

Chapitre 2

Revue de la littérature

Le présent chapitre débute par un survol de la littérature concernant les méthodes appliquées pour le pistage lidar jusqu'à ce jour. Une revue en détails des outils mathématiques utilisés dans ce mémoire suit.

D'abord, le filtre de Kalman est présenté et son lien avec la nature gaussienne du bruit est mis en évidence par le principe du moindre carré et du maximum *a posteriori*. L'effet de la non-linéarité du système est aussi discuté pour introduire les filtres de Kalman étendu et non parfumé.

Puis, des solutions possibles pour estimer l'état d'un système en considérant des mesures discrétisées grossièrement sont présentées. Deux façons générales de représenter le problème sont montrées : considérer un bruit de quantification non gaussien ou convertir les mesures discrètes en contraintes sur les états. Bien entendu, ces solutions doivent être réfléchies et adaptées pour le problème spécifique du pistage de cibles par lidar, où le bruit est partiellement gaussien, les contraintes sont des inégalités et le système d'observations est non linéaire.

Finalement, la transformée de Hough, une manière de diminuer sa complexité algorithmique et sa ressemblance avec le maximum de vraisemblance sont discutées.

2.1 Méthodes de pistage pour lidar

À la différence des lidars de notre partenaire industriel, les lidars rotatifs possèdent une grande résolution angulaire pouvant amener à une incertitude sur la position de quelques centimètres seulement. La nouvelle technologie des lidars à état solide est beaucoup plus abordable et ainsi est très prometteuse pour être intégrée aux systèmes de conduite intelligents. Par contre, leur résolution angulaire est pour l'instant beaucoup moins intéressante : le secteur couvert par un élément est entre 3° et 10° pour les lidars sur le marché actuellement. Néanmoins, ils demeurent précis pour ce qui est de la mesure en distance radiale.

Cette caractéristique signifie que les détections faites par l'appareil ne peuvent pas être approximées comme des coordonnées cartésiennes : le système de mesures est polaire, et ainsi, la covariance sur la mesure angulaire augmente en fonction de la distance. Surtout, le bruit de mesure sur la position radiale des détections est gaussien, alors que celui sur la position angulaire, fortement discrétisée, est plutôt uniforme sur le champ de vue d'un élément.

Récemment, de nombreux travaux s'intéressent au pistage pour des lidars haute résolution en utilisant conjointement un filtre de Kalman avec un algorithme d'association de détections. Par exemple, dans [2], le pistage à hypothèses multiples [3] est appliqué aux données lidar pour séparer des trajectoires de piétons. De manière similaire, [4] fait une estimation de la position et de la vitesse d'objets observés par un lidar en utilisant le principe des hypothèses multiples pour initialiser pour chaque cible plusieurs filtres de Kalman à différentes vitesses. Également, [5] estime l'état du lidar, des cibles dynamiques et de l'environnement statique simultanément en utilisant un filtre de Kalman et propose un algorithme pour classifier les données lidar (les associer à une cible statique, à une nouvelle cible dynamique ou à une cible dynamique existante).

L'estimation d'état doit donc prendre en compte la géométrie particulière de la nouvelle technologie lidar à état solide : en plus d'affecter l'estimation de la position angulaire, cette configuration faible résolution nuit à la première étape du pistage qui consiste à associer les détections aux pistes. En effet, les algorithmes d'association, notamment ceux dans [2; 4; 5], utilisent tous les informations extraites au fil du temps (au moins la position et vitesse estimée des cibles) par des observateurs. Cependant, jusqu'à maintenant, la littérature concernant le pistage lidar se concentre presque exclusivement sur les lidars rotatifs haute résolution pour lesquels ces informations sont estimées avec une grande précision.

Toutefois, un article en particulier se penche sur l'amélioration de l'estimation de la position d'un objet passant au travers du champ de vue d'éléments lidar faible résolution [6]. Ces éléments possèdent un champ de 2° chacun, sont espacés de plusieurs degrés entre eux (plusieurs zones non couvertes par le lidar) et sont fixes. L'observateur proposé tente de réduire l'erreur en se fiant sur le sens d'arrivée de la détection et une estimation de la vitesse angulaire selon le temps passé dans le capteur. Il utilise ces données comme mesures supplémentaires dans un filtre de Kalman. Le modèle considère que la vitesse est constante ; une étude pour des trajectoires courbes ou avec accélération non nulle n'a pas été faite pour l'instant.

Dans la prochaine section, les filtres de Kalman (classique, étendu et non parfumé, tous utilisés dans ce mémoire) sont développés. La nécessité d'une adaptation pour des mesures angulaires discrètes est abordée en s'appuyant sur la relation du filtre avec le bruit gaussien.

2.2 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un observateur communément appliqué au pistage de cibles, en deux et trois dimensions, pour de nombreux systèmes de mesures (lidar, radar, caméras, etc.). Depuis sa proposition par R. E. Kalman dans [7], le filtre de Kalman a continué d'évoluer dans la littérature afin d'élargir ses limites : système non linéaire, bruits non gaussiens, ajout de contraintes sur les états et plus encore. Il demeure le meilleur estimateur pour un système linéaire avec bruits gaussiens et le meilleur estimateur linéaire pour un système non linéaire.

Dans cette section, les développements pour les systèmes linéaires (filtre de Kalman classique) et non linéaires (filtres de Kalman étendu et non parfumé) sont abordés en particulier. La nécessité d'avoir un bruit qui est gaussien pour obtenir les performances optimales est également expliquée par deux approches, soit le moindre carré et le maximum *a posteriori*. D'abord, dans les prochains paragraphes, la notation mathématique relative au filtre de Kalman employée dans ce travail est établie.

L'état d'un système \mathbf{x}_k peut être exprimé en fonction de son état précédent \mathbf{x}_{k-1} , de la commande en entrée \mathbf{u}_k et d'un bruit de procédé \mathbf{w}_k . L'indice représente l'instant : k étant l'instant actuel et $k - 1$ étant l'instant précédent. L'équation aux différences générale pour cette relation est la suivante :

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k, \quad (2.1)$$

où $f(\cdot)$ est une fonction qui peut être non linéaire.

De la même manière, les observations \mathbf{y}_k à l'instant k peuvent être exprimées selon l'état du système et le bruit de mesure \mathbf{v}_k .

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (2.2)$$

où $h(\cdot)$ est une fonction qui peut, encore une fois, être non linéaire.

