

Chapitre

FILTRE PASSIF

V-1 Définition :

Les résonateurs électriques LC utilisent le phénomène d'échange d'énergie électrostatique et électromagnétique suivant les lois classiques de l'électromagnétisme, si le résonateur est excité par une source d'énergie extérieur, puis laissé au repos, il perd petit à petit l'énergie qu'il a emmagasinée en oscillant à sa fréquence propre .L'amplitude de l'oscillation décroît plus ou moins vite suivant la valeur du coefficient de surtension.

Le résonateur dissipe passivement l'énergie reçue comme par exemple un pendule auquel on aurait communiqué un mouvement initial.Les filtres utilisant de tels résonateurs sont des filtres passifs.

Un filtre est passif s'il ne nécessite pour fonctionner aucune source d'alimentation .il est constitué essentiellement de selfs et de condensateurs.Constitué de composants passifs de valeurs finies, un filtre passif a une impédance d'entrée qui n'est jamais infinie et une impédance de sortie jamais nulle.

De plus ces impédances varient toujours avec la fréquence .la fonction de transfert d'un filtre passif ne peut donc être définie qu'en association avec un générateur et une charge d'impédance déterminée

V-2 Domaine d'utilisation :

Les filtres passifs sont utilisés dans le filtrage d'un signal de haute et moyenne fréquence

V-3 Fonction de transfert d'un filtre passif :

On distingue deux grandes classes de fonction de transfert :

- Les fonctions de transfert proprement dites où la réponse est mesurée à un autre pôle d'accès que l'excitation.

- Les fonctions d'entrée où la réponse est mesurée au même pôle d'accès que l'excitation.

On définit la nature de la fonction de transfert selon la méthode d'analyse du quadripôle.

Considérons le filtre associé au générateur et à la charge

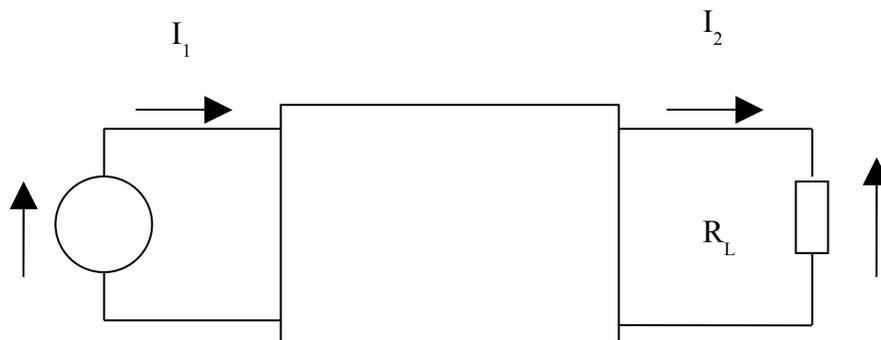


Figure V-1

V_e : tension aux bornes du générateur

I_1 : courant du générateur

V_s : tension aux bornes de la charge

I_2 : courant de la charge

L'analyse par boucle donne trois sortes de fonctions de transfert :

- **Admittance de transfert :**

$$H(s) = \frac{I_2(s)}{V_e(s)}$$

- **Le coefficient de transmission :**

$$H(s) = \frac{V_s(s)}{V_e(s)} \quad (V-2)$$

Ces deux fonctions de transfert sont égales lorsque R_L est la résistance de normalisation

- **L'admittance d'entrée**

$$Ye(s) = \frac{I_1(s)}{V_e(s)} \quad (V-3)$$

L'analyse par jonction donne trois autres types de fonctions de transfert :

- **Impédance de transfert :**

$$H(s) = \frac{V_s(s)}{I_1(s)} \quad (V-4)$$

- **Le coefficient de transmission en courant :**

$$H(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \quad (V-5)$$

- **Impédance d'entrée :**

$$H(s) = \frac{V_e(s)}{I_1(s)} \quad (V-6)$$

L'analyse par pôles donne encore deux autres types de fonctions de transfert tels que :

Le coefficient de transmission et le coefficient de réflexion :

Ce sont des fonctions de transfert de types particuliers.

Aussi par la suite, nous ne considérons comme fonction d'entrée que les impédances et les admittances d'entrée des dipôles.

V-4 Propriétés mathématiques des fonctions de transfert :

$H(s)$ est le rapport de deux polynômes :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (V-7)$$

N et S étant deux polynômes à coefficients réels.

- **Caractères analytiques de $H(s)$:**

- $H(s)$ est analytique puisque s^* conjugué de s ne figure pas explicitement dans l'expression de $H(s)$.
- Elle est rationnelle (rapport de deux polynômes).
- Elle est réelle définie par la condition « $H(s)$ est réelle si s est réelle » cette condition s'étend à $s = 0$ et $s = \infty$ c'est-à-dire $H(0)$ et $H(\infty)$ sont réelles.

- **Propriétés de réflexion :**

Les fonctions analytiques, rationnelles et réelles possèdent la propriété de réflexion valable pour $N(s)$ et $D(s)$, donc pour $H(s)$ cette propriété s'énonce par :

$$H(s^*) = H^*(s) \quad (\text{V-8})$$

s^* : conjuguée de s

H^* : conjuguée de H

Il en résulte que les fonctions :

$U(\theta)$ fonction paire tandis que $V(\theta)$ est une fonction impaire

$$H(s) = U(\theta) + jV(\theta) \quad (\text{V-9})$$

V-5 Théories des pôles et des zéros :

Les seules singularités de $H(s)$ sont les racines de $D(s)$, pôles de $H(s)$

Cette singularité est illustrée par l'appellation simplifiée « théorie des pôles et des zéros » appliquée au caractère analytique de $H(s)$.

