

# Chapitre 3 : Modélisation d'un système de transport public par les réseaux de petri et l'algèbre (max-plus)

## 1. Introduction

Dans le domaine du transport urbain Nait Sidi Moh [1] a présenté un modèle basé sur les RdP pour la gestion des correspondances ou les transitions représentent les arrêts (stations) de bus et les places représentent les déplacements inter-stations. Les temps d'attente sont calculés selon un modèle mathématique basé sur l'algèbre max-plus.

D'après la thèse de Nait Sidi Moh [1] les deux cas de fonctionnement possibles d'un réseau de bus au niveau des arrêts de correspondance où des échanges de passagers sont susceptibles de se produire : le premier cas est celui où les bus concernés par ce type d'échange doivent «s'attendre» au(x) point(s) considéré(s). Cependant ce cas de figure arrive assez rarement sur des réseaux de bus, compte tenu de la fréquence relativement importante des passages de véhicules. Cette situation est observée plus souvent pour les réseaux de chemin de fer, où les passages de train sont plus espacés dans le temps. Nait Sidi Moh a montré dans sa thèse comment modéliser cette problématique, qui a par ailleurs déjà été étudiée, par un graphe d'événements temporisé et un système d'équations stationnaires dans l'algèbre (max, plus), et ce à condition que certaines hypothèses soient vérifiées. Le deuxième cas de fonctionnement étudié relève de ce que nous appellerons la non-synchronisation des bus (les bus ne s'attendent pas aux stations de correspondance). La contrainte d'attente précédente ainsi que certaines hypothèses sont alors relaxées, ce qui nous conduit à un modèle graphique

dans lequel des conflits structurels apparaissent et à une représentation d'état dans l'algèbre (max, plus) non-stationnaire.

## **2. Description du système de transport public étudié**

Nous considérons un STP composé de  $n$  lignes de bus (avec  $n \geq 2$ ) (figure 2.1). Chacune est desservie par un nombre fixé de bus qui réalisent un circuit et passent au même endroit avec une fréquence donnée (fonction du temps de parcours du circuit et de la demande de transport). Dans cette partie, nous nous limitons au cas où chaque ligne  $L_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) est desservie par un unique bus  $B_i$  qui se trouve initialement à sa station de départ. Certaines lignes sont connectées entre elles par des arrêts de correspondance qui permettent aux passagers de changer de ligne selon leurs destinations. Le réseau considéré est composé de  $n-1$  arrêts de correspondance. Chaque ligne  $L_i$  ( $2 \leq i \leq n-1$ ) est représentée par sa station de départ  $Sd_i$ , deux stations de correspondance (notées resp.  $Sc_{i-1,i}$ , et  $Sc_{i,i+1}$ , communes resp. avec les lignes  $L_{i-1}$  et  $L_{i+1}$ ), et une station d'arrivée notée  $Sa_i$ . La ligne  $L_1$  (resp.  $L_n$ ) a une seule station de correspondance commune avec la ligne  $L_2$  (resp. avec  $L_{n-1}$ ). Pour ce réseau, nous ne considérons que les arrêts que nous venons de définir ; les autres arrêts simples ne sont pas explicités ici (ils sont agrégés dans les déplacements des bus entre les arrêts définis). La course d'un bus  $B_i$  s'effectue dans le sens suivant  $Sd_i \rightarrow Sc_{i-1,i} \rightarrow Sc_{i,i+1} \rightarrow Sa_i \rightarrow Sd_i$ . Le temps de déplacement des bus entre chaque couple d'arrêts successifs du réseau est connu. Il intègre les temps de montée et descente de passagers dans les bus. Dans cette partie nous nous intéressons au fonctionnement périodique des bus du réseau : chaque bus  $B_i$  passe à un arrêt toutes les  $\lambda_i$  unités du temps.  $\lambda_i$  est appelée période de la ligne  $L_i$ . C'est le temps nécessaire à  $B_i$  pour effectuer une

course. Enfin le réseau étudié est muni d'une planification d'horaires initiale : la première date de départ (depuis  $Sd_i$ ) de chaque bus  $B_i$  au cours d'une journée est connue.

