

Structures de données et algorithmes

Pierre Geurts

2011-2012

E-mail : p.geurts@ulg.ac.be
URL : [http://www.montefiore.ulg.ac.be/
~geurts/sda.html](http://www.montefiore.ulg.ac.be/~geurts/sda.html)
Bureau : R 141 (Montefiore)
Téléphone : 04.366.48.15 — 04.366.99.64

Contact

- Chargé de cours :
 - ▶ Pierre Geurts, p.geurts@ulg.ac.be, I141 Montefiore, 04/3664815
- Assistants :
 - ▶ Gilles Louppe, g.louppe@ulg.ac.be, GIGA-R (B34,+1), CHU, 04/3662766
 - ▶ Julien Becker, j.becker@ulg.ac.be, GIGA-R (B34,+1), CHU, 04/3669805
- Sites web du cours :
 - ▶ Cours théorique : <http://www.montefiore.ulg.ac.be/~geurts/sda.html>
 - ▶ Répétitions et projets : <http://www.montefiore.ulg.ac.be/~glouppe/2011-2012/students.info0902.php>

Objectif du cours

- Introduction à l'étude systématique des algorithmes et des structures de données
- Vous fournir une boîte à outils contenant :
 - ▶ Des structures de données permettant d'organiser et d'accéder efficacement aux données
 - ▶ Les algorithmes les plus populaires
 - ▶ Des méthodes génériques pour la modélisation, l'analyse et la résolution de problèmes algorithmiques
- On insistera sur la généralité des algorithmes et structures de données et on les étudiera de manière formelle
- Les projets visent à vous familiariser à la résolution de problèmes

Organisation du cours

- Cours théoriques :
 - ▶ Les vendredis de 14h à 16h, S94, Bâtiment B4 (Europe).
 - ▶ 10-12 cours
- Répétitions :
 - ▶ Certains vendredis de 16h à 18h, S94, Bâtiment B4 (Europe)
 - ▶ ± 5 répétitions (+ debriefing des projets)
- Projets :
 - ▶ Trois projets tout au long de l'année, de difficulté croissante
 - ▶ Les deux premiers individuels, le troisième en binôme
 - ▶ En C
- Evaluation sur base des projets (30%) et d'un examen écrit (70%).

Notes de cours

- Transparents disponibles sur la page web du cours avant chaque cours
- Pas de livre de référence obligatoire mais les ouvrages suivants ont été utilisés pour préparer le cours :
 - ▶ **Introduction to algorithms, Cormen, Leiserson, Rivest, Stein, MIT press, Third edition, 2009.**
 - ▶ <http://mitpress.mit.edu/algorithms/>
 - ▶ Algorithms, Sedgewick and Wayne, Addison Wesley, Fourth edition, 2011.
 - ▶ <http://algs4.cs.princeton.edu/home/>
 - ▶ Data structures and algorithms in Java, Goodrich and Tamassia, Fifth edition, 2010.
 - ▶ <http://ww0.java4.datastructures.net/>
 - ▶ Algorithms, Dasgupta, Papadimitriou, and Vazirani, McGraw-Hill, 2006.
 - ▶ <http://cseweb.ucsd.edu/users/dasgupta/book/index.html>
 - ▶ <http://www.cs.berkeley.edu/~vazirani/algorithms/all.pdf>

Cours sur le web

Ce cours s'inspire également de plusieurs cours disponibles sur le web :

- Antonio Carzaniga, Faculty of Informatics, University of Lugano
 - ▶ <http://www.inf.usi.ch/carzaniga/edu/algo/index.html>
- Marc Gaetano, Polytechnique, Nice-Sophia Antipolis
 - ▶ <http://users.polytech.unice.fr/~gaetano/asd/>
- Robert Sedgewick, Princeton University
 - ▶ <http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spr10/cos226/lectures.html>
- Charles Leiserson and Erik Demaine, MIT.
 - ▶ <http://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-046j-introduction-to-algorithms-sma-5503-fall-2005/index.htm>
- Le cours de 2009-2010 de Bernard Boigelot

