

1.1 Introduction

Le béton, largement utilisé dans la construction, présente un comportement non linéaire très complexe dû à son caractère hétérogène et quasi-fragile. Selon la nature et l'intensité de la sollicitation, cette hétérogénéité de la microstructure favorise le développement de divers modes de rupture et de propagation de fissures. Il est nécessaire de tenir en compte correctement de l'évolution des différents paramètres lors de la dégradation du béton, pour cela une attention particulière doit être portée au comportement de ce matériau.

L'objectif de l'analyse bibliographique est de tirer les conclusions utiles pour notre travail. L'étude expérimentale du béton permet de mieux comprendre le comportement mécanique de ce matériau surtout avec l'apparition des fissures. Le béton présente un comportement adoucissant et anisotrope. La résistance en compression est beaucoup plus élevée que celle en traction. De plus, un béton préalablement fissuré en traction récupère sa rigidité quand on le comprime, ce phénomène est dû à la refermeture des fissures. Face à la complexité du comportement du béton (hétérogénéité, aspect multiphasique, fissuration, anisotropie, unilatéralité avec déformation permanente...) plusieurs modèles mécaniques ont été proposés. Nous citerons : les modèles de plasticité, les modèles d'endommagement et les modèles couplants l'endommagement et la plasticité.

Avant de commencer un calcul linéaire ou non linéaire. Il faut choisir le niveau de modélisation et l'échelle de discrétisation. Il existe différentes approches pour modéliser le comportement du béton telle que l'approche globale qui représente les phénomènes locaux d'une manière grossière et vise à donner une indication sur la répartition des efforts d'ensemble dans les principaux éléments porteurs. L'approche macroscopique est une modélisation plus fine car l'état du matériau est pris en compte en chaque point d'intégration de l'élément fini considéré. L'approche semi-globale constitue une approche intermédiaire par rapport aux deux précédentes. Le champ de déplacements est décrit par les déplacements et les rotations d'un élément poutre, d'un élément plaque ou d'une coque, tandis que toute information concernant le comportement des matériaux est traitée au niveau local.

1.2. Comportement expérimental du béton

1.2.1. Comportement uni-axial du béton

Généralement la formulation principale du béton est schématisée par trois constituants : la pâte du ciment, les granulats, les cavités et microfissures. On peut démontrer facilement qu'une simple sollicitation unidirectionnelle de traction engendre un état complexe de contrainte au sein du matériau et notamment une concentration des contraintes dues principalement à la différence de rigidité entre les granulats et le ciment et à la présence des microfissures et cavités [1].

1.2.1.1. Traction directe

Bien que le béton soit principalement conçu pour résister à la compression, la connaissance de ses propriétés en traction est importante pour une description complète de son comportement matériel.

La figure 1.1 représente la réponse d'un essai de traction. Au début du chargement (jusqu'à 50-60% de la résistance en traction, f_t) le comportement est quasiment linéaire. Le module

d'Young commence ensuite à diminuer lentement jusqu'au pic de contrainte. Une fois le pic atteint ($\sigma = f_t$), la contrainte chute brutalement (on parle d'adoucissement) et les fissures s'orientent perpendiculairement au chargement [2]. Comme la déformation à la rupture en traction est faible (0,2 %), il est courant de ne pas modéliser les déformations anélastiques. L'endommagement est alors défini à partir du module sécant mesuré sur la courbe de l'essai.

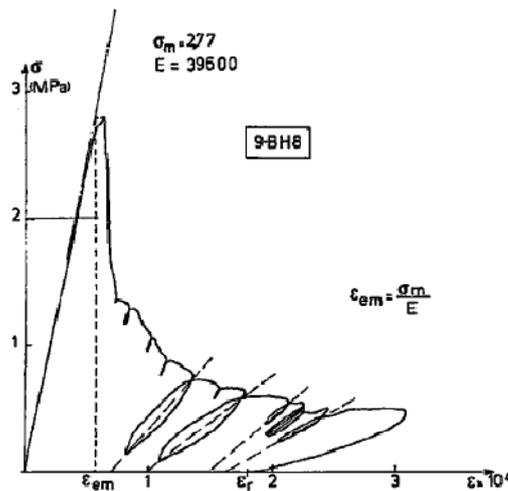


Figure 1.1 Comportement fragile du béton en traction (Terrien 1980) [4].

1.2.1.2. Traction cyclique

La figure 1.2 montre que les boucles d'hystérésis sont très faibles. Ceci paraît logique si l'on admet qu'elles sont principalement dues à des phénomènes de frottement entre lèvres de microfissures (phénomènes peu importants dans ce type de sollicitation), ainsi l'essai de traction permet de confirmer que la dégradation des caractéristiques élastiques du matériau est due essentiellement au développement de la microfissuration [3].

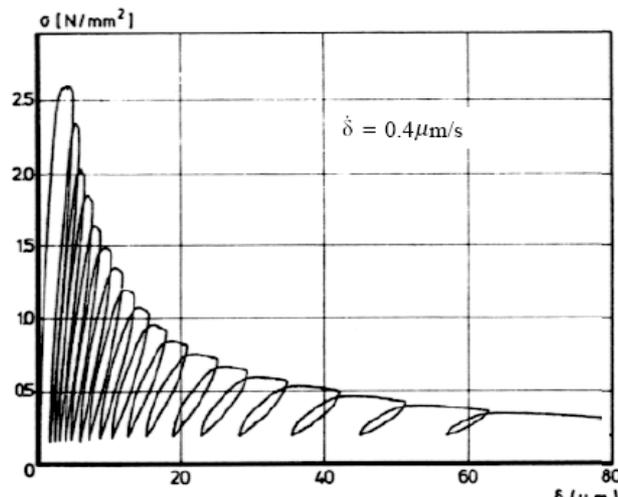


Figure 1.2 Comportement cyclique fragile du béton en traction (Reinhardt et Corneillesen) [3]

1.2.1.3. Compression simple

Le comportement en compression est obtenu plus facilement du fait de la plus grande ductilité du matériau. Les microfissures sont parallèles à l'axe de chargement jusqu'à la rupture complète de l'éprouvette.

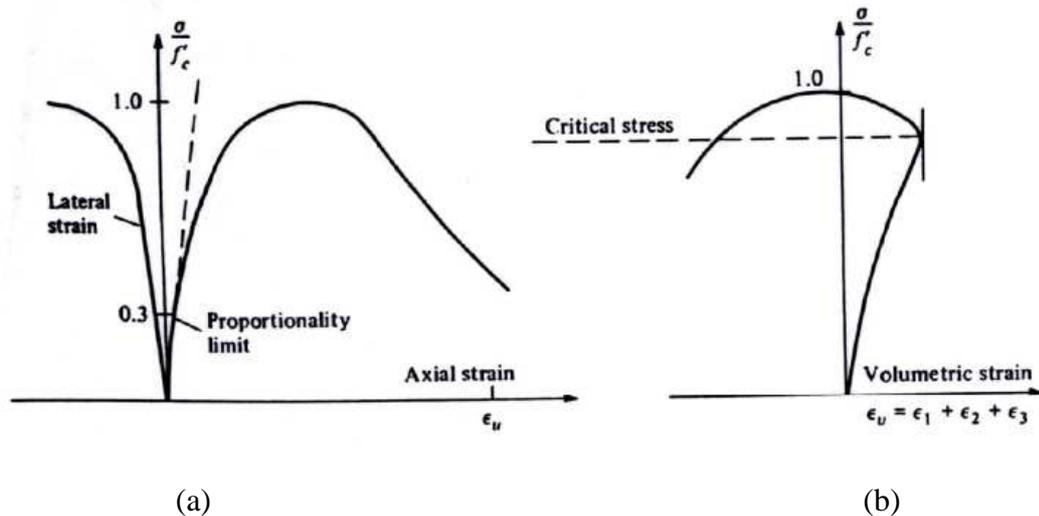


Figure 1.3 Comportement du béton en compression simple (Chen 1982) [3]

Pour un essai de compression, l'allure générale de la courbe contrainte-déformation est donnée par la figure 1.3. On observe principalement que la réponse est presque linéaire jusqu'à 30% de la limite en compression simple f_c . En dépassant ce point, la raideur décroît sensiblement, et on observe que la courbe devient de plus en plus non linéaire jusqu'à 75% de la limite en compression simple avec une diminution de volume de l'éprouvette. Puis, à partir de 85% de la résistance, la rupture devient inévitable même si l'accroissement de la charge reste nul. Les déformations latérales augmentent plus vite que les déformations longitudinales, le volume apparent de l'éprouvette augmente. Cette caractéristique est appelée dilatance. Les fissures se propagent progressivement dans la pâte de ciment sous la forme de macro-fissures, jusqu'à la rupture du matériau [6].

Sur des tranches de matériaux pré-sollicités, des observations au microscope optique ont montré que des microfissures sont perpendiculaires aux directions d'extensions, créant dans un premier stade une anisotropie du comportement du béton, et dans un stade ultime des surfaces de rupture de même sens [3].

1.2.1.4. Compression cyclique

L'essai cyclique en compression simple présenté à la figure 1.4, permet de tirer d'autres explications sur le comportement du béton. D'une part les différences de diminution de rigidité longitudinale et transversale mettent en évidence l'anisotropie induite par la fissuration orientée sur des plans parallèles au chargement, et d'autre part les imperfections des fissures empêchent leur complète refermeture après décharge générant des déformations irréversibles. Le frottement entre les lèvres de fissures rugueuses est en partie responsable de la boucle d'hystérésis au delà d'un certain niveau de chargement [3] [4].