Les coefficients de $N(s)$ et $D(s)$ étant réels, les racines et les pôles de $H(s)$, sont donc réels ou conjugués.

On distingue aussi deux types de pôles et zéros :

- Les pôles ou zéros réels
- Les pôles ou zéros complexes groupés par paires.

V-6 Expressions mathématiques de la fonction de transfert :

- **A partir du numérateur et du dénominateur :**

Toute fonction d'ordre n peut s'écrire sous la forme :

$$H(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0} \quad (V-10)$$

Les coefficients a_n et b_n ainsi que a_0 et b_0 n'étant pas nuls simultanément.

Si $a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-k+1} = 0$, on dit que $s = \infty$ est un zéro d'ordre k ;

Si $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$, on dit que $s = 0$ est un zéro d'ordre k ;

Si $b_n = b_{n-1} = \dots = b_{n-k+1} = 0$, on dit qu $s = \infty$ est un pôle d'ordre k ;

Si $b_0 = b_1 = \dots = b_{k-1} = 0$, on dit que $s = 0$ est un pôle d'ordre k ;

Dans ces conditions, toute fonction d'ordre n possède n zéros et n pôles y compris $s=0$ et $s = \infty$.

On distinguera fréquemment les parties paires et les parties impaires des polynômes $N(s)$ et $D(s)$ en posant :

$$N(s) = N_1(s^2) + sN_2(s^2) \quad (V-11)$$

$$D(s) = D_1(s^2) + sD_2(s^2) \quad (V-12)$$

$$\text{On a } H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_1 + sN_2}{D_1 + D_2} \quad (V-13)$$

- **A partir des pôles et des zéros :**

Une fonction de transfert est complètement connue à une constante près H_0 , par la donnée des pôles P_i et zéros Z_i :

$$H(s) = H_0 \prod \frac{s - P_i}{s - Z_i} \quad (V-14)$$

V-7 Caractères positifs des fonctions d'entrées des dipôles passifs :

Considérons le dipôle passif de la figure ci-dessous :

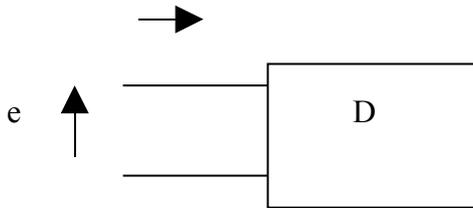


Figure V-2

La fonction d'entrée de ce dipôle est :

$$H(s) = \frac{e}{i} = Z_e(s) \quad (\text{V-15})$$

La puissance dissipée dans ce dipôle est :

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[ei^*] \quad \text{avec } i^* \text{ conjugué de } i \quad (\text{V-16})$$

⇒

$$W = \frac{1}{2} U(\theta) |i|^2 \quad (\text{V-17})$$

Cette puissance est toujours positive, par suite la fonction d'entrée d'un dipôle passif est caractérisée par les deux conditions suivantes :

$H(s)$ est une fonction stable

$$U(\theta) \geq 0$$

V-7-1 Condition de stabilité :

$H(s)$ est stable si les conditions suivantes sont remplies :

- Les pôles de $H(s)$ se trouvent à gauche de l'axe des imaginaires dans le plan complexe
- Pas de pôles multiples sur l'axe des imaginaires

On dit qu'un polynôme satisfaisant à ces conditions est un polynôme de Hurwitz.

V-8 Fonction d'entrée des dipôles sans pertes :

Un réseau sans pertes est un réseau dans lequel aucune dépense d'énergie n'est faite dans chacun des éléments du réseau.

Dans les circuits à constantes localisées, aucune résistance n'est présente dans le réseau.

En reprenant les mêmes raisonnements du §V-7 on voit que la fonction d'entrée d'un dipôle sans pertes est caractérisée par les deux conditions :

$H(s)$ est une fonction stable

$$U(\theta) \equiv 0$$

V-8-1 Forme de la fonction de transfert d'un dipôle passif sans pertes :

On suppose que $H(s)$ soit une impédance $Z(s)$ le raisonnement étant le même pour une admittance ;

$Z(s)$ est le rapport de deux polynômes de parités différentes donc elle prend l'une des formes suivantes :

$$Z(s) = s \frac{N_2(s^2)}{D_1(s^2)} \text{ ou } Z(s) = \frac{N_1(s^2)}{sD_2(s^2)} \quad (\text{V-18})$$

V-8-2 Nature des pôles et des zéros :

- L'origine $s=0$ toujours un pôle ou un zéro simple
- La valeur $s = \infty$ est toujours un pôle ou un zéro simple.

Cela entraîne que les degrés du numérateur $N(s)$ et du dénominateur $D(s)$ diffèrent (en plus ou en moins) d'une unité.

- Les pôles et les zéros sont entrelacés

V-9 Décomposition de H(s) en fractions partielles :

Comme $H(s)$ est la fonction d'entrée d'un dipôle sans perte sa décomposition peut se mettre sous la forme :

$$H(s) = R_\infty s + \frac{R_0}{s} + \sum \frac{As}{s^2 + \omega_i^2} \quad (\text{V-19})$$

Où les coefficients R_∞ , R_0 , A sont des réels positifs. A résidus des pôles

V-10 Décomposition de H(s) en fractions continues :

Cette décomposition s'applique essentiellement aux fonctions d'entrée pour laquelle les valeurs $s=0$ et $s = \infty$ ne peuvent être des pôles ou des zéros multiples. La décomposition en fractions continues peut être faite de deux façons différentes :

V-10-1 Division continue par puissance décroissante de s :

On effectue la division de $N(s)$ par $D(s)$ rangée normalement par puissances décroissantes en remettant systématiquement les diviseurs à la place des dividendes et les restes à la place des diviseurs de façon à alterner la nature des quotients (impédances et admittances) ceux-ci n'étant composés que d'un seul facteur tel que A ou Bs ;

V-10-2 Division continue par puissance croissante :

On effectue la division de $N(s)$ par $D(s)$, rangées par puissances croissantes de s , en remettant systématiquement les diviseurs à la place des dividendes et les restes à la place des diviseurs.