Le filtre de Kalman est un observateur stochastique et s'exprime donc à partir de l'équation générale d'un observateur :

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left[\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \right], \quad (2.3)$$

où l'état estimé *a priori* $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ et l'observation correspondante $\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}$ sont évaluées par :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k), \quad (2.4)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}). \quad (2.5)$$

Le terme $(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})$ est appelé l'innovation. Le filtre de Kalman est habituellement divisé en deux étapes principales : la prédiction ou l'estimation *a priori* et la correction par l'innovation ou estimation *a posteriori*.

Le gain du filtre permet de mettre plus ou moins d'importance sur la correction par l'innovation par rapport à la prédiction. Le gain du filtre de Kalman \mathbf{K}_k est par conséquent fonction de la matrice de covariance de l'erreur *a priori* $\mathbf{e}_{k|k-1} = (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$ et de la matrice de covariance de l'innovation. Lorsque les bruits de procédé et de mesure sont gaussiens et que les fonctions $f(\cdot)$ et $h(\cdot)$ sont linéaires, le filtre de Kalman est l'estimateur optimal.

Puisqu'un système est rarement linéaire, des extensions au filtre de Kalman, telles que le filtre de Kalman étendu et le filtre de Kalman non parfumé, ont été développées. Que ce soit le filtre de Kalman classique, étendu ou non parfumé, il suppose toujours un bruit gaussien à la fois sur le procédé et les mesures. La différence entre ces trois filtres se situe plutôt dans la linéarisation du modèle de transition $f(\cdot)$ et du modèle de l'état vers les observations $h(\cdot)$.

2.2.1 Filtre de Kalman classique

Le filtre de Kalman classique suppose un système linéaire, de telle sorte qu'il peut être représenté par les opérations matricielles suivantes :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \quad (2.6)$$

où \mathbf{A} est une matrice représentant la transition de l'état précédent à l'état actuel, \mathbf{B} est une matrice représentant la transformation de la commande à l'entrée du système vers l'état actuel. Le bruit de procédé \mathbf{w}_k est supposé gaussien et de moyenne nulle. La matrice de covariance de ce bruit, $E[\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^T]$, de procédé est nommée \mathbf{Q} .

La relation entre l'état et l'observation est aussi supposée linéaire et est représentée par la matrice \mathbf{H} :

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (2.7)$$

Tout comme le bruit de procédé, le bruit de mesure \mathbf{v}_k est supposé gaussien et de moyenne nulle. Sa matrice de covariance, $E[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T]$, est nommée \mathbf{R} .

À la section A.1 en annexe, la matrice de covariance de l'erreur *a priori* $\mathbf{e}_{k|k-1}$ est développée pour obtenir la relation suivante :

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}, \quad (2.8)$$

où \mathbf{P}_{k-1} est la matrice de covariance de l'erreur de l'estimation *a posteriori* à instant précédent. Cette relation exprime donc la propagation de la matrice de covariance de l'erreur dans le temps.

À la section A.2 en annexe, la matrice de covariance de l'innovation est également développée et la relation suivante est obtenue :

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}. \quad (2.9)$$

Le calcul du gain de Kalman, soit la matrice \mathbf{K}_k , est développé dans la littérature de multiples façons. À l'origine, le filtre de Kalman a été développé en utilisant la projection orthogonale de l'erreur dans l'espace d'Hilbert [7]. Cependant, afin de mettre en évidence l'implication du bruit gaussien, les prochaines sections expliquent les grandes lignes du développement par l'approche du moindre carré, puis par l'approche du maximum *a posteriori*.

Approche du moindre carré

Le gain de Kalman est souvent développé dans la littérature en passant par la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (MSE), par exemple [8]. L'erreur quadratique moyenne est définie par la variance et le biais de l'estimateur :

$$\text{MSE} = \text{Var}(\hat{\mathbf{x}}) + \text{Biais}^2(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.10)$$

L'estimateur optimal est dérivé à partir de deux hypothèses de départ.

La première est que, lorsque l'estimateur est optimal, le biais est nul. Par conséquent, il faut trouver l'estimateur pour lequel la variance de $\hat{\mathbf{x}}$ est minimale. Cette estimation optimale correspond en fait, puisqu'elle est sans biais, à l'espérance conditionnelle de l'état sachant les observations obtenues à l'instant actuel et aux instants précédents.

$$\hat{\mathbf{x}}_k = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k] \quad (2.11)$$

Dans de nombreux cas, la distribution de cette probabilité conditionnelle *a posteriori* n'est pas évidente à calculer. Cependant, lorsqu'à la fois le bruit de mesures et le bruit de procédé sont gaussiens, cette densité de probabilité se résume également à une densité gaussienne (qui ne possède qu'un seul mode).

La deuxième hypothèse est donc de considérer un bruit de nature normal. Le filtre de Kalman se base entièrement sur cette propriété, car une densité de probabilité normale peut être totalement représentée par son espérance et sa covariance. La matrice de covariance de l'erreur et le vecteur d'état estimé (*a posteriori*) sont donc suffisants pour représenter la densité de probabilité de $\{\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$.

Pour ces raisons, minimiser l'erreur quadratique moyenne sur $\hat{\mathbf{x}}$ revient à minimiser la variance de l'estimation *a posteriori*. Dans une matrice de covariance, la variance est située sur la diagonale principale. Par conséquent, il s'agit de minimiser la trace de la matrice de covariance de l'erreur *a posteriori* :

$$E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^2] = \text{Tr}(E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T]) = \text{Tr}(E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T]) = \text{Tr}(\mathbf{P}_k) \quad (2.12)$$

Le vecteur d'erreur, $(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)$, est renommé \mathbf{e}_k afin de simplifier la notation.

En remplaçant par l'équation générale d'un observateur, le vecteur d'erreur à l'instant présent peut être exprimé en fonction du vecteur d'erreur *a priori* :

$$\mathbf{e}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{e}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \quad (2.13)$$

La matrice de covariance de l'erreur *a posteriori* déduite de cette expression est donc :

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k|k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^\top - \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{K}_k^\top \quad (2.14)$$

La valeur du gain minimisant cette variance correspond à la valeur pour laquelle la dérivée de la trace est nulle. Cette dérivation est faite en annexe à la sous-section A.3. Le gain de Kalman ainsi obtenu est le suivant :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{S}_k^{-1} \quad (2.15)$$

En remplaçant le gain de Kalman dans (2.14), la covariance *a posteriori* est simplifiée à :

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k|k-1} \quad (2.16)$$

Une seconde approche permettant d'arriver au même résultat, en raison de la nature gaussienne du bruit, est celle du maximum *a posteriori*.