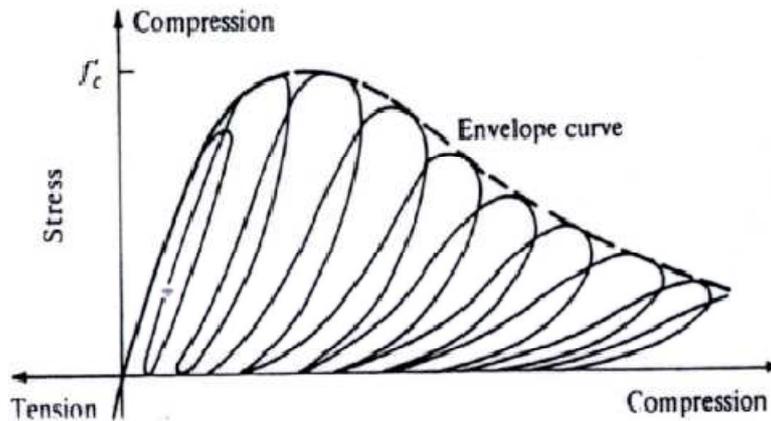


Figure 1.4 Comportement cyclique du béton en compression simple [3]

1.2.2. L'effet unilatéral

Le comportement unilatéral du béton dans le cas d'une rupture localisée a été mis en évidence par Terrien figure (1.5), par la suite il a été confirmé par Ramtani [5] dans le cas d'un endommagement diffus.

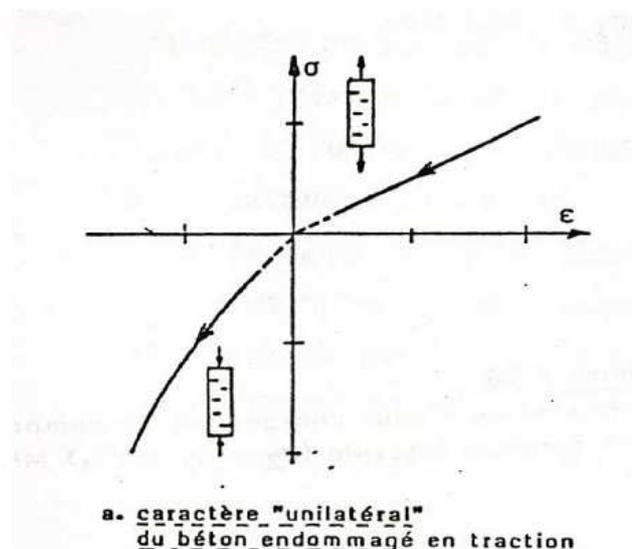


Figure 1.5 Comportement cyclique expérimental du béton (d'après Terrien) [5]

L'information principale de cet essai est que lorsque l'on sollicite en compression une éprouvette préalablement endommagée en traction, la raideur du matériau n'est pas la raideur endommagée ($\tilde{E} = (1 - D)E$ pour un endommagement scalaire), mais une raideur "restaurée" proche de la raideur initiale du matériau sain, ce phénomène est connu sous le nom d'effet unilatéral. Cet effet unilatéral se manifeste d'abord par une phase transitoire non-linéaire due à la refermeture des fissures lors du changement de signe de la contrainte et puis la restauration de la raideur en compression.

1.2.3. Sollicitation bi-axiale

Dans le cas de la bi-compression, on constate une augmentation de la résistance par rapport à la résistance uni-axiale. La résistance devient maximale pour un rapport des

contraintes égal à 0,5. Le gain de résistance pour des contraintes bi-axiales est d'environ 25%. De plus, on constate une augmentation de la ductilité du matériau.

Dans le cas des contraintes de compression-traction (figure 1.6, résultats de Kupfer et Gerstle 1973) [6], on observe une diminution progressive (à peu près linéaire) de la résistance ultime en compression, lorsque la contrainte de traction augmente (figure 1.6). De plus, le comportement du matériau devient de plus en plus fragile.

Dans le cas d'un chargement de bi-traction, on n'observe pas de différence appréciable entre la résistance en traction bi-axiale et la résistance en traction uni-axiale (fig 1.6). On remarque alors que la surface de rupture est orthogonale à la direction de la contrainte principale maximale (Chen et Schreyer 1995) [6]. Ce comportement suggère que les fissures orthogonales, induites par des chargements de traction, n'interagissent pas significativement.

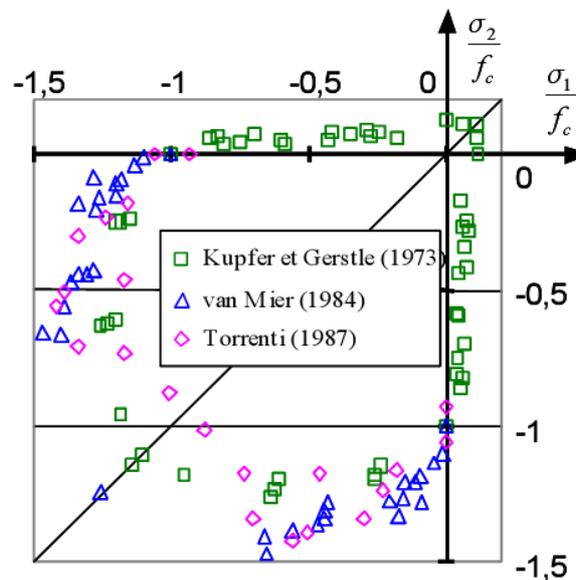


Figure 1.6 Résistance du béton dans le cas d'une sollicitation bi-axiale [6]

1.2.4. Sollicitation tri-axiale

D'après la figure 1.7 on constate que la réponse du béton est d'autant moins fragile si le confinement est important et on obtient un comportement ductile pour les très grands confinements. Ce gain de rigidité est lié à l'augmentation des contacts au sein de la microstructure du matériau béton qui est une conséquence de la destruction des pores (Chen 1982, Ramtani 1990) [3] [6].

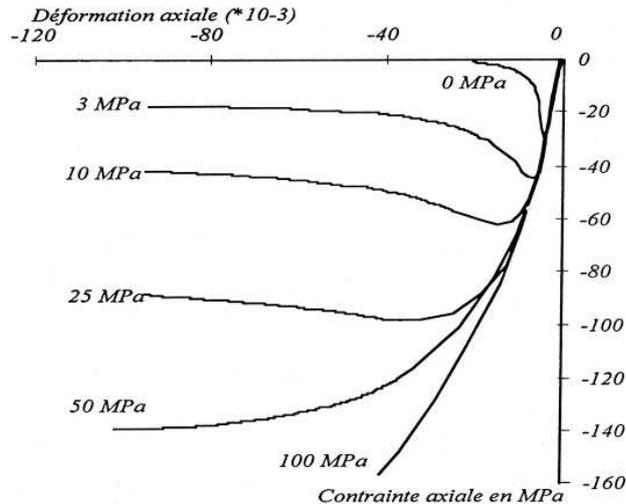


Figure 1.7 Essai de compression triaxiale (Jamet & al) [3].

1.2.5. Conclusions

D'après cette étude bibliographique sur le comportement expérimental du béton on peut tirer les conclusions suivantes :

- Le comportement élastique initial du béton en traction comme en compression est linéaire.
- Le comportement présente en post pic un caractère adoucissant aussi bien en traction qu'en compression.
- La dissymétrie du comportement se constate aussi bien sur les contraintes pic (10 fois plus élevées en traction qu'en compression) que sur les déformations.
- Le comportement non linéaire du béton a pour origine deux phénomènes distincts, s'interprète comme étant de l'endommagement du fait de la perte de raideur constatée sur les décharges élastiques et l'existence de déformations anélastiques.
- Des déformations permanentes apparaissent du fait de l'ouverture des microfissures. Ces déformations sont plus importantes en compression qu'en traction.
- Restauration de la raideur lors de l'inversion du signe de la contrainte (chargement cyclique).

1.3. Modélisation du comportement du béton

1.3.1. Plasticité

Le comportement du béton irréversible peut être décrit en utilisant la théorie de la plasticité. Il est à noter que la théorie de la plasticité a été développée à l'origine dans le but de caractériser les déformations irréversibles des métaux dues aux processus de dislocation (Von Mises 1913) [3]. Cette théorie fut ensuite adaptée dans le cas des matériaux quasi-fragiles tel que le béton qui ont un comportement différent des métaux : phénomène de dilatance, influence importante du confinement.

Dans l'écriture tridimensionnelle des lois de comportement, l'hypothèse d'isotropie conduit à utiliser les invariants des tenseurs de contraintes et de son déviateur s défini par :

$$s = \sigma - \frac{1}{3} Tr(\sigma)1 \quad (1.1)$$

Où 1 est le tenseur unité et $Tr(\sigma)$ définit la trace du tenseur de contrainte donnée par :

$$Tr(\sigma) = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} \quad (1.2)$$

En plasticité on fait souvent intervenir le premier invariant du tenseur de contrainte I_1 , ainsi que le deuxième invariant du tenseur de déviateur de contrainte définis par :

$$I_1 = Tr(\sigma) \quad \text{Et} \quad J_2 = \frac{1}{2} s : s \quad (1.3)$$

Où : (:) est le produit tensoriel deux fois contracté.

Dans le cas du béton si on utilise uniquement une fonction du second invariant du déviateur des contraintes J_2 ce critère n'est pas réaliste. Il ne permet pas d'atteindre la limite d'élasticité pour un chargement hydrostatique pur. L'introduction du premier invariant ($I_1 = tr \sigma$), permet de prendre en compte la dilatance ainsi que les effets de confinement sous compression triaxial. La combinaison des deux précédents invariants conduit au critère de Drucker-Prager (Drücker & Prager 1952) [4] :

$$f = \sqrt{3J_2} + \alpha I_1 - k = 0 \quad (1.4)$$

α est l'angle de cohésion interne à identifier.

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{3 - \sin \phi} \quad \text{Et} \quad k = \frac{2c \cos \phi}{3 - \sin \phi}$$

ϕ : Angle de frottement et c : La cohésion du matériau.

Sous chargements hydrostatiques, le critère de Drücker-Prager n'est pas suffisant car l'un des inconvénients réside dans l'impossibilité de franchir le seuil de plasticité sollicitant les hauts confinements du matériau [4]. En compression triaxiale il est alors nécessaire de fermer la surface, c'est l'objectif de la méthode "cap model" (Di Maggio & Sander 1971, Hofstetter & Simo 1993) [4]. Une autre solution consiste à adopter une surface de Gurson (Gurson 1977) [4] analytiquement fermée en tri-compression évitant ainsi les points anguleux de raccordement.