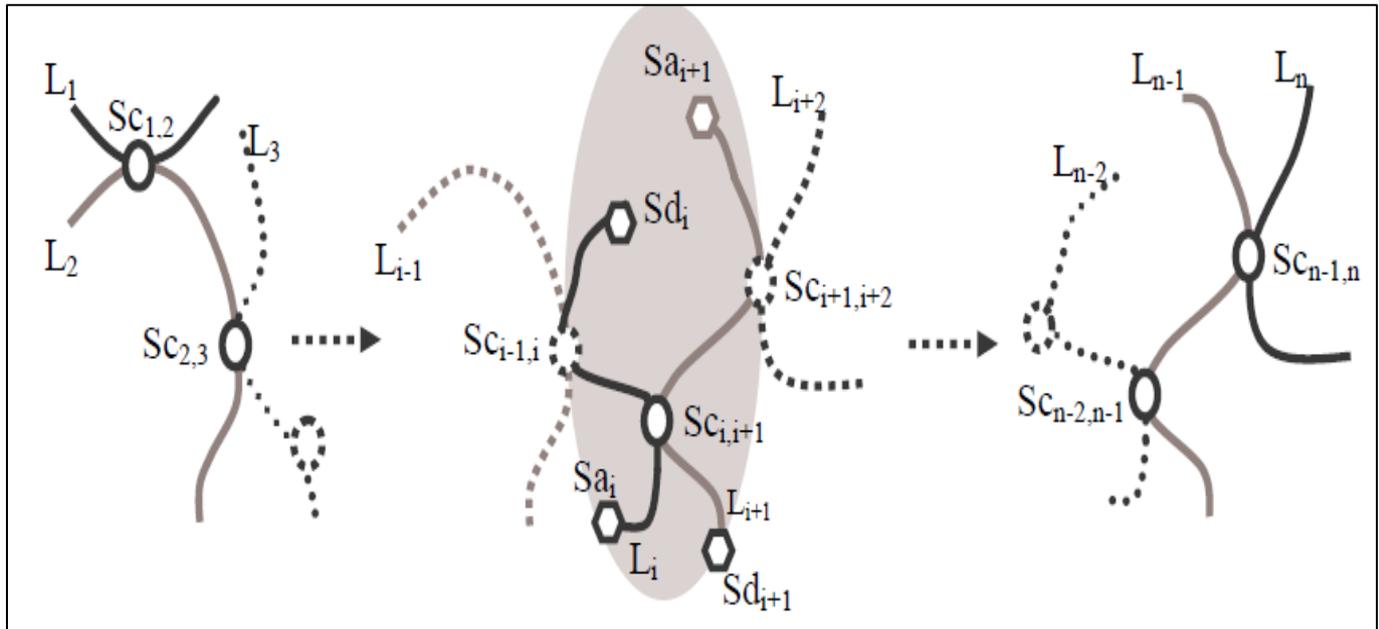


Figure 3.1 : Un réseau de bus composé de  $n$  lignes et  $n-1$  arrêts de correspondance.

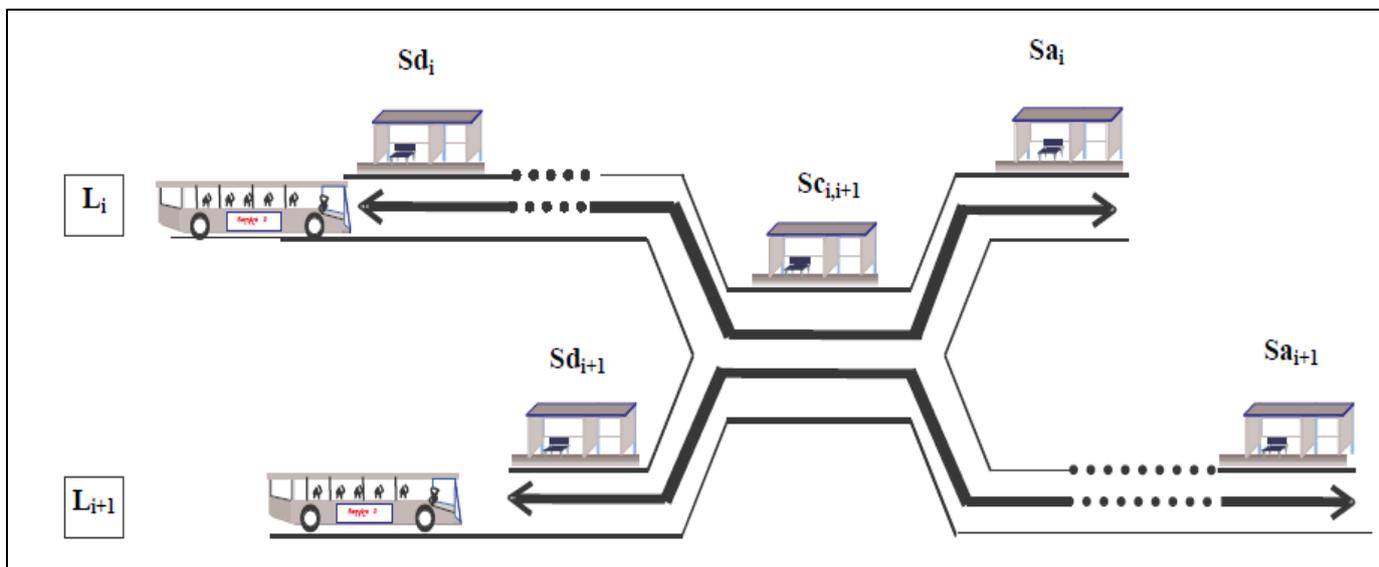


Figure 3.2 : La structure physique de deux lignes  $L_i$  et  $L_{i+1}$  et de la station  $SC_{i,i+1}$ .

Dans cette étude, nous nous intéressons à la gestion des correspondances des passagers effectuant un aller simple sur le réseau au cours d'une période donnée (exemple : un jour de la semaine) en empruntant un bus à un arrêt d'une ligne  $L_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) pour se rendre à un arrêt destination d'une autre ligne  $L_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) avec  $i < j$ . L'étude des trajets de retour s'effectue de la même façon. Dans cette partie, nous évaluons les temps d'attente des passagers aux différentes stations de correspondance  $Sc_{i,i+1}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ), dans le cas de fonctionnement du réseau : synchronisé. La figure 2.2 présente la structure physique d'une portion du réseau plus particulièrement étudiée et pouvant être considérée comme « générique » du réseau global. Elle est composée de deux lignes  $L_i$  et  $L_{i+1}$  (partie grisée de la figure 2.1), et fait notamment apparaître leur station de correspondance commune  $Sc_{i,i+1}$ . Les voyageurs peuvent ainsi emprunter un bus à la station de départ  $Sd_i$  (resp.  $Sd_{i+1}$ ) soit pour se rendre à la station d'arrivée  $Sa_i$  (resp.  $Sa_{i+1}$ ) en se déplaçant sur une seule ligne, soit pour se rendre à la station  $Sa_{i+1}$  (resp.  $Sa_i$ ) en utilisant les deux lignes et en changeant de bus à la station de correspondance  $Sc_{i,i+1}$ .

