Conception d'algorithmes et applications (LI325)

Cours 7 et 8: Algorithmes Gloutons

Ana Bušić

ana.busic@inria.fr

Principe général

- Technique pour résoudre des problèmes d'optimisation
- Solution optimale obtenue en effectuant une suite de choix : à chaque étape on fait le meilleur choix local
- Pas de retour en arrière : à chaque étape de décision dans l'algorithme, le choix qui semble le meilleur à ce moment est effectué.
- Progression descendante : choix puis résolution d'un problème plus petit

Stratégie gloutonne

- Propriété du choix glouton : Il existe toujours une solution optimale commençant par un choix glouton.
- Propriété de sous-structure optimale : trouver une solution optimale contenant le premier choix glouton se réduit à trouver une solution optimale pour un sous-problème de même nature.

Plan

Exemple : Location d'un camion

- Un unique véhicule à louer et maximiser le nombre de clients satisfaits (autres fonctions possibles à optimiser)
- E ensemble de demandes ; chaque demande ei est caractérisée par une date de début d_i et une date de fin f_i.
- Les demandes e_i et e_j sont compatibles ssi

$$]d_i, f_i[\cap]d_j, f_j[= \emptyset.$$

- On cherche un sous-ensemble maximal de E de demandes 2 à 2 compatibles.

Algorithme glouton

Exemple

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_i	1	2	4	1	5	8	9	13	11
f_i	8	5	7	3	9	11	10	16	14

Algorithme glouton : trier selon critère et satisfaire les demandes par ordre croissant.

Algorithme glouton

Exemple

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_i	1	2	4	1	5	8	9	13	11
f_i	8	5	7	3	9	11	10	16	14

Algorithme glouton : trier selon critère et satisfaire les demandes par ordre croissant.

Quel critère ?

- durée ?
- date de début ?
- date de fin ?

Algorithme glouton

Exemple

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_i	1	2	4	1	5	8	9	13	11
f_i	8	5	7	3	9	11	10	16	14

Algorithme glouton : trier selon critère et satisfaire les demandes par ordre croissant.

Quel critère ?

- durée ? NON
- date de début ? NON
- date de fin ? OUI

Solution optimale

Demandes :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_i	1	2	4	1	5	8	9	13	11
f_i	8	5	7	3	9	11	10	16	14

Solution optimale

Demandes :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_i	1	2	4	1	5	8	9	13	11
f_i	8	5	7	3	9	11	10	16	14

Etape 1 : tri selon la date de fin

i	4	2	3	1	5	7	6	9	8
d_i	1	2	4	1	5	9	8	11	13
f_i	3	5	7	8	9	10	11	14	16

Solution optimale

Demandes :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_i	1	2	4	1	5	8	9	13	11
f_i	8	5	7	3	9	11	10	16	14

Etape 1 : tri selon la date de fin

i	4	2	3	1	5	7	6	9	8
d_i	1	2	4	1	5	9	8	11	13
f_i	3	5	7	8	9	10	11	14	16

Etape 2 : satisfaire les demandes par ordre croissant

i	4	2	3	1	5	7	6	9	8
d_i	1	2	4	1	5	9	8	11	13
f_i	3	5	7	8	9	10	11	14	16

Solution : demandes $4, 3, 7, 9$.

Variantes

E trié selon dates de fin : $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$
E, d, f variables globales
(Convention : $f_0 := 0$.)

Récursive

Fonction R(i)

```
1 m = i + 1;
2 tant que m ≤ n et d_m < f_i faire
3 |   m = m + 1;
4 si m ≤ n alors
5 |   return R(m)
6 sinon
7 |   return ∅
```

Appel $R(0)$

Variantes

E trié selon dates de fin : $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$
E, d, f variables globales
(Convention : $f_0 := 0$.)

Récursive

Fonction R(i)

```
1 m = i + 1;
2 tant que m ≤ n et d_m < f_i faire
3 |   m = m + 1;
4 si m ≤ n alors
5 |   return R(m)
6 sinon
7 |   return ∅
```

Appel $R(0)$

Itérative

Fonction P

```
1 s_1 = e_1;
2 k = 1;
3 pour i allant de 2 à n faire
4 |   si d_i ≥ f_k alors
5 |   |   s_{k+1} = e_i;
6 |   |   k = k + 1;
7 return (s_1, ..., s_k)
```

Variantes

E trié selon dates de fin : $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$
E, d, f variables globales
(Convention : $f_0 := 0$.)

Récursive

Fonction R(i)

```
1 m = i + 1;
2 tant que m ≤ n et d_m < f_i faire
3     m = m + 1;
4 si m ≤ n alors
5     return R(m)
6 sinon
7     return ∅
```

Itérative

Fonction P

```
1 s_1 = e_1;
2 k = 1;
3 pour i allant de 2 à n faire
4     si d_i ≥ f_k alors
5         s_{k+1} = e_i;
6         k = k + 1;
7 return (s_1, ..., s_k)
```

Appel $R(0)$

Complexité O(n log n) (tri des n dates de fin)

Preuve de l'algorithme

Théorème : Le résultat de l'algorithme est optimal.

1. Il existe une solution optimale qui commence par e_1 : soit A une sol. opt., et soit e_{a_1} le premier client ; si $e_{a_1} \neq e_1$, alors $A - e_{a_1} + e_1$ est aussi une sol. opt.

Preuve de l'algorithme

Théorème : Le résultat de l'algorithme est optimal.

1. Il existe une solution optimale qui commence par e_1 : soit A une sol. opt., et soit e_{a_1} le premier client ; si $e_{a_1} \neq e_1$, alors $A - e_{a_1} + e_1$ est aussi une sol. opt.
2. Le problème se ramène à trouver une solution optimale d'éléments de E compatibles avec e_1. Donc si A est une solution optimale pour E, alors $A' = A - e_1$ est une solution optimale pour $E' = \{e_i ; d_i \geq f_1\}$. En effet si l'on pouvait trouver B' une solution optimale pour E' contenant plus de clients que A', alors ajouter e_1 à B' offrirait une solution optimale pour E contenant plus de clients que A, ce qui contredirait l'hypothèse que A est optimale.

Arbre Couvrant Minimum

$G = (S, A, w)$, graphe connexe non orienté
(n sommets et m arêtes)

$w : A \longrightarrow R$ (valuation sur les arêtes)

Def. Un arbre couvrant minimum (ACM) est un sous-graphe connexe sans cycle $T = (S, B)$ ($B \subset A$) qui minimise

$$w(T) = \sum_{(u,v) \in B} w(u, v).$$

Algorithme ACM

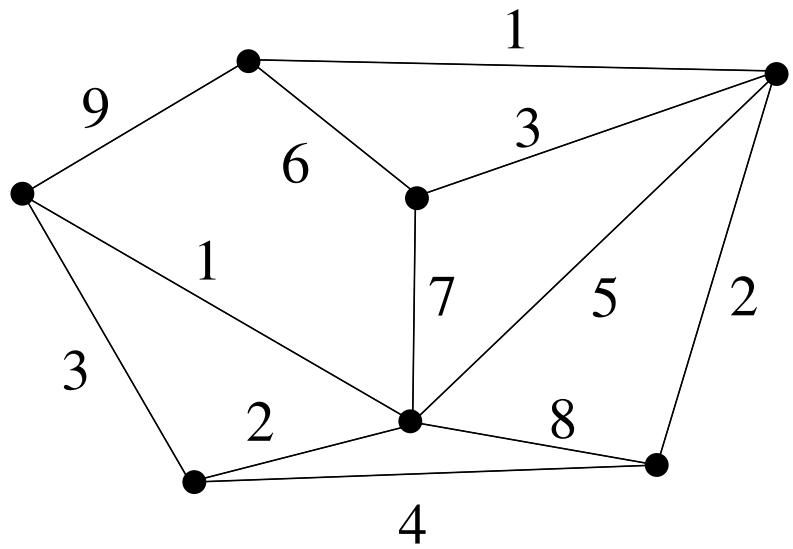
Calcul d'un ACM par stratégie gloutonne : la suite des minimums locaux (ajout d'une arête minimale à chaque étape) produit un minimum global

---

Proc ACM(G)

---

1 $B = \emptyset$;
2 **tant que** *B n'est pas un arbre couvrant (n-1 étapes)* **faire**
3 ajouter une arête minimale qui ne compromet pas B



Algorithme ACM

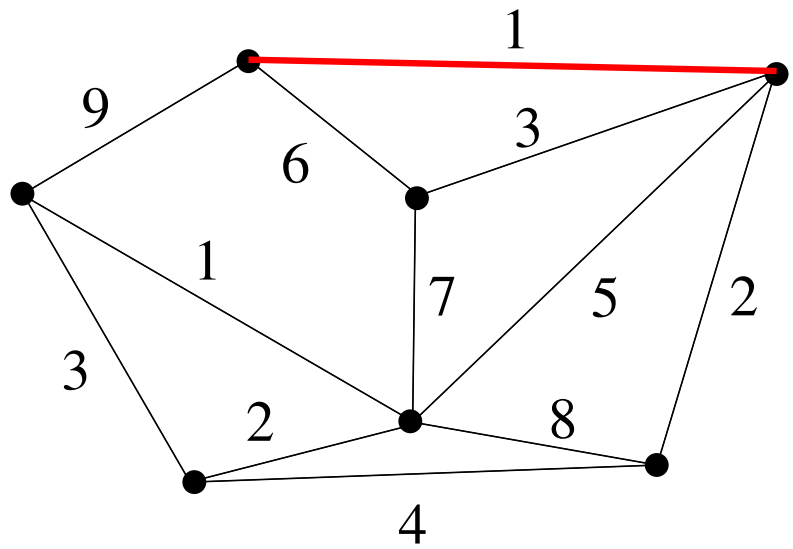
Calcul d'un ACM par stratégie gloutonne : la suite des minimums locaux (ajout d'une arête minimale à chaque étape) produit un minimum global

---

Proc ACM(G)

---

1 $B = \emptyset$;
2 **tant que** *B n'est pas un arbre couvrant (n-1 étapes)* **faire**
3 ajouter une arête minimale qui ne compromet pas B



Algorithme ACM

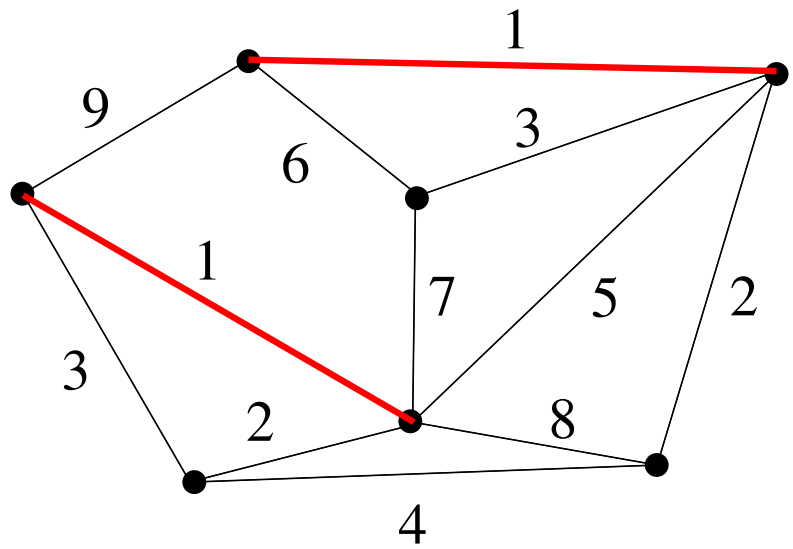
Calcul d'un ACM par stratégie gloutonne : la suite des minimums locaux (ajout d'une arête minimale à chaque étape) produit un minimum global