Contenu du cours

- Partie 1: Introduction
- Partie 2: Outils d'analyse
- Partie 3: Algorithmes de tri
- Partie 4: Structures de données élémentaires
- Partie 5: Dictionnaires
- Partie 6: Résolution de problèmes
- Partie 7: Graphes

Partie 1

Introduction

Plan

1. Algorithms + Data structures = Programs (Niklaus Wirth)

2. Introduction à la récursivité

Algorithmes

- Un **algorithme** est une suite *finie* et *non-ambiguë* d'opérations ou d'instructions permettant de résoudre un *problème*
- Provient du nom du mathématicien persan *Al-Khawarizmi* (± 820), le père de l'algèbre
- Un problème algorithmique est souvent formulé comme la transformation d'un ensemble de valeurs, **d'entrée**, en un nouvel ensemble de valeurs, **de sortie**.
- Exemples d'algorithmes :
 - ▶ Une recette de cuisine (ingrédients \rightarrow plat préparé)
 - ▶ La recherche dans un dictionnaire (mot \rightarrow définition)
 - ▶ La division entière (deux entiers \rightarrow leur quotient)
 - ▶ Le tri d'une séquence (séquence \rightarrow séquence ordonnée)

Algorithmes

- On étudiera essentiellement les algorithmes **corrects**.
 - ▶ Un algorithme est (totalement) *correct* lorsque pour chaque instance, il se termine en produisant la bonne sortie.
 - ▶ Il existe également des algorithmes *partiellement corrects* dont la terminaison n'est pas assurée mais qui fournissent la bonne sortie lorsqu'ils se terminent.
 - ▶ Il existe également des algorithmes *approximatifs* qui fournissent une sortie inexacte mais néanmoins proche de l'optimum.
- Les algorithmes seront évalués en termes d'*utilisation de ressources*, essentiellement par rapport aux **temps de calcul** mais aussi à l'utilisation de la **mémoire**.

Algorithmes

Un algorithme peut être spécifié de différentes manières :

- en langage naturel,
- graphiquement,
- en pseudo-code,
- par un programme écrit dans un langage informatique
- ...

La seule condition est que la description soit précise.

Exemple : le tri

- Le problème de tri :

- ▶ Entrée : une séquence de n nombres $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$
- ▶ Sortie : une permutation de la séquence de départ $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ telle que $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

- Exemple :

- ▶ Entrée : $\langle 31, 41, 59, 26, 41, 58 \rangle$
- ▶ Sortie : $\langle 26, 31, 41, 41, 58, 59 \rangle$

Tri par insertion



Description en langage naturel :

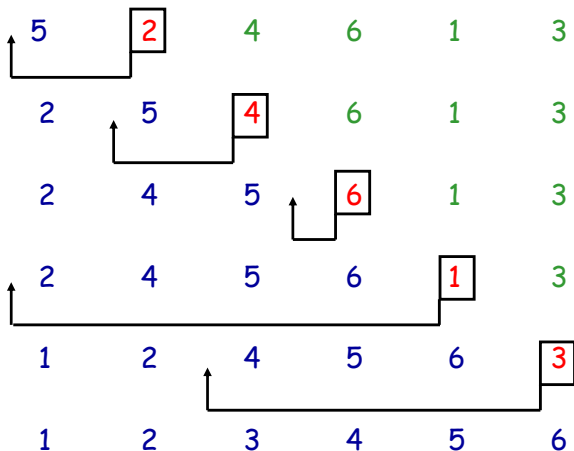
On parcourt la séquence de gauche à droite

Pour chaque élément a_j :

- On l'**insère** à sa position dans une nouvelle séquence ordonnée contenant les éléments le précédant dans la séquence.

On s'arrête dès que le dernier élément a été inséré à sa place dans la séquence.