### **3. Étude du système dans le cas de synchronisation des bus**

#### **3.1. Modélisation par un graphe d'événements temporisés**

##### **3.1.1. Premier modèle réseau de Petri**

- **Définition :** Un réseau de Petri est un graphe biparti fait de deux types de sommets : *places* (représentées par des cercles) et *transitions* (représentées par des barres). Des *arcs* orientés relient certaines places à certaines transitions, ou certaines transitions à certaines places (figure suivante). A

chaque arc on associe un *poids* (entier positif). On associe 1 par défaut aux arcs sur lesquels il ne figure aucun poids. Dans un RdP, le nombre de places (resp. de transitions) est fini, et non nul. Chaque place, peut contenir un ou plusieurs *jetons* (représentés par des points) qui modélisent la dynamique du système.

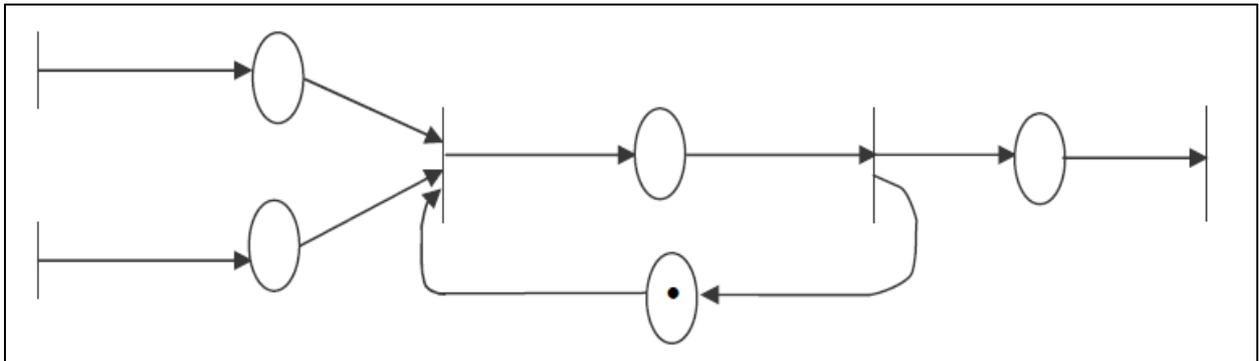


Figure : Exemple de réseau de Petri

Nous utilisons le formalisme RdP pour modéliser le réseau de bus de la figure 2.1 comme nous l'avons évoqué en introduction de cette partie, l'attente des bus aux arrêts de correspondance est un phénomène peu courant, comparé à d'autres systèmes de transport public. Toutefois, la synchronisation des bus peut malgré tout être imposée par les exploitants en certains points d'échange jugés critiques, et à des périodes particulières (heures de pointe par exemple). Nous considérons donc ici un fonctionnement synchronisé du réseau: les bus de chaque couple de lignes s'attendent à leur arrêt de correspondance commun pour permettre aux passagers de changer de ligne. Après l'échange de passagers, chaque bus poursuit son trajet vers d'autres arrêts. Nous définissons alors les éléments suivants du modèle RdP :

- les transitions sont assimilées aux arrêts du réseau ;
- les places et les arcs associés représentent :
  - soit l'autorisation de début d'une course pour un bus ;

- soit le trajet d'un bus entre deux arrêts non obligatoirement successifs du réseau ;

- soit l'attente de passagers à une station de correspondance. Pour distinguer ces places des autres places du modèle, nous les représentons, ainsi que les arcs associés, par des traits épais ;

- les jetons représentent de la même façon :

- soit un ordre de commencement d'une course pour un bus depuis son arrêt de départ ;

- soit un bus en circulation sur une ligne, dans le cas où le jeton se trouve dans une place qui modélise le déplacement d'un bus ;

- soit un lot de passagers en attente dans le cas où le jeton se trouve dans une place associée à l'attente de passagers ;

- les temporisations associées aux places du modèle représentent les temps de déplacement des bus entre les arrêts du réseau. Les temporisations associées aux places qui représentent l'attente de passagers sont nulles : en effet, d'une part les temps de montée et de descente de passagers dans les véhicules sont contenus dans le temps de déplacement des bus ; d'autre part nous négligeons ici le temps de déplacement (à pied) des passagers entre les deux bus concernés par l'échange. Enfin les temporisations des places représentant une autorisation de début de course sont également nulles : en effet, une telle autorisation est immédiatement effective.

En tenant compte des éléments donnés ci-dessus, et en supposant que les poids associés aux arcs du modèle RdP sont égaux à 1, le graphe de la figure 2.3 modélise les deux lignes  $L_i$  et  $L_{i+1}$  de la figure 2.2 (partie grisée de la figure 2.1).