Dans le but de mieux représenter la réponse du béton, le principe de plasticité multi-surfaces peut être appliqué, chaque mécanisme étant géré par sa propre surface de charge (Yang et al. 1985) [6] [18]. Le comportement fragile peut ainsi être géré par un critère en contrainte maximale (Rankine) et les phases plus ductiles (compression multiaxiales) par la plasticité du type Drücker-Prager tenant compte de la pression hydrostatique (Yazdani & Schreyer 1990, Feenstra 1993). La figure 1.8 donne une représentation dans un plan bi-axial de ces critères couplés.

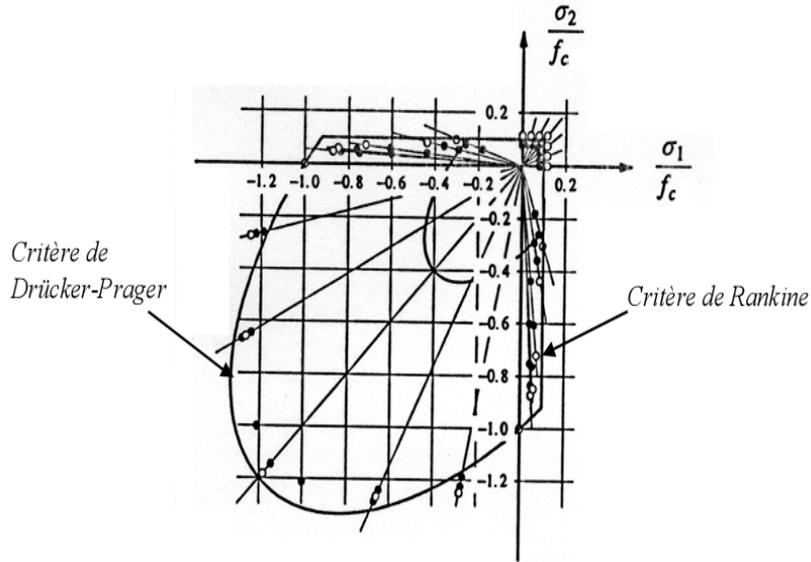


Figure 1.8 Critère bi-axial couplé (Feenstra 1993) [18]

A tout modèle élasto-plastique est associé un critère de plasticité qui définit le domaine d'élasticité C_E , dans lequel le comportement du matériau reste réversible. Il définit également le domaine plastique et permet ainsi de spécifier l'écoulement plastique. Cette fonction, appelée fonction de charge (critère de charge), est donnée sous la forme suivante :

$$\sigma \in C_E \Leftrightarrow F(\sigma, A_i) < 0 \quad (1.5)$$

L'écoulement plastique est régi par la règle d'écoulement définie à partir d'une fonction convexe $G(\sigma, A_i)$, appelée potentiel plastique.

Les déformations plastiques sont conventionnellement définies par la relation suivante :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (1.6)$$

Avec :

$$\dot{\lambda} \geq 0 \text{ si } F = 0 \text{ et } \dot{F} = 0 \quad (1.7)$$

$$\dot{\lambda} = 0 \text{ si } F < 0 \text{ ou } F = 0 \text{ et } \dot{F} < 0 \quad (1.8)$$

Où : $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique que l'on détermine à partir de la condition de consistance :

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial A_i} \dot{A}_i = 0 \quad (1.9)$$

Où : A_i les variables d'écrouissage.

On suppose ainsi dans la théorie de la plasticité qu'il n'y a pas des évolutions plastiques que si le point de charge est sur la surface de charge ($F=0$) et y reste ($\dot{F} = 0$).

Si $G(\sigma, A_i) = F(\sigma, A_i)$, l'écoulement plastique est dit associé, et la direction des incréments de déformations plastiques est normale à la frontière du domaine d'élasticité C_E . Dans le cas contraire, l'écoulement est dit non associé. Il est important de noter que dans le

cadre de la modélisation des géomatériaux, la plasticité est en général considérée comme non associée afin de mieux représenter le comportement dilatant de ces matériaux (Chen 1994) [3].

1.3.2. Endommagement

La théorie d'endommagement décrit l'évolution des phénomènes entre l'état vierge et l'amorçage de la fissure macroscopique dans un matériau au moyen d'une variable continue (scalaire ou tensorielle) décrivant la détérioration progressive de ce matériau.

Cette idée a été développée par Kachanov [7] pour modéliser la rupture par fluage des métaux en sollicitation uni-axiale, elle a été reprise en France dans les années 70 par Lemaitre et Chaboche [4].

1.3.2.1. Variable d'endommagement [8]

Pour introduire la notion d'endommagement dans le cadre des milieux continus, on fait l'hypothèse que l'élément de volume considéré est suffisamment grand devant les dimensions des hétérogénéités (cavités) dues à l'endommagement. La figure 1.9 illustre la définition des efforts internes dans un matériau endommagé. La section dS (de normale unitaire \vec{n}) utilisée pour définir le vecteur contrainte $\vec{\sigma}$ contient des traces de microfissures et de cavités constituant l'endommagement du matériau.

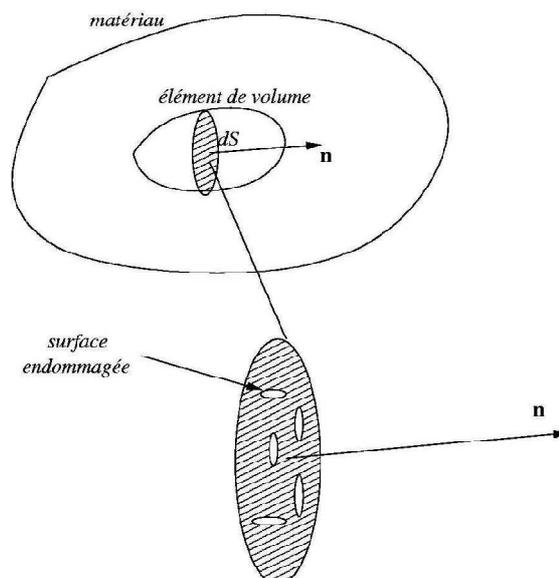


Figure 1.9 Schéma illustrant la notion d'endommagement dans un milieu continu [8]

$$dS_n = dS - dS_D \quad (1.10)$$

dS : La section totale.

dS_D : L'aire totale de l'ensemble des défauts présents dans la surface dS

$$D = \frac{dS_D}{dS} = \frac{dS - dS_n}{dS} \quad (1.11)$$

En notant dS_D la surface projetée sur dS des traces d'endommagement, on mesure l'endommagement local, dans la direction \vec{n} par le rapport entre la surface dS_D et la surface

dS . Cet endommagement vaudra 0 pour un matériau non endommagé, et 1 pour un matériau totalement rompu perpendiculairement à \vec{n} . En conséquence, la variable d'endommagement ainsi définie :

- dépend de la direction \vec{n} considérée dans le matériau,
- est un scalaire toujours compris entre 0 et 1.

1.3.2.2. Contrainte effective [7]

La contrainte effective $\tilde{\sigma}$ est alors définie comme la force rapportée à la section de résistance effective dS_n :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{dS_n} \quad (1.12)$$

$\tilde{\sigma}$ Peut alors s'exprimer en fonction de la contrainte usuelle σ et de la variable d'endommagement D .

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{dS_n} = \frac{F}{(dS - dS_D)} = \frac{F}{dS \left(1 - \frac{dS_D}{dS}\right)} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (1.13)$$

Le tenseur de contraintes effectives vaut :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (1.14)$$

On a évidemment $\tilde{\sigma} \geq \sigma$

$\tilde{\sigma} = \sigma$ Pour un matériau vierge.

$\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$ Au moment de la rupture.

De la même manière on peut définir le module d'Young du matériau endommagé ou module effectif \tilde{E} par le principe d'équivalence en déformations :

$$\tilde{\sigma} = E \cdot \varepsilon \Leftrightarrow \sigma = \tilde{E} \cdot \varepsilon \text{ et } \tilde{E} = E(1 - D) \quad (1.15)$$

Dans la pratique l'évolution de l'endommagement est déduite des mesures expérimentales du module de Young faites lors de décharges élastiques. Toutefois, lors de telles mesures, il est évident que les pentes mesurées rendent également compte d'autres phénomènes que de l'endommagement. Par exemple, il peut y avoir plastification locale dès le début des recharges, près des cavités ou des inclusions, cette plastification ayant pour effet de modifier par écrouissage la pente apparente dans le domaine d'élasticité [3] [8].

1.3.2.3. Principe d'équivalence en déformation [5]

Les tenseurs de déformations effectives et réelles sont égaux, alors que les tenseurs de contraintes sont différents :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} \\ \sigma_{ij} = M(D_{ij})\tilde{\sigma}_{ij} \end{cases} \quad (1.16)$$

Tel que $M(D)$ est un tenseur d'ordre 4 fonction de l'endommagement. La relation macroscopique entre les quantités réelles est donnée par :

$$\sigma_{ij} = M(D)C_{ijkl}^e \tilde{\varepsilon}_{kl} = M(D)C_{ijkl}^e \varepsilon_{kl} \quad (1.17)$$

C_{ijkl}^e est le tenseur de rigidité initiale.

$$\boxed{\varepsilon} \xrightarrow{I} \boxed{\tilde{\varepsilon}} \xrightarrow{C_{ijkl}^e} \boxed{\tilde{\sigma}} \xrightarrow{M(D)} \boxed{\sigma}$$

Figure 1.10 Principe d'équivalence en déformation

1.3.2.4. Principe d'équivalence en contrainte [5]

C'est le dual du principe d'équivalence en déformation

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} \\ \varepsilon_{ij} = M(D_{ij})\tilde{\varepsilon}_{ij} \end{cases} \quad (1.18)$$

La relation de comportement s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^0 M(D)^T \varepsilon_{kl} = \tilde{\sigma}_{kl} \quad (1.19)$$

$$\boxed{\varepsilon} \xrightarrow{M(D)^T} \boxed{\tilde{\varepsilon}} \xrightarrow{C_{ijkl}^e} \boxed{\tilde{\sigma}} \xrightarrow{I} \boxed{\sigma}$$