Tri par insertion



Tri par insertion

Description en C (sur des tableaux d'entiers) :

```
void InsertionSort (int *a, int length) {
    int key, i;
    for(int j = 1; j < length; j++) {
        key = a[j];
        /* Insert a[j] into the sorted sequence a[0...j-1] */
        i = j-1;
        while (i>=0 && a[i]>key) {
            a[i+1] = a[i];
            i = i-1;
        }
        a[i+1] = key;
    }
}
```


Insertion sort

Description en **pseudo-code** (sur des tableaux d'entiers) :

```
INSERTION-SORT(A)
1  for j = 2 to A.length
2      key = A[j]
3      // Insert A[j] into the sorted sequence A[1..j - 1].
4      i = j - 1
5      while i > 0 and A[i] > key
6          A[i + 1] = A[i]
7          i = i - 1
8      A[i + 1] = key
```

Pseudo-code

Objectifs :

- Décrire les algorithmes de manière à ce qu'ils soient compris par des humains.
- Rendre la description indépendante de l'implémentation
- S'affranchir de détails tels que la gestion d'erreurs, les déclarations de type, etc.

Très proche du C (langage procédural plutôt qu'orienté objet)

Peut contenir certaines instructions en langage naturel si nécessaire

Pseudo-code

Quelques règles

- Structures de blocs indiquées par l'indentation
- Boucles (**for**, **while**, **repeat**) et conditions (**if**, **else**, **elseif**) comme en C.
- Le compteur de boucle garde sa valeur à la sortie de la boucle
- En sortie d'un **for**, le compteur a la valeur de la borne $\text{max}+1$.

```
for  $i = 1$  to  $Max$   
     $Code$ 
```

⇔

```
 $i = 1$   
while  $i \leq Max$   
     $Code$   
     $i = i + 1$ 
```

- Commentaires indiqués par //
- Affectation (=) et test d'égalité (==) comme en C.

Pseudo-code

- Les variables (i , j et key par exemple) sont locales à la fonction.
- $A[i]$ désigne l'élément i du tableau A . $A[i..j]$ désigne un intervalle de valeurs dans un tableau. $A.length$ est la taille du tableau.
- L'indexation des tableaux commence à 1.
- Les types de données composés sont organisés en *objets*, qui sont composés d'attributs. On accède à la valeur de l'attribut $attr$ pour un objet x par $x.attr$.
- Un variable représentant un tableau ou un objet est considérée comme un pointeur vers ce tableau ou cet objet.
- Paramètres passés par valeur comme en C (mais tableaux et objets sont passés par pointeur).
- ...

Trois questions récurrentes face à un algorithme

1. Mon algorithme est-il correct, se termine-t-il ?
2. Quelle est sa vitesse d'exécution ?
3. Y-a-t'il moyen de faire mieux ?

Exemple du tri par insertion

1. Oui → technique des invariants (partie 2)
2. $O(n^2)$ → analyse de complexité (partie 2)
3. Oui → il existe un algorithme $O(n \log n)$ (partie 1)

Correction de INSERTION-SORT

```
INSERTION-SORT(A)
1  for  $j = 2$  to  $A.length$ 
2       $key = A[j]$ 
3       $i = j - 1$ 
4      while  $i > 0$  and  $A[i] > key$ 
5           $A[i + 1] = A[i]$ 
6           $i = i - 1$ 
7       $A[i + 1] = key$ 
```

- **Invariant** : (pour la boucle externe) le sous-tableau $A[1..j - 1]$ contient les éléments du tableau original $A[1..j - 1]$ ordonnés.
- On doit montrer que
 - ▶ l'invariant est vrai avant la première itération
 - ▶ l'invariant est vrai avant chaque itération suivante
 - ▶ En sortie de boucle, l'invariant implique que l'algorithme est correct

Correction de INSERTION-SORT

- Avant la première itération :
 - ▶ $j = 2 \Rightarrow A[1]$ est trivialement ordonné.
- Avant la j ème itération :
 - ▶ Informellement, la boucle interne déplace $A[j - 1]$, $A[j - 2]$, $A[j - 3] \dots$ d'une position vers la droite jusqu'à la bonne position pour $key (A[j])$.
- En sortie de boucle :
 - ▶ A la sortie de boucle, $j = A.length + 1$. L'invariant implique que $A[1 \dots A.length]$ est ordonné.