---

Proc ACM(G)

---

1 $B = \emptyset$;
2 **tant que** *B n'est pas un arbre couvrant (n-1 étapes)* **faire**
3 ajouter une arête minimale qui ne compromet pas B



Algorithme ACM

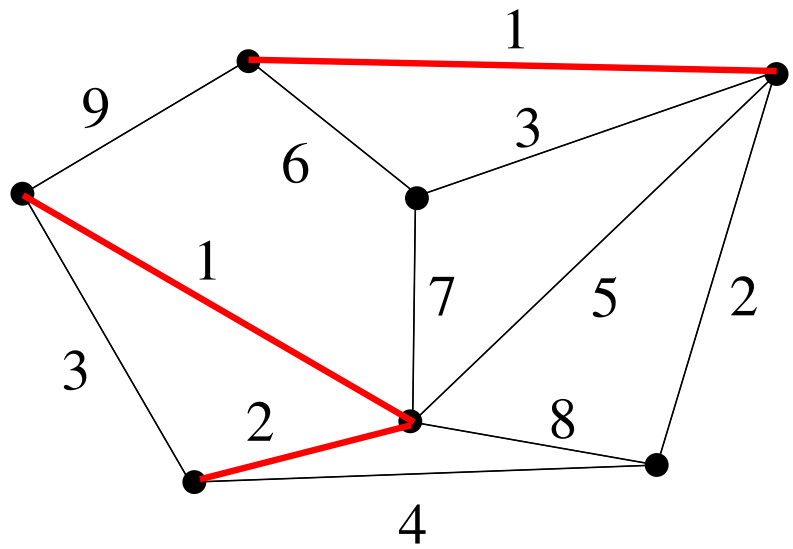
Calcul d'un ACM par stratégie gloutonne : la suite des minimums locaux (ajout d'une arête minimale à chaque étape) produit un minimum global

---

Proc ACM(G)

---

1 $B = \emptyset$;
2 **tant que** *B n'est pas un arbre couvrant (n-1 étapes)* **faire**
3 ajouter une arête minimale qui ne compromet pas B



Algorithme ACM

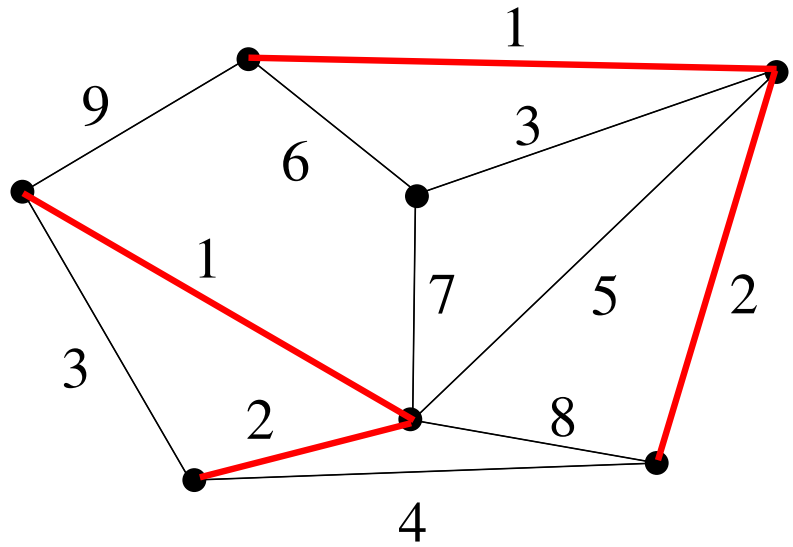
Calcul d'un ACM par stratégie gloutonne : la suite des minimums locaux (ajout d'une arête minimale à chaque étape) produit un minimum global

---

Proc ACM(G)

---

1 $B = \emptyset$;
2 **tant que** *B n'est pas un arbre couvrant (n-1 étapes)* **faire**
3 ajouter une arête minimale qui ne compromet pas B



Algorithme ACM

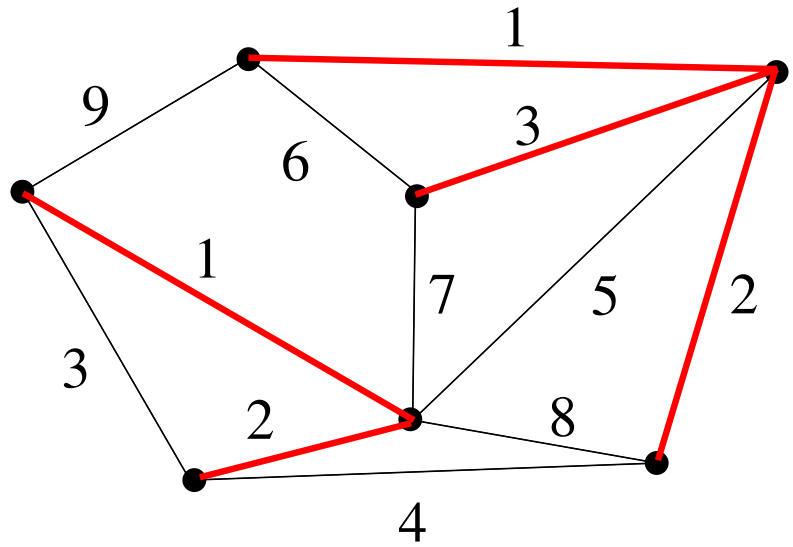
Calcul d'un ACM par stratégie gloutonne : la suite des minimums locaux (ajout d'une arête minimale à chaque étape) produit un minimum global

---

Proc ACM(G)

---

1 $B = \emptyset$;
2 **tant que** *B n'est pas un arbre couvrant (n-1 étapes)* **faire**
3 ajouter une arête minimale qui ne compromet pas B



Algorithme ACM

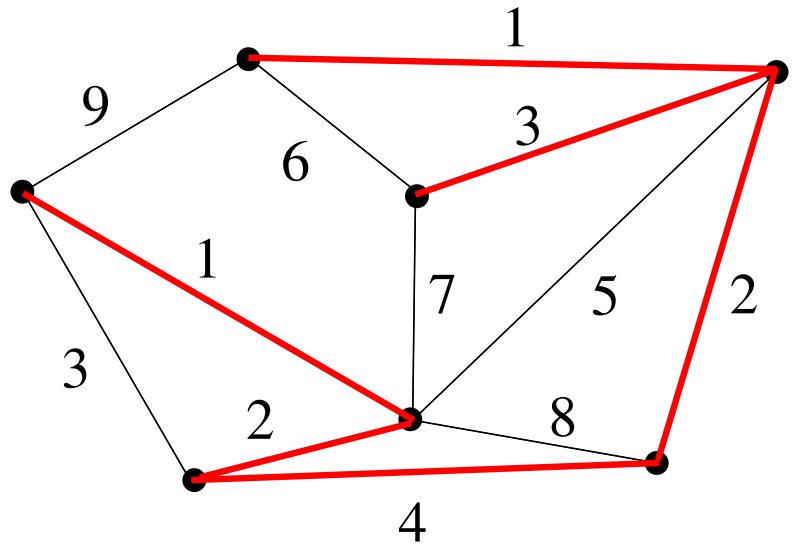
Calcul d'un ACM par stratégie gloutonne : la suite des minimums locaux (ajout d'une arête minimale à chaque étape) produit un minimum global

---

Proc ACM(G)

---

1 $B = \emptyset$;
2 **tant que** *B n'est pas un arbre couvrant (n-1 étapes)* **faire**
3 ajouter une arête minimale qui ne compromet pas B



Principe

Déf. une coupe de $G = (S, A)$ est une partition $(R, S - R)$ de S. Une arête (u, v) traverse la coupe si l'une de ses extrémités est dans R et l'autre dans $S - R$. Une coupe respecte un ensemble d'arêtes B si aucune arête de B ne traverse la coupe.

Proposition. Soit $G = (S, A, w)$, et soit B un sous-ensemble de A inclus dans un $ACM(G)$; soit $(R, S - R)$ une coupe de G qui respecte B et soit (u, v) une arête minimale traversant $(R, S - R)$. Alors $B \cup (u, v)$ est inclus dans un $ACM(G)$.

Principe

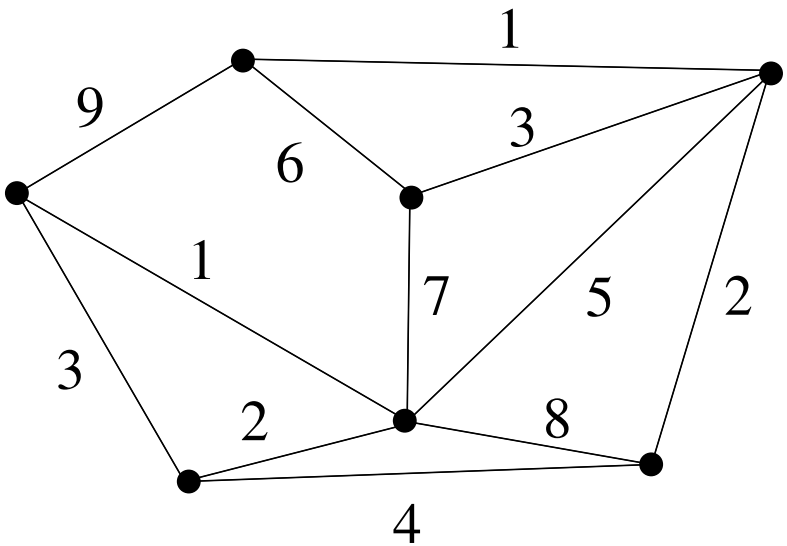
Déf. une coupe de $G = (S, A)$ est une partition $(R, S - R)$ de S. Une arête (u, v) traverse la coupe si l'une de ses extrémités est dans R et l'autre dans $S - R$. Une coupe respecte un ensemble d'arêtes B si aucune arête de B ne traverse la coupe.

Proposition. Soit $G = (S, A, w)$, et soit B un sous-ensemble de A inclus dans un $ACM(G)$; soit $(R, S - R)$ une coupe de G qui respecte B et soit (u, v) une arête minimale traversant $(R, S - R)$. Alors $B \cup (u, v)$ est inclus dans un $ACM(G)$.

Preuve. Si $B \cup (u, v)$ n'est pas inclus dans un $ACM(G)$, alors il existe un autre $(x, y) \in ACM(G)$ tel que $x \in R$, $y \in S - R$. Alors $Z = ACM(G) \cup (u, v) - (x, y)$ est un autre arbre couvrant et $w(Z) \leq w(ACM(G))$.