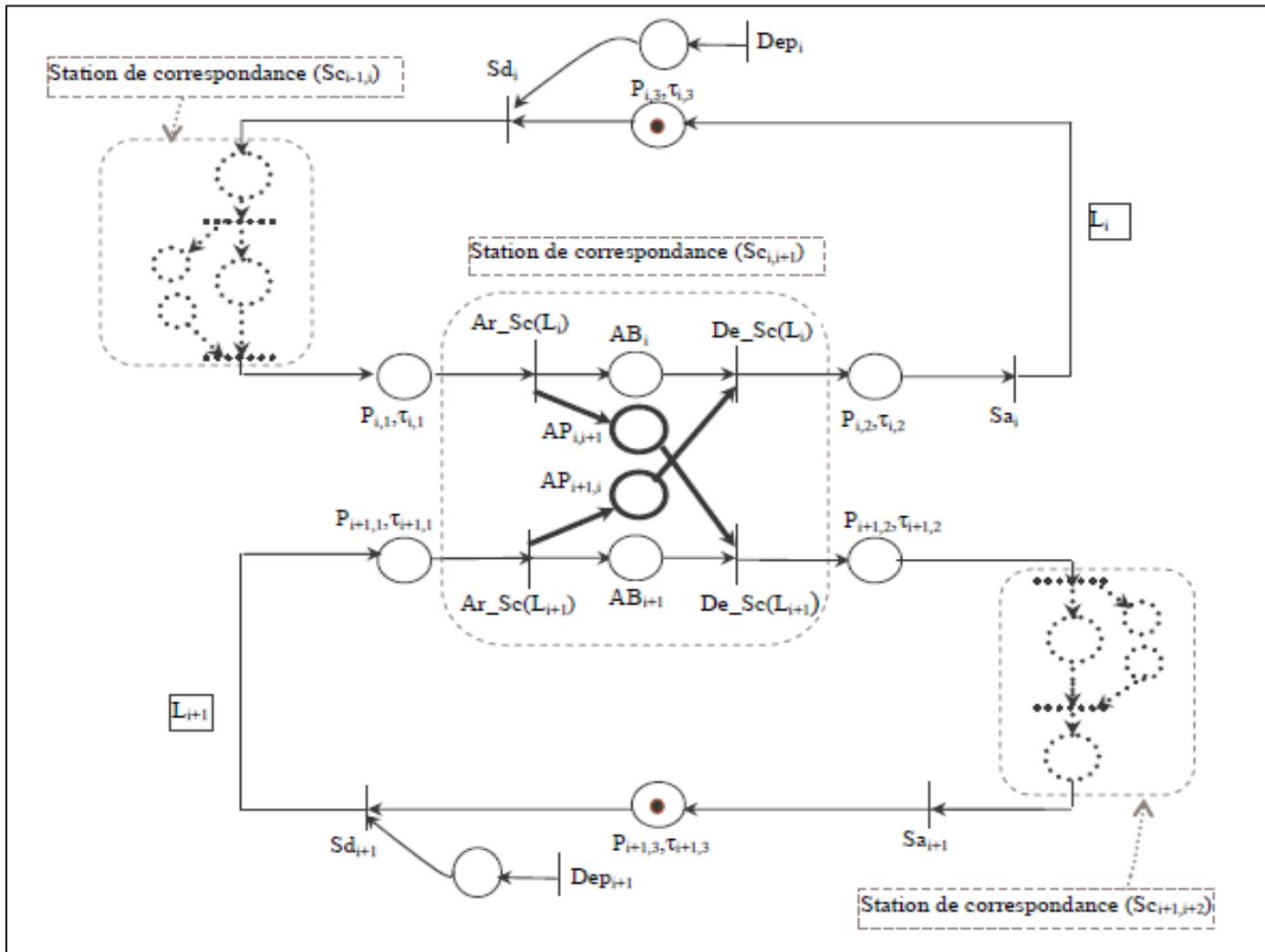


Figure 3.3 : Modèle RdP du système considéré.

Le reste du réseau se comporte comme ces deux lignes. Le modèle obtenu est composé de deux circuits. Chacun représente une ligne  $L_j$  ( $j \in \{i, i+1\}$ ) de la façon suivante :

- la ligne  $L_j$  est représentée par le circuit  $(Sd_j, P_{j,1}, Ar\_Sc(L_j), AB_j, De\_Sc(L_j), P_{j,2}, Sa_j, P_{j,3}, Sd_j)$ . Les transitions  $Ar\_Sc(L_j)$  et  $De\_Sc(L_j)$  ainsi que la place  $AB_j$  modélisent la station de correspondance  $Sc_{i,i+1}$ , où  $Ar\_Sc(L_j)$  (resp.  $De\_Sc(L_j)$ ) représente l'arrivée (resp. le départ) du bus  $B_j$  en  $Sc_{i,i+1}$  (resp. de  $Sc_{i,i+1}$ ) ; la place  $AB_j$  représente l'attente du bus  $B_j$  en  $Sc_{i,i+1}$  pour effectuer la correspondance. Les places  $P_{j,1}, P_{j,2}$ , et  $P_{j,3}$ , (resp. les temporisations  $\tau_{j,1}$ ,  $\tau_{j,2}$ , et  $\tau_{j,3}$ ) modélisent les trajets (resp. les temps de

déplacement) entre les stations  $Sd_j$  et  $Sc_{i,i+1}$ ,  $Sc_{i,i+1}$  et  $Sa_j$  et enfin entre  $Sa_j$  et  $Sd_j$ . Le jeton se trouvant initialement dans la place  $P_{j,3}$  représente le bus  $B_j$ .

La période  $\lambda_j$  est donnée par :  $\lambda_j = \tau_{j,1} + \tau_{j,2} + \tau_{j,3}$ ;

- À chaque transition  $Sd_j$  on associe une transition  $Dep_j$  et une place (de temporisation nulle) modélisant l'entrée de la ligne à partir de laquelle il est possible de commander cette ligne en imposant des dates de départ des bus pour effectuer une course ;
- la correspondance entre les deux lignes est représentée par la connexion entre les deux circuits du modèle. Cette connexion est composée des places  $Ap_{i,i+1}$  et  $Ap_{i+1,i}$ , qui représentent les attentes des passagers pour effectuer la correspondance, et des arcs orientés suivant le déplacement de ces passagers (de la ligne  $L_i$  vers  $L_{i+1}$  et de la ligne  $L_{i+1}$  vers  $L_i$ ).

### **3.1.2. Modèle graphe d'événements temporisés**

Les graphes d'événements temporisés (GET) sont considérés comme une relative nouveauté dans le contexte de la modélisation des STP. Dans ce cadre, une étude a été faite pour l'étude d'un réseau de trains. Un modèle mathématique (max, plus) linéaire est déduit à partir du modèle GET décrivant le comportement du réseau. Cette étude est limitée au cas où les trains s'attendent systématiquement aux stations de correspondance pour effectuer les échanges de passagers.

Dans le même contexte, et afin d'évaluer les performances d'un réseau de bus, notamment les dates de passage des véhicules aux différents arrêts du réseau et les temps de correspondance des usagers, nous étudions le système donné dans la figure 2.2 en utilisant les GET et l'algèbre (max, plus).