Complexité de INSERTION-SORT

```
INSERTION-SORT(A)
1  for  $j = 2$  to  $A.length$ 
2       $key = A[j]$ 
3       $i = j - 1$ 
4      while  $i > 0$  and  $A[i] > key$ 
5           $A[i + 1] = A[i]$ 
6           $i = i - 1$ 
7       $A[i + 1] = key$ 
```

- Nombre de comparaisons $T(n)$ pour trier un tableau de taille n ?
- Dans le pire des cas :
 - ▶ La boucle **for** est exécutée $n - 1$ fois ($n = A.length$).
 - ▶ La boucle **while** est exécutée $j - 1$ fois

Complexité de INSERTION-SORT

- Le nombre de comparaisons est borné par :

$$T(n) \leq \sum_{j=2}^n (j-1)$$

- Puisque $\sum_{i=1}^n i = n(n+1)/2$, on a :

$$T(n) \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

- Finalement, $T(n) = O(n^2)$

(borne inférieure ?)

Structures de données

- Méthode pour stocker et organiser les données pour en faciliter l'accès et la modification
- Une structure de données regroupe :
 - ▶ un certain nombre de données à gérer, et
 - ▶ un ensemble d'opérations pouvant être appliquées à ces données
- Dans la plupart des cas, il existe
 - ▶ plusieurs manières de représenter les données et
 - ▶ différents algorithmes de manipulation.
- On distingue généralement l'**interface** des structures de leur **implémentation**.

Types de données abstraits

- Un type de données abstrait (TDA) représente l'interface d'une structure de données.
- Un TDA spécifie précisément :
 - ▶ la nature et les propriétés des données
 - ▶ les modalités d'utilisation des opérations pouvant être effectuées
- En général, un TDA admet différentes implémentations (plusieurs représentations possibles des données, plusieurs algorithmes pour les opérations).

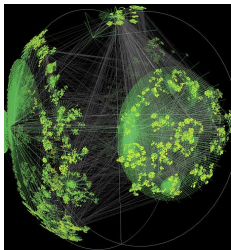
Exemple : file à priorités

- Données gérées : des objets avec comme attributs :
 - ▶ une clé, munie d'un opérateur de comparaison selon un ordre total
 - ▶ une valeur quelconque
- Opérations :
 - ▶ Création d'une file vide
 - ▶ $\text{INSERT}(S, x)$: insère l'élément x dans la file S .
 - ▶ $\text{EXTRACT-MAX}(S)$: retire et renvoie l'élément de S avec la clé la plus grande.
- Il existe de nombreuses façons d'implémenter ce TDA :
 - ▶ Tableau non trié ;
 - ▶ Liste triée ;
 - ▶ Structure de tas ;
 - ▶ ...

Chacune mène à des complexités différentes des opérations INSERT et EXTRACT-MAX

Structures de données et algorithmes en pratique

- La résolution de problèmes algorithmiques requiert presque toujours la combinaison de structures de données et d'algorithmes sophistiqués pour la gestion et la recherche dans ces structures.
- D'autant plus vrai qu'on a à traiter des volumes de données importants.
- Quelques exemples de problèmes réels :
 - ▶ Routage dans les réseaux informatiques
 - ▶ Moteurs de recherche
 - ▶ Alignement de séquences ADN en bio-informatique



Plan

1. Algorithms + Data structures = Programs (Niklaus Wirth)

2. Introduction à la récursivité

Algorithmes récursifs

Un algorithme est **récursif** s'il s'invoque lui-même directement ou indirectement.

Motivation : Simplicité d'expression de certains algorithmes

Exemple : Fonction factorielle :

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n - 1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

```
FACTORIAL(n)
1  if n == 0
2      return 1
3  return n · FACTORIAL(n - 1)
```

Algorithmes récursifs

```
FACTORIAL( $n$ )  
1  if  $n == 0$   
2      return 1  
3  return  $n \cdot \text{FACTORIAL}(n - 1)$ 
```

Règles pour développer une solution récursive :

- On doit définir un cas de base ($n == 0$)
- On doit diminuer la “taille” du problème à chaque étape ($n \rightarrow n - 1$)
- Quand les appels récursifs se partagent la même structure de données, les sous-problèmes ne doivent pas se superposer (pour éviter les effets de bord)