Figure 1.11 Principe d'équivalence en contrainte

1.3.2.5. Principe d'équivalence en énergie [5]

L'inconvénient majeur et commun des deux premiers principes est qu'ils ne garantissent pas la symétrie du tenseur de rigidité. En revanche le principe d'équivalence en énergie conduit automatiquement à un tenseur de rigidité symétrique. Il consiste à considérer que les énergies élastiques du matériau endommagé et du matériau sain sont équivalentes :

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{ij} : \tilde{\varepsilon}_{ij} \quad (1.20)$$

La relation entre les contraintes effectives et réelles est donnée par :

$$\sigma_{ij} = M(D)\tilde{\sigma}_{ij} \quad (1.21)$$

Substituant la dernière équation dans (1.20)

$$\frac{1}{2} M(D)\tilde{\sigma}_{ij} : \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{ij} : \tilde{\varepsilon}_{ij} \quad (1.22)$$

On obtient l'expression des déformations effectives

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = M(D)^T : \varepsilon_{ij} \quad (1.23)$$

Une équation duale de (1.21). La relation contraintes-déformations est alors

$$\sigma_{ij} = M(D)\tilde{\sigma}_{ij} = M(D) : C_{ijkl}^e : \tilde{\varepsilon}_{kl} = M(D) : C_{ijkl}^e : M(D)^T : \varepsilon_{kl} \quad (1.24)$$

Le tenseur de rigidité est donné par :

$$C_{ijkl} = M(D):C_{ijkl}^e:M(D)^T \quad (1.25)$$

$$\boxed{\varepsilon} \xrightarrow{M(D)^T} \boxed{\tilde{\varepsilon}} \xrightarrow{C_{ijkl}^e} \boxed{\tilde{\sigma}} \xrightarrow{M(D)} \boxed{\sigma}$$

Figure 1.12 Principe d'équivalence en énergie

1.3.3. Modélisation de l'anisotropie du béton

La relation liant les contraintes effectives et réelles est donnée par la relation :

$$\sigma_{ij} = M(D)_{ijkl} \tilde{\sigma}_{kl} \quad (1.26)$$

Généralement pour modéliser l'anisotropie on considère un tenseur d'endommagement d'ordre 4. L'ingrédient clé, de chaque modèle, est de définir une loi d'évolution du tenseur caractérisant la dégradation de matériau $M(D)$. Dans le cas d'un tenseur d'ordre 4, les lois d'évolutions sont difficiles à établir vu le nombre important de composantes du tenseur.

La théorie des microplans représente une alternative à l'utilisation d'un tenseur d'ordre supérieur. Bazant (1985) a utilisé ce concept pour décrire la dégradation des matériaux fragiles comme le béton. Sur chaque plan d'orientation \vec{n} , des relations uniaxiales reliant les composantes du vecteur déformation aux composantes du vecteur contrainte sont définies. Le paramètre qui caractérise l'endommagement sur chaque microplan est désormais un scalaire, sa valeur est différente d'un microplan à l'autre, ce qui conduit à une description anisotrope à l'échelle macroscopique [5] [9].

Une autre alternative est de choisir un tenseur d'endommagement d'ordre 2. En fonction des extensions on calcul l'évolution de l'endommagement qui est calculé dans la base propre de déformation (Fichant (1996), Desmorat *et al.* (2007), Badel *et al.* (2007)). En effet, les directions principales du tenseur d'endommagement et de déformation coïncident pour des trajets de chargement non complexes; c'est une hypothèse beaucoup moins réaliste dans le cas de chargements complexes. Badel *et al.* (2007) utilisent l'anisotropie de l'endommagement pour la traction. Pour la compression, ils emploient une seule variable d'endommagement isotrope. [5] [7]

1.3.4. Couplage Endommagement et Plasticité

Afin d'allier les avantages de la théorie de l'endommagement (modélisation des effets de la microfissuration sur la rigidité du matériau au niveau macroscopique) et de la théorie de plasticité (modélisation des déformations irréversibles ou permanentes). Le couplage entre la plasticité et l'endommagement a initialement été proposé pour les métaux dans les modèles dit de "rupture ductile" (Par, Lemaitre et Chaboche (1991)). Cette approche considère que l'évolution de l'endommagement est pilotée par le développement des déformations. Ils ont utilisées cette approche pour modéliser le comportement du béton en compression. Du point de vue phénoménologique, les déformations irréversibles dans le béton sont considérées comme le résultat du glissement des microfissures et de la friction interne [3] [9].

La deuxième possibilité est d'utiliser le concept de la contrainte effective. La surface seuil n'est plus exprimée en terme de contraintes totales, mais devient une fonction des contraintes effectives (contraintes dans le matériau non endommagé) (Simo et Ju (1987a), Simo et Ju (1987b), Ju (1989), dans cette solution l'endommagement peut être piloté en fonction de la déformation élastique (Jason (2004)), ou de la déformation plastique (Grassl et Jirasek (2006a)) ou encore de la déformation totale [3] [9].

La dernière approche suppose un couplage dit ‘‘fort’’ car c’est la contrainte totale qui apparaît dans l’expression de la surface seuil, qui devient alors couplée à l’endommagement.

Il est à noter qu’il existe aussi d’autres modèles qui intègrent dans leur formulation un terme de déformation irréversible lié aux variables d’endommagement, sans pour autant introduire de variables supplémentaires. C’est par exemple le cas du modèle de La Borderie et celui de Halm et Dragon (1998) [3] [9].

1.3.5. Etude des problèmes de localisation

Les matériaux présentant un comportement adoucissant subissent, dès l’atteinte du pic, une localisation des déformations qui a tendance à se concentrer dans la zone la plus petite possible causant une perte d’ellipticité (dans le cas statique) du système d’équations différentielles décrivant le processus de déformation. En dynamique le problème décrivant le mouvement passe d’un problème hyperbolique (avant adoucissement) à un problème parabolique ou elliptique (en phase d’adoucissement). Lors de calculs numériques, l’emploi de modèles locaux en présence de ce phénomène aboutit à une incohérence. En effet, la bande minimale dans laquelle se localisent les déformations est de la taille de l’élément fini le plus petit. En raffinant le maillage, cette zone tendant vers zéro, l’énergie dissipée par la structure tend elle aussi à s’annuler. Il s’ensuit une dépendance de la réponse de la structure par rapport au maillage. Il est donc impératif de limiter la taille de la zone endommageable, c’est le but des limiteurs de localisation [5] [9]

1.3.5.1. Limiteurs de localisation

L’objectif des limiteurs de localisation, appelés également techniques de régularisation, est d’enrichir la description mécanique du milieu de manière à pouvoir décrire des états non homogènes de déformation, afin d’éviter la sensibilité de la solution au maillage durant la phase d’adoucissement.

L’idée générale consiste à introduire une information spatiale, généralement sous la forme d’une longueur interne, liée aux interactions entre les défauts et donc à la microstructure du matériau. Plusieurs méthodes sont disponibles :

- Théories non locales (Pijaudier-Cabot et Bažant (1987), Bažant et Pijaudier-Cabot (1988)).
- Conservation de l’énergie de rupture (Bazant & Oh 1983, Pietruszak & Mroz 1981).
- Méthodes basées sur la formulation en gradient (Peerlings *et al.* (1996a)).
- Modèles avec effets de vitesse (Sluys (1992), Burlion (1997)).
- Modèles d’ordres supérieurs tels que Cosserat (1909). Cette technique n’est pas valide pour des problèmes de localisation en mode I (de Borst (1991), de Borst *et al.* (1993a) et Dufour et Pijaudier-Cabot (2005)).

Dans la suite du paragraphe nous allons détailler la technique de l’énergie de rupture

1.3.5.2. Conservation de l’énergie de rupture

Le modèle d’Hillerborg *et al.* (1976) qui utilise la notion de fissure fictive ‘‘ Fictitious Crack model’’. Est un modèle non linéaire dans lequel la fissure est modélisée en deux parties, la première correspond à la fissure physique (fissure réelle), pour laquelle la contrainte est nulle, la deuxième est la fissure fictive, pour laquelle la contrainte, non nulle, dépend de l’ouverture de la fissure [4] [5]. La fissuration commence à se propager, lorsque la contrainte en pointe de fissure atteint la contrainte maximale en traction, ft.

Le concept de la fissure fictive à été adapté aux formulations diffuses 'continues'. Bazant et Oh [5] ont développés le modèle de la bande de fissure'' Crack Band Model'' la zone de localisation est considérée comme une bande de largeur L_c au lieu d'une fissure discrète. Le champ de déformation est continu et l'énergie de fissuration est exprimée ainsi :

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma \cdot du \quad (1.27)$$

En générale, une distribution constante des déformations sur la bande de fissures est admise ce qui permet de calculer le déplacement au niveau de la fissure comme le produit de la déformation de rupture ε^f et la largeur de la bande L_c (Voir figure 1.13) :

$$du = L_c \cdot d\varepsilon^f \rightarrow G_f = L_c \int_0^{\infty} \sigma \cdot d\varepsilon^f \quad (1.28)$$

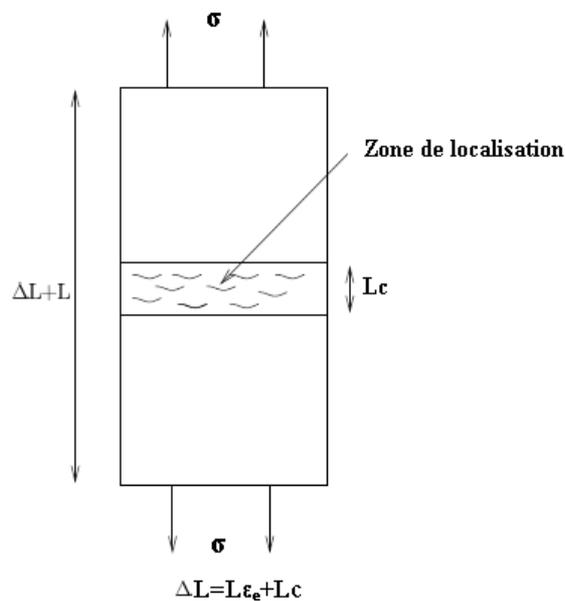


Figure 1.13 Zone de localisation de déformation [5].

Cette approche est très efficace pour les problèmes de fissuration lorsque le maillage présente une orientation fixe durant les calculs. Cependant, la perte d'ellipticité se pose toujours localement même si l'énergie dissipée reste constante [5].