Dans le cas d'un réseau synchronisé (les bus doivent s'attendre), nous ne considérons toujours que la partie du réseau représentée par les deux lignes  $L_i$  et  $L_{i+1}$  de la figure 2.2. De plus nous nous intéressons ici uniquement à la gestion des correspondances des passagers sur un itinéraire donné : par exemple, les passagers venant de la station de départ  $Sd_i$  et se rendant à la station d'arrivée  $Sa_{i+1}$ . Le modèle GET associé est donné par la figure 2.4. C'est une version simplifiée du modèle précédent (figure 2.3) dans le sens où l'échange de passagers de la ligne  $L_{i+1}$  vers la ligne  $L_i$  n'est pas représenté. La synchronisation désigne ici l'obligation d'attente du bus  $B_{i+1}$  pour assurer les correspondances. Pour ce nouveau modèle, la transition qui représente la station de correspondance  $Sc_{i,i+1}$  est notée  $Sc(L_j)$  pour la ligne  $L_j$  (avec  $j \in \{i, i+1\}$ ) ; elle regroupe les éléments  $Ar\_Sc(L_j)$ ,  $AB_j$  et  $De\_Sc(L_j)$  donnés dans le modèle de la figure 2.3. Comme pour le modèle précédent et bien que nous ne considérons l'échange de passagers que dans un seul sens à la station de correspondance, le modèle graphique de la figure 2.4 fonctionne avec l'hypothèse d'alternance des bus en  $Sc_{i,i+1}$ .

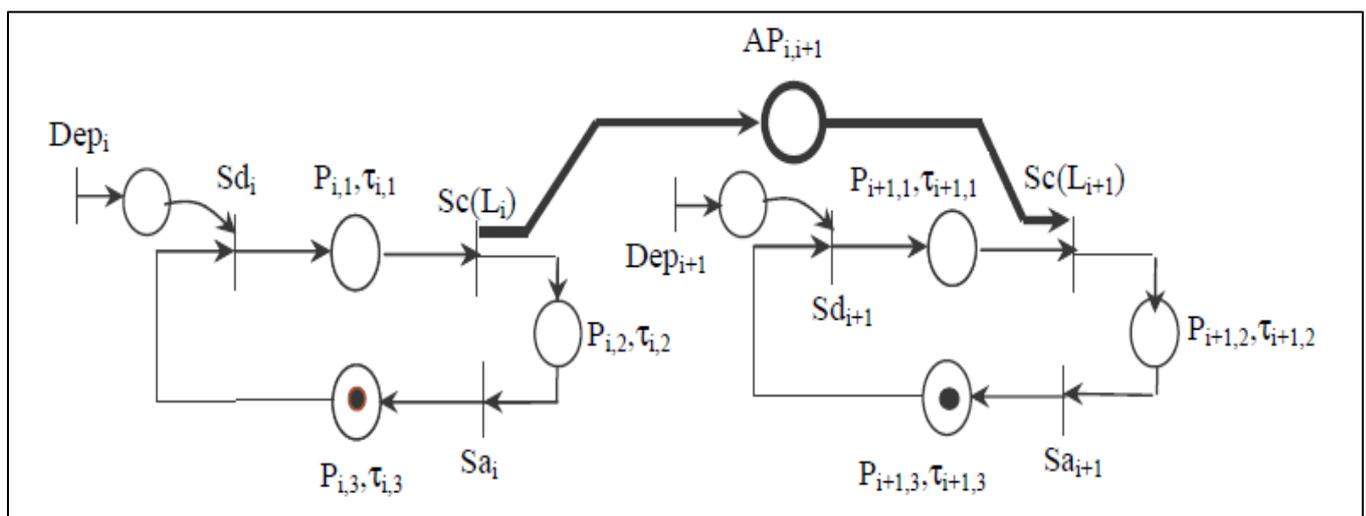


Figure 3.4 : Le modèle GET représentant les deux lignes  $L_i$  et  $L_{i+1}$  : cas d'attente des bus.

## 3.2. Représentation d'état dans l'algèbre (max, plus)

### 3.2.1. Algèbre des dioïdes

Avoir un modèle théorique linéaire dans une structure algébrique non usuelle (algèbre des dioïdes par exemple) contre un modèle non forcément linéaire dans l'algèbre usuelle est certainement un atout, encore faut-il que cela s'accompagne d'une puissance de modélisation raisonnable. Les modèles (max, plus) ou (min, plus) linéaires réalisent ce compromis pour certains systèmes complexes. Il a été justifié à plusieurs reprises que la théorie des dioïdes est une théorie riche en propriétés pour l'étude et l'analyse des SDED ainsi que l'évaluation de leurs performances. Notre but ici est d'utiliser cette théorie ainsi que ses techniques de calcul et d'analyse pour représenter et étudier le comportement d'un système de transport public par une représentation d'état dans l'algèbre des dioïdes.

#### 3.2.1.1. Dioïdes: Définition et exemples

- i. **Définition** : On appelle un dioïde un ensemble  $D$  muni de deux lois internes, une première loi notée additivement " $\oplus$ " et une deuxième notée multiplicativement " $\otimes$ ", telles que, pour tout  $a, b$  et  $c$  dans  $D$  on a
- la loi  $\oplus$  est associative :  $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$  ;
  - la loi  $\oplus$  est commutative :  $a \oplus b = b \oplus a$  ;
  - la loi  $\oplus$  est idempotente :  $a \oplus a = a$  ;

- la loi  $\oplus$  admet un élément neutre noté “ $\varepsilon$ ” et appelé *zéro* :  
 $a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$  ;
- la loi  $\otimes$  est associative :  $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$  ;
- la loi  $\otimes$  admet un élément neutre noté “ $e$ ” et appelé *identité* :  
 $a \otimes e = e \otimes a = a$  ;
- la loi  $\otimes$  est distributive par rapport à la loi  $\oplus$  :  
 $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ , idem pour la multiplication à droite ;
- l’élément “ $\varepsilon$ ” est absorbant pour la multiplication :  $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$  ;
- pour tout élément  $a \in D$ , et  $n \in \mathbb{N}$  nous avons :  $a^n = a \otimes a \otimes \dots \otimes a$ ,  
(n fois).