Approche du maximum *a posteriori*

L'estimateur optimal bayésien est de trouver $\hat{\mathbf{x}}_k$ qui maximise la probabilité conditionnelle d'obtenir l'état estimé $\hat{\mathbf{x}}_k$ connaissant l'observation \mathbf{y}_k et la densité de probabilité des estimations précédentes. Autrement dit, l'estimateur optimal est celui du maximum *a posteriori*. Or, pour des bruits de mesure et de procédé gaussiens, le maximum *a posteriori* (MAP) est l'estimation faite par le filtre de Kalman.

La formulation du MAP dépend de la fonction de vraisemblance $\max p(\mathbf{y}_k | \hat{\mathbf{x}}_k)$ et de la distribution *a priori* $p(\hat{\mathbf{x}}_k | \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$:

$$\max p(\hat{\mathbf{x}}_k | \mathbf{y}_k) = \max p(\mathbf{y}_k | \hat{\mathbf{x}}_k) p(\hat{\mathbf{x}}_k | \hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \quad (2.17)$$

Le développement fait ici est semblable à celui dans [9]. Cependant, ce dernier associe le filtre de Kalman au maximum de vraisemblance, malgré la présence de la distribution *a priori*, et des étapes importantes du développement, notamment l'explication du passage de la fonction de vraisemblance vers la densité *a posteriori*, sont omises ou non explicites. Le développement ici et à la section A.4 en annexe est direct et plus approfondi et se base sur les prochaines affirmations.

Lorsque le bruit est gaussien, la fonction de vraisemblance ainsi que la distribution *a priori* sont également gaussiennes :

$$p(\mathbf{y}_k | \hat{\mathbf{x}}_k) = \frac{\exp(-(\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k)^\top)}{\sqrt{|2\pi \mathbf{R}|}}, \quad (2.18)$$

$$p(\hat{\mathbf{x}}_k | \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) = \frac{\exp(-(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^\top)}{\sqrt{|2\pi \mathbf{P}_{k|k-1}|}}. \quad (2.19)$$

Le modèle récursif du système est considéré dans la distribution *a priori*. Comme la multiplication de distributions gaussiennes équivaut également une distribution gaussienne, l'expression de la distribution *a priori* selon $\mathbf{P}_{k|k-1}$ est possible.

Une seconde simplification importante, grâce à la nature gaussienne de ces distributions, est appliquée sur la distribution *a posteriori*. Il est possible de minimiser le logarithme de la distribution *a posteriori*, plutôt que maximiser la distribution elle-même, pour trouver le MAP :

$$\log p(\hat{\mathbf{x}}_k | \mathbf{y}_k) \propto -(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k)\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k)^\top - (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^\top. \quad (2.20)$$

À la section A.4 en annexe, le développement pour trouver la valeur de $\hat{\mathbf{x}}_k$ minimisant (2.20) est détaillé. Il est alors démontré, en utilisant le lemme de l'inversion matricielle, que la forme obtenue en passant par cette démarche équivaut à celle trouvée par l'approche du moindre carré :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \left[\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \right]^{-1} \left[\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k + \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right] \\ &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top + \mathbf{R})^{-1} [\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le filtre de Kalman est donc optimal, car il minimise l'erreur quadratique moyenne et maximise la probabilité *a posteriori*. Ces deux affirmations sont respectées et sont équivalentes en raison de la nature gaussienne du bruit de mesure et de procédé : la densité de probabilité de l'état *a posteriori* est une gaussienne également et possède donc un seul mode qui est situé à l'espérance.

Étapes résumées de prédiction et correction

L'application du filtre de Kalman peut se résumer en deux étapes : la prédiction à partir des états précédents (estimation *a priori*), et la correction en comparant les états aux observations (estimation *a posteriori*). Les calculs relatifs à ces étapes sont les suivants :

Prédiction

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^\top + \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Correction

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k &= \mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^\top + \mathbf{R} \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^\top \mathbf{S}_k^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})\mathbf{P}_{k|k-1}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.2.2 Filtre de Kalman étendu

Le filtre de Kalman étendu permet de linéariser un modèle ($f(\cdot)$ et $h(\cdot)$) non linéaire autour du vecteur d'état estimé. Il se base sur la série de Taylor de premier ordre, et se limite donc à des fonctions continues qui sont presque linéaires. La première approximation faite pour ce filtre est celle sur le modèle de transition d'un état au suivant :

$$f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \approx f(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{e}_k \left. \frac{\delta f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_k)}{\delta \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k}, \quad (2.24)$$

où $\left. \frac{\delta f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_k)}{\delta \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k}$ est la matrice Jacobienne évaluée au vecteur d'état estimé *a posteriori*. Afin de garder la même syntaxe que pour le filtre de Kalman classique, cette matrice Jacobienne est renommée \mathbf{A}_k de telle sorte que :

$$f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \approx f(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{A}_k \mathbf{e}_k. \quad (2.25)$$

L'erreur *a priori* se retranscrit donc :

$$\mathbf{e}_{k|k-1} = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_{k-1} - f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k) \approx \mathbf{A}_k \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (2.26)$$

ce qui revient aux équations vues dans la sous-section 2.2.1 pour le filtre de Kalman classique.

De la même manière, une seconde approximation est faite pour le modèle de transformation des états en observations :

$$h(\mathbf{x}_k) \approx h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{H}_{k|k-1} \mathbf{e}_{k|k-1}, \quad (2.27)$$

où $\mathbf{H}_{k|k-1}$ est la matrice Jacobienne de $h(\cdot)$ évaluée au vecteur d'état estimé *a priori*. Le vecteur d'innovation se retranscrit donc :

$$\mathbf{i}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \approx \mathbf{H}_{k|k-1} \mathbf{e}_{k|k-1} + \mathbf{v}_k. \quad (2.28)$$

Le filtre de Kalman étendu suppose que les termes d'ordres supérieurs de la série de Taylor pour $h(\cdot)$ et $f(\cdot)$ sont négligeables. Dans les cas où les termes d'ordres supérieurs sont importants, il est préférable d'utiliser le filtre de Kalman non parfumé présenté à la prochaine sous-section.

2.2.3 Filtre de Kalman non parfumé

Le filtre de Kalman non parfumé (*Unscented Kalman Filter*, UKF), développé dans [10; 11], est basé sur la prémisse qu'une densité de probabilité est plus facile à estimer en général qu'une fonction non linéaire. Ce filtre utilise donc plutôt une transformation non parfumée [12] pour estimer la densité de probabilité après l'insertion dans une fonction non linéaire.

Cette transformation non parfumée est la suivante.