Les quotients n'étant composés que d'un seul fonction tel que A ou $\frac{1}{Bs}$.

V-10-3 Division continue alternée :

Dans certains cas la division continue normale donne un facteur A ou B négatif on peut continuer l'opération en évitant de permuter le reste et le diviseur c'est-à-dire en gardant la même nature de quotient (impédance ou admittance).

Chapitre

SYNTHÈSE DES FILTRES PASSIFS

VI-1 Synthèse des fonctions de transfert :

Il est évident que l'on a intérêt à réaliser la synthèse du quadripôle Q avec le minimum d'éléments.

Les formes de synthèses satisfaisant à cette condition sont dites « formes canoniques ».

Pour réaliser la synthèse des fonctions d'entrée lorsque l'on a vérifié que ces fonctions sont bien des fonctions positives et réelles, on peut essayer quatre formes de décomposition de la fonction d'entrée.

La décomposition en fractions partielles ou en fractions continues est totale et fournit les quatre formes canoniques de synthèses.

VI-1-1 La forme Forster série :

En abrégé Fs elle est obtenue par la décomposition de $H(s)$ en fractions partielles. Cette décomposition aboutit à la synthèse du dipôle sous forme d'un certain nombre de dipôles élémentaires disposés en série.

La forme Fs donne une suite de circuits oscillants antirésonnants disposés en série.

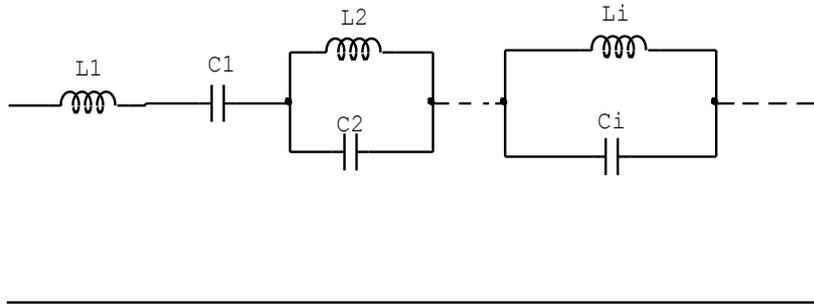


Figure VI-1

La décomposition de $H(s)$ en fractions partielles donne :

$$H(s) = R_{\infty} s + \frac{R_0}{s} + \sum \frac{As}{s^2 + \omega_i^2} \quad (\text{VI-1})$$

Les valeurs de L_1, C_1, L_i, C_i sont données par les formules :

$$L_1 = R_{\infty} \quad (\text{VI-2})$$

$$C_1 = \frac{1}{R_0} \quad (\text{VI-3})$$

$$C_i = \frac{1}{A} \text{ et } LiCi\omega_i^2 = 1 \quad (\text{VI-4})$$

VI-1-2 La forme Forster parallèle :

En abrégé Fp elle est obtenue par la décomposition de $\frac{1}{H(s)}$ en fractions partielles

.cette décomposition aboutit à la synthèse d'un dipôle sous forme d'un certain nombre de dipôles élémentaires disposés en parallèle.

La forme Fp donne une suite de circuits oscillants résonnants disposés en parallèle.

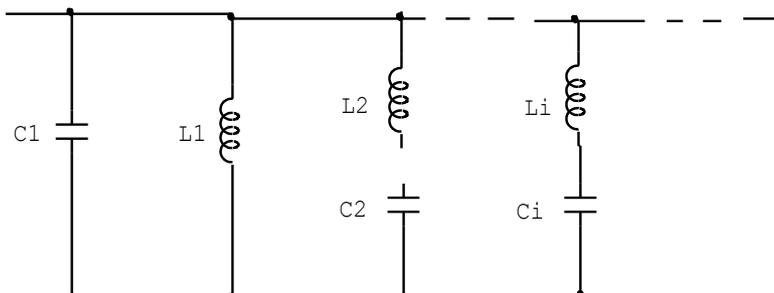


Figure VI-2

La décomposition de $H(s)$ donne :

$$H(s) = R'_\infty s + \frac{R'_0}{s} + \sum \frac{A'_s}{s^2 + \omega_j^2} \quad (\text{VI-5})$$

Les valeurs de L_1, C_1, L_i, C_i sont données par :

$$L_1 = R'_\infty \quad (\text{VI-6})$$

$$C_1 = \frac{1}{R'_0} \quad (\text{VI-7})$$

$$L_i = \frac{1}{A'_i} \quad (\text{VI-8})$$

$$L_i C_i \omega_j = 1 \quad (\text{VI-9})$$

Dans les deux cas, les circuits oscillants antirésonnants sont accordés sur les pulsations ω_i et les circuits oscillants résonnants sur les fréquences ω_j

VI-1-3 La forme Caer décroissant :

En abrégé Cd, elle est obtenue par la décomposition de $H(s)$ ou de $\frac{1}{H(s)}$ en fractions continues, la division continue étant effectuée par puissances décroissantes de s . La forme Cd donne des dipôles en Té ou en Pi du type passe bas (capacité en parallèle, self en série).

