

V.3. Différentes méthodes d'estimation du LAI

V.3.1. Méthode directe

Cette méthode commence par la collecte des feuilles. Cette collecte peut être non destructive (recueil de litière) ou destructive (collecte sur pieds). Ensuite la surface foliaire est déterminée après passage au planimètre. Le Planimètre est un appareil qui aplatit les feuilles et mesure automatiquement leur surface.

Les méthodes directes, basées sur des mesures destructives, sont coûteuses en temps et fastidieuses. Elles peuvent être considérées importantes pour valider les méthodes indirectes. Les méthodes indirectes utilisent des capteurs optiques et sont non destructives et plus rapides.

V.3.2. Méthode indirecte

Cette méthode utilise des capteurs optiques et sont non destructives et plus rapides. Elle permet un échantillonnage spatial et temporel plus important. Quelle que soit le capteur optique utilisé, le LAI est estimé à partir des mesures de la fraction de trou.

La fraction de trou, souvent appelée transmittance, est une grandeur qui joue un rôle important dans le régime radiatif des couverts végétaux. Celle-ci est définie comme la probabilité, pour le rayonnement solaire, de pénétrer au sein du couvert sans être interceptée par les feuilles. Sa modélisation peut être effectuée par plusieurs modèles :

Modèle de Poisson

Le modèle généralement utilisé en mode inverse est le modèle de Poisson [49], qui suppose que les feuilles sont opaques et distribuées de façon aléatoire à l'intérieur du couvert. La fraction de trou est décrite par la distribution de Poisson (Equation 19):

$$P_o = \exp \left[\frac{-G(\theta, \varphi) LAI}{\cos(\theta)} \right] \quad (19)$$

$G(\theta, \varphi)$: Facteur géométrique qui correspond à la projection d'une unité de surface de feuille sur le plan perpendiculaire à la direction définie par θ et φ [50].

Modèle Binomial

Ce modèle distingue les distributions foliaires régulières et agrégées. Pour une distribution régulière, le modèle suppose qu'il existe au plus un seul contact rayon-feuille au sein d'une même couche d'épaisseur Δl . La fraction de trou s'exprime avec le modèle binomial positif comme suit [51] :

$$P_o = \exp \left[\frac{LAI}{\Delta l} \times \ln \left(1 - \frac{G(\theta, \varphi) \Delta l}{\cos(\theta)} \right) \right] \quad (20)$$

Pour une distribution agrégée, le modèle suppose qu'il peut y avoir plus d'un contact rayon-feuille par couche. La fraction de trou s'exprime avec le modèle binomial négatif [51] :

$$P_o = \exp \left[\frac{-LAI}{\Delta l} \times \ln \left(1 - \frac{G(\theta, \varphi) \Delta l}{\cos(\theta)} \right) \right] \quad (21)$$

On note que pour une faible épaisseur de couche ($\Delta l \rightarrow 0$), le modèle binomial tend vers le modèle de Poisson [51].

Modèle de Markov

Ce modèle est une généralisation de l'expression de la fraction de trou pour toutes les structures foliaires (uniforme, régulière et agrégée). Contrairement aux modèles décrits précédemment, il suppose que les N couches horizontales du couvert sont dépendantes les unes des autres. En effet, la probabilité qu'il y ait un contact rayon-feuille à une couche donnée dépend du fait qu'il y ait déjà eu contact ou non avec la couche précédente. La fraction de trou intégrée sur l'ensemble du couvert est définie comme suit [51] :

$$P_o = \left[1 - \frac{G(\theta, \varphi) \Delta l}{\cos(\theta)} \right] \times \left[1 - \frac{\lambda G(\theta, \varphi) \Delta l}{\cos(\theta)} \right]^{\frac{LAI}{\Delta l}} \quad (22)$$

Le paramètre de Markov λ , couramment appelé coefficient d'agrégation, caractérise la dépendance mutuelle entre couches. Si le couvert présente une structure régulière, alors $\lambda > 1$, s'il présente une structure agrégée $\lambda < 1$, s'il présente une structure uniforme $\lambda = 1$.

Voici quelques appareils connus servant à mesurer les fractions de trou : le LAI-2000 [52], Le DEMON, Le TRAC (Tracing Radiation and Architecture of the Canopies) [53], la photographie hémisphérique [54].