D'abord, des points sigma $\boldsymbol{\chi}_{k-1}$ sont générés pour représenter la densité de probabilité gaussienne de l'état estimé $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}$. Contrairement à un filtre particulaire, les points générés ne sont pas aléatoires, ils sont déterministes et choisis pour que leur covariance et que leur moyenne corresponde respectivement à \boldsymbol{P}_{k-1} et $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}$. Les $2n + 1$ points sigma sont générés de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_{0, k-1} &= \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{\chi}_{i, k-1} &= \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + (\sqrt{(n + \lambda)\boldsymbol{P}_{k-1}})_i \quad . \\ \boldsymbol{\chi}_{i+n, k-1} &= \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} - (\sqrt{(n + \lambda)\boldsymbol{P}_{k-1}})_{i+n}\end{aligned}\tag{2.29}$$

où n est la longueur du vecteur d'états, l'opérateur $(\cdot)_i$ correspond à la i^e colonne ou rangée de la matrice évaluée et $\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n$ est un coefficient à choisir permettant un réglage sur les points sigma. Plus α est grand, plus les points sigma sont éloignés. En général, il est suggéré d'évaluer la racine carrée de la matrice de covariance avec la factorisation de Cholesky [10; 13].

Les poids associés à chacun des points sigma sont :

$$\begin{aligned}W_{0,moy} &= \frac{\lambda}{n + \lambda} \\ W_{0,cov} &= \frac{\lambda}{n + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) . \\ W_{1:2n,moy} &= W_{1:2n,cov} = \frac{1}{2(n + \lambda)}\end{aligned}\tag{2.30}$$

Ensuite, dans le filtre de Kalman non parfumé, les points sigma sont propagés dans la fonction $f(\cdot) : \boldsymbol{\chi}_{k|k-1} = f(\boldsymbol{\chi}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k)$. La covariance *a priori*, $\boldsymbol{P}_{k|k-1}$ correspond alors à la covariance des points sigma propagés et pondérés par \boldsymbol{W}_{cov} , additionnée de la covariance bruit de procédé.

Puis, les points sigma *a priori* sont transformés par la fonction $h(\cdot)$ pour estimer l'espérance de l'observation : $\boldsymbol{Y}_{k|k-1} = h(\boldsymbol{\chi}_{k|k-1})$. L'espérance de l'observation est alors la moyenne pondérée par \boldsymbol{W}_{moy} de $\boldsymbol{Y}_{k|k-1}$. La covariance de l'innovation, \boldsymbol{S}_k est donc évaluée par :

$$\boldsymbol{S}_k = \boldsymbol{Y}_{k|k-1} \text{diag}(\boldsymbol{W}_{cov}) \boldsymbol{Y}_{k|k-1}^\top + \boldsymbol{R}.\tag{2.31}$$

La covariance croisée de l'espérance de l'observation et de l'estimation *a priori*, soit $\boldsymbol{HP}_{k|k-1}$ dans le gain de Kalman, correspond à :

$$\boldsymbol{P}_{yx,k|k-1} = \boldsymbol{Y}_{k|k-1} \text{diag}(\boldsymbol{W}_{cov}) \boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^\top.\tag{2.32}$$

Le gain de Kalman et la matrice de covariance *a posteriori* se résument donc à :

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{yx,k|k-1} \boldsymbol{S}_k^{-1}.\tag{2.33}$$

$$\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_{k|k-1} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{S}_k^{-1} \boldsymbol{K}_k^\top.\tag{2.34}$$

Cette méthode pour approximer les matrices de covariance n'est valide que lorsque le bruit est additif. Lorsque le bruit le procédé n'est pas additif, il faut augmenter le vecteur d'état par le bruit de procédé. Lorsque le bruit de mesures n'est pas additif, il faut augmenter le vecteur d'état à la fois par le bruit de mesures et par le bruit de procédé.

Pour générer les points sigma, la taille du vecteur d'état est alors augmentée par des vecteurs nuls de la taille du bruit de procédé et du bruit de processus. Le vecteur d'état augmenté, noté $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a$, est alors :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^\top & \mathbf{0}_v^\top & \mathbf{0}_w^\top \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

De la même manière, la matrice de covariance de l'erreur \mathbf{P}_{k-1} est augmentée par les matrices de covariance des bruits :

$$\mathbf{P}_{k-1}^a = \text{diag}(\mathbf{P}_{k-1}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}). \quad (2.36)$$

Avec cet espace augmenté, $2n + 1$, où n est la longueur du vecteur d'état augmenté, points sigma sont générés : $\chi_{k-1}^a = [\chi_{k-1}^x \chi_{k-1}^v \chi_{k-1}^w]^\top$. Les bruits de procédé et de mesures non additifs sont donc pris en compte : $\chi_{k|k-1}^x = f(\chi_{k-1}^x, \mathbf{u}_k, \chi_{k-1}^v)$ et $\mathbf{Y}_{k|k-1}^x = h(\chi_{k|k-1}^x, \chi_{k-1}^w)$. Les covariances des points sigma pondérés $\chi_{k|k-1}^x$ et $\mathbf{Y}_{k|k-1}^x$ correspondent alors directement aux covariances avec le bruit de procédé et de mesure.

Puisque la densité de probabilité est propagée dans la fonction non linéaire, le filtre de Kalman non parfumé permet d'atteindre une plus grande précision que le filtre de Kalman étendu. En fait, l'estimation du filtre Kalman non parfumé atteint l'approximation du 3^e ordre de la série de Taylor, alors que le filtre de Kalman étendu n'atteint que le premier ordre. Ces deux filtres sont également de même complexité algorithmique [11].

Comme expliqué dans la présente section, les deux façons de traiter la non-linéarité d'un système avec le filtre de Kalman sont l'utilisation du filtre de Kalman étendu pour un système presque linéaire, et du filtre de Kalman non parfumé autrement. La prochaine section étale plutôt les observateurs et les adaptations du filtre de Kalman développés dans la littérature qui pourraient s'appliquer, après modification, au traitement de mesures lidar fortement discrètes.

2.3 Estimation d'états pour mesures discrètes

Considérons une mesure z ayant une incertitude de $\pm \frac{\Delta z}{2}$. Cette mesure peut être exprimée comme le résultat d'une fonction de quantification $Q(\cdot)$ appliquée sur la mesure parfaite y :

$$z = Q(y) = \Delta z \text{ round} \left(\frac{y - C}{\Delta z} \right) + C, \quad (2.37)$$

où C est une constante pour centrer le zéro de l'arrondi à la valeur voulue.

Lorsque les niveaux de quantifications sont petits, il est possible d'approximer un bruit de quantification comme un bruit gaussien [14; 15]. Le bruit gaussien (thermique par exemple)

sur les mesures est alors plus important ou équivalent au bruit de quantification, où la variance du bruit de quantification correspond à :

$$\sigma_z^2 = \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} z^2 \frac{1}{\Delta z} dz = \frac{\Delta z^2}{12}. \quad (2.38)$$

Cependant, lorsque les niveaux de quantifications sont larges, cette approximation tend à diminuer de manière importante les performances des observateurs comme le filtre de Kalman.