1.3.6. Exemples de Modèle d'endommagement

1.3.6.1. Modèle de Mazars (1984) [1] [10]

Le point particulier de ce modèle est d'utiliser le critère en déformation en introduisant la notion de déformation équivalente. Le modèle prend en compte la dissymétrie du comportement du béton. Cependant, ce modèle ne tient pas compte des autres phénomènes liés au comportement du béton comme l'irréversibilité de la déformation, l'anisotropie et l'effet unilatéral on peut résumer ce modèle comme suit :

Pour un état d'endommagement donné D, le seuil d'évolution est exprimé par :

$$f(\varepsilon, K) = \tilde{\varepsilon} - K(D) = 0 \quad (1.29)$$

Où l'expression de la déformation équivalente :

$$\tilde{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (1.30)$$

Avec : ε_i est la déformation principale dans la direction i

$\langle \rangle_+$: désigne les crochets de *Mac Cauley*. Si la valeur entre crochets est négative, alors cet opérateur rend une valeur nulle. Sinon, la valeur est inchangée.

Pour le comportement dissymétrique du béton, Mazars propose deux modes d'endommagement d_T de traction et d_C de compression. La combinaison linéaire de ces deux endommagements donne l'endommagement global isotrope :

$$d = \alpha_T d_T + \alpha_C d_C \quad (1.31)$$

Avec:

$$\begin{cases} \alpha_C = 0 & \text{Pour la traction} \\ \alpha_T = 0 & \text{en compression} \\ \alpha_T + \alpha_C = 1 & \text{en cas de combinaison} \end{cases}$$

La détermination de α_T est effectuée en distinguant les extensions dues à des contraintes positives et celles dues à des contraintes négatives.

L'évolution de d_T et d_C est de la forme suivante :

$$d_T = 1 - \frac{\varepsilon_{D0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}_{eq}} - \frac{A_T}{\exp[B_T(\tilde{\varepsilon}_{eq} - \varepsilon_{D0})]} \quad (1.32)$$

$$d_C = 1 - \frac{\varepsilon_{D0}(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}_{eq}} - \frac{A_C}{\exp[B_C(\tilde{\varepsilon}_{eq} - \varepsilon_{D0})]} \quad (1.33)$$

Où A_T , A_C , B_T et B_C sont des caractéristiques du matériau ; ε_{D0} est le seuil d'endommagement et $\tilde{\varepsilon}_M$ est la déformation équivalente maximale atteinte.

Ce modèle ne tient pas compte, des déformations permanentes ni de l'effet unilatéral. Le fait de prendre α_T constant limite le domaine d'application du modèle. L'introduction de l'expression de déformation équivalente conduit à une condition stricte : L'endommagement se produit si et seulement s'il y a au moins une extension dans le repère principal de déformation.

1.3.6.2. Modèle de A.Dragon et D.Halm [11] [15]

Dragon & Halm (1998), proposent une modélisation anisotrope de l'endommagement dans laquelle l'endommagement est le seul phénomène dissipatif considéré; au sein d'un volume représentatif il consiste en la création et la propagation de méso-surfaces de décohésion. Le modèle utilise une variable interne tensorielle d'ordre 2 d'endommagement D décrivant l'orientation et l'étendue des méso-fissures.

$$D = \sum_i d^i(s) n^i \otimes n^i \quad (1.34)$$

Où : n^i représente la normale unitaire au système (i) de méso-fissures parallèles, $d^i(s)$ est une fonction scalaire adimensionnelle traduisant la densité de méso-fissures du système (i).

Un tenseur d'endommagement est construit en considérant l'ensemble des réseaux de fissures parallèles au sein du volume élémentaire. Ecrivant dans le repère principal d'endommagement, en considérant ses 3 valeurs propres D_k ainsi que les normales aux trois familles de fissures v_k , nous obtenons :

$$D = \sum_{k=1}^3 D_k v^k \otimes v^k \quad (1.35)$$

Les valeurs principales d'endommagement sont dérivées d'une fonction de charge f (fonction de la force thermodynamique associée (F^D)) par la propriété de normalité :

$$f(F^{D1+}; D) = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}[(F^{D1+}) \cdot (F^{D1+})] + \beta \text{tr}[(F^{D1+}) \cdot D] - (C_0 + C_1 \text{tr} D)} \leq 0 \quad (1.36)$$

$$\dot{D} = A_D \frac{\partial f}{\partial F^D} = \begin{cases} 0 & \text{si } f < 0 \text{ or } f = 0, \quad \dot{f} < 0 \\ A_D \left[\frac{\varepsilon^+}{2 \text{tr}(\varepsilon^+ \cdot \varepsilon^+)} + BD \right] & \text{si } f = 0 \text{ et, } \quad \dot{f} = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

A_D désigne le multiplicateur d'endommagement ($A_D \geq 0$), B est un paramètre du modèle.

Cette formulation, quoique basée sur des considérations micromécaniques, ne rentre pas dans le formalisme direct de l'analyse micromécanique de l'endommagement par mésos-fissuration [3] [4] [5] [11].

1.3.6.3. Modèle de La Borderie (1991) [12] [17]

Le point particulier de ce modèle est l'utilisation de l'énergie de Gibbs comme potentiel. Après des analyses de continuité de la loi de comportement et la vérification de convexité du potentiel, l'énergie s'écrit de la manière suivante :

$$\chi_e = \frac{\sigma^+ : \sigma^+}{2E(1-d_1)} + \frac{\sigma^- : \sigma^-}{2E(1-d_2)} + \frac{\nu}{2E} (\sigma : \sigma - \text{Tr} \sigma^2) \quad (1.38)$$

$$\chi_{an} = \frac{\beta_1 d_1}{E(1-d_1)} f(\text{tr} \sigma) + \frac{\beta_2 d_2}{E(1-d_2)} \text{tr} \sigma + G_1(z_1) + G_2(z_2) \quad (1.39)$$

σ^+ et σ^- sont respectivement le tenseur des contraintes "de traction" et le tenseur des contraintes "de compression".

Où d_1 et d_2 sont deux scalaires d'endommagement relatifs à deux modes de dégradation, la fonction $f(\text{tr} \sigma)$ assure le processus de l'unilatéralité. La décomposition du tenseur de contraintes est définie selon l'expression de Ju (1989). Les forces thermodynamiques Y_1 , Y_2 sont trouvées par la dérivation du potentiel.

β_1 et β_2 Sont des constantes et $f(\text{tr} \sigma)$ permet de gérer la refermeture des fissures.

G_1 et G_2 Sont des fonctions d'évolution de l'écroutissage associé aux variables z_1 et z_2 .

Si on dérive le potentiel par rapport aux variables d'état, nous obtenons les lois d'évolution des variables associées :

La déformation : $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{an}$

$$\varepsilon^e = \frac{\partial \chi_e}{\partial \sigma} = \frac{\sigma^+}{E(1-d_1)} + \frac{\sigma^-}{E(1-d_2)} + \frac{\nu}{E} (\sigma - \text{Tr} \sigma \cdot I) \quad (1.40)$$

$$\varepsilon^{an} = \frac{\partial \chi_{an}}{\partial \sigma} = \frac{\beta_1 d_1}{E(1-d_1)} \frac{\partial f(tr\sigma)}{\partial \sigma} + \frac{\beta_2 d_2}{E(1-d_2)} I \quad (1.41)$$

L'évolution de l'écroutissement est donnée par

$$Z_i = \frac{\partial G_i(z_i)}{\partial z_i} = g_i(z_i) = + \left[Y_{0i} + \frac{1}{A_i} \left(\frac{-z_i}{1+z_i} \right)^{1/B_i} \right] \quad (i = 1,2) \quad (1.42)$$

Où : A_i, B_i et Y_{0i} Sont des paramètres à identifier.

On définit alors la surface seuil F_i pour chaque évolution ($i=1,2$).

$$F_i = Y_i - Z_i \quad (1.43)$$

Y_i est la variable associée à l'endommagement D_i et Z_i la variable associée à la variable d'écroutissement, Les lois d'évolution de l'endommagement s'expriment comme suit :

$$D_i = 1 - \frac{1}{1 + [A_i(Y_i - Y_{0i})]^{B_i}} \quad i = 1,2 \quad (1.44)$$

La fonction de refermeture de fissure f est continue par morceaux et définie sur trois domaines : traction (fissure ouvertes), traction-compression (ouverture-refermeture de fissures), compression (fissures fermées).

$$\begin{cases} Tr\sigma \in [0, +\infty[\Rightarrow f(tr\sigma) = tr\sigma \\ Tr\sigma \in [-\sigma_f, 0[\Rightarrow f(tr\sigma) = \left(1 + \frac{tr\sigma}{2\sigma_f}\right) tr\sigma \\ Tr\sigma \in]-\infty, 0[\Rightarrow f(tr\sigma) = -\frac{\sigma_f}{2} tr\sigma \end{cases} \quad (1.45)$$

La difficulté de ce modèle réside dans sa formulation implicite qui impose de faire des itérations pour sa résolution. La loi de comportement doit être inversée à chaque itération. Cependant, le tenseur de déformation anélastique reste toujours sphérique dû au choix de χ_{an} . Cela implique, la déformation résiduelle ne dépend pas du cisaillement. Ceci peut constituer une limitation du modèle, dans la mesure où le rôle de cisaillement peut être prépondérant dans la génération des déformations irréversibles. De ce fait, le modèle risque de conduire à une interprétation peu fidèle dans des cas dominés par le cisaillement.