V.3.3. Le capteur LAI Leger (LAIL)

Le LAI mètre léger est un instrument de mesure de la surface de couverture végétale par unité de surface de sol. Il est fabriqué à partir d'un objectif hémisphérique de type fish-eye, d'une photorésistance, et d'un multimètre numérique [21]. Il est très simple et très pratique en forêt tropicale.

Le schéma ci-après montre la calibration du LAI mètre léger à partir de:

- $\ln I$ qui est le logarithme de la valeur de l'intensité de la lumière incidente transmise sous les feuilles. $\ln I$ est mesuré par le LICOR LAI2000 ;
- $\ln R$ qui est le logarithme de la valeur de la résistance R affiché par le LAI mètre léger.



Figure 16: Mesure de LAI avec le LAIL FEX 4

Les valeurs de LAI collectées à partir de ce capteur sont corrigées à partir de terme correctif B (Brillant), L (Lumineux), C (Couvert), TB (Très Brillant), TL (Très Lumineux), TC (Très Couvert) suivant l'éclairage du ciel.

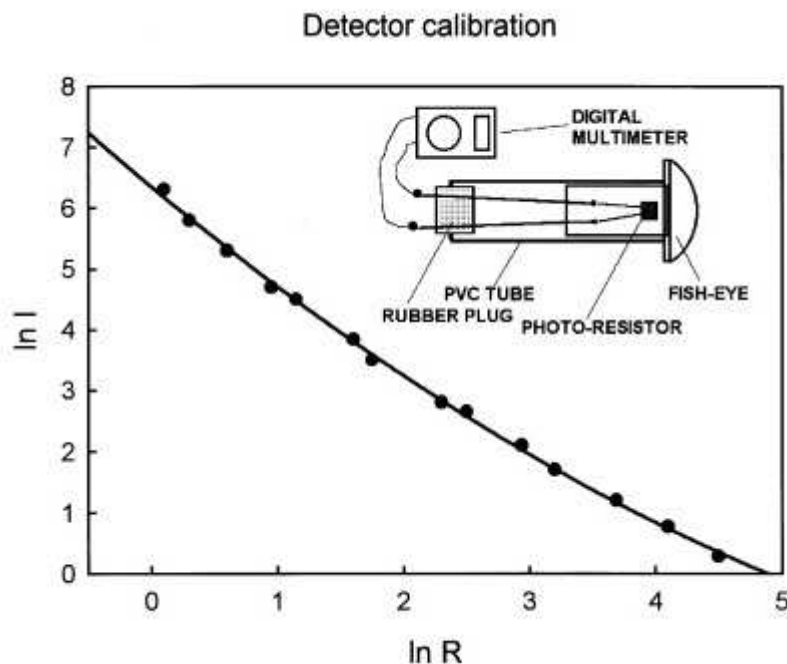


Figure 17: Calibration du capteur LAI léger

Les termes correctifs cités auparavant sont obtenus après plusieurs mesures de l'intensité de lumière pour différentes longueurs d'onde [21]. Le site <http://www.cea-technologies.com> offre plus d'informations sur la spécificité du capteur LAI.L.

V.3.4. Approches basées sur le calcul d'indices spectraux

Ces approches consistent à relier par des équations simples la réflectance spectrale des couverts végétaux à certains de leurs paramètres biophysiques. Les indices de végétation sont dans la pratique les plus couramment utilisés pour estimer le LAI. Ce sont des combinaisons des valeurs de réflectance acquises dans plusieurs bandes spectrales. Ces indices s'appuient essentiellement sur les différences de propriétés optiques de la végétation entre le domaine spectral du rouge et du proche infrarouge, et sont donc fortement corrélés à leur fonctionnement et leur structure [51].