Il y a deux grandes catégories de techniques pour traiter ce problème : considérer un bruit de mesure uniforme, considérer les mesures comme étant des contraintes sur les états. Le filtre de Kalman tel que développé initialement doit être adapté pour ces deux cas.

Ce sont par ailleurs ces deux astuces qui sont employées et comparées dans [15] afin de localiser précisément un robot avec des mesures RFID (*radio frequency identification*) fortement discrétisées. Il y est vu que la deuxième méthode, par contraintes, est plus précise que la première, considération d'un bruit uniforme, pour cette application.

La littérature disponible pour ces deux techniques est abordée dans les deux prochaines sous-sections.

2.3.1 Considération du bruit de quantification

La première façon de représenter le problème d'une mesure angulaire faible résolution est de lui donner un bruit de quantification : un bruit de densité uniforme dans l'intervalle angulaire couvert par un élément lidar.

Par conséquent, une solution plus exacte pour des mesures fortement discrétisées est d'utiliser un filtre particulière plutôt qu'un filtre de Kalman. Un filtre particulière est une méthode de Monte-Carlo et permet de modéliser un bruit qui n'est pas gaussien. Il s'agit de générer des particules aléatoires représentant les états du système. Le poids de chaque particule est ensuite évalué selon la probabilité conditionnelle d'obtenir l'observation actuelle connaissant la particule d'état. Selon le poids des particules, un rééchantillonnage aléatoire est fait pour obtenir les particules a posteriori. Ces particules sont propagées dans le modèle du système afin de prédire l'état suivant. La moyenne des particules pondérées correspond alors à l'espérance de l'état.

Dans [16] par exemple, un filtre à particules est comparé au filtre de Kalman pour des mesures quantifiées et il est montré que le filtre à particules est plus performant. Cependant, le filtre à particules nécessite de loin plus de calculs que le filtre de Kalman : comme toute simulation Monte-Carlo, il faut générer une grande quantité de particules aléatoires (des centaines, voire des milliers) et les propager pour bien représenter la PDF. Si une quantité insuffisante de particules est générée, le filtre peut diverger. Pour le cas particulier du bruit de mesure uniforme, les particules pourraient être entièrement à l'extérieur de la région non nulle de la distribution

uniforme correspondant à la mesure, le rééchantillonnage aléatoire serait problématique. Ainsi, pour une application en temps réel, le filtre particulière est moins intéressant.

Pour cette raison, de nombreuses solutions alternatives ont été développées.

Par exemple, l'article [14] se concentre sur le cas où les niveaux de quantifications sont très larges et où l'échantillonnage est rapide : les mesures quantifiées changent peu souvent de niveau, sauf lorsqu'elles sont près d'une frontière entre deux niveaux. Il s'appuie sur l'information contenue dans le changement de niveau en proposant deux méthodes récursives, notamment le maximum de vraisemblance, pour estimer l'état. La gigue présente entre deux niveaux, lorsqu'une mesure est près une frontière de quantification, est à la base de ces deux méthodes. Cette gigue n'est toutefois pas présente dans de nombreuses applications, comme celle du pistage lidar.

Dans [17], un estimateur d'état récursif est développé. L'algorithme développé propage les coins de la région non nulle de la PDF du vecteur d'état. Lorsqu'une nouvelle mesure s'ajoute, les coins de la PDF sont recalculés et leur nombre peut augmenter. L'algorithme nécessite cependant que la région non nulle de la PDF des états soit convexe, ce qui n'est pas toujours le cas, surtout lorsque la relation entre les mesures et les états n'est pas linéaire.

Dans [18], un algorithme numérique est développé pour estimer l'état à partir d'une approximation de moindre carré. Plus précisément, les états sont calculés de manière similaire au filtre de Kalman, jusqu'à l'étape de correction. Ensuite, l'espérance $E[\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k}]$ et la covariance $\text{Cov}[\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k}]$ de la mesure (non discrétisée) \mathbf{y}_k sont évaluées numériquement par rapport aux mesures quantifiées $\mathbf{z}_{1:k}$ et de manière récursive. Ces deux termes sont calculés numériquement en intégrant sur une grille la densité de probabilité :

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \begin{cases} \frac{1}{C\sqrt{|2\pi\mathbf{S}_k|}} \exp^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})^\top \mathbf{S}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})} & \text{si } \mathbf{y}_k \in \mathbf{Z}_k \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad (2.39)$$

où C est une constante de normalisation qui n'est pas fonction des valeurs de \mathbf{y}_k et \mathbf{Z}_k correspond à l'intervalle de la mesure quantifiée \mathbf{z}_k . La qualité de l'approximation du moindre carré dépend alors de la taille de la grille d'intégration.

Dans [19], le filtre de Kalman est adapté pour une innovation qui est quantifiée. Pour une innovation nulle (espérance de la mesure contenue dans l'incertitude de la mesure), seulement l'étape de prédiction du filtre de Kalman est prise en compte. Lorsque le nombre de niveaux du quantificateur est augmenté à l'infini, ce filtre de Kalman modifié tend vers le filtre de Kalman classique ou étendu. Une limitation de ce filtre est qu'il s'agit de l'innovation dans ce cas qui est quantifiée plutôt que les observations. L'article traite en effet d'un cas où l'innovation est calculée directement au capteur avec une bonne précision et que l'information pouvant être transmise au filtre est limitée et est donc quantifiée. De plus, pour toutes les observations,

l'innovation est quantifiée avec le même quantificateur, ce qui n'est pas le cas pour un lidar à état solide puisque le bruit sur la mesure de position radiale est gaussien.

2.3.2 Application de contraintes sur les états

Une autre façon de voir l'incertitude sur la mesure angulaire est de la voir comme une contrainte sur l'état. De nombreuses techniques ont été développées pour pouvoir inclure des contraintes sur les états dans les filtres de Kalman. Une revue extensive de ces techniques est faite dans [20].

Les contraintes peuvent être sous forme d'égalité ou d'inégalité. Dans le cas d'une égalité, une façon commune et versatile d'appliquer la contrainte est d'augmenter le vecteur d'observations : la contrainte est ajoutée au vecteur des observations comme étant une mesure parfaite dont la covariance du bruit de mesure est nulle. Ainsi, le gain du filtre de Kalman accorde tout le poids à cette contrainte, sans considérer l'estimation de l'état *a priori* qui pourrait être contradictoire. Cependant, pour beaucoup d'applications, il est préférable d'appliquer des contraintes moins strictes. Cela est d'ailleurs le cas lorsqu'on suppose une contrainte de vitesse pour le pistage de cibles [21]. Pour relaxer les contraintes, il faut tout simplement lui accorder une covariance de bruit de mesure non nulle.

