & 0 & N''_4 & 0 & 0 & 0 & -N''_5 & 0 & N''_6 & 0 \\ 0 & N''_3 & 0 & 0 & 0 & N''_4 & 0 & N''_5 & 0 & 0 & 0 & N''_6 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

$$N''_3 = -\frac{6}{L^2} + 12 \frac{x}{L^3} ; \quad N''_4 = -\frac{4}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \quad (2.84)$$

$$N''_5 = \frac{6}{L^2} - 12 \frac{x}{L^3} ; \quad N''_6 = -\frac{2}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \quad (2.85)$$

La matrice de rigidité de l'élément est finalement donnée par l'équation (2.49) :

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T [K_s] [B] dx$$

### 2.5.3 Matrices de masse

Les matrices de masse de la section et de l'élément prennent les formes suivantes :

$$M_s = \begin{pmatrix} M_{s11} & 0 & 0 & M_{s12} & M_{s13} & 0 \\ & M_{s11} & 0 & 0 & 0 & -M_{s12} \\ & & M_{s11} & 0 & 0 & -M_{s13} \\ & & & M_{s22} & M_{s23} & 0 \\ \text{Sym} & & & & M_{s33} & 0 \\ & & & & & M_{s22} + M_{s33} \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

Avec

$$M_{s11} = \int_S \rho \cdot ds \quad ; \quad M_{s12} = \int_S \rho \cdot z \cdot ds \quad ; \quad M_{13} = - \int_S \rho \cdot y \cdot ds \quad (2.87)$$

$$M_{s22} = \int_S \rho \cdot z^2 \cdot ds \quad ; \quad M_{s23} = \int_S \rho \cdot y \cdot z \cdot ds \quad ; \quad M_{s33} = \int_S \rho \cdot y^2 \cdot ds \quad (2.88)$$

Avec  $\rho$  qui peut varier en fonction de  $y$  et  $z$ .

### 2.5.4 Efforts internes et efforts résultants

Le calcul des forces nodales dues à un état de contraintes internes donné se fait finalement par l'intégrale suivante:

$$\{F_{int}\} = \int_0^L [B]^T \cdot \{F\} \cdot dx \quad (2.58)$$

Avec  $\{F\}$  le vecteur des forces de la section issu de l'intégration des contraintes dans les fibres (équations 2.8-2.11, 2.39) et  $[B]$  qui est donné par l'équation 2.48. (Voir § 2.3.5).

Si nous considérons que les efforts distribués sont constants, nous obtenons le vecteur des forces résultantes suivant :

$$\{F_{res}\}^T = \left( 0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad -\frac{L^2q_z}{2} \quad \frac{L^2q_y}{2} \quad 0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad \frac{L^2q_z}{2} \quad -\frac{L^2q_y}{2} \right) \quad (2.89)$$

## 2.6 Modélisation numérique sur Cast3m [20] [21] [22]

Ce niveau de modélisation est particulièrement bien adapté à l'étude de structures complexes sous chargement sismique. Les lois non linéaires s'appuient sur des éléments barre ou de poutre (Timoshenko ou Bernoulli) [23].

Dans le cadre d'une modélisation de type multifibre, il y a deux «niveaux» d'intégration. Il y a la modélisation dite «longitudinale» qui sera représentée par une poutre (de support géométrique linéique avec deux points de Gauss sur la longueur) et une modélisation plane de la section (perpendiculaire au support géométrique, discrétisée avec des fibres qui jouent le rôle des points d'intégration dans la section).

### 2.6.1 Eléments finis de poutre [23]

Le logiciel Cast3M possède deux éléments finis de poutre :

- l'élément POUT d'Euler-Bernoulli sans déformation de cisaillement et avec une répartition de courbure linéaire sur la hauteur de l'élément,
- l'élément TIMO avec déformation de cisaillement et une répartition de courbure constante sur l'élément.

Ces 2 éléments finis de poutre ont pour support géométrique l'élément SEG2 à 2 nœuds et fonctionnent en 3D et en 2D (contraintes planes et déformations planes).

Ils servent de support à plusieurs lois de comportement semi globales en traction-compression, flexion et cisaillement.