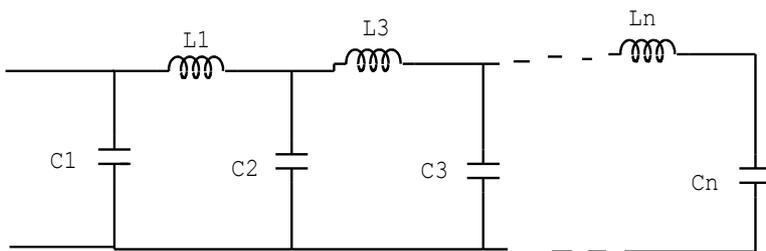


Figure VI-3

La décomposition de $H(s)$ donne :

$$H(s) = \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{L_1 s + \frac{1}{C_2 s + \dots}}} \quad (\text{VI-10})$$

VI-1-4 La forme Caer croissant :

En abrégé Cc, elle est obtenue par la décomposition de $H(s)$ ou de $\frac{1}{H(s)}$ en fractions continues, la division continue étant effectuée par puissances croissantes de s . La forme Cc donne des dipôles en Té ou en Pi du type passe haut (capacité en série, self en parallèle).

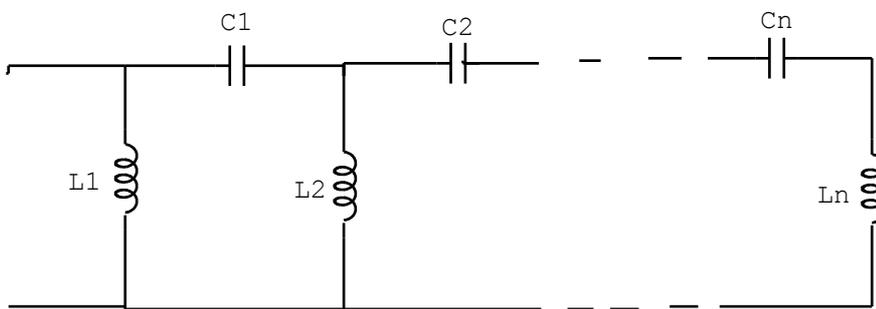


Figure VI-4

La décomposition de $H(s)$ donne :

$$H(s) = \frac{1}{\frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{\frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{\frac{1}{L_2 s} + \dots}}} \quad (\text{VI-11})$$

VI-2 Principes de la théorie moderne des filtres :

VI-2-1 Les différentes étapes de la théorie moderne :

La théorie moderne des filtres est fondée sur la synthèse d'un filtre passe bas normalisé satisfaisant aux conditions suivantes :

- L'impédance de charge est donnée,
- La courbe donnant l'amplitude de la fonction de transfert en fonction de la fréquence est donnée.

Le processus de réalisation d'un filtre quelconque est effectué en quatre étapes successives :

- **Première étape : recherche de la fonction de base**

On se donne soit directement soit pour obtenir des propriétés particulières la fonction :

$$|H(s)|^2$$

- **Deuxième étape : recherche de la fonction de transfert**

On peut alors connaître, suivant les cas les fonctions auxiliaires $\rho(s)$ et $Z_e(s)$

- **Troisième étape : synthèse du filtre passe bas normalisé**

On obtient ainsi les valeurs des inductances et des capacités du filtre passe bas

- **Quatrième étape : dénormalisation et changement de variable**

On revient dans cette étape au filtre original.

VI-3 Les deux formes de synthèse des filtres modernes :

La synthèse d'un filtre passif sans pertes est étroitement liée à la nature de l'impédance du générateur par rapport à la résistance de la charge :

VI-3-1 Impédance interne du générateur est très grande (ou très petite) par rapport à la résistance de charge R_L :

Considérons le quadripôle représenté par la figure V-1, la résistance de normalisation est R_L

La fonction de transfert choisie est l'impédance de transfert :

$$H(s) = \frac{V_S(s)}{I_1(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (\text{VI-12})$$

En décomposant $H(s)$ en sa partie paire et impaire et en considérant seulement le cas où $N(s)$ est égale à 1, on a :

$$H(s) = Z_t(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{D_p(s) + D_{ip}(s)} \quad (\text{VI-13})$$

D_p : partie paire de D

D_{ip} : partie impaire de D

On considère la matrice impédance du quadripôle, l'impédance de la source étant infinie on a, par suite :

$$Z_{22} = Z_s \quad (\text{VI-14})$$

Et

$$V_S = I_2 = Z_{12}I_1 - Z_s I_2 \quad (\text{VI-15})$$

$$\Rightarrow \frac{V_S(s)}{I_1(s)} = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} = Z_t(s) = \frac{Z_{12}}{1 + Z_s} \quad (\text{VI-16})$$

Or les fonctions Z_{12} et Z_{22} du réseau, lorsque celui-ci est sans pertes doivent être des réactances. On a vu au §V-8-1 qu'elles sont le rapport de deux polynômes dont l'un est pair et l'autre impair.

$$Z_t(s) = \frac{1}{1 + \frac{D_{ip}(s)}{D_p(s)}} \quad (\text{VI-17})$$

Avec :

$$Z_{12} = \frac{1}{D_{ip}(s)} \quad (\text{VI-18})$$

Et

$$Z_{22} = \frac{D_p(s)}{D_{ip}(s)} = Z_s(s) \quad (\text{VI-19})$$

Dans le résultat, on prendra garde que la synthèse soit effectuée de droite à gauche, Z_s étant une impédance de sortie et non une impédance d'entrée.