Une technique qui s'étend aux inégalités est la projection des états sur les contraintes. Il s'agit de trouver l'état sur l'espace contraint permettant de minimiser la «variance» pondérée de l'erreur :

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \operatorname{argmin}_x (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k)^\top \mathbf{W} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k) \quad (2.40)$$

où \mathbf{W} est une matrice de poids définie positive, \mathbf{x} correspond aux états possibles selon les contraintes, $\tilde{\mathbf{x}}_k$ correspond aux états contraints et $\hat{\mathbf{x}}_k$ correspond aux états tel qu'estimés sans contrainte. Le choix de la matrice de poids permet d'obtenir par exemple l'estimation correspondant au maximum de probabilité ($\mathbf{W} = \mathbf{P}_k^\top$) ou au moindre carré ($\mathbf{W} = \mathbf{I}$), lorsque le bruit est gaussien.

Lorsque les contraintes sur l'état et le modèle sont non linéaires, le filtre de Kalman non parfumé en deux étapes est une option [22]. La première étape consiste à projeter les points sigma sur les contraintes et à évaluer leur espérance et covariance. La deuxième étape est d'appliquer une seconde fois les contraintes par projection sur l'espérance des points sigma. Pour l'espérance projetée, il faut également réévaluer la matrice de covariance.

2.4 Transformée de Hough

La transformée de Hough est un outil utilisé dans le pistage radar pour initialiser des pistes en estimant des trajectoires rectilignes. Pour cette application, la transformée de Hough performe le mieux lorsqu'une cible est de géométrie simple et de petite taille, car la position de ses

surfaces de réfléchissantes tend à moins varier [23]. Pour un lidar à état solide, cette caractéristique est très avantageuse, car la difficulté est d’estimer avec précision la position angulaire (et par extension la vitesse) de petites cibles contenues dans un élément. Lorsqu’une cible est grande et contenue dans plusieurs éléments, son centre peut être estimé en moyennant : le filtre de Kalman est plus efficace, car la quantification est moins importante sur le bruit de mesure.

Appliquée pour la conduite intelligente, la transformée de Hough permettrait donc d’estimer la trajectoire de piétons, de cyclistes ou d’animaux et ainsi d’évaluer les collisions potentielles. De plus, la connaissance de la trajectoire peut aussi aider l’estimation de l’état d’une cible, et c’est sur cette théorie que se base ce projet de maîtrise.

Telle que définie à l’origine, la transformée de Hough permet de détecter des droites dans un ensemble de points ou dans une image. Elle représente une droite dans un espace cartésien par un point dans l’espace de Hough. Pour ce faire, elle utilise l’équation paramétrique qui prend en entrée un point (x, y) :

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta . \tag{2.41}$$

Le paramètre ρ correspond à la distance minimale entre l’origine et la droite \mathbf{d} . À la figure 2.1, il correspond à la norme du segment \overline{OH} et il est négatif lorsque le point H est dessous l’axe des x . Le paramètre θ correspond à l’orientation du vecteur perpendiculaire à la droite, soit l’orientation de \overline{OH} (entre 0 et π radians). Selon la relation (2.41), l’espace de Hough est borné : il se répète en θ et le point en entrée le plus éloigné de l’origine (distance de r_{\max}) détermine les valeurs extrêmes de ρ . En comparant la figure 2.1 avec la figure 2.2, on remarque que toutes les droites possibles sont comprises dans cet espace de Hough borné.

Il s’agit de la représentation la plus utilisée pour décrire l’espace de Hough d’une droite. Certains utilisent également les paramètres m et b correspondants à la pente et à la valeur initiale de la droite ($y = mx + b$). Cependant, dans cette représentation, les paramètres ne sont pas bornés : la pente et la valeur initiale tendent vers l’infini pour une droite verticale par exemple.

Une accumulation (ou des votes) est faite dans une matrice de taille $[N_\rho \times N_\theta]$ représentant l’espace de Hough discrétisé. Le pixel dans la matrice où le nombre de votes est maximal correspond alors à la droite (ρ, θ) qui passe par le plus de points (x, y) .

La transformée de Hough a été généralisée afin de permettre la reconnaissance de formes autres que des droites [24; 25]. Dans ces cas, il peut y avoir plus de deux paramètres décrivant l’espace de Hough. Il est alors discrétisé en une série d’hypercubes dans un tenseur.

La figure 2.3 illustre un exemple du procédé pour la transformée de Hough détectant une droite.