Variantes

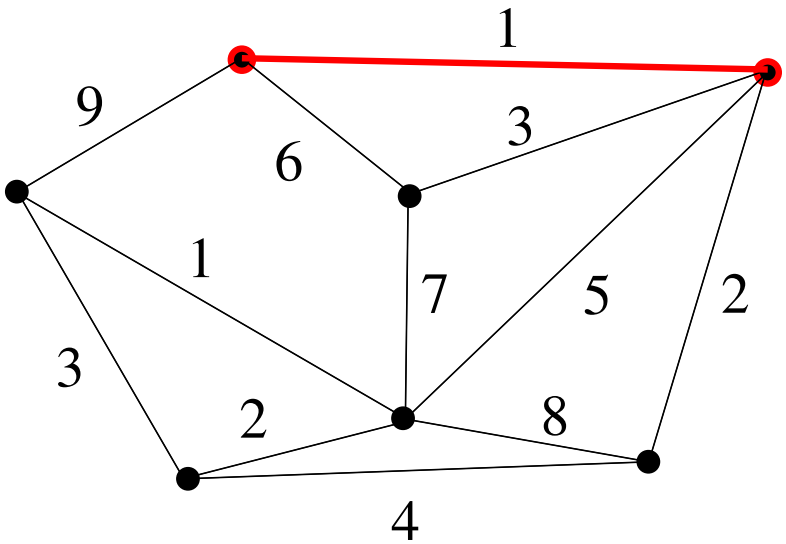
Algorithme de Kruskal : B est un ensemble de sous-arbre de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de l'un de ces sous-arbres.



Algorithme de Prim : B est sous-arbre racine de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de B.

Variantes

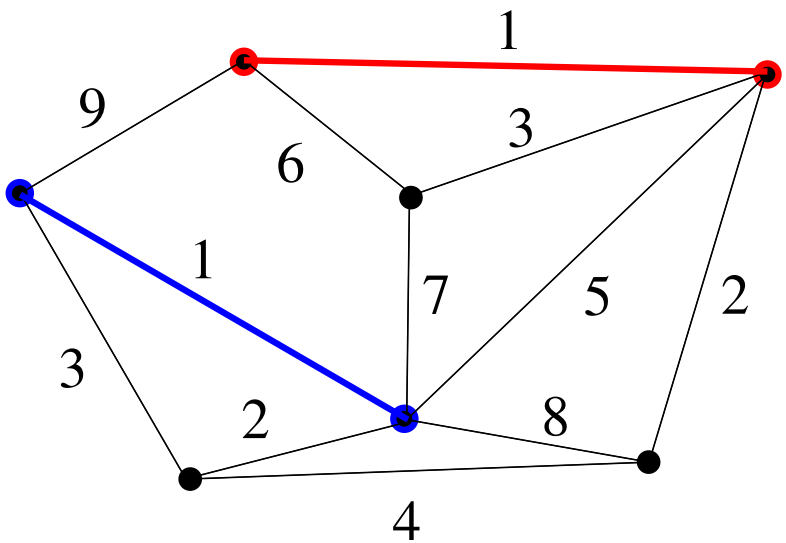
Algorithme de Kruskal : B est un ensemble de sous-arbre de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de l'un de ces sous-arbres.



Algorithme de Prim : B est sous-arbre racine de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de B.

Variantes

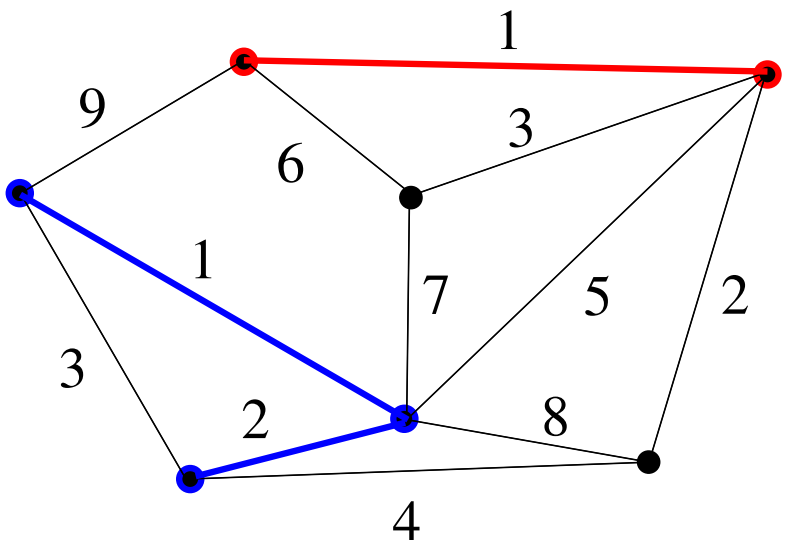
Algorithme de Kruskal : B est un ensemble de sous-arbre de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de l'un de ces sous-arbres.



Algorithme de Prim : B est sous-arbre racine de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de B.

Variantes

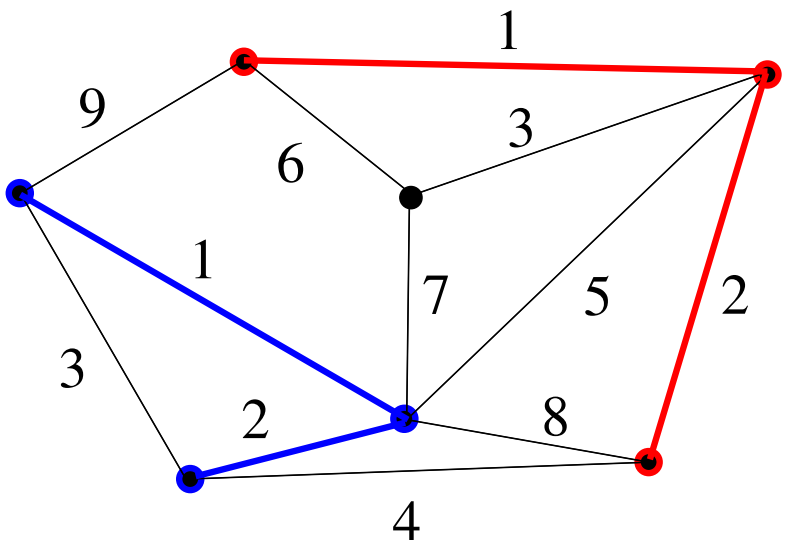
Algorithme de Kruskal : B est un ensemble de sous-arbre de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de l'un de ces sous-arbres.



Algorithme de Prim : B est sous-arbre racine de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de B.

Variantes

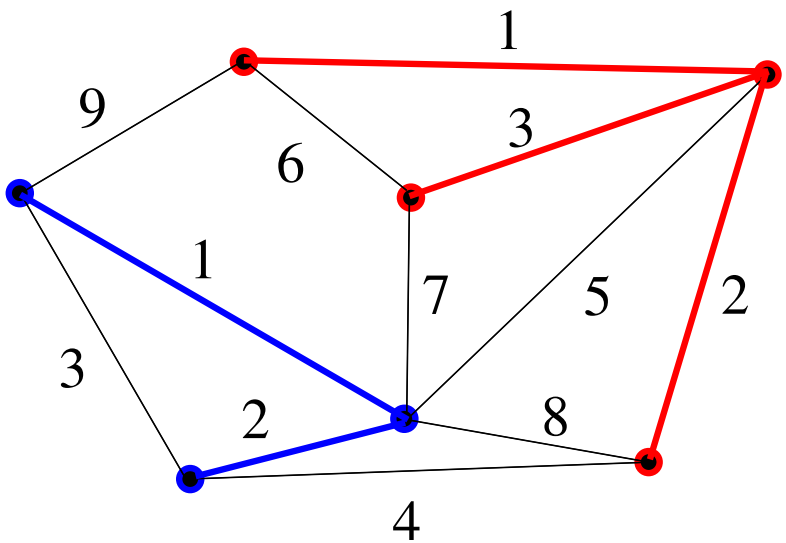
Algorithme de Kruskal : B est un ensemble de sous-arbre de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de l'un de ces sous-arbres.



Algorithme de Prim : B est sous-arbre racine de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de B.

Variantes

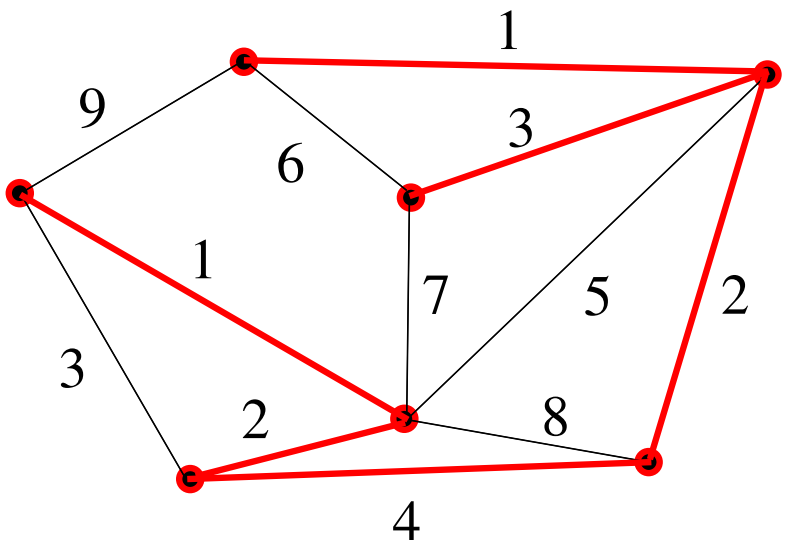
Algorithme de Kruskal : B est un ensemble de sous-arbre de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de l'un de ces sous-arbres.



Algorithme de Prim : B est sous-arbre racine de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de B.

Variantes

Algorithme de Kruskal : B est un ensemble de sous-arbre de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de l'un de ces sous-arbres.

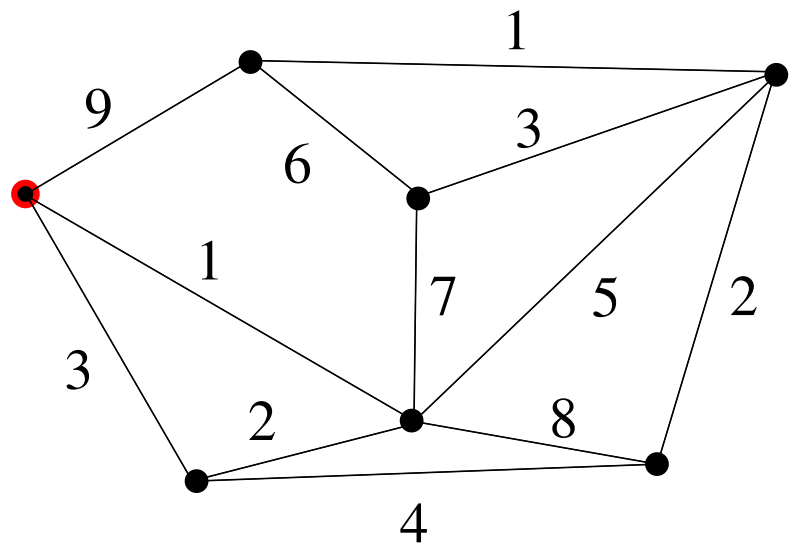


Algorithme de Prim : B est sous-arbre racine de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de B.