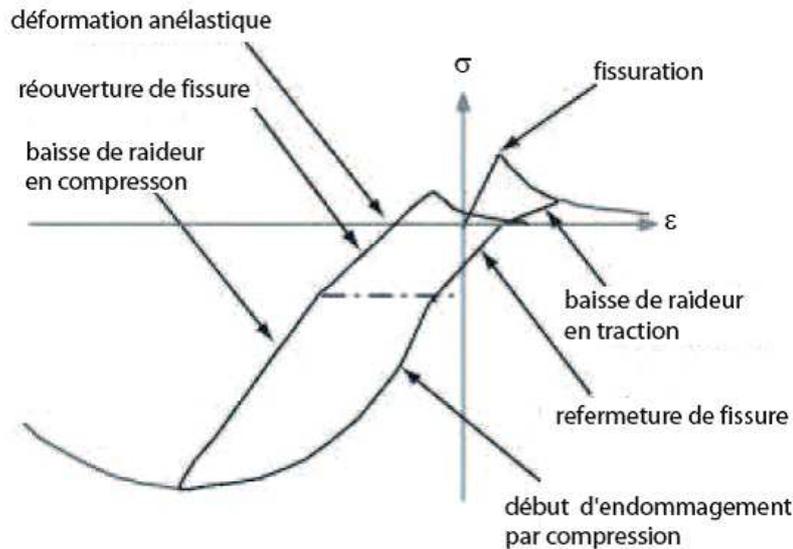


Figure 1.14 Réponse en traction-compression du modèle de La borderie [9].

1.3.6.4. Modèle de Nechnech Wahid (2000) [3]

Le modèle formulé dans le cadre de la théorie de l'endommagement couplé à la plasticité est proposé pour la description du comportement non linéaire du béton sous chargement thermomécanique. Il traite d'une façon complète le comportement du béton sous chargement mécanique et thermique et la fermeture de fissures lors d'un chargement cyclique à haute température.

Le modèle thermoplastique couplé à l'endommagement est formulé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles en postulant l'existence d'un potentiel thermodynamique élasto-plastique selon la forme suivante :

$$\psi = \psi_e(\varepsilon^e, \theta, D, \Lambda) + \psi_p(\kappa, \theta, D, \Lambda) \quad (1.46)$$

ψ : Énergie libre de Helmholtz ; ψ_p : Potentiel thermoplastique endommageable.

ψ_e : Potentiel thermo-élastique endommageable ;

ε^e : Tenseur de déformation élastique ;

κ : Paramètre d'écrouissage ;

θ : Température relative.

D : Variable d'endommagement mécanique ;

Λ : Variable d'endommagement thermique

La déformation totale ε est alors décomposée en une part réversible ε^e , une part irréversible ε^p et une part thermomécanique ε^{tm} comme suit :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^{tm} \quad (1.47)$$

L'influence du chargement mécanique sur le processus de déformation thermique, décrit sous le terme d'interaction thermomécanique, est introduite en utilisant le concept de

déformation d'interaction thermomécanique développé par Anderberg & Thelandersson (1973) [3].

La variable d'endommagement total d , peut alors être définie à partir d'une combinaison des deux endommagements mécanique et thermique, considérés comme complètement indépendants, comme suit :

$$d = 1 - (1 - D)(1 - \Lambda) \quad (1.48)$$

Où : D est la variable d'endommagement mécanique fonction de la variable d'écrouissage κ et Λ représente la variable d'endommagement thermique fonction de la température.

Une loi exponentielle en fonction de la variable d'écrouissage κ_x (déformation plastique cumulée) pour la variation de la variable d'endommagement.

$$1 - D_x = \exp(-c_x \kappa_x) \quad (1.49)$$

Où c_x est un paramètre du matériau ($x=t$ pour la traction et $x=c$ pour la compression).

Pour décrire au mieux le comportement différent du béton en traction et en compression, l'endommagement total est ainsi subdivisé en deux parties (Mazars 1984, Lee 1998, Ragueneau 1999) [3]. Une première partie pour décrire le comportement de traction et une deuxième part pour décrire celui de compression.

$$D(\kappa) = 1 - (1 - D_c(\kappa_c))(1 - D_t(\kappa_t)) \text{ et } \kappa = \{\kappa_c, \kappa_t\}^T \quad (1.50)$$

Le phénomène unilatéral observé lors d'un chargement cyclique est introduit en modifiant l'endommagement de traction en le multipliant par un paramètre p fonction de l'état de contrainte (Lee 1998, Nechnech & al. 2000), tels que $0 \leq p \leq 1$

L'équation (1.50) devient alors :

$$D(\kappa, \tilde{\sigma}) = 1 - (1 - D_c(\kappa_c))(1 - p(\tilde{\sigma})D_t(\kappa_t)) \quad (1.51)$$

Le paramètre p est choisi de telle manière à bien représenter la fermeture de fissure. Dans le cas d'un chargement tridimensionnel, ce paramètre peut s'écrire en fonction du tenseur de contrainte effective de la manière suivante :

$$p(\tilde{\sigma}) = p_0 + (1 - p_0)r(\tilde{\sigma}) \quad (1.52)$$

Dans cette équation, $0 \leq p_0 \leq 1$ est un paramètre matériau et $r(\tilde{\sigma})$ une fonction poids scalaire (Cette fonction sert à quantifier le pourcentage des contraintes de traction par rapport aux contraintes de compression dans le cas tridimensionnel) qui s'écrit :

$$r(\tilde{\sigma}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{\tilde{\sigma}} = 0 \\ \frac{[\sum_{i=1}^3 \langle \hat{\tilde{\sigma}}_i \rangle_+]}{[\sum_{i=1}^3 |\hat{\tilde{\sigma}}_i|]} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.53)$$

Où $\hat{\tilde{\sigma}}_i$ représente la $i^{\text{ème}}$ composante du tenseur de contrainte effective principale, et

$\langle x \rangle_+ = \frac{(|x| + x)}{2}$, désigne la partie positive de x .

La définition (1.48) signifie que la prise en compte du phénomène unilatéral, lors du passage d'une sollicitation de traction à une sollicitation de compression, se fait par une diminution de l'endommagement de traction affecté par la fonction $p(\tilde{\sigma})$ qui pilote la fermeture de fissure.

L'endommagement thermique peut être défini à partir de la relation liant la variation du module d'élasticité à la température $E(T)$, d'une manière analogue à celle qui a été utilisée pour définir l'endommagement mécanique, de telle sorte que :

$$\Lambda(T) = 1 - \frac{E(T)}{E_0} \quad \text{avec} \quad \dot{\Lambda} > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\theta} > 0 \quad \text{où} \quad \dot{\Lambda} = 0 \quad \text{si} \quad \dot{\theta} \leq 0 \quad (1.54)$$

Les limites du modèle proposé sont le choix d'une variable d'endommagement, un endommagement isotrope ne décrit pas l'anisotropie liée à la fissuration qui peut nous conduire à une réponse erronée du modèle dans le cas de chargement non radiaux. La déformation d'interaction thermomécanique adoptée dans le modèle ne peut pas expliquer certains phénomènes au niveau mésoscopique ou à l'échelle locale.

1.3.6.5. Modèle de S. Fichant (1996) [13]

Ce modèle est basé sur l'interpolation d'une surface d'endommagement (Décrit à partir des trois endommagements principaux dus aux extensions). Dans le cas d'un endommagement isotrope la forme de surface est sphérique mais pour le cas d'une surface ellipsoïdale on aura un endommagement anisotrope.

Dans le cas d'un endommagement isotrope on a :

$$\sigma_{ij} = (1 - D)\tilde{\sigma}_{ij} \quad (1.55)$$

Pour un nombre fini de direction \vec{n} , la relation des contraintes effective s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij}n_j = (1 - d(\vec{n}))\tilde{\sigma}_{ij}n_j \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.56)$$

σ_{ij} et $\tilde{\sigma}_{ij}$ Les composantes du vecteur contraintes.

$d(\vec{n})$: est une variables scalaire d'endommagement

$(1 - d(\vec{n}))$: Définit une surface d'endommagement $S(\vec{n})$ pour chaque normale(\vec{n}).

On vérifie la stabilité du système dans son comportement adoucissant selon Bazant [17], les déformations sur les micro-plans sont les projections du vecteur des déformations normales aux plans. L'approximation des contraintes est obtenue en intégrant sur une sphère de rayon unité.

Utilisant le principe des travaux virtuel. Taylor et Bazant [16] ont proposés que :

$\forall \varepsilon^*$ Cinématiquement admissible

$$\frac{3}{4}\pi\sigma\varepsilon^* = \int_{\Omega} (1 - d_n(\vec{n}))\tilde{\sigma}_N\varepsilon^*_N + (1 - d_t(\vec{n}))\tilde{\sigma}_{T_i}\varepsilon^*_{T_i} d\Omega \quad (1.57)$$

Où : Ω Représente une sphère de rayon unité.

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_N = \vec{n} \tilde{\sigma} \vec{n} \\ \tilde{\sigma}_{T_i} = \vec{t}_i \tilde{\sigma} \vec{n} \end{cases} \quad \text{Et} \quad \begin{cases} \tilde{\varepsilon}_N = \vec{n} \varepsilon \vec{n} \\ \tilde{\varepsilon}_{T_i} = \vec{t}_i \varepsilon \vec{n} \end{cases} \quad (1.58)$$

La première partie à gauche représente le travail virtuel des contraintes macro pour une sphère élémentaire.

La deuxième partie à droite décrit le travail virtuel des vecteurs contraintes sur les micro-plans.

- Cas d'une surface d'endommagement ellipsoïdale

L'équation d'un ellipsoïde en coordonnées sphérique (r, θ , ρ) est

$$S(\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta \left\{ \frac{\cos^2 \varphi}{(1-d_2)^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{(1-d_1)^2} \right\} + \frac{\cos^2 \theta}{(1-d_3)^2}}} \quad (1.59)$$

Où : d_1, d_2 et d_3 sont les valeurs principales de l'endommagement.

La relation entre les composantes du tenseur des contraintes et du tenseur des contraintes effectives s'écrit d'une façon générale :

$$d(\vec{n}) = \frac{\tilde{\sigma}(\vec{n}) - \sigma(\vec{n})}{\tilde{\sigma}(\vec{n})} \quad (1.60)$$

$$\sigma_{ij} = I_{abcd} \tilde{\sigma}_{ij} \quad (1.61)$$

$$I_{abcd} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega'} (1 - d(\vec{n})) \cos^a \theta \cos^b \theta \cos^c \varphi \cos^d \varphi d\Omega' \quad (1.62)$$

On vérifie l'évolution des variables d'endommagement par la surface seuil f :

$$f(\vec{n}) = \vec{n} \varepsilon \vec{n} - \varepsilon_{d0} - K(d(\vec{n})) \quad (1.63)$$

Où : ε_{d0} est le seuil en traction

La loi d'évolution s'écrit :

$$d_i = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}}{\vec{n} \varepsilon \vec{n}} \exp[B_t(\varepsilon_{d0} - \vec{n} \varepsilon \vec{n})] \quad (1.64)$$

d_i : l'endommagement qui décrit l'accroissement de fissuration en compression est induit par les extensions transverses et positive [13]. Quand la déformation normale atteint le seuil en traction ε_{d0} l'endommagement apparaît.