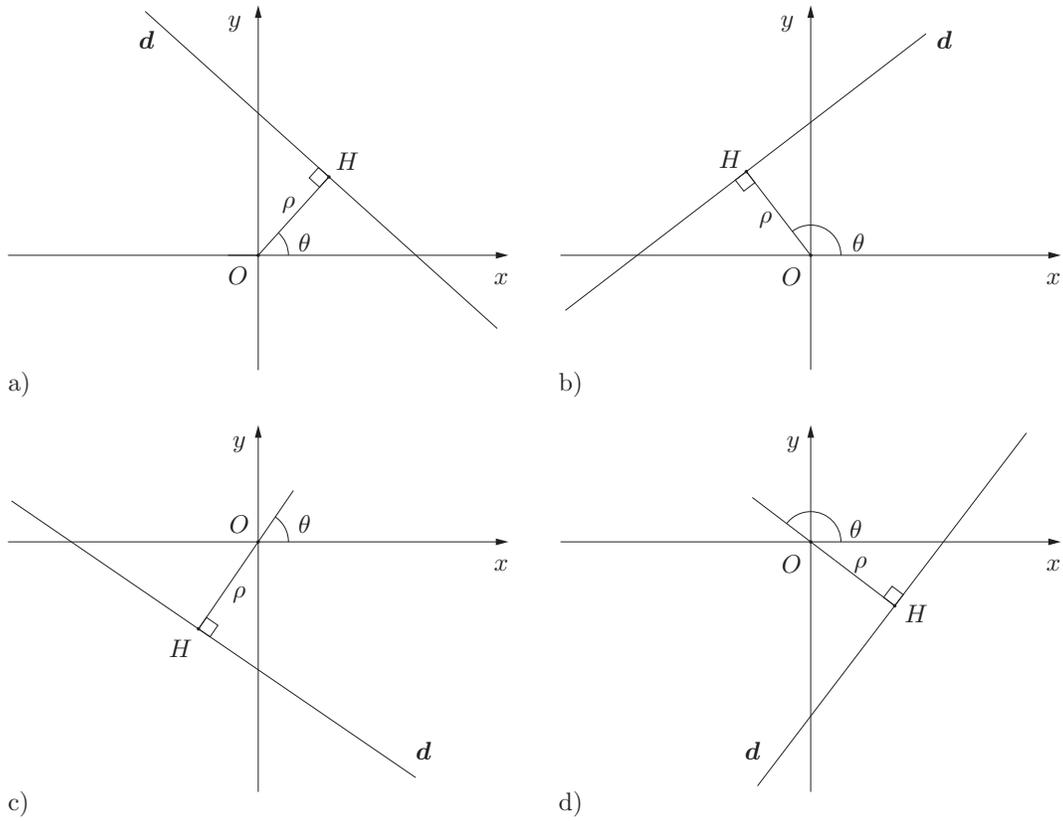


FIGURE 2.1 – Exemples de droites pour les quatre quadrants du plan cartésien. a) $\rho \geq 0$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$, b) $\rho \geq 0$ et $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, c) $\rho \leq 0$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$ et d) $\rho \leq 0$ et $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$.

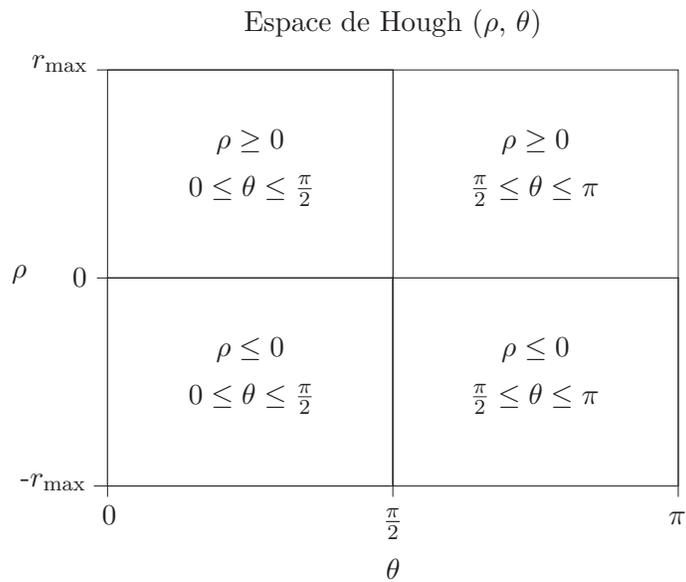


FIGURE 2.2 – Transformation des droites dans les quatre quadrants du plan cartésien vers l'espace de Hough.

Tel qu'illustré dans l'espace de Hough, chaque point correspond à une courbe représentant l'ensemble des droites passant par ce point. Pour toutes les valeurs d'orientation θ , il existe une droite ayant une valeur unique en ρ . L'intersection entre deux courbes correspond donc à la droite passant par deux points. L'accumulation des votes dans la matrice illustre le nombre de points passant par chaque pixel dans l'espace de Hough discrétisé.

Le quatrième graphique montre d'ailleurs l'effet de la discrétisation de l'espace sur le résultat de la transformée. Lors de l'accumulation, le résultat de l'équation (2.41) est comparé aux extremums (arêtes) en ρ de chaque pixel. Plus les extremums sont éloignés ($\Delta\rho = \frac{\max(\rho) - \min(\rho)}{N_\rho}$), plus l'intervalle de la droite rejoignant le plus de points sera grand ($\rho \pm \frac{\Delta\rho}{2}, \theta$). Ainsi, pour avoir une grande précision sur la droite estimée, il faut diminuer le pas $\Delta\rho$ et donc augmenter la taille de la matrice des votes. De la même manière, pour augmenter la précision en θ , il faut augmenter la taille de la matrice. Cependant, cela augmente du même facteur la complexité algorithmique du calcul de la transformée de Hough.

La FHT (*Fast Hough transform*) a été développée dans le but d'atteindre une grande résolution tout en ayant une complexité algorithmique moindre [26; 25]. Le principe est de calculer récursivement la transformée en augmentant la résolution dans les zones dont le nombre de votes dépasse un certain niveau. La taille de chaque hypercube du tenseur de votes n'est donc plus fixe. Pour un tenseur de votes de petite taille, il est possible d'obtenir une résolution intéressante en augmentant celle-ci progressivement dans la ou les régions d'intérêt.

2.4.1 Similarité avec le maximum de vraisemblance

Tel que discuté dans [27], il y a une relation importante, même de la similarité, entre le maximum de vraisemblance (*maximum likelihood*, ML), le maximum *a posteriori* (MAP) et la transformée de Hough. En effet, la densité de probabilité *a posteriori* correspondant aux paramètres de Hough \mathbf{h} s'écrit :

$$f(\mathbf{h}|\mathbf{y}_{1:k}) = \frac{f(\mathbf{y}_{1:k}|\mathbf{h})f(\mathbf{h})}{f(\mathbf{y}_{1:k})}, \quad (2.42)$$

où la PDF $f(\mathbf{y}_{1:k}|\mathbf{h})$ est la fonction de vraisemblance de \mathbf{h} par rapport à toutes les mesures de position \mathbf{y} . Puisque la PDF $f(\mathbf{y}_{1:k})$ ne dépend pas des paramètres \mathbf{h} et que la PDF des paramètres de Hough, $f(\mathbf{h})$, correspond à une densité uniforme pour les paramètres possibles de Hough, les paramètres de Hough maximisant la probabilité *a posteriori* sont aussi ceux qui maximisent la vraisemblance :

$$\arg \max_{\mathbf{h}} f(\mathbf{h}|\mathbf{y}_{1:k}) = \arg \max_{\mathbf{h}} f(\mathbf{y}_{1:k}|\mathbf{h}) = \arg \max_{\mathbf{h}} \prod_i^k f(\mathbf{y}_i|\mathbf{h}). \quad (2.43)$$

En utilisant le logarithme de la vraisemblance, on peut retrouver la forme suivante :

$$\arg \max_{\mathbf{h}} \log f(\mathbf{h}|\mathbf{y}_{1:k}) = \arg \max_{\mathbf{h}} \sum_i^k \log f(\mathbf{y}_i|\mathbf{h}), \quad (2.44)$$