Exemple de récursion multiple

Calcul du i ème nombre de Fibonacci :

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$\forall i \geq 2 : F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$$

Algorithme :

```
FIBONACCI( $n$ )  
1  if  $n \leq 1$   
2      return  $n$   
3  return FIBONACCI( $n - 2$ ) + FIBONACCI( $n - 1$ )
```

Exemple de récursion multiple

```
FIBONACCI( $n$ )  
1  if  $n \leq 1$   
2      return  $n$   
3  return FIBONACCI( $n - 2$ ) + FIBONACCI( $n - 1$ )
```

1. L'algorithme est-il correct ?
2. Quelle est sa vitesse d'exécution ?
3. Y-a-t'il moyen de faire mieux ?

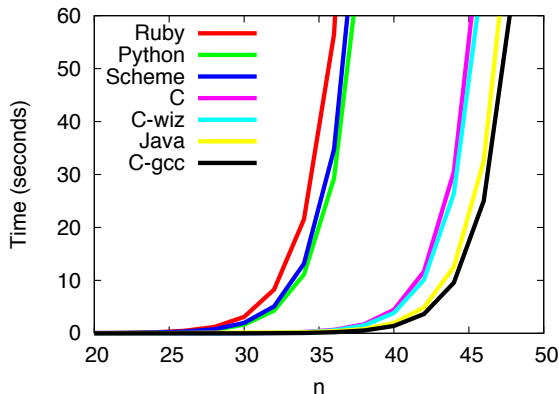
Exemple de récursion multiple

```
FIBONACCI( $n$ )  
1  if  $n \leq 1$   
2      return  $n$   
3  return FIBONACCI( $n - 2$ ) + FIBONACCI( $n - 1$ )
```

1. L'algorithme est correct ?
 - ▶ Clairement, l'algorithme est correct.
 - ▶ En général, la correction d'un algorithme récursif se démontre par induction.
2. Quelle est sa vitesse d'exécution ?
3. Y-a-t'il moyen de faire mieux ?

Vitesse d'exécution

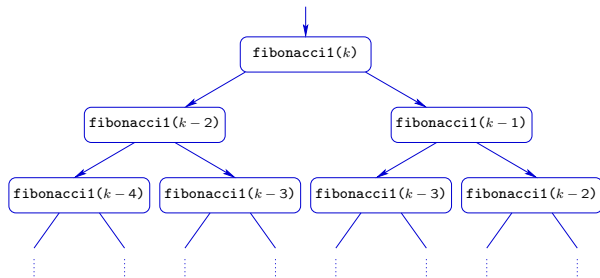
- Nombre d'opérations pour calculer $\text{FIBONACCI}(n)$ en fonction de n
- Empiriquement :



(Carzaniga)

- Toutes les implémentations atteignent leur limite, plus ou moins loin

Trace d'exécution



(Boigelot)

Complexité

```
FIBONACCI(n)  
1  if n ≤ 1  
2      return n  
3  return FIBONACCI(n - 2) + FIBONACCI(n - 1)
```

- Soit $T(n)$ le nombre d'opérations de base pour calculer FIBONACCI(n) :

$$T(0) = 2, T(1) = 2$$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 2$$

- On a donc $T(n) \geq F_n$ (= le n ème nombre de Fibonacci).

Complexité

- Comment croît F_n avec n ?

$$T(n) \geq F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Puisque $F_n \geq F_{n-1} \geq F_{n-2} \geq \dots$

$$F_n \geq 2F_{n-2} \geq 2(2F_{n-4}) \geq 2(2(2F_{n-6})) \geq 2^{\frac{n}{2}}$$

Et donc

$$T(n) \geq (\sqrt{2})^n \approx (1.4)^n$$

- $T(n)$ croît **exponentiellement** avec n
- Peut-on faire mieux?