VI-3-2 Impédance interne du générateur ni très grand ni très petit devant la résistance de charge R_L :

On prendra comme fonction de transfert le coefficient de transmission du quadripôle normalisé :

$$H(s) = 2t_i(s) = t(s) \quad (\text{VI-20})$$

Toutefois, cette fonction de transfert n'est pas directement utilisable pour réaliser la synthèse, celle-ci nécessitant le calcul de l'impédance d'entrée. Il est nécessaire pour cela, de calculer par continuation analytique la fonction de transfert du coefficient de réflexion $\rho_e(s) = \rho(s)$, correspondant à la fonction de base choisie. Le calcul est effectué à partir de la connaissance du carré du module.

- **Calcul de $H(s)$:**

L'application du principe d'unicité de la continuation analytique aux fonctions de transfert est faite au contour (C) constitué par la droite (C₁) représentant l'axe Oy et par un demi grand cercle de centre O et de rayon R très grand.

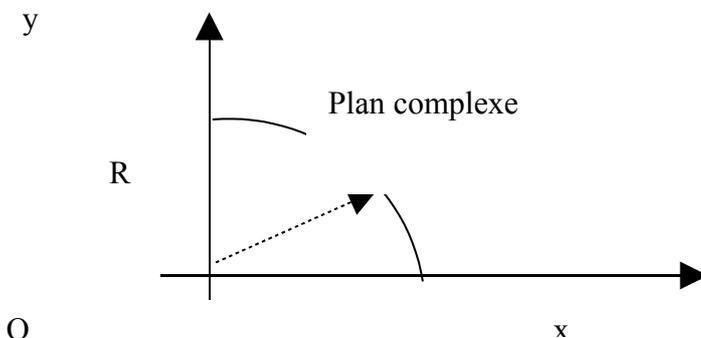


Figure VI-5

Désignons par $K(s)$ une fonction de la variable complexe s dont la valeur égale à :

$$K(s) = |K(s)|e^{j\theta(\omega)} \quad (\text{VI-21})$$

Est connue en tout point de l'axe Oy.

Il n'existe d'après le principe d'unicité, qu'une seule fonction analytique régulière à droite de l'axe Oy sauf en un nombre fini de pôles, et satisfaisant à la condition d'être connue sur l'axe Oy. c'est évidemment la fonction $K(s)$ obtenue en remplaçant la variable ω^2 par la variable $-s^2$

L'application du principe de continuation analytique porte sur le module de l'amplitude :

On suppose que l'amplitude :

$$A(\omega^2) = |H(j\omega)| \quad (\text{VI-22})$$

D'une fonction de transfert $H(s)$ soit connue.

On prend, pour fonction $K(s)$, la fonction analytique paire

$$K(s) \equiv F(s^2) = H(s).H(-s)$$

La fonction $K(s)$ est effectivement bien connue, c'est-à-dire sur l'axe Oy

$$\text{On a en effet, d'après le principe de réflexion } H^*(j\omega) = H(-j\omega) \quad (\text{VI-24})$$

$$|K(j\omega)| = F(-\omega^2) = |H(j\omega)|^2 = A^2(\omega)^2 \quad (\text{VI-25})$$

Il n'y a d'après le principe d'unicité qu'une seule fonction $K(s)$: c'est la fonction $F(s^2)$ obtenue en remplaçant ω^2 par $-s^2$ dans l'expression de $A^2(\omega^2)$.

- **Détermination d'une fonction de transfert stable d'amplitude connue :**

Cette détermination est fondée sur le principe de la continuation analytique exposé précédemment.

$$\text{La fonction analytique paire définie par : } F(s^2) = A^2(-s^2) \quad (\text{VI-26})$$

- **La répartition quadrantale des pôles et des zéros :**

La répartition quadrantale des pôles et des zéros des fonctions analytiques, réelles et paires est fondamentale dans les méthodes de synthèse.

Elle implique que les pôles et les zéros sont répartis aux quatre coins d'un rectangle formant une répartition quadrantale.

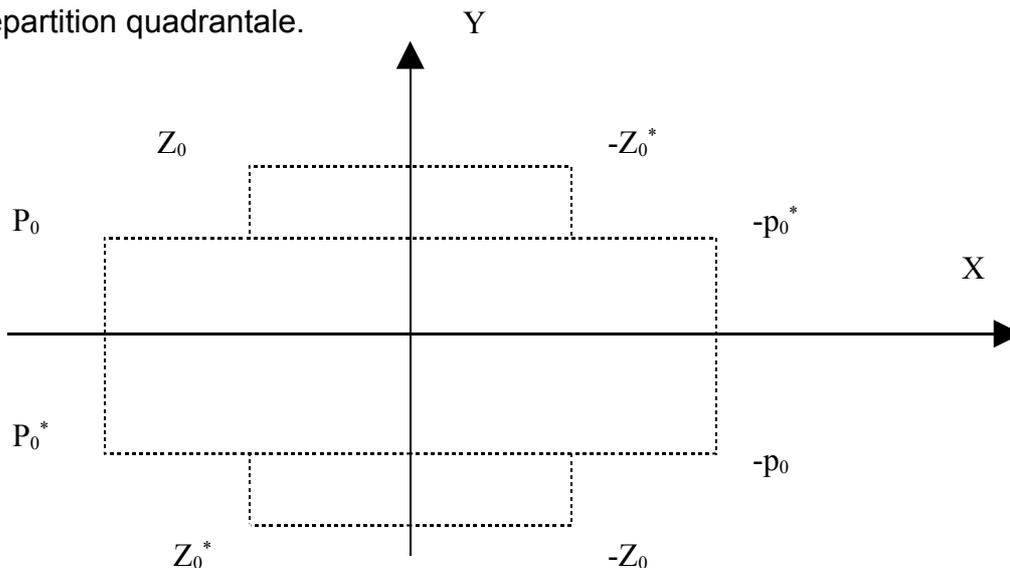


Figure VI-6

La démonstration de cette propriété de fonctions analytiques, réelles et paires est évidente.