Variantes

Algorithme de Kruskal : B est un ensemble de sous-arbre de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de l'un de ces sous-arbres.

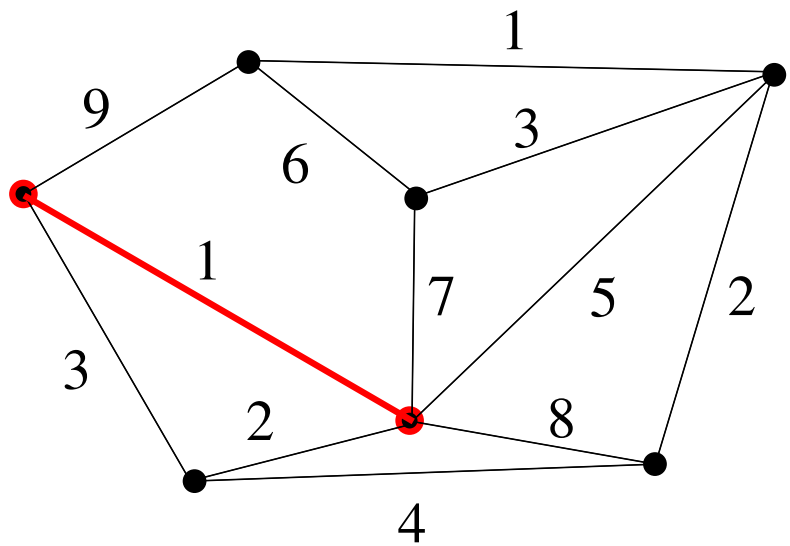
Algorithme de Prim : B est sous-arbre racine de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de B.



Variantes

Algorithme de Kruskal : B est un ensemble de sous-arbre de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de l'un de ces sous-arbres.

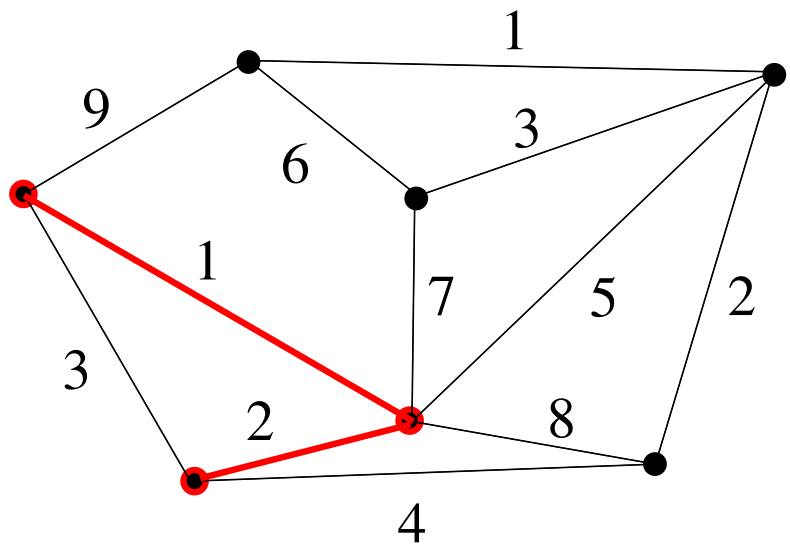
Algorithme de Prim : B est sous-arbre racine de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de B.



Variantes

Algorithme de Kruskal : B est un ensemble de sous-arbre de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de l'un de ces sous-arbres.

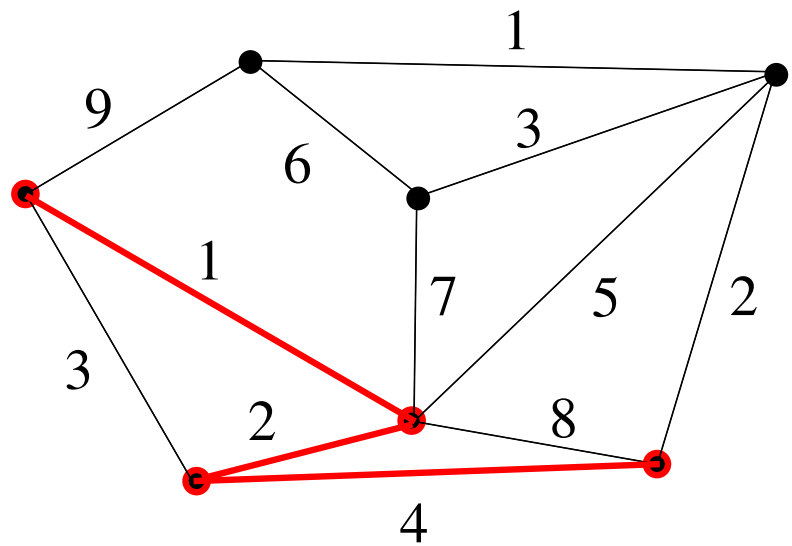
Algorithme de Prim : B est sous-arbre racine de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de B.



Variantes

Algorithme de Kruskal : B est un ensemble de sous-arbre de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de l'un de ces sous-arbres.

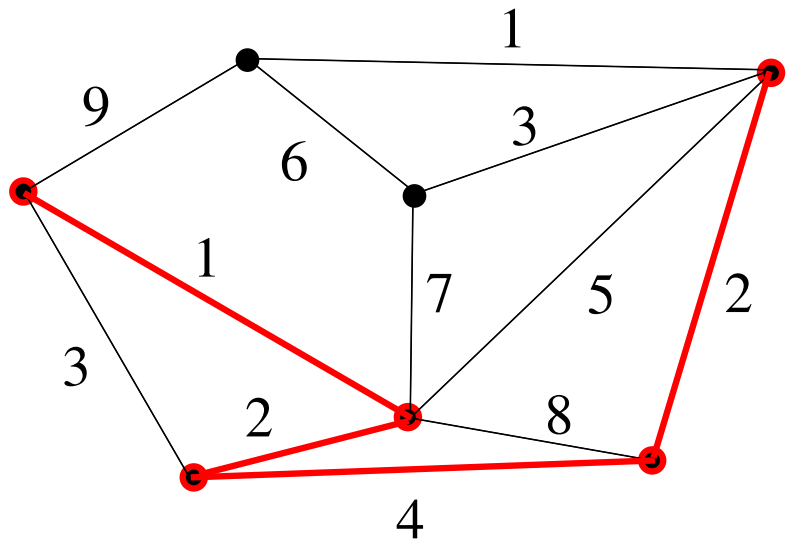
Algorithme de Prim : B est sous-arbre racine de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de B.



Variantes

Algorithme de Kruskal : B est un ensemble de sous-arbre de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de l'un de ces sous-arbres.

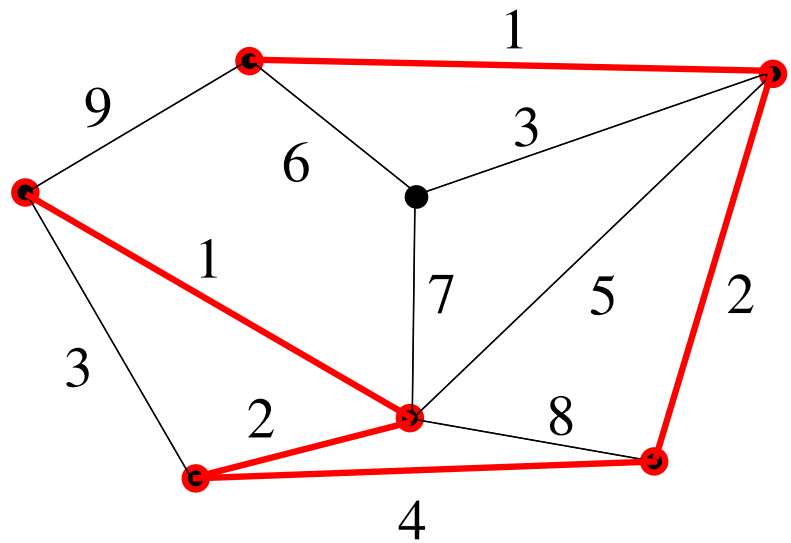
Algorithme de Prim : B est sous-arbre racine de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de B.



Variantes

Algorithme de Kruskal : B est un ensemble de sous-arbre de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de l'un de ces sous-arbres.

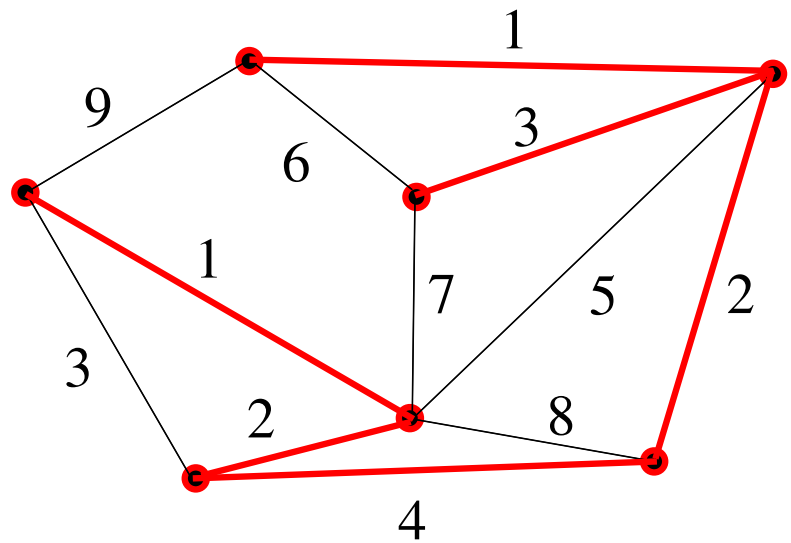
Algorithme de Prim : B est sous-arbre racine de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de B.



Variantes

Algorithme de Kruskal : B est un ensemble de sous-arbre de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de l'un de ces sous-arbres.

Algorithme de Prim : B est sous-arbre racine de $ACM(G)$; la coupe s'appuie sur les sommets de B.



Codage de Huffman

Problème : Compresser un fichier texte T (archivage, transfert).

Idée : 2 lectures du texte T

1. 1ère passe : calculer la fréquence de chaque caractère dans T
2. 2ème passe : encoder chaque caractère en binaire ; les carctères les plus fréquents ont les codes les plus courts.