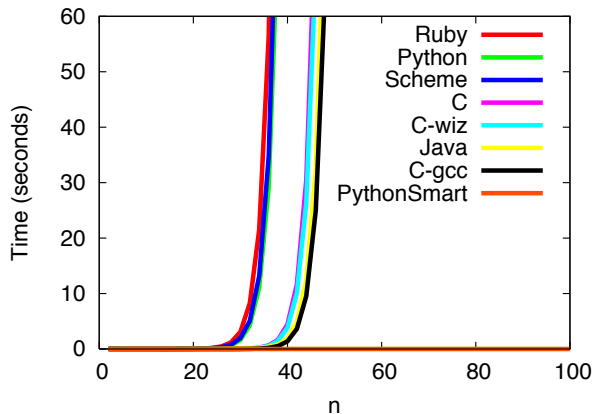
Solution itérative

FIBONACCI-ITER(n)

```
1  if  $n \leq 1$ 
2      return  $n$ 
3  else
4       $pprev = 0$ 
5       $prev = 1$ 
6      for  $i = 2$  to  $n$ 
7           $f = prev + pprev$ 
8           $pprev = prev$ 
9           $prev = f$ 
10     return  $f$ 
```


Vitesse d'exécution

Complexité : $O(n)$



(Carzaniga)

Tri par fusion

Idée d'un tri basé sur la récursion :

- on sépare le tableau en deux sous-tableaux de la même taille
- on trie (récursivement) chacun des sous-tableaux
- on fusionne les deux sous-tableaux triés en maintenant l'ordre

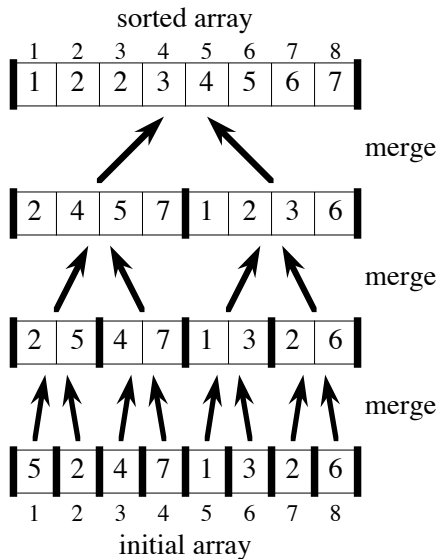
Le cas de base correspond à un tableau d'un seul élément.

```
MERGE-SORT( $A, p, r$ )  
1  if  $p < r$   
2       $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$   
3      MERGE-SORT( $A, p, q$ )  
4      MERGE-SORT( $A, q + 1, r$ )  
5      MERGE( $A, p, q, r$ )
```

Appel initial : MERGE-SORT($A, 1, A.length$)

Exemple d'application du principe général de “diviser pour régner”

Tri par fusion : illustration



Fonction MERGE

MERGE(A, p, q, r) :

- **Entrée** : tableau A et indice p, q, r tels que :
 - ▶ $p \leq q < r$ (pas de tableaux vides)
 - ▶ Les sous-tableaux $A[p..q]$ et $A[q+1..r]$ sont ordonnés
- **Sortie** : Les deux sous-tableaux sont fusionnés en seul sous-tableau ordonné dans $A[p..r]$

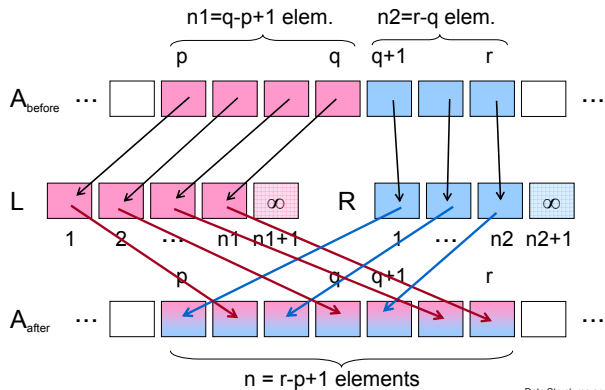
Idée :

- Utiliser un pointeur vers le début de chacune des listes ;
- Déterminer le plus petit des deux éléments pointés ;
- Déplacer cet élément vers le tableau fusionné ;
- Avancer le pointeur correspondant