- Comportement en traction compression- Reformation de fissure

La décomposition est effectuée suivant le signe des contraintes effectives principales :

$$\langle \tilde{\sigma} \rangle_+ = P^{-1} \langle \tilde{\sigma}^d \rangle_+ P \quad (1.65)$$

$$\langle \tilde{\sigma} \rangle_- = P^{-1} \langle \tilde{\sigma}^d \rangle_- P \quad (1.66)$$

Où : P est la matrice de passage.

Le tenseur des contraintes effectives s'écrit dans le repère de travail :

$$\tilde{\sigma} = \langle \tilde{\sigma} \rangle_+ + \langle \tilde{\sigma} \rangle_- \quad (1.67)$$

1.3.7. Conclusions

Dans cette partie d'étude bibliographique, plusieurs points sont à retenir qui seront utiles par la suite du travail :

✓ La plasticité est caractérisée par une surface seuil continue capable de représenter quantitativement l'évolution des déformations irréversibles. Les surfaces seuils les plus utilisées à l'heure actuelle prennent en compte trois invariants, ce qui permet d'avoir une évolution des déformations plastiques réaliste, surtout quand le chargement est multiaxial.

✓ La théorie d'endommagement se base sur la théorie de la thermodynamique des milieux continus. Les modèles d'endommagement représentent une description du phénomène de perte de rigidité observée expérimentalement, ainsi que le phénomène de refmeture des fissures lors de chargement cycliques (phénomène unilatéral). Le couplage entre la plasticité et l'endommagement semble être la meilleure façon d'allier les avantages des deux théories.

✓ Le caractère adoucissant du comportement du béton qui est à l'origine de la dépendance de la solution numérique vis-à-vis du maillage, nécessite d'introduire une technique de régularisation pour éviter le phénomène de localisation de variables ainsi que le choix de l'approche pour l'obtention d'une réponse numériquement acceptable

✓ Cependant, à nos jours, quels que soient les modèles qui ont été développés, il n'existe aucun modèle capable de décrire de façon fiable et simple le comportement du béton, surtout lorsque l'on veut prendre en compte l'anisotropie, le comportement unilatéral et les déformations permanentes.

1.4. Echelles de modélisation

Plusieurs approches peuvent être adoptées afin de modéliser le comportement d'un élément de structure soumise à des chargements mécaniques : on peut citer trois approches approche globale, approche semi globale, approche macroscopique et ils existent d'autres approches de modélisation, voir la figure 1.15.

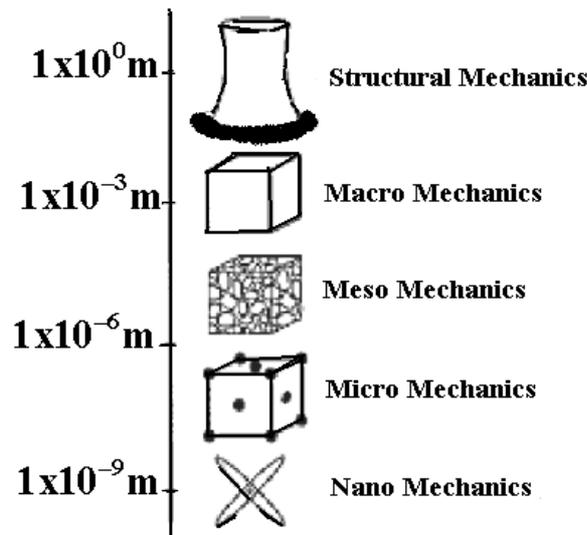


Figure 1.15 Les échelles de modélisations [10]

1.4.1. Approche globale [15]

A ce niveau de modélisation le comportement du composite béton armé est décrit en variables généralisées (N - ε_n , V - γ , M - Φ). La formulation peut s'appuyer sur des observations phénoménologiques ou bien peut être basée sur les théories classiques de la plasticité avec l'introduction de surfaces de plasticité ou surfaces seuils type $f(N, V, M) = 0$, ou de la mécanique de l'endommagement par l'introduction d'une variable interne représentative de l'état de détérioration du matériau.

La loi de comportement porte sur les variables globales telles que les moments, l'effort normal, les rotations, les déplacements. Il faut alors identifier cette loi pour chaque géométrie et chaque matériau [4].

Le calcul proprement dit sera peu coûteux mais des calculs préalables seront nécessaires pour identifier le comportement de chaque type de sous structure [4]. D'autre part, les informations locales sont difficilement accessibles et nécessitent un calcul supplémentaire.

1.4.2. Approche macroscopique

La modélisation macroscopique du comportement mécanique du béton a beaucoup évolué et les modèles actuels permettent de prendre en compte des phénomènes de plus en plus complexes. Les modèles macroscopiques utilisés classiquement pour le béton possèdent généralement un nombre important de paramètres qui permettent de décrire la complexité du comportement du matériau sous diverses sollicitations [7] [14].

Souvent l'approche macroscopique est basée sur la théorie de la thermodynamique qui constitue un cadre très précieux pour guider et limiter les choix de la modélisation phénoménologique. En effet, la thermodynamique permet d'associer à chaque phénomène sa variable et à chaque variable sa loi d'évolution. On postule l'existence de deux potentiels :

1. Potentiel thermodynamique : qui permet de définir des variables d'état en fonction des phénomènes à modéliser, et duquel dérivent les lois d'état.
2. Potentiel de dissipation : qui permet de décrire les lois d'évolution décrivant les processus irréversibles [7] [14].

L'équation du premier principe est la suivante

$$\rho \cdot \frac{de}{dt} = \sigma : D + r - \text{div } \vec{q} \quad (1.68)$$

Ou, dans l'hypothèse des petites perturbations

$$\rho \cdot \dot{e} = \sigma : \dot{\varepsilon} + r - \text{div } \vec{q} \quad \text{ou} \quad \rho \cdot \dot{e} = \sigma_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij} + r - q_{i,i} \quad (1.69)$$

Cette relation donne la variation d'énergie interne du matériau, par unité de volume, en fonction de sa vitesse de déformation (et des contraintes associées) et de son flux de chaleur reçu (en surface et en volume).

- L'équation du second principe est la suivante

$$\sigma : \dot{\varepsilon} - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad (1.70)$$

$\dot{\varepsilon}$: Vitesse de déformation.

ρ : Densité volumique.

- Variables d'état, potentiel thermodynamique

L'inégalité de Clausius-Duhem devient alors, en utilisant la partition en vitesses de déformations $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$ où $\dot{\varepsilon}^e$ est le tenseur de déformation élastique, et $\dot{\varepsilon}^p$ celui des vitesses des déformations plastiques:

$$\left(\sigma - \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \right) : \dot{\varepsilon}^e + \sigma : \dot{\varepsilon}^p - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \dot{V}_k - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \geq 0 \quad (1.71)$$

À partir de cette inégalité qui doit être respectée, en ne considérant que les transformations réversibles, on en déduit les lois de la thermo-élasticité:

$$\sigma = \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \quad (1.72)$$

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (1.73)$$

$$A_k = \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \quad (1.74)$$

L'ensemble de ces égalités forme les lois d'états. En pratique le potentiel thermodynamique n'est pas une grandeur mesurable, ce sont les variables observables qui le sont et donc, l'expérimentation permettra d'établir directement les lois d'état, le potentiel ne servant qu'à l'écriture du modèle.

- Potentiel de dissipation

Compte tenu des relations précédentes, l'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit sous la forme d'un terme de dissipation Φ positif ou nul:

$$\Phi = \sigma : \dot{\varepsilon}^p - A_k \cdot \dot{V}_k - \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \frac{\vec{q}}{T} \geq 0 \quad (1.75)$$

On admet généralement le découplage entre la dissipation mécanique et la dissipation thermique :

$$\Phi \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Phi_m = \sigma : \dot{\varepsilon}^p - \frac{\partial \psi}{\partial V_i} \dot{V}_i \geq 0 & \text{dissipation mécanique} \\ \Phi_{th} = -\frac{\vec{q}}{T} \overrightarrow{\text{grad}}(T) \geq 0 & \text{Dissipation thermique} \end{cases} \quad (1.76)$$

Les lois d'évolution associées à ce potentiel s'expriment alors par la propriété de normalité

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon^p} \\ A_k = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{V}_k} \\ \overrightarrow{\text{grad}}(T) = -\frac{\partial \phi}{\partial \frac{\vec{q}}{T}} \end{cases} \quad (1.77)$$

À partir de l'expression du potentiel dual, on peut obtenir de façon simple les propriétés de normalité qui nous permettent d'écrire les lois complémentaires d'évolution suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon^p = \frac{\partial \phi^*}{\partial \sigma} \\ \dot{V}_k A_k = -\frac{\partial \phi^*}{\partial A_k} \\ \frac{\vec{q}}{T} = -\frac{\partial \phi^*}{\partial \overrightarrow{\text{grad}}(T)} \end{cases} \quad (1.78)$$

- **Commentaire**

L'approche globale donne une idée générale sur le comportement de la structure c'est-à-dire les relations contrainte-déformation, moment-effort normale, mais les informations au niveau local de la structure nécessite un calcul supplémentaire ; l'approche macroscopique est basée sur l'utilisation de plusieurs paramètre pour décrire la complexité géométrique où de chargement. Ce calcul est très coûteux d'un point de vue temps et identification de paramètre. L'approche semi-globale est une combinaison entre les deux approches précédentes où on utilise moins de paramètre avec plus d'information au niveau local de la structure sans calcul supplémentaire.