Exemple

Fichier de 100000 caractères (6 caractères distincts)

Caractère	a	b	c	d	e	f
Fréquence	45%	13%	12%	16%	9%	5%
Code fixe	000	001	010	011	100	101
Code variable	0	101	100	111	1101	1100

Taille du fichier compressé :

1. Code fixe (sur 3 bits) : 3 * 100000 = 300000 bits
2. Code variable : 1 * 45000 + 3 * 13000 + 3 * 12000 +3 * 16000 + 4 * 9000 + 4 * 5000 = 224000 bits

Exemple

Fichier de 100000 caractères (6 caractères distincts)

Caractère	a	b	c	d	e	f
Fréquence	45%	13%	12%	16%	9%	5%
Code fixe	000	001	010	011	100	101
Code variable	0	101	100	111	1101	1100

Taille du fichier compressé :

1. Code fixe (sur 3 bits) : 3 * 100000 = 300000 bits
2. Code variable : 1 * 45000 + 3 * 13000 + 3 * 12000 +3 * 16000 + 4 * 9000 + 4 * 5000 = 224000 bits

Code préfixe : l'encodage d'un caractère n'est le préfixe d'aucun autre

$\rightarrow$ simple concaténation à l'encodage et pas d'ambiguïté au décodage.

Exemple

Fichier de 100000 caractères (6 caractères distincts)

Caractère	a	b	c	d	e	f
Fréquence	45%	13%	12%	16%	9%	5%
Code fixe	000	001	010	011	100	101
Code variable	0	101	100	111	1101	1100

Taille du fichier compressé :

1. Code fixe (sur 3 bits) : 3 * 100000 = 300000 bits
2. Code variable : 1 * 45000 + 3 * 13000 + 3 * 12000 +3 * 16000 + 4 * 9000 + 4 * 5000 = 224000 bits

Code préfixe : l'encodage d'un caractère n'est le préfixe d'aucun autre

$\rightarrow$ simple concaténation à l'encodage et pas d'ambiguïté au décodage.

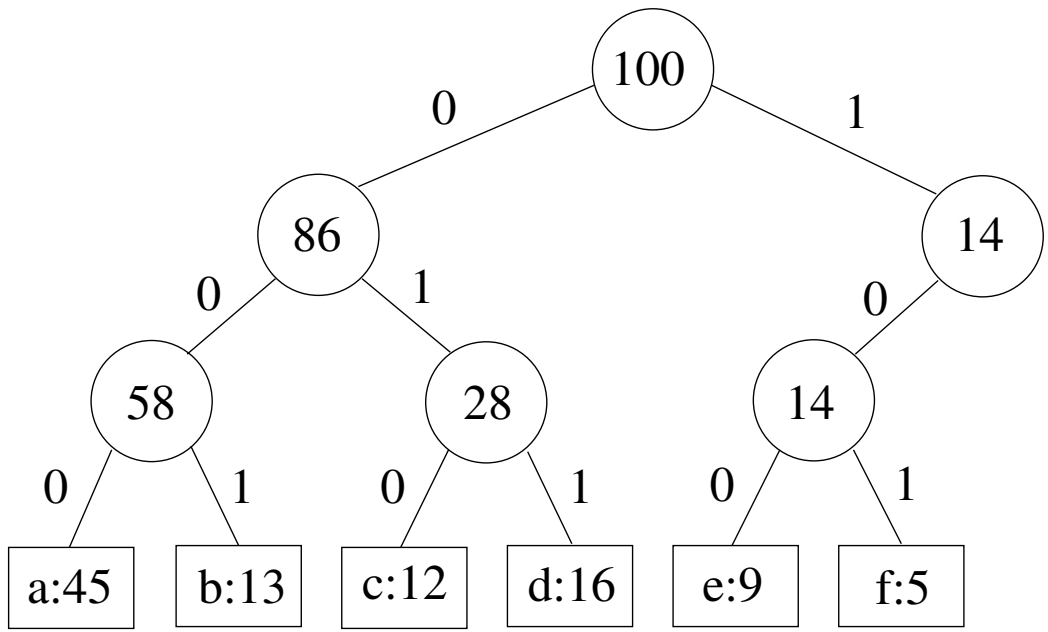
Ex. 001011101.
Code fixe : 001 011 101 $\rightarrow$ *bdf*.
Code variable : 0 0 101 1101 $\rightarrow$ *aabe*.

Code préfixe et Arbre digital

Un code préfixe peut toujours être représenté à l'aide d'un arbre binaire (arbre digital).

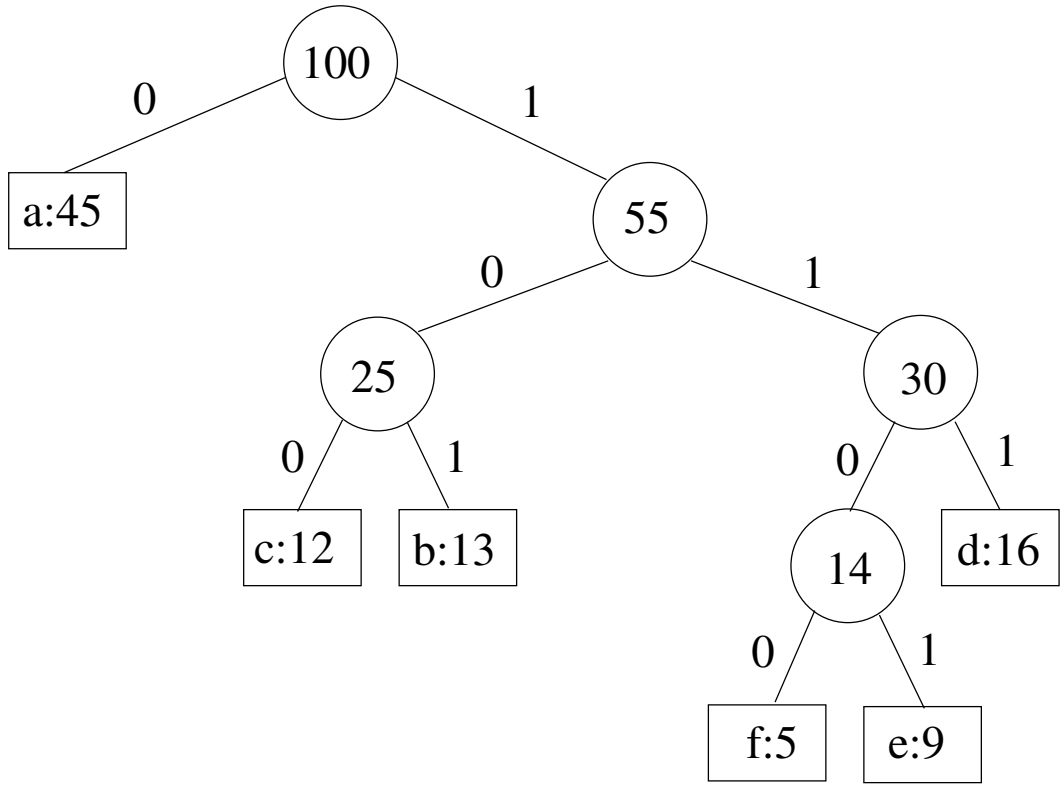
Si l'arbre n'est pas complet alors le code n'est pas optimal.

Caractère	a	b	c	d	e	f
Fréquence	45%	13%	12%	16%	9%	5%
Code fixe	000	001	010	011	100	101



Code préfixe et Arbre digital

Caractère	a	b	c	d	e	f
Fréquence	45%	13%	12%	16%	9%	5%
Code variable	0	101	100	111	1101	1100



Taille du fichier compressé

Texte T sur l'alphabet A

- $f(c)$ dénote la fréquence du caractère $c \in A$ dans T
- $prof(c)$ dénote la profondeur du caractère c dans l'arbre digital (= taille du codage de c)

Le nombre de bits requis pour encoder le texte T
(i.e. la taille du fichier compressé) est

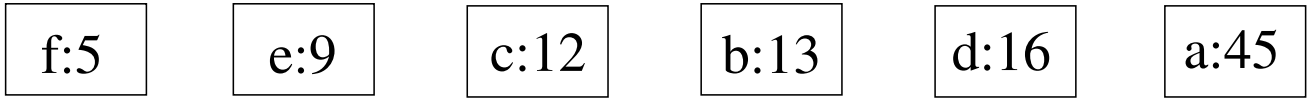
$$B(T) = \sum_{c \in A} f(c) prof(c).$$

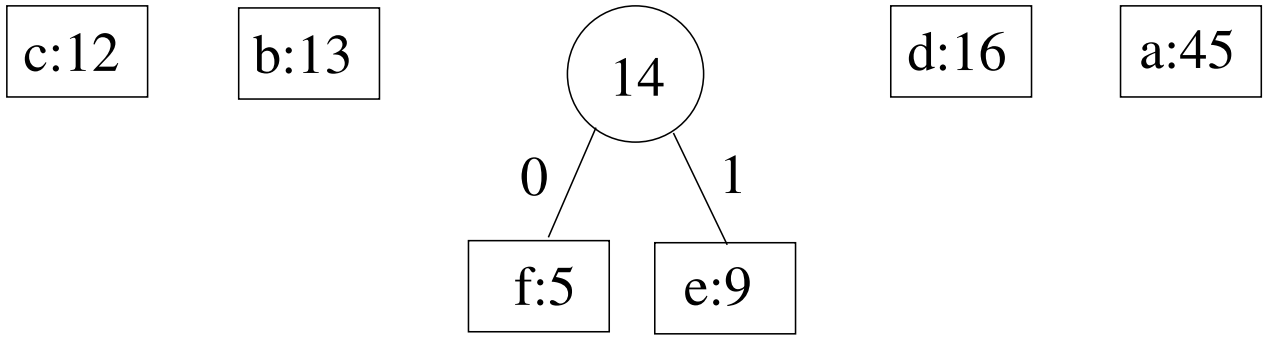
Construction de l'arbre de Huffman

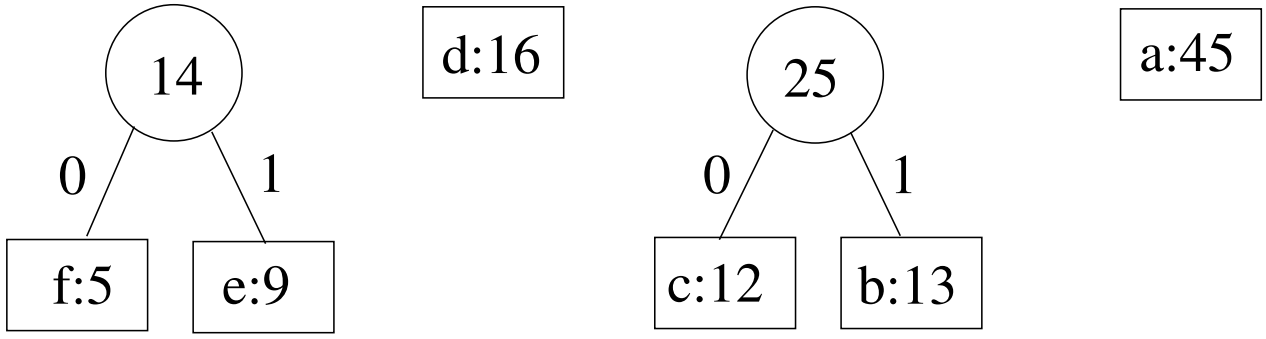
Entrées : Fréquences $(f_1, \ldots, f_n)$ des lettres (a_i) d'un texte T.