S’il n’existe aucun risque d’ambiguïté, le signe multiplicatif  $\otimes$  sera parfois omis comme dans l’algèbre classique, et nous écrivons  $ab$  (ou  $a.b$ ) au lieu de  $a \otimes b$ .

ii. **Exemples** : Nous citons, quelques exemples de dioïde:

- L’ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  muni de deux opérations “max” (notée  $\oplus$ ) et l’addition usuelle “+” (notée  $\otimes$ ) est un dioïde commutatif. Les éléments neutres pour les lois  $\oplus$  et  $\otimes$  sont respectivement :  $-\infty = \varepsilon$  et  $0 = e$  ( $1 \oplus \varepsilon = 1$ ,  $2 \otimes e = 2$ ). Ce dioïde noté  $IR_{max}$  est appelé traditionnellement “algèbre (max, plus)”.

Exemple :  $(x \oplus y) \oplus z = \max(\max(x, y), z) = \max(x, \max(y, z))$

$$x + \max(y, z) = \max(x + y, x + z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

- L’ensemble  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , muni de “min” (notée  $\oplus$ ) et de l’addition usuelle est un dioïde isomorphe au dioïde  $IR_{max}$ , ( $1 \oplus 2 = 1$ ,  $e \oplus +\infty = e$ ). Il est noté  $IR_{min}$  et appelé “algèbre (min, plus)”, l’élément  $+\infty$  est noté T.

Alors on a :  $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +) = IR_{max}$  et  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +) = IR_{min}$ .

### 3.2.1.2. Structure ordonnée dans un dioïde

La nature de la loi additive  $\oplus$  permet de définir une relation d'ordre naturel dans un dioïde, nous donnons sa définition ci-dessous.

#### i. Relation d'ordre dans un dioïde

Une relation  $R$  sur un ensemble  $S$  est une relation d'ordre si les trois axiomes suivant sont vérifiés  $\forall x, y, z \in S$  :

- $R$  est réflexive :  $x R x$
- $R$  est transitive : si  $x R y$  et  $y R z$ , alors  $x R z$
- $R$  est antisymétrique : si  $x R y$  et  $y R x$ , alors  $x = y$ .

➤ **Définition 1** : Dans un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$ , une relation d'ordre naturel notée " $\leq$ " est définie par :  $a \leq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$ .

Pour le dioïde  $IR_{max}$ , cette relation correspond à la relation d'ordre dans l'algèbre usuelle ( $1 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \oplus 2 = 2$ ). Dans le dioïde  $IR_{min}$ , l'ordre " $\leq$ " défini par :  $2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \oplus 2 = 1$  est le dual de l'ordre naturel défini dans  $IR_{max}$ .

A partir de la compatibilité de cette relation avec la structure des dioïdes et avec les deux lois  $\oplus$  et  $\otimes$  nous pouvons déduire la proposition suivante :

➤ **Proposition** : Soit un dioïde commutatif  $(D, \oplus, \otimes)$ . La relation d'ordre  $\leq$  vérifie les implications suivantes :

$$\forall a, b \in D \quad a \leq b \iff \forall c \in D, a \oplus c \leq b \oplus c ;$$
$$a \leq b \iff \forall c \in D, a \otimes c \leq b \otimes c .$$

Comme dans l'algèbre usuelle, plusieurs notions sont définies dans la théorie des dioïdes. Nous pouvons parler, par exemple, d'un dioïde complet,

d'une borne inférieure et d'une borne supérieure d'un dioïde, des treillis, applications, etc.

## ii. Dioïde complet

Un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  est dit *complet* si toute somme infinie d'éléments de  $D$  est définie, et si la loi  $\otimes$  est distributive (à gauche et à droite) par rapport à la loi  $\oplus$  et cette distributivité s'étend aux sommes infinies. C'est-à-dire pour tout  $a \in D$  et pour tout

$S \subset D$ , nous avons :

- $\bigoplus_{x \in S} x \in D$  ;
- $(\bigoplus_{x \in S} x) \otimes a = \bigoplus_{x \in S} (x \otimes a)$  et  $a \otimes (\bigoplus_{x \in S} x) = \bigoplus_{x \in S} (a \otimes x)$ .

En rajoutant l'élément  $+\infty$  aux ensemble  $IR_{max}$ ,  $Z_{max}$ ,  $IN_{max}$  on obtient des dioïdes complets.

## iii. Dioïde matriciel

Un dioïde matriciel  $(D^{n \times n}, \oplus, \otimes)$  est l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans le dioïde *scalaire*  $D$ . La somme et le produit de deux matrices ou d'une matrice avec un scalaire sont définies par :

Pour  $A, B \in D^{n \times n}$  et pour  $a \in D$  :

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} ;$$

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj} ;$$

$$a \otimes (A_{ij}) = (a \otimes A_{ij}).$$

Exemple : Soit  $A, B$  deux matrices dans l'algèbre  $(\max, +)$  telles que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a} \quad A \oplus B = \begin{pmatrix} \max(3,2) & \max(7,0) \\ \max(2,3) & \max(4,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et} \quad A \otimes B = \begin{pmatrix} \max(3+2, 7+3) & \max(3+0, 7+1) \\ \max(2+2, 4+3) & \max(2+0, 4+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Les éléments neutres pour les deux lois  $\oplus$  et  $\otimes$  dans un dioïde matriciel  $D^{n \times n}$  sont respectivement : la matrice nulle composée exclusivement de  $\varepsilon$  et notée aussi  $e$ , et la matrice identité notée  $E$  et composée de  $e$  sur la diagonale, de  $e$  partout ailleurs. D'une façon générale, la somme et le produit des matrices (non forcément carrées) dans un dioïde matriciel sont bien définis à condition qu'ils soient compatibles, à savoir :

$$\forall A \in D^{n \times m}, B \in D^{n \times m}; \quad (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij};$$

$$\forall A \in D^{n \times m}, B \in D^{m \times p}; \quad (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^m A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

Il est évident que cette structure obéit bien aux axiomes des dioïdes. En revanche, on observe que le dioïde matriciel associé à un dioïde scalaire commutatif n'est pas en général commutatif.