Chapitre VI. **Prétraitement des données****VI.1. Obtention des valeurs de LAI avec le LAIL****VI.1.1. Correction de luminosité**

Les valeurs collectées à partir du capteur LAIL possède la dimension d'une résistance (en ohm [Ω]). Ces valeurs doivent subir des corrections de luminosité C_c selon l'éclairage du ciel. Le concepteur de l'appareil a élaboré une échelle W avec 5 niveaux [21]:

- **B (Bright) ou brillant** : dans cette condition, on voit clairement les points brillants de lumière qui atteignent le sol forestier lorsqu'un objet est exposé au soleil ;
- **L (Lighted) ou éclairé** : dans cette condition dans lequel aucune tache de lumière n'est distinguée mais les ombres sont encore visibles (on vérifie à l'aide de l'ombre de la main si l'ombre est encore visible) ;
- **C (Covered) ou couvert** : dans cette situation, aucune ombre n'est visible ;
- **BL : intermédiaire entre brillant et éclairé** : c'est la situation intermédiaire entre B et L ; on voit des contours flous sur le sol forestier lorsqu'un objet est exposé au soleil ;
- **CL : intermédiaire entre couvert et éclairé** : c'est la situation intermédiaire entre C et L ; les ombres sont à peine distinguées.

L'échelle W se lit ainsi par opacité croissante B, L, BL, CL, C. Quand on a un ciel très couvert ou un temps pluvieux, il est préférable d'arrêter les mesures.

VI.1.2. Calcul des valeurs de LAI

Après les corrections de luminosité C_c , on calcule le LAI par une formule fournie par le constructeur après étalonnage de chaque appareil.

Tableau II: Les capteurs LAIL utilisés pour les mesures de LAI dans la zone d'étude

Type de capteur	Formule
FEX 4	$LAI = -0,04856(Ln(R))^2 + 1,59079 Ln(R) + 1,47852 + cc$ (7.1)
FEP 17	$LAI = -0,09175(Ln(R))^2 + 1,87263 Ln(R) + 0,90409 + cc$ (7.2)

R est la valeur en Ω directement lue sur le multimètre

VI.2. Filtrage

Le filtrage est une opération qui consiste à éliminer, à réduire les bruits (parasite) ou à sélectionner certaines fréquences. Des erreurs sont rattachées à ces mesures à cause de la différence des conditions et de la manière dont on a fait les mesures. La non-uniformité de la distribution spatiale des feuilles lors des mesures est considérée comme source des bruits. En outre, les erreurs de précision GPS (± 5 mètres à 10 mètres) modifient la localisation exacte des points de mesures qui nécessitent d'être tenus en compte. Par conséquent, les données LAI doivent être filtrées. Lors de cette étude, nous avons utilisé le filtrage par décomposition en ondelettes.

La décomposition en ondelettes

Pour ce type de filtrage, nous supposons que les valeurs de LAI mesurées sur un profil forment un signal S à une dimension. Ce signal S est constitué d'un signal A , à basse fréquence et de bruits ou détails D appelés aussi composantes à haute fréquence. La décomposition en ondelettes s'appuie sur une décomposition multi-niveau [55]. En effet, la décomposition se fait par itération successive. Le signal de départ est décomposé en une composante A (approximation du signal) et en un détail ou en bruit D . L'approximation A , à son tour, peut être décomposée de la même manière que le signal de départ et ainsi de suite. La figure 20 suivante illustre la procédure de cette décomposition :

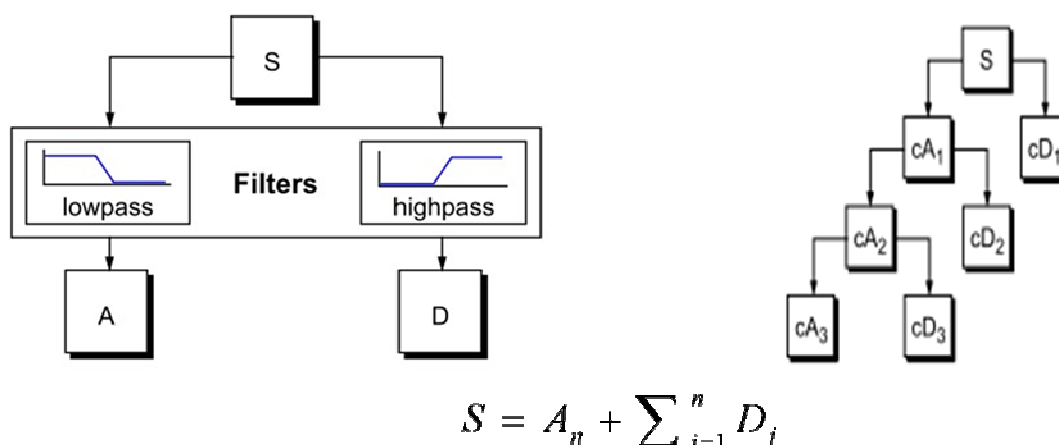


Figure 18: Principe de la décomposition en ondelettes d'un signal S

Nous arrêtons la décomposition quand nous obtenons un signal acceptable en termes de niveau de bruit.