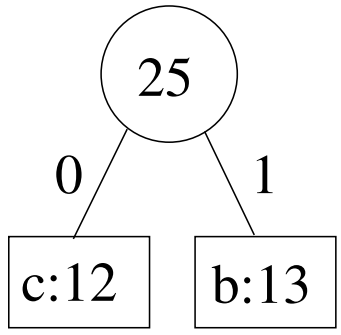
Sortie : Arbre digital donnant un code préfixe minimal pour T.

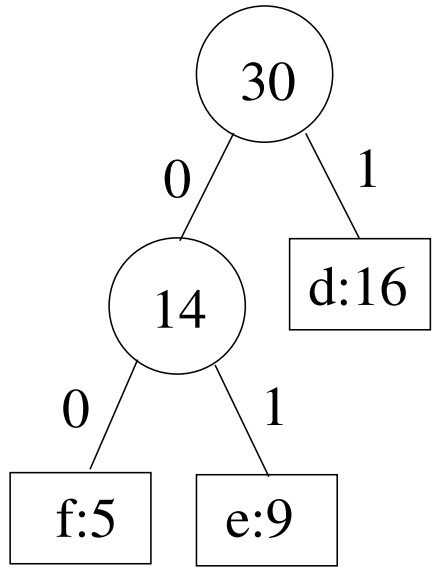
1. Créer, pour chaque lettre a_i, un arbre (réduit à une feuille) qui porte comme poids la fréquence $f(i)$.
2. Itérer le processus suivant :
   - choisir 2 arbres G et D de poids minimum
   - créer un nouvel arbre R, ayant pour sous-arbre gauche (resp. droit) G (resp. D) et lui affecter comme poids la somme des poids de G et D.
3. Arrêter lorsqu'il ne reste plus qu'un seul arbre :
   c'est l'arbre de Huffman


f:5
e:9
c:12
b:13
d:16
a:45

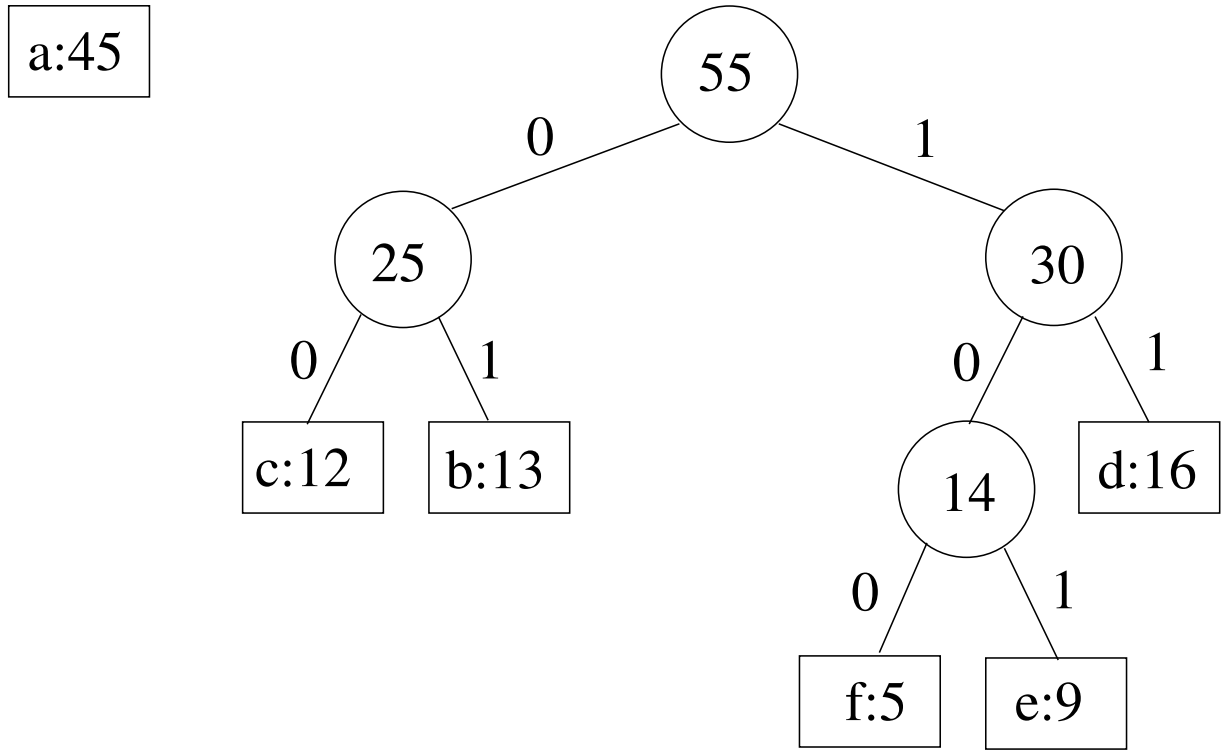

c:12
b:13
14
0
1
f:5
e:9
d:16
a:45

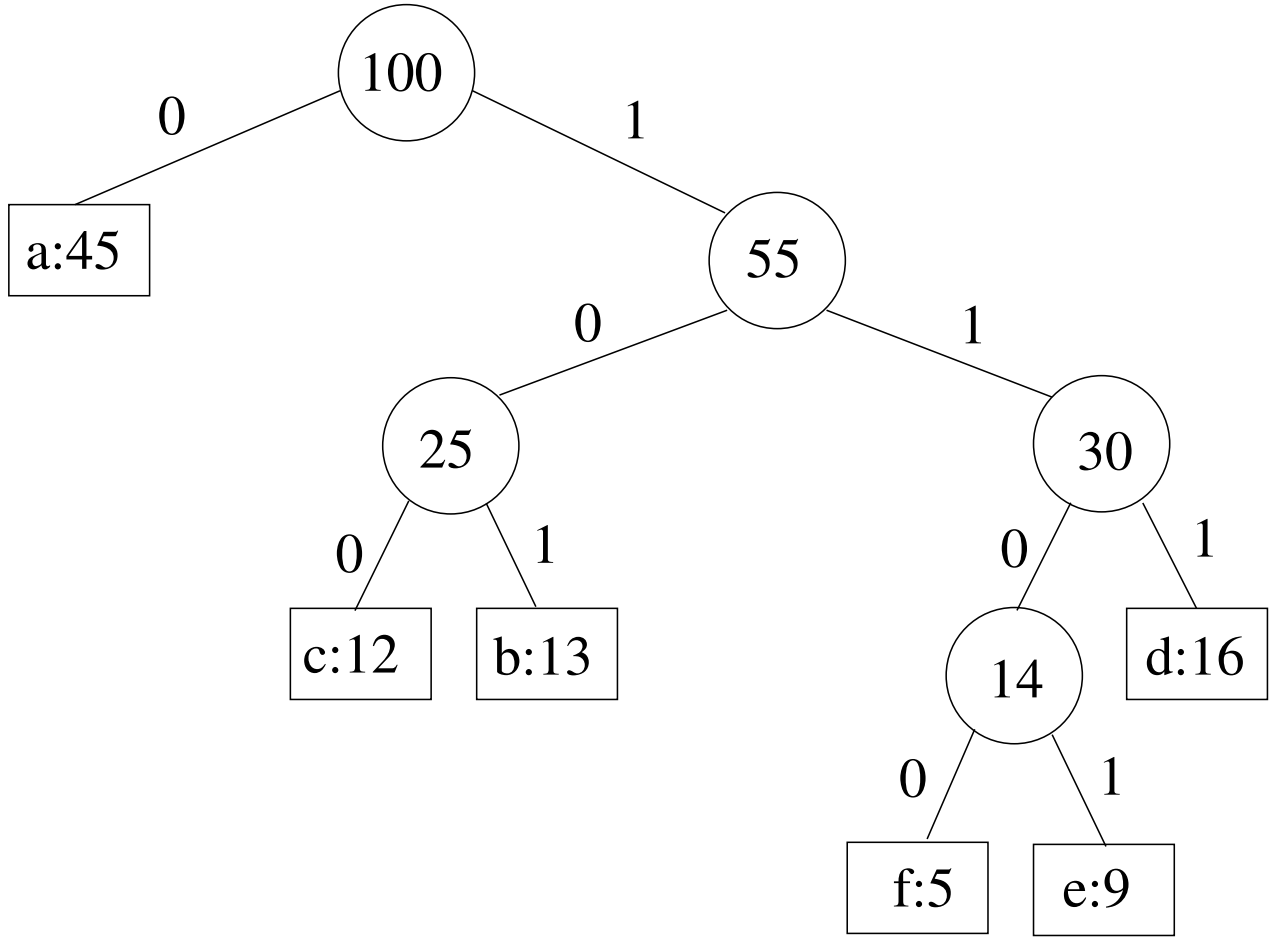

14
0
1
f:5
e:9
d:16
25
0
1
c:12
b:13
a:45





a:45


a:45
55
0
1
25
30
0
1
0
1
c:12
b:13
14
d:16
0
1
f:5
e:9


100
0
1
a:45
55
0
1
25
30
0
1
0
1
c:12
b:13
14
d:16
0
1
f:5
e:9

Complexité de la construction

1. La construction initiale et le tri : $O(n \log n)$
2. A chaque itération :
   - extraire 2 fois l'arbre de poids min et fabriquer un nouvel arbre à partir des 2 précédents : $O(1)$
   - rajouter ce nouvel arbre à la liste triée : $O(\log n)$
3. Il y a $n - 1$ itérations.

La construction de l'arbre de Huffman est donc en $O(n \log n)$ comparaisons.

Optimalité

Optimalité : Le code préfixe complet de l'arbre de Huffman est minimal i.e. aucun arbre digital ne compresse mieux le texte T que $Huffman(A, (f_i))$.

Optimalité

Optimalité : Le code préfixe complet de l'arbre de Huffman est minimal i.e. aucun arbre digital ne compresse mieux le texte T que $Huffman(A, (f_i))$.

- Propriété de choix glouton
  Soient x le caractère ayant la moins grande fréquence, et y le caractère ayant la seconde moins grande fréquence. Il existe un codage préfixe optimal tq. x et y ont le même père.

Optimalité

Optimalité : Le code préfixe complet de l'arbre de Huffman est minimal i.e. aucun arbre digital ne compresse mieux le texte T que $Huffman(A, (f_i))$.

- Propriété de choix glouton
  Soient x le caractère ayant la moins grande fréquence, et y le caractère ayant la seconde moins grande fréquence. Il existe un codage préfixe optimal tq. x et y ont le même père.
- Propriété de sous-structure optimale
  On considère l'alphabet $A' = A - \{x, y\} + z$, où z est une nouvelle lettre ayant une fréquence $f(z) = f(x) + f(y)$.
  Soit T' l'arbre d'un codage optimal pour A', alors l'arbre T obtenu à partir de T' en remplaçant la feuille associée à z par un noeud interne ayant x et y comme feuilles représente un codage optimal pour A.

Matroïdes

Définition. $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde si E est un ensemble de n éléments, $\mathcal{I}$ est une famille de parties de E, $\mathcal{I} \subset P(E)$ vérifiant :

- l'hérédité : $X \in \mathcal{I} \Longrightarrow \forall Y \subset X,\ Y \in \mathcal{I}$.
- l'échange : $(A, B \in \mathcal{I}, |A| < |B|) \Longrightarrow \exists x \in B - A$ tel que $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Si $X \in \mathcal{I}$, on dit que X est un indépendant.