### **3.2.1.3. Résolution d'équations dans les dioïdes**

Dans le cas de la résolution d'un système linéaire matriciel de type  $y = A \otimes x \oplus B$ , il s'avère nécessaire de calculer la *quasi-inverse* de la matrice  $A$ . C'est une matrice connue dans l'algèbre des dioïdes sous le nom "étoile de Kleene" et notée  $A^*$ .

➤ **Définition 2 :** Dans un dioïde complet  $D$ , l'application étoile de Kleene définie sur  $D$ , et notée  $K$  est donnée par :

$$K : D \rightarrow D$$

$$x \mapsto x^* = \bigoplus_{k \geq 0} x^{\otimes k}.$$

La dérivée de l'étoile de Kleene est une application donnée par :

$$P : D \rightarrow D$$

$$x \mapsto x^+ = \bigoplus_{k \geq 1} x^{\otimes k}.$$

Les applications  $K$  et  $P$  sont croissantes et sont liées par la relation suivante :

$$X^* = e \oplus X^+.$$

### 3.2.2. Représentation d'état

Afin de faciliter la représentation des éléments du modèle graphique, et ensuite la description de ce dernier sous forme d'équations mathématiques, nous affectons aux transitions et aux places de la figure 2.4 des notations que nous explicitons dans le tableau suivant. Ceci nous permet d'obtenir le modèle GET de la figure 2.5. Dans celui-ci, chaque arrêt  $Sa_j$  ( $j \in \{i, i+1\}$ ) est "agrégé" dans le trajet  $Sc(L_j) \rightarrow Sd_j$  ; de même le temps de déplacement du bus  $B_j$  sur ce trajet est  $\tau_j$  au lieu de  $\tau_{j,2} + \tau_{j,3}$ . Cette agrégation s'explique par le fait que nous nous intéressons dans cette étude uniquement aux stations de correspondance et aux stations de départ des deux lignes.

Eléments de réseau pour la ligne $L_j$ avec $j \in \{i, i+1\}$	Correspondances dans le GET
$Dep_j$	$u_j$
$Sd_j$	$x_{j,1}$
$Sc(L_j)$	$x_{j,2}$
$AP_{i,i+1}$	$P_i$
$P_{j,1}$	$P_{j,1}$
$P_{j,2}, Sa_j$ et $P_{j,3}$	$P_{j,2}$

Tableau : Correspondance entre les éléments du réseau de bus et ceux du GET.

Pour le modèle GET de la figure 2.5, à chaque transition  $x$  nous associons une variable d'état  $x(k)$ , appelée dateur, qui représente la date du  $k$ ème franchissement de cette transition.

L'évolution au cours du temps des différents franchissements des transitions se traduit analytiquement dans l'algèbre usuelle par le système d'équations linéaires (1), sachant que chaque transition validée est franchie immédiatement. Dans ce système, on considère l'opérateur "max" habituel comme un opérateur d'assemblage de deux grandeurs (produits dans un système de production, bus-passagers dans un système de transport, etc.). Cet assemblage peut être effectué uniquement au moment où la grandeur qui arrive au plus tard au lieu d'assemblage est disponible, c'est à dire à la date qui correspond au maximum des dates de disponibilité de deux grandeurs. De même, la notion d'*addition* de deux ou plusieurs grandeurs correspond à l'opérateur "+" usuel. Les deux opérateurs (max et +) sont propres aux cas discrets, où on s'intéresse à la date d'occurrence des événements.

En définissant les variables d'état associées à la station de correspondance des deux lignes et ainsi que les dateurs associés à ces variables, il est temps d'exprimer les critères à évaluer, à savoir les dates de passage des bus aux

arrêts considérés et le temps de correspondance. Compte tenu de l'hypothèse émise précédemment sur l'alternance des bus des deux lignes, la kème correspondance est assurée par le kème passage du bus  $B_{i+1}$  à l'arrêt  $Sc_{i,i+1}$ . Ce bus récupère alors uniquement les passagers descendant du bus  $B_i$  passant également à ce niveau pour la kème fois. Nous notons donc par  $T_{i,i+1}(k, k)$  le kème temps de correspondance en  $Sc_{i,i+1}$ . Ce temps s'exprime en effectuant la différence des dates d'arrivée (et/ou de départ) à l'arrêt  $Sc_{i,i+1}$  des bus  $B_i$  et  $B_{i+1}$ , soit des dates de franchissement des transitions  $X_{i,2}$  et  $X_{i+1,2}$ . Les critères à évaluer sont donc les suivants :

$X_{i,1}(k), X_{i,2}(k), X_{i+1,1}(k)$  et  $X_{i+1,2}(k)$ , pour tout  $k \geq 1$  ;

$T_{i,i+1}(K, k) = X_{i+1,2}(k) - X_{i,2}(k)$ , pour tout  $k \geq 1$ .