Chapitre VII. Traitements des données

VII.1. Les indices de végétation

Comme nous l'avons vu dans le chapitre IV, il existe une forte corrélation entre les propriétés optiques des végétaux et leur teneur en chlorophylle dans le visible. Les indices de végétation exploitent la différence de réponses spectrales du sol et de la végétation dans différents domaines de longueur d'onde.

La plupart des indices de végétation utilisent simplement des combinaisons de deux bandes, en général les bandes rouge (R) et proche infrarouge (PIR). Ce choix provient du fort contraste entre les réflectances spectrales de la végétation verte et du sol entre ces deux bandes spectrales : la chlorophylle absorbe fortement le rayonnement lumineux dans le rouge alors qu'elle n'absorbe plus dans le proche infrarouge.

Les indices de végétation sont nombreux. Mais lors de cette étude, nous avons choisi ceux qui sont les plus utilisés en milieu forestier, surtout dans les forêts denses humides tropicales. Ces indices de végétation sont divisés en 3 grands types:

VII.1.1. Les indices de végétation sans compensation des effets de sol

Ces indices de végétation sont souvent utilisés dans les forêts denses où les effets des sols sont complètement cachés par la canopée. Dans ce cas, le sol n'exerce pas d'effet sur le signal enregistré par le capteur satellite.

a. Le ratio

Il est égal au rapport entre les bandes du PIR (XS3 si on utilise des images SPOT) et du rouge (XS2). Cet indice de végétation est relié au changement de la quantité de la biomasse verte, de la contenance et concentration en pigments foliaires. Il est très sensible à la contribution spectrale des sols et aux effets atmosphériques [56].

$$RATIO = \frac{XS3}{XS2} \quad (23)$$

b. Indice de végétation normalisé

Le principal indice utilisé dans l'analyse des images satellitales multispectrales est l'indice de végétation normalisé ou Normalized Difference Vegetation Index (NDVI). Cet indice traduit la densité du feuillage et la proportion de sol effectivement couverte par la végétation. Il est très utilisé pour l'estimation de la biomasse forestière et du LAI. Il est très sensible aux effets atmosphériques. Par contre, cet indice est un médiocre discriminateur des déficiences hydriques des plantes de forte densité végétale [57]. Son expression est la suivante :

$$NDVI = \frac{XS3 - XS2}{XS3 + XS2} \quad (24)$$

VII.1.2. Les indices de végétation avec compensation des effets de sol

a. Indice de végétation perpendiculaire

L'indice de végétation perpendiculaire ou Perpendicular Vegetation Index (PVI) [58] utilise les bandes rouge et infrarouge pour calculer la distance perpendiculaire entre un point de végétation sur le nuage de points d'un graphe PIR/R et la droite du sol.

Cet indice de végétation a la propriété de diminuer la contribution spectrale des sols mais il est très sensible à diverses caractéristiques des sols, par exemple l'humidité du sol, les constituants chimiques du sol. Sa formule est la suivante :

$$PVI = \frac{XS3 - aXS2 - b}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad (25)$$

Avec

a: pente de la droite des sols

b : ordonnée de la droite des sols.

Un $PVI > 0$ signifie que le pixel est recouvert par la végétation.

Un $PVI = 0$ correspond aux pixels de sols nus.