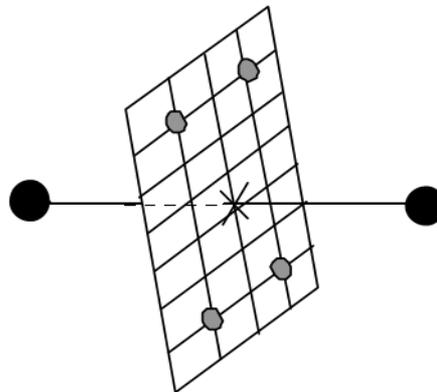
Pour ces 2 éléments, l'utilisateur doit fournir la section SECT, les inerties de flexion INRY (uniquement en 3D) et INRZ et l'inertie de torsion INRX (uniquement en 3D). Les sections réduites pour le cisaillement SECY et SECZ sont facultatives. Le module de cisaillement G est calculé à partir du module d'Young (E=YOUN) et du coefficient de Poisson ( $\nu=NU$ ) :  $G=E/2(1+\nu)$ .

### 2.6.2 Principe du modèle à fibre pour l'élément Timoshenko

Sur CAST3M, la poutre Timoshenko est adaptée pour faire une modélisation multifibre. Le modèle à fibre permet de calculer la loi de comportement de l'élément de poutre de Timoshenko i.e. la relation entre déformation axiale, courbure, déformation de cisaillement et les contraintes généralisées associées (N, M et T) à partir d'une description géométrique de la section basée sur les éléments bidimensionnels TRIS et QUAS et de lois de comportement uniaxiales pour chaque matériau (béton, acier, ...) (Figure 2.4).

Il faut noter que la loi de comportement est intégrée en un seul point pour l'élément POJS et l'élément triangulaire à 3 nœuds TRIS, sur 2 points pour l'élément à 2 points SEGS et sur 4 points pour l'élément à 4 nœuds QUAS. Les positions de ces points d'intégration sont données (Fig.2.5) Pour les éléments SEGS et QUAS, la solution est donc exacte pour une section rectangulaire en élasticité avec un seul élément.

Remarquons aussi que les hypothèses cinématiques supposent l'absence de gauchissement et, en torsion, la répartition de contrainte de cisaillement n'est exacte que pour des sections circulaires. En élasticité, cette répartition ne vérifie pas la théorie de Saint-Venant.



Elément de poutre :	$(u, \theta) \Rightarrow (\varepsilon_0, \phi, \gamma)$	$(M, N, T)$
	$\Downarrow$	$\Uparrow$
Niveau de la fibre :	$(\varepsilon, \gamma) \Rightarrow$	$(\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz})$

Figure 2.4 Principe du modèle à fibre

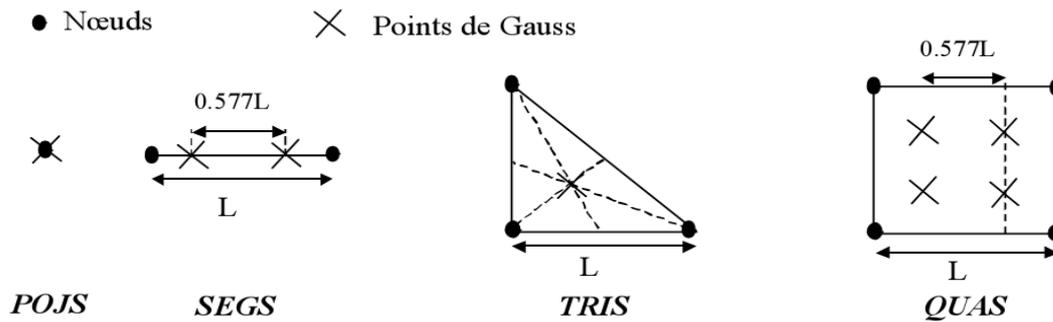


Fig2.5 Eléments bidimensionnels utilisés pour la description des sections

## 2.7 Conclusion

### Avantages de la modélisation semi-globale poutre multifibre

- elle est adaptée à la modélisation des structures minces,
- elle permet de réduire la taille du problème par rapport à une modélisation en éléments massifs,
- elle est peu coûteuse en temps CPU et en taille mémoire,
- elle peut être combinée à l'emploi d'autres éléments de structure (coques multicouches, ...).

### Inconvénients de la modélisation semi-globale poutre multifibre

- elle ne permet pas de représenter le ferrailage transverse,
- elle est plutôt adaptée aux structures relativement simples. Cependant on peut envisager de simuler le comportement global de structures en béton armé relativement complexes.