A partir des éléments du tableau, nous obtenons le modèle graphique suivant :

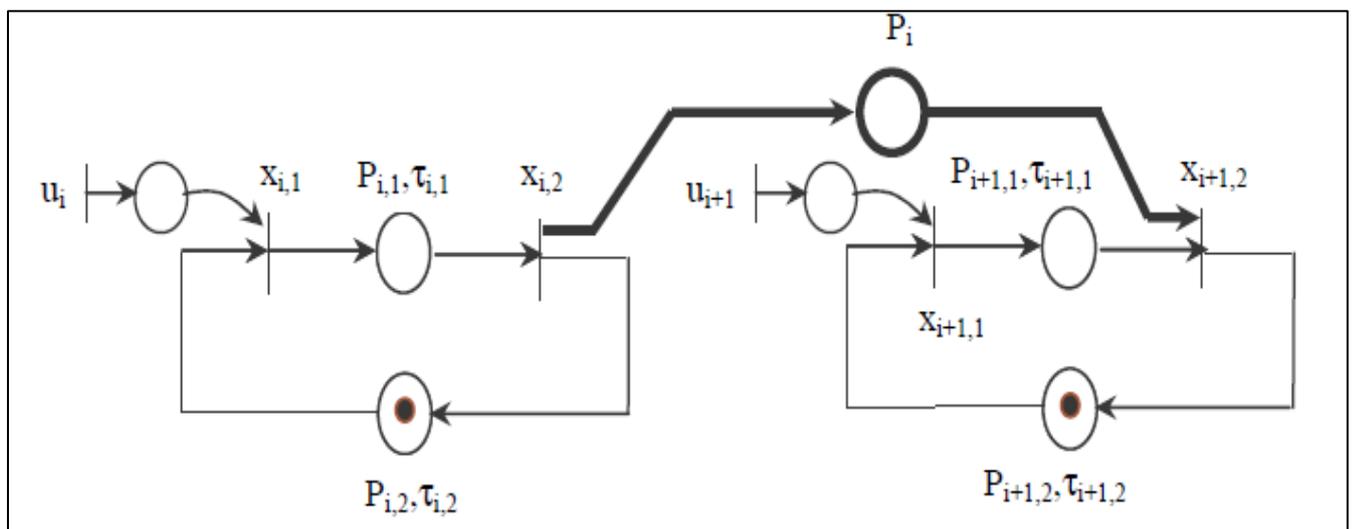


Figure 3.5 : Le modèle GET des deux lignes  $L_i$  et  $L_{i+1}$ .

$$\forall K > 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{i,1}(k) = \max [\tau_{i,2} + X_{i,2}(k-1), u_i(k)] \\ X_{i,2}(k) = \tau_{i,1} + X_{i,1}(k) \\ X_{i+1,1}(k) = \max [\tau_{i+1,2} + X_{i+1,2}(k-1), u_{i+1}(k)] \\ X_{i+1,2}(k) = \max [\tau_{i+1,1} + X_{i+1,1}(k), X_{i,2}(k)] \end{array} \right. \quad (1)$$

En utilisant les notations des diodes, nous traduisons ensuite le système (1) sous forme d'un système d'équations (max, plus) linéaires stationnaires. Nous obtenons ainsi :

$$\forall K > 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{i,1}(k) = \tau_{i,2} \otimes X_{i,2}(k-1) \oplus u_i(k) \\ X_{i,2}(k) = \tau_{i,1} \otimes X_{i,1}(k) \\ X_{i+1,1}(k) = \tau_{i+1,2} \otimes X_{i+1,2}(k-1) \oplus u_{i+1}(k) \\ X_{i+1,2}(k) = \tau_{i+1,1} \otimes X_{i+1,1}(k) \oplus X_{i,2}(k) \end{array} \right. \quad (2)$$

Nous définissons le vecteur d'état

$X(k) = [X_{i,1}(k), X_{i,2}(k), X_{i+1,1}(k), X_{i+1,2}(k)]^T$  dont les composantes sont les variables internes du système, et le vecteur d'entrée

$U(k) = [U_i(k), U_{i+1}(k)]^T$ . La représentation matricielle du système (2) est alors donnée sous forme de l'équation implicite

$$\forall K > 1 \quad X(k) = A_0 \otimes X(k) \oplus A_1 \otimes X(k-1) \oplus B \otimes U(k). \quad (3)$$

$A_0$  et  $A_1$  représentent les matrices caractéristiques du système, et sont à coefficients constants dans le dioïde  $IR_{max}$  (ces coefficients représentent les données du système), avec :

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{i,1} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \tau_{i+1,1} & \varepsilon \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \tau_{i,2} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{i+1,2} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'effet des conditions initiales sur la réponse du système, c'est pourquoi nous considérons, dans ce qui suit, le système à entrée nulle :  $\forall K > 1, U(K) = [\varepsilon, \varepsilon]^T$ . Sous cette hypothèse, l'équation implicite (3) peut être transformée en une équation de récurrence explicite en calculant l'étoile de Kleene  $A_0^*$  (définition 2). La plus petite solution de (3) est alors donnée sous forme de l'équation récurrente d'ordre 1 (4).

$$\begin{aligned} \forall K > 1, \quad X(k) &= A_0^* \otimes A_1 \otimes X(k-1) \\ &= A \otimes X(k-1). \end{aligned} \tag{4}$$

Avec :

$$A_0^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{i,1} & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \tau_{i,1} & e & \tau_{i+1,1} & e \end{bmatrix}, \text{ et } A = A_0^* \otimes A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \tau_{i,2} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_{i,1} & \tau_{i,2} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{i+1,2} \\ \varepsilon & \tau_{i,1} & \tau_{i,2} & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_{i+1,1} & \tau_{i+1,2} & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

## **4. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté la modélisation d'un système de transport public par les réseaux de petri le système de transport étudié est composé de deux lignes de bus, et nous avons étudié la représentation d'état dans l'algèbre (max, plus).