Matroïdes

Définition. $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde si E est un ensemble de n éléments, $\mathcal{I}$ est une famille de parties de E, $\mathcal{I} \subset P(E)$ vérifiant :

- l'hérédité : $X \in \mathcal{I} \Longrightarrow \forall Y \subset X,\ Y \in \mathcal{I}$.
- l'échange : $(A, B \in \mathcal{I}, |A| < |B|) \Longrightarrow \exists x \in B - A$ tel que $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Si $X \in \mathcal{I}$, on dit que X est un indépendant.

Exemples :

- **Les matroïdes vectoriels.** $E = \{v_1, ..., v_n\}$ un ensemble de vecteurs d'un espace vectoriel et $\mathcal{I}$ la famille de tous les sous-ensembles de vecteurs de E linéairement indépendants. Alors $M = (E, \mathcal{I})$ est un matroïde.

Matroïdes

Définition. $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde si E est un ensemble de n éléments, $\mathcal{I}$ est une famille de parties de E, $\mathcal{I} \subset P(E)$ vérifiant :

- l'hérédité : $X \in \mathcal{I} \Longrightarrow \forall Y \subset X,\ Y \in \mathcal{I}$.
- l'échange : $(A, B \in \mathcal{I}, |A| < |B|) \Longrightarrow \exists x \in B - A$ tel que $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Si $X \in \mathcal{I}$, on dit que X est un indépendant.

Exemples :

- **Les matroïdes vectoriels.** $E = \{v_1, ..., v_n\}$ un ensemble de vecteurs d'un espace vectoriel et $\mathcal{I}$ la famille de tous les sous-ensembles de vecteurs de E linéairement indépendants. Alors $M = (E, \mathcal{I})$ est un matroïde.
- **Les matroïdes graphiques** (les forêts d'un graphe). Soit $G = (S, E)$ un graphe non orienté et $\mathcal{I}$ la famille des forêts de G : $F \in \mathcal{I}$ si et seulement si F est acyclique. Alors $M = (E, \mathcal{I})$ est un matroïde.

Propriétés des matroïdes

Étant donné un matroïde $M = (E, \mathcal{I})$, on dit qu'un élément $x \notin F$ est une extension de $F \in \mathcal{I}$ si $F \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Si F est un sous-ensemble indépendant d'un matroïde M, on dit que F est maximal s'il ne possède aucune extension
(i.e. il est maximal au sens de l'inclusion).

Propriétés des matroïdes

Étant donné un matroïde $M = (E, \mathcal{I})$, on dit qu'un élément $x \notin F$ est une extension de $F \in \mathcal{I}$ si $F \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Si F est un sous-ensemble indépendant d'un matroïde M, on dit que F est maximal s'il ne possède aucune extension
(i.e. il est maximal au sens de l'inclusion).

Thm. Tous les sous-ensembles indépendants maximaux d'un matroïde ont le même cardinal.

Propriétés des matroïdes

Étant donné un matroïde $M = (E, \mathcal{I})$, on dit qu'un élément $x \notin F$ est une extension de $F \in \mathcal{I}$ si $F \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Si F est un sous-ensemble indépendant d'un matroïde M, on dit que F est maximal s'il ne possède aucune extension
(i.e. il est maximal au sens de l'inclusion).

Thm. Tous les sous-ensembles indépendants maximaux d'un matroïde ont le même cardinal.

Preuve. Supposons au contraire que F soit un sous-ensemble indépendant maximal de M et qu'il en existe un autre H, plus grand. Alors, la propriété d'échange implique que F peut être étendu à un ensemble indépendant $F \cup \{x\}$ pour un certain $x \in H \setminus F$, ce qui contredit l'hypothèse que F est maximal.

Matroïdes pondérés

On dit qu'un matroïde $M = (E, \mathcal{I})$ est pondéré si l'on dispose d'une fonction de pondération w de E dans $\mathbb{R}^+$ qui affecte un poids strictement positif $w(x)$ à chaque élément $x \in E$.

Pour $F \subset E$: $w(F) = \sum_{x \in F} w(x)$.

Question : Trouver un indépendant de poids maximal (optimal).

Algorithme glouton

GLOUTON

```
1 Trier les éléments de E par poids décroissant :
  w(e_1) ≥ w(e_2) ≥ ... ≥ w(e_n)
2 A = ∅;
3 pour i de 1 à |E| faire
4     si A ∪ e_i ∈ I alors
5         A = A ∪ {e_i};
6 return A;
```

Validité de l'algorithme

Les matroïdes vérifient la propriété du choix glouton

Lemme Supposons $M = (E, \mathcal{I}, w)$ (avec $\mathcal{I} \neq \{\emptyset\}$) un matroïde pondéré ; et E trié par ordre de poids décroissant. Soit x le premier élément de E tel que $\{x\}$ soit indépendant, alors il existe un sous-ensemble optimal F de E qui contient $\{x\}$.

Validité de l'algorithme

Les matroïdes vérifient la propriété du choix glouton

Lemme Supposons $M = (E, \mathcal{I}, w)$ (avec $\mathcal{I} \neq \{\emptyset\}$) un matroïde pondéré ; et E trié par ordre de poids décroissant. Soit x le premier élément de E tel que $\{x\}$ soit indépendant, alors il existe un sous-ensemble optimal F de E qui contient $\{x\}$.

Preuve.

- Soit H un indépendant de poids optimal. Supposons que $x \notin H$. Aucun élément de H n'a un poids supérieur à $w(x)$.

- Construire à partir de H un ensemble F indépendant de poids optimal et qui contient x.

Validité de l'algorithme

Les matroïdes vérifient la propriété du choix glouton

Lemme Supposons $M = (E, \mathcal{I}, w)$ (avec $\mathcal{I} \neq \{\emptyset\}$) un matroïde pondéré ; et E trié par ordre de poids décroissant. Soit x le premier élément de E tel que $\{x\}$ soit indépendant, alors il existe un sous-ensemble optimal F de E qui contient $\{x\}$.

Preuve.

- Soit H un indépendant de poids optimal. Supposons que $x \notin H$.
  Aucun élément de H n'a un poids supérieur à $w(x)$.
  Preuve : $y \in H$ implique que $\{y\}$ est indépendant, puisque $H \in \mathcal{I}$ et $\mathcal{I}$ est héréditaire. Donc $w(x) \geq w(y)$ pour tout $y \in H$.
- Construire à partir de H un ensemble F indépendant de poids optimal et qui contient x.

Validité de l'algorithme

Les matroïdes vérifient la propriété du choix glouton

Lemme Supposons $M = (E, \mathcal{I}, w)$ (avec $\mathcal{I} \neq \{\emptyset\}$) un matroïde pondéré ; et E trié par ordre de poids décroissant. Soit x le premier élément de E tel que $\{x\}$ soit indépendant, alors il existe un sous-ensemble optimal F de E qui contient $\{x\}$.

Preuve.

- Soit H un indépendant de poids optimal. Supposons que $x \notin H$.
  Aucun élément de H n'a un poids supérieur à $w(x)$.
  Preuve : $y \in H$ implique que $\{y\}$ est indépendant, puisque $H \in \mathcal{I}$ et $\mathcal{I}$ est héréditaire. Donc $w(x) \geq w(y)$ pour tout $y \in H$.
- Construire à partir de H un ensemble F indépendant de poids optimal et qui contient x.
  Commencer avec $F = \{x\}$. En se servant de la propriété d'échange, on trouve itérativement un nouvel élément de H pouvant être ajouté à F jusqu'à ce que $|F| = |H|$, en préservant l'indépendance de F.

Validité de l'algorithme

Les matroïdes vérifient la propriété du choix glouton

Lemme Supposons $M = (E, \mathcal{I}, w)$ (avec $\mathcal{I} \neq \{\emptyset\}$) un matroïde pondéré ; et E trié par ordre de poids décroissant. Soit x le premier élément de E tel que $\{x\}$ soit indépendant, alors il existe un sous-ensemble optimal F de E qui contient $\{x\}$.

Preuve.

- Soit H un indépendant de poids optimal. Supposons que $x \notin H$.
  Aucun élément de H n'a un poids supérieur à $w(x)$.
  Preuve : $y \in H$ implique que $\{y\}$ est indépendant, puisque $H \in \mathcal{I}$ et $\mathcal{I}$ est héréditaire. Donc $w(x) \geq w(y)$ pour tout $y \in H$.
- Construire à partir de H un ensemble F indépendant de poids optimal et qui contient x.
  Commencer avec $F = \{x\}$. En se servant de la propriété d'échange, on trouve itérativement un nouvel élément de H pouvant être ajouté à F jusqu'à ce que $|F| = |H|$, en préservant l'indépendance de F.
  Alors, $F = H \setminus \{y\} \cup x$ pour un certain $y \in H$, et donc $w(F) = w(H) - w(y) + w(x) \geq w(H)$. F est optimal et $x \in F$.

Les matroïdes satisfont la propriété de sous-structure optimale

Lemme. Soit x le premier élément de E choisi par GLOUTON (c'est-à-dire le singleton indépendant de poids maximal) pour le matroïde pondéré $M = (E, \mathcal{I}, w)$. Trouver un sous-ensemble indépendant de poids maximal contenant x, revient à trouver un sous-ensemble indépendant de poids maximal du matroïde pondéré $M' = (E', \mathcal{I}', w')$, où $E' = \{y \in E \setminus \{x\} : \{x, y\} \in \mathcal{I}\}$, $\mathcal{I}' = \{H \subset E \setminus \{x\} : H \cup \{x\} \in \mathcal{I}\}$, et la fonction de pondération de M' est celle de M, restreinte à E'. (On appelle M' la *contraction* de M par l'élément x).

Les matroïdes satisfont la propriété de sous-structure optimale

Lemme. Soit x le premier élément de E choisi par GLOUTON (c'est-à-dire le singleton indépendant de poids maximal) pour le matroïde pondéré $M = (E, \mathcal{I}, w)$. Trouver un sous-ensemble indépendant de poids maximal contenant x, revient à trouver un sous-ensemble indépendant de poids maximal du matroïde pondéré $M' = (E', \mathcal{I}', w')$, où $E' = \{y \in E \setminus \{x\} : \{x, y\} \in \mathcal{I}\}$, $\mathcal{I}' = \{H \subset E \setminus \{x\} : H \cup \{x\} \in \mathcal{I}\}$, et la fonction de pondération de M' est celle de M, restreinte à E'. (On appelle M' la *contraction* de M par l'élément x).

Preuve. Si F est un sous-ensemble indépendant de poids maximal de M contenant x, alors $F' = F \setminus \{x\}$ est un sous-ensemble indépendant de M'. Inversement, un sous-ensemble indépendant F' de M' engendre un sous-ensemble indépendant $F = F' \cup \{x\}$ de M. Comme nous avons dans les deux cas $w(F) = w(F') + w(x)$, une solution de poids maximal pour M contenant x donne une solution de poids maximal sur M', et réciproquement.