Fusion : algorithme

```
MERGE( $A, p, q, r$ )
1   $n_1 = q - p + 1$ ;  $n_2 = r - q$ 
2  Soit  $L[1..n_1 + 1]$  and  $R[1..n_2 + 1]$  deux nouveaux tableaux
3  for  $i = 1$  to  $n_1$ 
4       $L[i] = A[p + i - 1]$ 
5  for  $j = 1$  to  $n_2$ 
6       $R[j] = A[q + j]$ 
7   $L[n_1 + 1] = \infty$ ;  $R[n_2 + 1] = \infty$  // Sentinels
8   $i=1$  ;  $j=1$ 
9  for  $k = p$  to  $r$ 
10     if  $L[i] \leq R[j]$ 
11          $A[k] = L[i]$ 
12          $i = i + 1$ 
13     else
14          $A[k] = R[j]$ 
15          $j = j + 1$ 
```

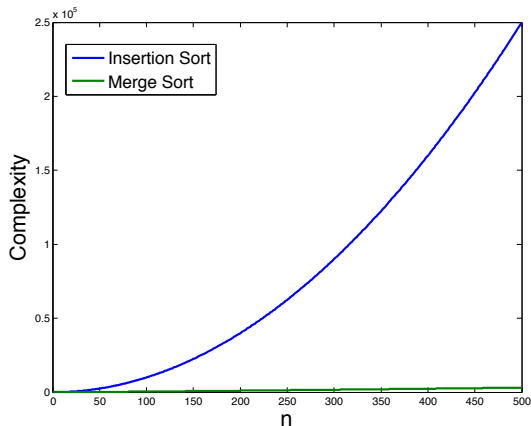
Fusion : illustration



Complexité : $O(n)$ (où $n = r - p + 1$)

Vitesse d'exécution

Complexité de MERGE-SORT : $O(n \log n)$ (voir partie 2)



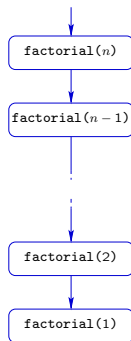
Remarques

- La fonction `MERGE` nécessite d'allouer deux tableaux L et R (dont la taille est $O(n)$). Exercice (difficile) : écrire une fonction `MERGE` qui ne nécessite pas d'allocation supplémentaire.
- On pourrait réécrire `MERGE-SORT` de manière itérative (au prix de la simplicité)
- Version récursive du tri par insertion :

```
INSERTION-SORT-REC( $A, n$ )  
1  if  $n > 1$   
2      INSERTION-SORT-REC( $A, n - 1$ )  
3      MERGE( $A, 1, n - 1, n$ )
```


Note sur l'implémentation de la récursivité

- Trace d'exécution de la factorielle



- Chaque appel récursif nécessite de mémoriser le **contexte d'invocation**
- L'espace mémoire utilisé est donc $O(n)$ (n appels récursifs)

Récurtivité terminale

- Définition : Une procédure est **récursive terminale** (tail réursive) si elle n'effectue plus aucune opération après s'être invoquée récursivement.
- Avantages :
 - ▶ Le contexte d'invocation ne doit pas être mémorisé et donc l'espace mémoire nécessaire est réduit
 - ▶ Les procédures récursives terminales peuvent facilement être converties en procédures itératives

Version récursive terminale de la factorielle

```
FACTORIAL2( $n$ )
```

```
1 return FACTORIAL2-REC( $n$ , 2, 1)
```

```
FACTORIAL2-REC( $n$ ,  $i$ ,  $f$ )
```

```
1 if  $i > n$ 
```

```
2     return  $f$ 
```

```
3 return FACTORIAL2-REC( $n$ ,  $i + 1$ ,  $f \cdot i$ )
```

Espace mémoire utilisé : $O(1)$ (si la récursion terminale est implémentée efficacement)

Ce qu'on a vu

- Définitions générales : algorithmes, structures de données, structures de données abstraites...
- Analyse d'un algorithme itératif (INSERTION-SORT)
- Notions de récursivité
- Analyse d'un algorithme récursif (FIBONACCI)
- Tri par fusion (MERGESORT)