Un $PVI < 0$ survient surtout pour les surfaces en eau de très faible teneur minérale ou chlorophyllienne.

b. Indice de végétation ajusté pour le sol

L'indice de végétation ajusté pour le sol ou Soil Adjusted Vegetation Index (SAVI) [59] est un indice hybride entre le NDVI et le PVI. Cet indice de végétation a la propriété de minimiser les effets de sols. Son expression est la suivante :

$$SAVI = \frac{XS3 - XS2}{XS3 + XS2 + L} (1 + L) \quad (26)$$

"L" est un facteur de correction dont la valeur dépend du couvert végétal. Pour un couvert végétal totalement fermé ou dense, $L=0$ et le SAVI est alors équivalent au NDVI. Pour un couvert végétal très faible ou les sols presque nus, $L= 1$. En 1988, Huete [59] a suggéré que la valeur de 0.5 soit utilisée quand le type de couvert végétal était inconnu, puisque 0.5 représente un couvert végétal moyen.

c. Indice de végétation transformé et ajusté pour le sol

En 1989, Baret et al. [60] transformaient le SAVI en Transformed Soil Adjusted Vegetation Index (TSAVI). Cette première version du TSAVI fut réajustée afin de minimiser les effets de la brillance du sol par un facteur additif de 0,08 [26]. Sa formule est la suivante :

$$TSAVI = \frac{a(XS3 - aXS2 - b)}{XS2 + aXS3 - ab + 0.08(1 + a^2)} \quad (27)$$

a: pente de la droite des sols nus, dans l'espace R/PIR.

b: ordonnée à l'origine de la droite des sols nus, dans l'espace R/PIR.

C'est un indice qui minimise l'effet de la brillance du sol pour l'estimation de LAI et fAPAR [60]. Le TSAVI est nul pour un sol nu, et proche de 0,7 pour des couverts végétaux très denses.

VII.1.3. Les autres types d'indices de végétation

Ce sont des indices de végétation qui mettent en évidence le canal moyen infrarouge XS4 et le canal Bleu XS1.

a. Indice de végétation normalisé corrigé

L'indice de végétation normalisé corrigé ou Corrected Normalized Difference Vegetation Index (CNDVI) linéarise les relations entre les valeurs de bandes spectrales en utilisant le canal XS4. Sa formule est la suivante [61] :

$$CNDVI = \frac{XS3 - XS2}{XS3 + XS2} \left(1 - \frac{XS4 - XS4_{min}}{XS4_{max} + XS4_{min}}\right) \quad (28)$$

b. RATIO réduit

Le ratio réduit ou Reduced Simple Ratio (RSR) est un indice qui linéarise les relations entre les valeurs de bandes spectrales en utilisant le canal XS4. Son expression est la suivante [62] :

$$RSR = \frac{XS3}{XS2} \left(1 - \frac{XS4 - XS4_{min}}{XS4_{max} + XS4_{min}}\right) \quad (29)$$

$XS4_{min}$ et $XS4_{max}$ sont respectivement les valeurs minimale et maximale de XS4.

c. Indice de l'eau

L'indice de l'eau ou Normalized Difference Water Index (NDWI) est un indice qui met en évidence le contenu en eau dans la végétation. Sa formule est la suivante:

$$NDWI = \frac{XS3 - XS4}{XS3 + XS4} \quad (30)$$

d. NDVI vert

Le NDVI vert ou Green Normalized Difference Vegetation Index (GNDVI) est un indice qui aide à déterminer les influences de l'azote de la couleur verte des feuilles. Son expression est la suivante :

$$GNDVI = \frac{XS3 - XS1}{XS3 + XS1} \quad (31)$$

e. Specific Leaf Area Vegetation Index (SLAVI)

Cet indice de végétation aide à déterminer la surface foliaire spécifique. Sa formule est la suivante:

$$SLAVI = \frac{XS3}{XS2 + XS4} \quad (32)$$

Parmi les indices de végétation, nous avons seulement utilisé ceux qui ont été les plus corrélés avec l'indice foliaire. Par conséquent, nous avons fait une analyse en composantes principales.

VII.2. Analyse en composantes principales

L'Analyse en Composantes Principales (ACP) est une méthode d'analyse statistique qui a pour but de réduire la taille des données tout en conservant le maximum d'information. Cette technique a été utilisée pour la première fois par Hotelling dans les années 30 [63] mais s'est réellement développée avec l'essor de l'informatique dans les années 80. Nous avons adopté cette approche dans le but de grouper les variables qui sont corrélées au LAI.