Si Z_0 (ou p_0) est un zéro (ou un pôle), Z_0^* (ou p_0^*) est un zéro (ou un pôle) puisque la fonction est rationnelle et réelle ; mais $-Z_0$ (ou $-p_0$) est aussi un zéro (ou un pôle) puisque, la fonction étant paire, son numérateur et son dénominateur sont aussi des fonctions paires.

Dans le cas actuel, la fonction analytique $F(s^2)$ étant réelle et paire ses pôles et ses zéros sont donc en répartition quadrantale.

- **Détermination de la fonction de transfert :**

On peut déduire, de la connaissance de $F(s^2)$, un certain nombre de fonctions $H(s)$ satisfaisant à la relation :

$$F(s^2) = H(s) \cdot H(-s) \quad (\text{VI-27})$$

Parmi celles-ci, une seule est une fonction de transfert .elle est caractérisée par les conditions :

- Tous les pôles et les zéros de $H(s)$ sont à gauche de l'axe Oy.
- Tous les pôles et les zéros de $H(-s)$ sont à droite de l'axe Oy.

La détermination de la fonction de transfert est une conséquence immédiate de la répartition quadrantale des pôles et des zéros de $F(s^2)$

En considérant un quadruplet de pôles et zéros complexes (une démonstration similaire s'applique sur le pôles et zéros simples), on effectue la décomposition de $F(s^2)$ sous la forme :

$$F(s^2) = K^2 \prod \frac{(s - z_0)(s - z_0^*)(s + z_0)(s + z_0^*)}{(s - p_0)(s - p_0^*)(s + p_0)(s + p_0^*)} \quad (\text{VI-28})$$

On suppose que les zéros et les pôles Z_0 et p_0 sont situés à gauche de l'axe Oy.

On fabrique la fonction de transfert $H(s)$ à partir de la décomposition de $F(s^2)$, en supprimant les pôles et les zéros à droite de l'axe Oy.

Selon le processus récapitulé ci-dessous :

On détermine la fonction :

$$F(s^2) \equiv A^2(-s^2)$$

On recherche la constellation de pôles et des zéros de $F(s^2)$ à répartition quadrantale.

On supprime les pôles et les zéros à droite de l'axe Oy

On obtient $H(s)$ d'une manière unique par sa décomposition :

$$H(s) = k \prod \frac{(s - z_0)(s - z_0^*)}{(s - p_0)(s - p_0^*)} \quad (\text{VI-29})$$

Les pôles et les zéros étant à gauche de l'axe Oy et peuvent être simples.

- **Processus de synthèse :**
- **Détermination de $\rho_e(s)$:**

Le quadripôle est sans pertes, $\rho_e(s)$ est lié à $t(s)$ par la relation :

$$|\rho_e(s)|^2 = 1 - |t(s)|^2 \quad (\text{VI-30})$$

Par suite on connaît le module de $\rho_e(s)$ selon ce procédé à partir de la donnée à l' avance de la fonction de transfert :

$$t(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (\text{VI-31})$$

On doit calculer $|\rho_e(s)|^2$:

$$\text{On a } |\rho_e(s)|^2 = 1 - |t(s)|^2 \quad (\text{VI-32})$$

$$= \frac{|D(s)|^2 - |N(s)|^2}{|D(s)|^2} \quad (\text{VI-33})$$

$$= \frac{N'(-s^2)}{D'(-s^2)} \quad (\text{VI-34})$$

On détermine ensuite les pôles et les zéro en répartition quadrantale de la fonction paire

$$F(s^2) = \rho_e(s)\rho_e(-s) = \frac{N'(-s^2)}{D'(-s^2)} \quad (\text{VI-35})$$

Avec les 2 remarques suivantes :

Le calcul des pôles de $F(s^2)$ est inutile puisque l'on a évidemment :

$$D'(-s^2) = D(s)D(-s) \text{ et que } D(s) \text{ est une fonction donnée à l'avance}$$

La fonction $\rho_e(s)$ peut avoir sa partie réelle positive ou négative pour s réel, contrairement aux fonctions positives et réelles.

En ne conservant que les zéros à gauche de l'axe des imaginaires, on obtient donc deux

fonctions $\rho_e(s)$ possibles, en posant :

$$N'(-s^2) = N_1(s)N_1(-s) \quad (\text{VI-36})$$

$$\rho_e(s) = \frac{N_1(s)}{D(s)} \quad (\text{VI-37})$$

$$\rho_e(s) = -\frac{N_1(s)}{D(s)} \quad (\text{VI-38})$$

Avec les fonctions $\rho_e(-s)$ correspondantes :

$$\rho_e(-s) = \frac{N_1(-s)}{D(-s)} \quad (\text{VI-39})$$

$$\rho_e(-s) = -\frac{N_1(-s)}{D(-s)} \quad (\text{VI-40})$$

- **Détermination des fonctions $Z_e(s)$:**

$\rho_e(s)$ représente le coefficient de réflexion à l'entrée du quadripôle connecté à sa

charge, à partir de chaque fonction $\rho_e(s)$ donné, on obtient donc la fonction d'entrée

$Z_e(s)$ correspondante, d'où les deux fonctions :

$$Z_e(s) = \frac{1 + \rho_e(s)}{1 - \rho_e(s)} = \frac{D(s) + N_1(s)}{D(s) - N_1(s)} \quad (\text{VI-41})$$

$$Z_e(s) = \frac{1 - \rho_e(s)}{1 + \rho_e(s)} = \frac{D(s) - N_1(s)}{D(s) + N_1(s)} \quad (\text{VI-42})$$

On a donc obtenu 2 impédances d'entrée de deux quadripôles réciproques l'un en Té et l'autre en Pi.