Optimalité

Théorème. L'algorithme GLOUTON donne une solution optimale.
Preuve. Soit e_k le premier élément indépendant de E, i.e. le premier indice i de l'algorithme tel que $e_i \in \mathcal{I}$.

- Il existe une solution optimale qui contient e_k (choix glouton).
- Puis, par récurrence on obtient que GLOUTON donne une solution optimale (sous-structure optimale) : on se restreint à une solution contenant e_k, et on recommence avec $E' = E - e_k$ et $\mathcal{I}' = \{X \in E'; X \cup \{e_k\} \in \mathcal{I}\}$.

Optimalité

Théorème. L'algorithme GLOUTON donne une solution optimale.
Preuve. Soit e_k le premier élément indépendant de E, i.e. le premier indice i de l'algorithme tel que $e_i \in \mathcal{I}$.

- Il existe une solution optimale qui contient e_k (choix glouton).
- Puis, par récurrence on obtient que GLOUTON donne une solution optimale (sous-structure optimale) : on se restreint à une solution contenant e_k, et on recommence avec $E' = E - e_k$ et $\mathcal{I}' = \{X \in E'; X \cup \{e_k\} \in \mathcal{I}\}$.
- Il suffit de regarder $E' = \{e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ car les éléments e_j, $j < k$ ne peuvent pas être extension d'un indépendant (sinon, par hérédité, aussi indépendants et choisis au lieu de e_k).

Optimalité

Théorème. L'algorithme GLOUTON donne une solution optimale.
Preuve. Soit e_k le premier élément indépendant de E, i.e. le premier indice i de l'algorithme tel que $e_i \in \mathcal{I}$.

- Il existe une solution optimale qui contient e_k (choix glouton).
- Puis, par récurrence on obtient que GLOUTON donne une solution optimale (sous-structure optimale) : on se restreint à une solution contenant e_k, et on recommence avec $E' = E - e_k$ et $\mathcal{I}' = \{X \in E'; X \cup \{e_k\} \in \mathcal{I}\}$.
- Il suffit de regarder $E' = \{e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ car les éléments e_j, $j < k$ ne peuvent pas être extension d'un indépendant (sinon, par hérédité, aussi indépendants et choisis au lieu de e_k).

Exemple des forêts d'un graphe : algorithme glouton de Kruskal pour construire un arbre de poids minimal. Trier toutes les arêtes par poids croissant, et sélectionner au fur et à mesure celles qui ne créent pas de cycle si les on a joute à l'ensemble courant.

Complexité

GLOUTON

1 Trier les éléments de E par poids décroissant :
$w(e_1) \geq w(e_2) \geq \ldots \geq w(e_n)$
2 $A = \emptyset$;
3 **pour** *i de 1 à* $|E|$ **faire**
4 **si** $A \cup e_i \in I$ **alors**
5 $A = A \cup \{e_i\}$;
6 **return** A;

Complexité

GLOUTON

1 Trier les éléments de E par poids décroissant :
$w(e_1) \geq w(e_2) \geq \ldots \geq w(e_n)$
2 $A = \emptyset$;
3 **pour** *i de 1 à* $|E|$ **faire**
4 **si** $A \cup e_i \in I$ **alors**
5 $A = A \cup \{e_i\}$;
6 **return** A;

Soit $n = |E|$, la phase de tri de GLOUTON prend un temps $O(n \log n)$.

Chaque exécution de la ligne 4 impose de vérifier si l'ensemble $F \cup \{x\}$ est ou non indépendant.
Si cette vérification prend un temps $f(n)$ et les comparaisons se font en temps constants, l'algorithme GLOUTON prend un temps

$$O(n \log n) + nf(n).$$

Ordonnancement sur une machine

Problème :

- n tâches $T_1 \dots T_n$, toutes de durée 1, deadlines associées : $d_1, \dots, d_n$ avec pénalités $w_1, \dots, w_n$ si deadline dépasseé.
- Un ordonnancement est une permutation des tâches : première tâche commence au temps 0 et termine au temps 1, deuxième tâche commence au temps 1 et termine au temps 2 ...
- Si une tâche T_i commence après sa deadline d_i alors on a la pénalité w_i.
- But : trouver un ordonnancement qui minimise la pénalité totale des tâches en retard.

Ordonnancements canoniques

Définitions.

- tâche à l'heure : tâche finie avant la dead line
- tâche en retard : tâche finie après la dead line

Ordre canonique

on peut se restreindre :

- aux ordonnancements où les tâches à l'heure précèdent les tâches en retard ;
- aux ordonnancement où les tâches à l'heure sont classées par ordre de deadline croissant.

Remarque : minimiser la pénalité totale des tâches en retard = maximiser la pénalité des tâches à l'heure.

Indépendants

Définition. Un ensemble de tâches est dit indépendant ssi les tâches peuvent être exécutées en étant toutes à l'heure.

Lemme. A ensemble de tâches, $N_t(A) =$ nombre de tâches de deadline $\leq t$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est indépendant
2. Pour tout $t = 1, 2, ..., n$, $N_t(A) \leq t$.
3. Ordre canonique $\longrightarrow$ pas de tâches en retard.

Exemple

Exemple : 7 tâches

tâche	1	2	3	4	5	6	7
deadline	4	2	4	3	1	4	6
pénalité	7	6	5	4	3	2	1

Trier les tâches par w_i décroissants ; puis appliquer l'algorithme glouton en prenant la tâche si elle tient sans pénalité (réorganiser selon l'ordre canonique à chaque nouvel ajout).

Exemple

Exemple : 7 tâches

tâche	1	2	3	4	5	6	7
deadline	4	2	4	3	1	4	6
pénalité	7	6	5	4	3	2	1

Trier les tâches par w_i décroissants ; puis appliquer l'algorithme glouton en prenant la tâche si elle tient sans pénalité (réorganiser selon l'ordre canonique à chaque nouvel ajout).

Sur l'exemple :
T_1

Exemple

Exemple : 7 tâches

tâche	1	2	3	4	5	6	7
deadline	4	2	4	3	1	4	6
pénalité	7	6	5	4	3	2	1

Trier les tâches par w_i décroissants ; puis appliquer l'algorithme glouton en prenant la tâche si elle tient sans pénalité (réorganiser selon l'ordre canonique à chaque nouvel ajout).

Sur l'exemple :
T_1
$T_2 \rightarrow \{T_2, T_1\}$

Exemple

Exemple : 7 tâches

tâche	1	2	3	4	5	6	7
deadline	4	2	4	3	1	4	6
pénalité	7	6	5	4	3	2	1

Trier les tâches par w_i décroissants ; puis appliquer l'algorithme glouton en prenant la tâche si elle tient sans pénalité (réorganiser selon l'ordre canonique à chaque nouvel ajout).

Sur l'exemple :
T_1
$T_2 \rightarrow \{T_2, T_1\}$
$T_3 \rightarrow \{T_2, T_1, T_3\}$

Exemple

Exemple : 7 tâches

tâche	1	2	3	4	5	6	7
deadline	4	2	4	3	1	4	6
pénalité	7	6	5	4	3	2	1

Trier les tâches par w_i décroissants ; puis appliquer l'algorithme glouton en prenant la tâche si elle tient sans pénalité (réorganiser selon l'ordre canonique à chaque nouvel ajout).

Sur l'exemple :
T_1
$T_2 \rightarrow \{T_2, T_1\}$
$T_3 \rightarrow \{T_2, T_1, T_3\}$
$T_4 \rightarrow \{T_2, T_4, T_1, T_3\}$

Exemple

Exemple : 7 tâches

tâche	1	2	3	4	5	6	7
deadline	4	2	4	3	1	4	6
pénalité	7	6	5	4	3	2	1

Trier les tâches par w_i décroissants ; puis appliquer l'algorithme glouton en prenant la tâche si elle tient sans pénalité (réorganiser selon l'ordre canonique à chaque nouvel ajout).

Sur l'exemple :
T_1
$T_2 \rightarrow \{T_2, T_1\}$
$T_3 \rightarrow \{T_2, T_1, T_3\}$
$T_4 \rightarrow \{T_2, T_4, T_1, T_3\}$
T_5 et T_6 impossibles

Exemple

Exemple : 7 tâches

tâche	1	2	3	4	5	6	7
deadline	4	2	4	3	1	4	6
pénalité	7	6	5	4	3	2	1

Trier les tâches par w_i décroissants ; puis appliquer l'algorithme glouton en prenant la tâche si elle tient sans pénalité (réorganiser selon l'ordre canonique à chaque nouvel ajout).

Sur l'exemple :
T_1
$T_2 \longrightarrow \{T_2, T_1\}$
$T_3 \longrightarrow \{T_2, T_1, T_3\}$
$T_4 \longrightarrow \{T_2, T_4, T_1, T_3\}$
T_5 et T_6 impossibles
$T_7 \longrightarrow \{T_2, T_4, T_1, T_3, T_7\}$

Exemple

Exemple : 7 tâches

tâche	1	2	3	4	5	6	7
deadline	4	2	4	3	1	4	6
pénalité	7	6	5	4	3	2	1

Trier les tâches par w_i décroissants ; puis appliquer l'algorithme glouton en prenant la tâche si elle tient sans pénalité (réorganiser selon l'ordre canonique à chaque nouvel ajout).

Sur l'exemple :
T_1
$T_2 \rightarrow \{T_2, T_1\}$
$T_3 \rightarrow \{T_2, T_1, T_3\}$
$T_4 \rightarrow \{T_2, T_4, T_1, T_3\}$
T_5 et T_6 impossibles
$T_7 \rightarrow \{T_2, T_4, T_1, T_3, T_7\}$

La solution optimale est $\{T_2, T_4, T_1, T_3, T_7\}$ et la pénalité minimale est $w_5 + w_6 = 5$.

Résolution par matroïde

Proposition. Soit E ensemble de tâches, et $\mathcal{I}$ famille des sous-ensembles de taches indépendantes, alors $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde.

- Hérédité : trivial.
- Echange : Soit A, B indépendants et $|A| < |B|$. Existe-t-il x appartenant à B tel que $A \cup \{x\}$ soit indépendant ?

Résolution par matroïde

Proposition. Soit E ensemble de tâches, et $\mathcal{I}$ famille des sous-ensembles de taches indépendantes, alors $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde.

- Hérédité : trivial.
- Echange : Soit A, B indépendants et $|A| < |B|$. Existe-t-il x appartenant à B tel que $A \cup \{x\}$ soit indépendant ?

  Idée : Comparer $N_t(A)$ et $N_t(B)$ pour $t = 1, .., n$.

  On cherche donc le plus grand $t \leq n$ tel que $N_t(A) < N_t(B)$.

  On sait que $0 \leq t < n$, donc $N_t(A) \geq N_t(B)$, $N_{t+1}(A) < N_{t+1}(B), ..., N_n(A) < N_n(B)$.

  Dans B il y a plus de tâches de deadline $t+1$ que dans A ; on en prend une, x, qui n'est pas déjà dans A et $A \cup \{x\}$ est OK.