VII.2.1. Principe de l'ACP

On définit p le nombre de variables étudiées et n le nombre d'observations de chaque variable.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & x_{ip} \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & x_{np} \end{bmatrix} \quad (33)$$

On peut représenter chaque unité par le vecteur de ses mesures sur les p variables :

$$U_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ x_{ip} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$U_i^t = [x_{i1} \quad x_{i2} \quad \dots \quad x_{ij} \quad x_{ip}] \quad (35)$$

Alors U_i est un vecteur de R^p

De façon analogue, on peut représenter chaque variable par le vecteur de R^n dont les composantes sont les valeurs de variables pour les n unités :

$$V_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Le centre de gravité \mathbf{G} du nuage des individus est alors le point dont les coordonnées sont les valeurs moyennes des variables :

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i1} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{.1} \\ \vdots \\ x_{.j} \\ \vdots \\ x_{.p} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Prendre \mathbf{G} comme origine revient à travailler sur le tableau des données centrées :

$$X_C = \begin{bmatrix} x_{11} - x_{.1} & \dots & x_{1j} - x_{.j} & \dots & x_{1p} - x_{.p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} - x_{.1} & \dots & x_{ij} - x_{.j} & \dots & x_{ip} - x_{.p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} - x_{.1} & \dots & x_{nj} - x_{.j} & \dots & x_{np} - x_{.p} \end{bmatrix} \quad (38)$$

et le vecteur des coordonnées centrées de l'unité u_i est :

$$U_{ci} = \begin{bmatrix} x_{i1} - x_{.1} \\ \vdots \\ x_{ij} - x_{.j} \\ \vdots \\ x_{ip} - x_{.p} \end{bmatrix} \quad (39)$$

celui des coordonnées centrées de la variable v_j est :

$$V_{cj} = \begin{bmatrix} x_{1j} - x_{.j} \\ \vdots \\ x_{ij} - x_{.j} \\ \vdots \\ x_{nj} - x_{.j} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Il est habituel de regrouper ces nombres dans un tableau carré appelé **Matrice de Covariance** de la distribution selon le schéma suivant :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{pmatrix} \quad (41)$$

Une matrice de covariance est souvent notée Σ .
 $\sigma_{jj'}$ est la covariance de V_j et $V_{j'}$.

σ_{jj} est la covariance de V_j avec elle-même, et est donc sa variance $\sigma^2(V_j)$. Les éléments diagonaux d'une matrice de covariance sont donc les variances des variables composant le vecteur aléatoire.

$$cov(V_j, V_{j'}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - x_{.j})(x_{ij'} - x_{.j'}) \quad (42)$$

$$var(V_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - x_{.j})^2 \quad (43)$$

$$x_{.j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} \quad (44)$$

Ensuite, nous passons à l'opération de diagonalisation qui consiste à chercher les valeurs propres de Σ .

$$\Sigma W = \lambda W \Rightarrow (\Sigma - \lambda I)W = 0 \quad (45)$$

$$W \neq 0 \Rightarrow (\Sigma - \lambda I) = 0$$

W et λ sont respectivement les vecteurs propres et valeurs propres qui sont associés à Σ . Les valeurs propres λ_i s'obtiennent par la résolution du polynôme $P(\lambda)$ obtenu à partir du calcul de déterminant de $(\Sigma - \lambda I)$. Une fois que les λ_i sont connues, les vecteurs propres W s'obtiennent facilement par la résolution de l'équation :

$$(\Sigma - \lambda I)W_i = 0 \quad (46)$$

Les nouveaux axes de coordonnées le long desquels les projections des points-individus définissent les nouvelles variables Z_k sont obtenus à partir des vecteurs propres. Ces nouvelles variables Z_k sont statistiquement indépendantes entre elles et de variances $\sigma^2(Z_k)$.

$$Z_k = \sum_{j=1}^p a_{kj} V_{cj} = X_c a_k \quad (47)$$

- a_k : vecteur directeur de l'axe ou vecteur propre.
- a_{kj} : jème coordonnée du vecteur unitaire de a_k et Δ_k