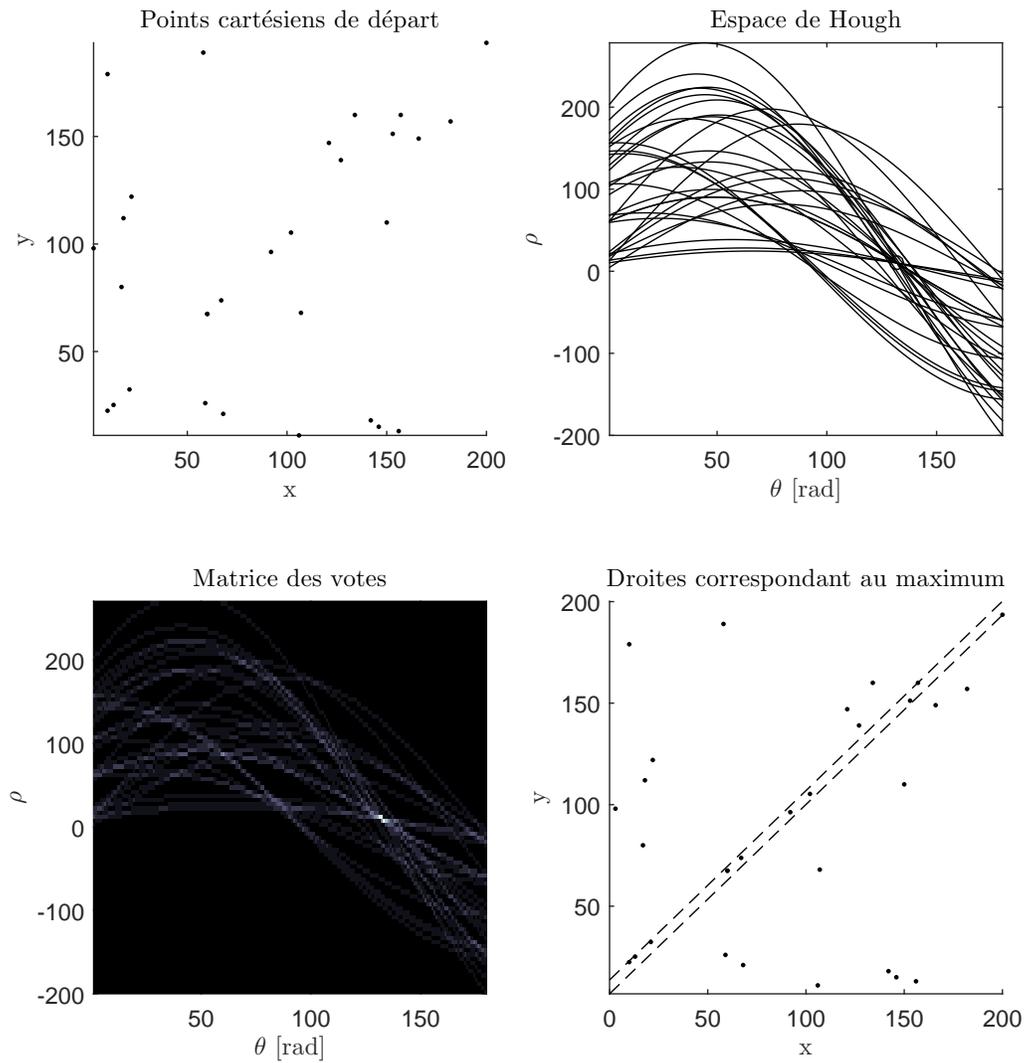


FIGURE 2.3 – Exemple des étapes de la transformée de Hough pour une droite dissimulée dans un ensemble de points aléatoires. La matrice des votes montre la valeur des pixels, le maximum étant en blanc.

ce qui ressemble à la transformée de Hough. En effet, les votes binaires de la transformée de Hough représentent les régions où il est possible d'associer la mesure de position \mathbf{y}_i aux paramètres \mathbf{h} discrétisés. Les votes pour chaque mesure sont donc similaires au logarithme de la PDF $f(\mathbf{y}_i|\mathbf{h})$. Puis, les votes sont accumulés dans la matrice des votes comme pour le logarithme de vraisemblance.

L'article [27] propose des corrections à la transformée de Hough afin qu'elle corresponde exactement à la fonction de vraisemblance : il s'agit de la transformée de Hough probabiliste (*Probabilistic Hough Transform*, PHF). L'application proposée est pour la reconnaissance de formes dans une image. Une différence notable avec la transformée de Hough classique est que la PDF, soit la matrice de votes, est évaluée comme étant une densité gaussienne limitée par une densité uniforme. Lorsqu'il est possible qu'un pixel de contour soit associé avec une certaine forme, la probabilité d'être associé avec cette forme est gaussienne. Lorsqu'un pixel est trop éloigné, la probabilité d'être associée à la forme est nulle. Bref, les votes ne sont plus binaires.

2.5 Conclusion

Ce chapitre débute par une revue des méthodes de pistage appliquées aux lidars présentes dans la littérature. La nécessité d'estimer les états de manière efficace et précise y est mise en évidence : ces états sont à la base des algorithmes d'association détectations-pistes. Toutefois, peu de travaux se sont penchés jusqu'à ce jour sur le problème particulier que cause la faible de résolution angulaire des lidars à état solide.

Afin de supporter les hypothèses et modifications faites dans les prochains chapitres, une revue en détails des outils et pistes de solutions applicables dans la littérature est élaborée.

D'abord, le filtre de Kalman classique est présenté. Les filtres de Kalman étendu et non parfumé et leurs limites quant à la non-linéarité des systèmes sont ensuite abordés. Les conditions de bruits pour lesquelles le filtre est optimal sont expliquées par le principe du MSE et du MAP. Il est alors évident que des mesures quantifiées, comme celles d'un lidar à état solide, ne remplissent pas ces conditions.

Puis, deux catégories de solutions sont présentées pour estimer l'état d'un système dont les mesures sont discrétisées. La première est de considérer un bruit de quantification non gaussien et la deuxième est de convertir les mesures discrètes en contraintes sur les états. Dans tous les cas, les solutions vues dans la littérature doivent être adaptées au pistage par lidar faible résolution angulaire.

Finalement, la transformée de Hough est discutée. Cette transformée est couramment utilisée dans le pistage par radar afin d'initialiser les pistes. Son utilisation dans un algorithme d'association de détectations-pistes est donc envisagée pour un futur projet. Dans ce travail, il

s'agit de l'allier avec un observateur linéaire afin d'améliorer l'estimation des états des cibles. Ainsi, une manière de diminuer sa complexité algorithmique et sa ressemblance avec le ML et le MAP sont discutées.

Dans le prochain chapitre, le calcul de la transformée de Hough est modifié afin de s'appliquer à la géométrie des lidars à état solide et de considérer les bruits à la fois gaussien et uniforme des mesures de position. Les techniques pour réduire la complexité algorithmique présentées dans le présent chapitre y sont également adaptées pour des détections prises au fil du temps.