1.4.3. Approche semi-globale [14]

La discrétisation est la même que pour les approches globales. Des hypothèses permettent de calculer les variables cinématiques locales (déformations) en fonction des variables cinématiques globales (déplacements, rotations). Une loi de comportement permet de calculer les variables statiques locales (contraintes) qui sont ensuite intégrées pour déterminer les variables statiques généralisées (moments, efforts).

Cette méthode est un bon compromis pour les structures à géométrie simple car elle est beaucoup moins coûteuse que les méthodes locales et permet d'accéder à un niveau d'informations intéressant compte tenu des restrictions imposées par les hypothèses.

1.4.4. Code aux éléments finis EFICOS [16]

1.4.4.1. Introduction

De nombreuses structures sont composées de poutres et de poteaux, les outils de dimensionnement et de vérification de telles structures étaient à l'époque de la création de EFICOS : soit des programmes aux éléments finis basés sur des éléments de poutres utilisant des modèles de comportement globaux (Moment/ courbure), soit des modèles éléments finis classiques 2D ou 3D intégrant le comportement local du matériau.

1.4.4.2. Principe

Le programme aux éléments finis EFICOS : (Éléments Finis à Couches Superposées) est basée sur une idée décrite par Owen et Bazant [16] qui consiste à utiliser des éléments finis de poutres. Dans la version bidimensionnelle (poutres planes chargées dans leur plan) utilisée dans EFICOS, les éléments sont discrétisés en couches. Chaque couche est affectée d'un comportement mécanique uni-axial qui est a priori quelconque. La raideur de chaque couche est intégrée en prenant en compte son excentricité par rapport à la fibre moyenne pour obtenir les relations au niveau des degrés de liberté de l'élément poutre.

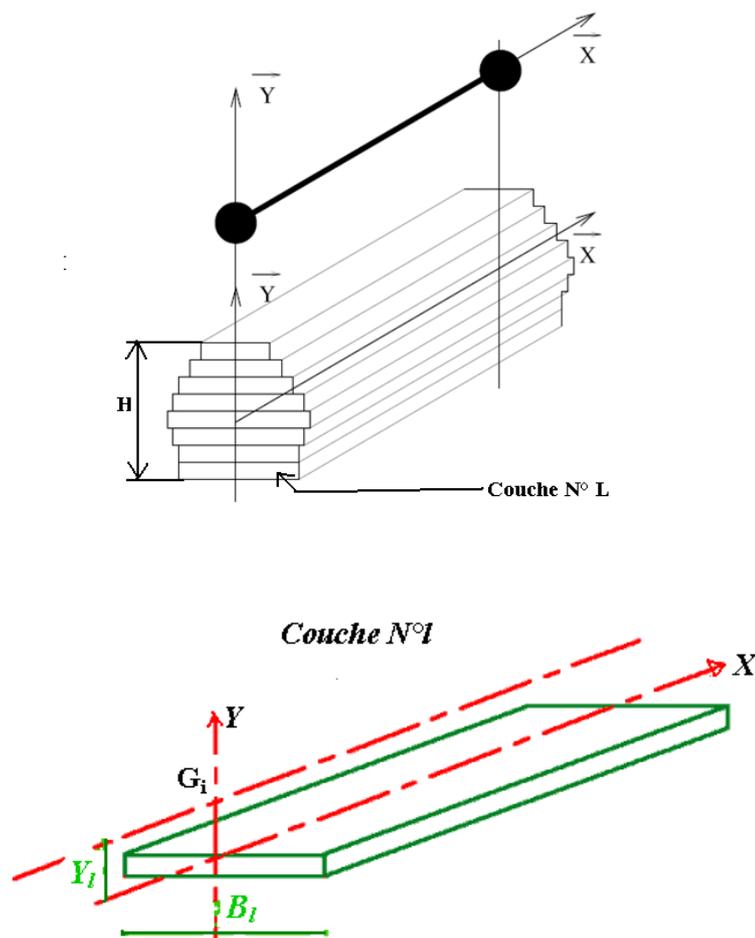


Figure 1.16 Élément de poutre à couches superposées [16].

1.4.4.3 Principe de calcul

L'élément de poutre à couches superposées est basé sur un élément de poutre classique à 2 nœuds dont chaque nœud possède 3 degrés de liberté u , v , θ (figure. 1.17).

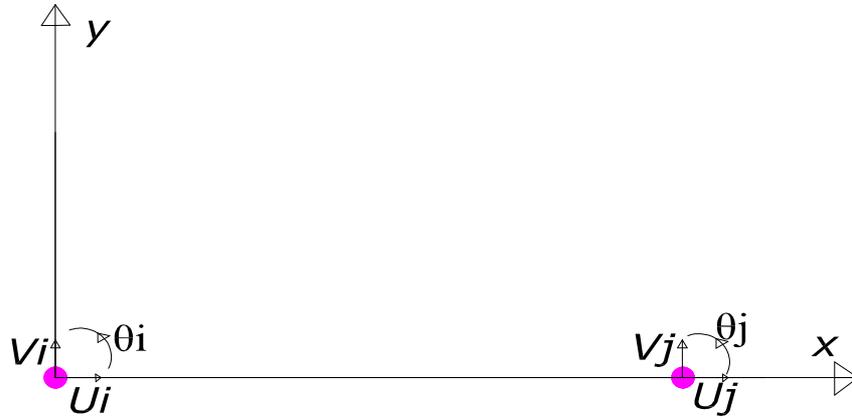


Figure 1.17 Degré de liberté pour les nœuds de la poutre

1.4.4.4. Equilibre de l'élément

La relation donnant l'équilibre de l'élément est donnée par le principe des puissances virtuelles :

$$\delta U^T F = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dv \quad \text{Avec} \quad \delta U^T = \delta (BU)^T = \delta U^T B^T \quad (1.79)$$

Si nous écrivons la loi de comportement sous la forme

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(D)} + \varepsilon_{an}(D) \quad \text{Soit} \quad \sigma = E(D)[\varepsilon - \varepsilon_{an}(D)]$$

Où D désigne l'endommagement

$$\text{Nous obtenons : } \delta U^T F = \int_V \delta U^T B^T E(D)(\varepsilon - \varepsilon_{an}(D))dv \quad (1.80)$$

Soit :

$$F = \int_V B^T E(D)(\varepsilon - \varepsilon_{an}(D))dv \quad (1.81)$$

Où encore

$$F = \left\{ \int_V B^T E(D)B dv \right\} U - \int_V B^T E \varepsilon_{an(D)} dv \quad (1.82)$$

En posant : $K = \int_V B^T E(D)B dv$: Matrice de rigidité élémentaire

Et $F_{an} = - \int_V B^T E \varepsilon_{an(D)} dv$: Effort anélastique élémentaire.

Nous avons : $F=K(D).U+F_{an}(D)$

Cette répartition des non linéarités dans la matrice de rigidité et la matrice de rigidité des efforts permet de conserver une matrice de rigidité non-singulière lors de chargements cycliques.

1.4.4.5. La matrice de rigidité élémentaire et le vecteur des efforts anélastiques

Les calculs sont réalisés en utilisant les approximations suivantes :

-L'éléments de base est discrétisé en N couches d'égaies épaisseurs $h = \frac{H}{N}$

-Le module d'élasticité et la déformation anélastique sont constants dans une couche.

1.4.4.6. Matrice de rigidité élémentaire

Les intégrales sont alors approximées par des sommes de Riemann et nous obtenons :

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & K_4 & -K_1 & 0 & -K_4 \\ & K_3 & K_5 & 0 & -K_3 & K_5 \\ & & K_6 & -K_4 & -K_5 & 0.5K_6 \\ & SYM & & K_1 & 0 & K_4 \\ & & & & K_3 & -K_5 \\ & & & & & K_6 \end{bmatrix} \quad (1.83)$$

Avec :

$$K_1 = \frac{h}{L} \sum_{l=1}^N E_l b_l \quad K_5 = \frac{6h}{L^2} \sum_{l=1}^N E_l b_l y_l^2 \quad (1.84)$$

$$K_3 = \frac{12h}{L^3} \sum_{l=1}^N E_l b_l h_l y_l^2 \quad , \quad K_6 = \frac{4h}{L^2} \sum_{l=1}^N E_l b_l y_l^2 \quad , \quad K_4 = \frac{-h}{L} \sum_{l=1}^N E_l b_l y_l \quad (1.85)$$

E_l : Module d'élasticité

E_{anl} : Déformation anélastique

b_l : Largeur de couche.

y_l : Distance entre l'axe moyen de la couche et la fibre neutre de la poutre.

1.4.4.7. Prise en compte d'armatures

Chaque couche $N^{\circ}l$ peut être composée de béton et d'acier. On notera

C_{al} : La concentration volumique d'acier dans la couche $N^{\circ}l$

E_{al} : Module d'élasticité de l'acier dans la couche $N^{\circ}l$.

E_{bl} : Le module d'élasticité du béton dans la couche $N^{\circ}l$

ε_{pl} : La déformation plastique de l'acier dans la couche $N^{\circ}l$

ε_{anl} : La déformation anélastique du béton dans la couche $N^{\circ}l$

Nous supposons une adhérence parfaite entre l'acier et le béton et l'intégration de l'élément composite se fait en utilisant l'hypothèse de Voigt pour l'homogénéisation.

$$E_l = (1 - C_{al})E_{bl} + C_{al}E_{al} \quad (1.86)$$

$$\varepsilon_{anl} = (1 - C_{al})\varepsilon_{anl} + C_{al}\varepsilon_{pl} \quad (1.87)$$

On remarquera qu'en plus de l'hypothèse d'adhérence parfaite viennent se rajouter des hypothèses propres à la cinématique de l'élément utilisé qui font que les effets triaxiaux et les conséquences relatives à la différence des coefficients de poisson des matériaux ne sont pas pris en compte.

1.4.4.8. Conclusion

Le programme EFICOS permet d'effectuer des calculs sur des structures en béton et en béton armé construites à l'aide de poutres et poteaux, il fait des calculs dynamiques du type sismiques.

Le domaine d'application du programme pourra être étendu par l'introduction d'éléments de voiles et d'éléments spécifiques permettant de faire une connections correcte entre les poutres et les poteaux (En utilisant toujours la méthode semi globale et le modèle de comportement unilatéral).