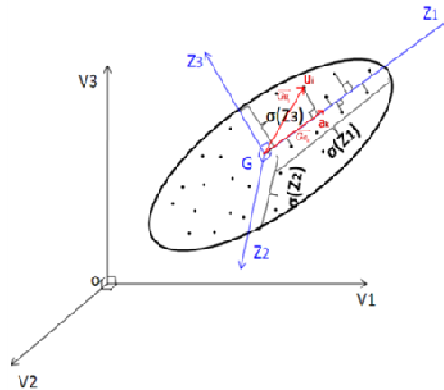


Figure 19: Représentation dans un espace euclidien d'un ensemble de n points-individus de coordonnées $\{V_{i1}, V_{i2}, V_{i3}\}$ et leur projection sur les axes principaux Z_k ($k=1, 2, 3$)

Cette figure illustre les projections du nuage de points sur les divers axes. Les projections sont proportionnelles aux écarts types respectifs. C'est un cas de 3 variables simultanées, aisément généralisable à p variables.

VII.2.2. Interprétation de l'ACP

L'interprétation d'une ACP se fait d'abord à partir du cercle de corrélation (Figure 20). Le cercle de corrélation est la projection des variables initiales sur un plan à deux dimensions constitué par les deux premiers facteurs.

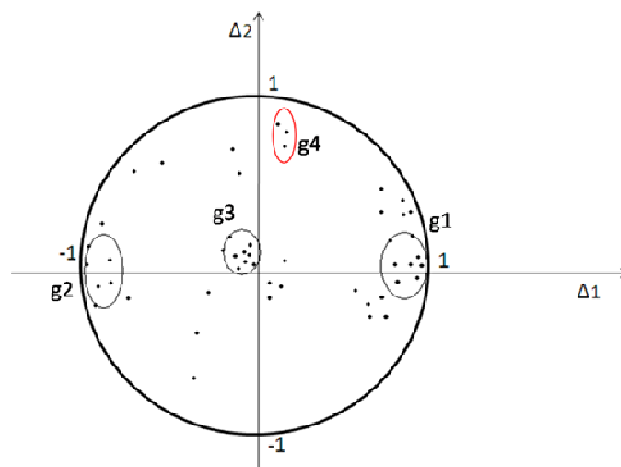


Figure 20: Cercle de corrélation des variables de l'ACP

Lorsque deux variables sont loin du centre du graphique, et que :

- elles sont proches les unes par rapport aux autres. on dit qu'elles sont significativement et positivement corrélées (R proche de 1) : cas des variables dans le groupe g1 de la figure 20;
- elles sont orthogonales les unes par rapport aux autres, on dit qu'elles sont non-corrélées (R proche de 0) : cas des variables dans les groupes g1 et g4, ou g2 et g4;
- elles sont symétriques par rapport au centre, alors on dit qu'elles sont significativement et négativement corrélées (R^2 proche de -1) : cas des variables dans les groupes g1 et g2.

Lorsque les variables sont relativement proches du centre du graphique, alors toute interprétation est hasardeuse. C'est le cas du groupe g3 de la figure. Il est nécessaire d'utiliser d'autres axes factoriels pour interpréter les résultats.

Les coefficients de corrélation empiriques des composantes principales entre elles ou avec les variables de départ sont donnés par la formule :

$$Cor(Z_k, V_{cj}) = \sqrt{\lambda_k} \frac{a_{kj}}{\sqrt{Var(V_j)}} \quad (48)$$

La contribution relative de chaque variable pour l'élaboration des axes Δ_k est donnée par $\cos^2 \alpha_{ik}$ ou cosinus carré de l'angle $\alpha_{ik} = \overrightarrow{Gu_i}, \overrightarrow{Ga_k}$ [cf. Fig. 19]:

$$\cos^2 \alpha_{ik} = \cos^2(\overrightarrow{Gu_i}, \overrightarrow{Ga_k}) = \frac{[\sum_{j=1}^p (x_{ij} - x_{.j})]^2}{\sum_{j=1}^p (x_{ij} - x_{.j})^2} \quad (49)$$

- $\overrightarrow{Ga_k}$: Vecteur dont l'origine est le centre de gravité du nuage des points
- $\overrightarrow{Ga_k}$: Vecteur unitaire de l'axe Δ_k