La synthèse de $Z_e(s)$ est effectuée en tenant compte que la fonction H(s) doit avoir

n zéros de transmission pour s infinie.

La forme C_d est donc le schéma approprié.

$Z_e(s)$ est une impédance d'entrée.

A l'inverse du cas de la synthèse d'une impédance de transfert, la synthèse de l'impédance $Z_e(s)$ doit être effectuée de gauche à droite, la résistance du générateur faisant d'ailleurs partie du générateur et n'étant pas comprise dans la synthèse de $Z_e(s)$

• **Remarques :**

La fonction $Z_e(s)$ n'est une fonction positive réelle que lorsque l'on a la condition

$$|H(j\omega)| < 1 \text{ quelque soit } \omega .$$

Il faut donc faire très attention que la fonction approximative satisfasse cette condition lorsque le réseau est adapté à la pulsation centrale.

$\rho_e(j\omega_0) = 0$ et $H(j\omega_0) = 1$ (ce qui est le cas général pour toute une catégorie de filtres) il faut donc que l'on ait :

$$|H(j\omega)| < |H(j\omega_0)| \tag{VI-43}$$

Cette circonstance exclut, en particulier, la possibilité de synthétiser, par cette méthode, les filtres de la théorie moderne pour lesquels la fonction approximative est la fonction ER_n avec n pair

• **Option pour la structure en Pi :**

Nous adopterons la structure en Pi car elle présente les avantages suivants :

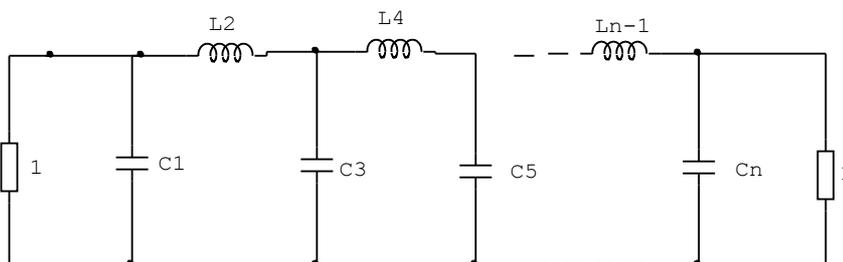
Il y a plus de selfs dans la structure en Té que dans la structure en Pi, or les selfs sont moins précises et plus onéreuses que les condensateurs.

Dans le montage en Pi, les condensateurs sont à la masse, ce qui permet d'incorporer dans les capacités d'extrémités les capacités parasites du montage dans lequel le filtre est inséré.

La synthèse de $Z_e(s)$ sous forme C_d donne :

$$Z_e(s) = \frac{1}{C_1 p + \frac{1}{L_2 p + \frac{1}{C_3 p + \frac{1}{L_4 p + \frac{1}{C_5 p + \dots}}}}} \tag{VI-44}$$

Le schéma correspondant à cette structure est :



figureVI-7

- **Filtre passif sans pertes et adapté :**

Les valeurs des composants du filtre passe bas prototype sont définies selon le type de la fonction d'approximation choisie :

- **Filtres de Butterworth :**

$$C_i = 2 \sin\left(\frac{2i-1}{2n} \pi\right) \quad \text{avec } i \text{ impair} \quad (\text{VI-45})$$

$$L_i = 2 \sin\left(\frac{2i-1}{2n} \pi\right) \quad \text{avec } i \text{ pair} \quad (\text{VI-46})$$

On remarque que :

Les valeurs sont symétriques par rapport au composant central s'il existe

Le composant central s'il existe vaut 2

Le produit de toutes les valeurs vaut toujours égal à 2

- **Filtres de Tchebycheff :**

Pour un ordre n et une ondulation maximale de valeur A_p dB dans la bande passante,

Soit :

$$\beta = sh \left[\frac{\ln\left(\coth \frac{A_p}{40 \log(e)}\right)}{2n} \right] \quad (\text{VI-47})$$

Et pour $i=1,2,\dots, n$

$$a_i = \sin \frac{2i-1}{2n} \pi \quad (\text{VI-48})$$

Pour $i=1,2,\dots, n-1$

$$b_i = \beta^2 + \sin^2\left(\frac{i\pi}{n}\right) \quad (\text{VI-49})$$

$$G_1 = \frac{2a_1}{\beta} \quad (\text{VI-50})$$

$$G_i = \frac{4a_{i-1}a_i}{b_{i-1}G_{i-1}} \quad (\text{VI-51})$$

Alors les valeurs des éléments sont données par les formules suivantes :

$$L_i = G_i \text{ pour } i \text{ pair}$$

$$C_i = G_i \text{ pour } i \text{ impair}$$

VI-4 Dénormalisation des filtres passes bas :

La dénormalisation consiste à trouver les valeurs des éléments du filtre initial à partir des éléments du filtre passe bas prototype synthétisé auparavant.

- **Éléments d'un filtre passe bas quelconque :**

Les éléments d'un filtre passe bas quelconque sont obtenus selon les formules suivantes :

Si L_k et C_k sont respectivement les valeurs des inductances et des capacités du filtre passe bas prototype et L et C les éléments du filtre à calculer alors :

$$L = L_k \frac{R_L}{\omega_p} \quad (\text{VI-52})$$

$$C = C_k \frac{1}{R_L \omega_p} \quad (\text{VI-53})$$

Ces valeurs sont obtenues d'après les transformations de gabarit étudiées au chapitre II

La dénormalisation donne le schéma de remplacement des selfs L_k et des capacités C_k

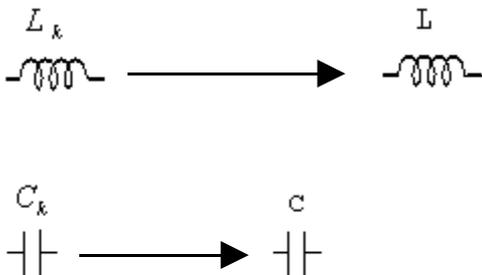


Figure VI-8

- **Éléments d'un filtre passe haut quelconque :**

Nous avons vu que l'on doit effectuer le changement de variable $s' = \frac{1}{s}$ dans la fonction de transfert du filtre passe bas normalisé.

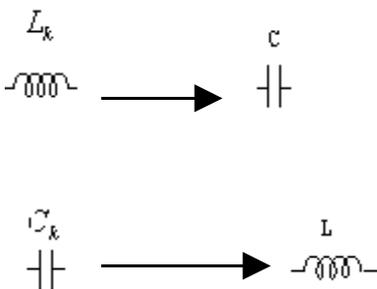
On voit qu'il suffit alors d'identifier l'impédance d'une self $L_k s$ de ce dernier filtre avec l'impédance d'une capacité $\frac{L_k}{s'}$ dans le filtre passe haut ; la self correspond à une capacité

$$C_{n1} = \frac{1}{L_k}$$

D'où par dénormalisation de C_{n1} , le schéma de remplacement des éléments du filtre passe bas normalisé (le raisonnement étant le même que pour C_k).

$$C = \frac{1}{L_k R_L \omega_p} \tag{VI-54}$$

$$L = \frac{1}{C_k} \frac{R_L}{\omega_p} \tag{VI-55}$$



figureVI-8

- **Éléments d'un filtre passe bande quelconque :**

Nous avons vu que l'on doit effectuer le changement de variable

$$s' = \theta(s) = \frac{1}{B_r} \left(s + \frac{1}{s} \right)$$

Ce changement de variable entraîne une modification des éléments L_k et C_k du filtre passe bas normalisé, pour obtenir la fonction de base du filtre passe bande où s est remplacé par s_1 .

On peut montrer que l'impédance $Z_k(s') = L_k(s')$ de la self L_k est équivalente à l'impédance $Z(s)$ d'un circuit oscillant résonnant sur la fréquence ω_0 .

En effet on a :



$$Z(s) = Ls + \frac{1}{C_s s} \quad (\text{VI-56})$$

La condition de résonance donne :

$$LC_s = 1 ; \text{ car la pulsation } \omega_0 \text{ est prise comme unité de normalisation}$$

D'où :

$$Z(s) = L\left(1 + \frac{1}{s}\right) \quad (\text{VI-57})$$

En normalisant cette impédance par rapport à $R_L = R_0$ unité de résistance et en tenant compte de s'on a :

$$\frac{Z(s)}{R_L} = \frac{L}{R_L} \left(1 + \frac{1}{s}\right) = \frac{LB_r}{R_L} S' \quad (\text{VI-58})$$

Cette impédance normalisée est bien identique à l'impédance normalisée $Z_k(s') = L_k(s')$

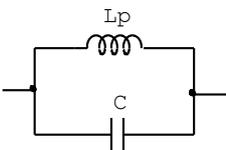
$$\text{Si la self } L \text{ est choisie égale à la valeur } L = L_k \frac{R_L}{B_r} \quad (\text{VI-59})$$

La modification de C_k se fait de la même manière :

On peut montrer que l'admittance $Y_k(s') = C_k s'$ de la capacité C_k est équivalente à

l'admittance d'un circuit antirésonnant sur la fréquence ω_0 :

On a en effet :



$$Y(s) = Cs + \frac{1}{L_p s} \quad (\text{VI-60})$$

Et avec la condition d'antirésonance :

$$L_p c = 1 ; \omega_0 \text{ étant toujours la pulsation de normalisation, on a :}$$

$$Y(s) = C\left(s + \frac{1}{L_p s}\right) \quad (\text{VI-61})$$

L'admittance normalisée $R_L Y(s)$ est bien identique à l'admittance normalisée

$Y_k(s') = C_k s'$ si la capacité C est choisie égale à la valeur :

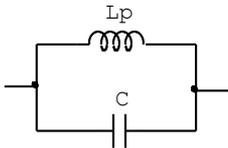
$$C = C_k \frac{1}{B_r R_L} \quad (\text{VI-62})$$

• **Éléments d'un filtre coupe bande quelconque :**

Le cas des filtres coupes bandes est traité de la même façon que celui des filtres passe bande le changement de variable est déjà définie au chapitre II par :

$$s' = \theta(s) = \frac{1}{\frac{1}{B_r}(-s + \frac{1}{s})}$$

A partir de là on obtient les valeurs des éléments du circuit antirésonnant

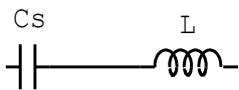


$$C = \frac{1}{L_k} \frac{1}{B_r R_L} \quad (\text{VI-63})$$

Avec la condition :

$$L_p C = 1 ; \omega_0 \text{ étant la pulsation de normalisation}$$

Pour le circuit résonnant on obtient :



$$L = \frac{R_L}{C_k B_r} \quad (\text{VI-64})$$

Avec la condition :

$$LC_s = 1 \quad (\text{VI-65})$$