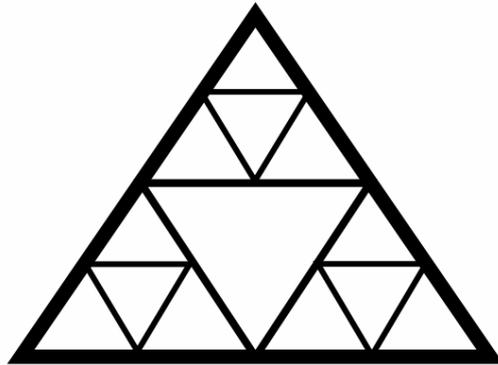


ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

DYNAMIQUE DES STRUCTURES ET
DES OUVRAGES



RECUEIL D'EXERCICES

Édition 2008

Systèmes à un degré de liberté

Exercice 1

I. Ecrire les équations du mouvement (vibrations libres) du système représenté sur la Figure 1a. En supposant la poutre sans masse, le système présente un seul degré de liberté défini par la déflexion u sous le poids P . La rigidité de flexion de la poutre est EI et sa longueur L .

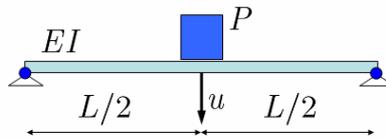


Figure 1a : Vibrations de poutres sans masse avec surcharge.

II. Déterminer la fréquence propre d'un poids P suspendu à un ressort au milieu d'une poutre sur appuis simples (cf. Figure 1b). La rigidité de flexion de la poutre est EI et sa longueur vaut L . Elle est supposée sans masse. La raideur du ressort vaut k .

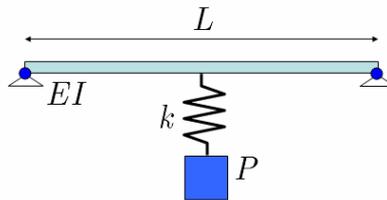


Figure 1b : Poids suspendu à une poutre sans masse par un ressort.

ELEMENTS DE REPONSE

I.
$$k = \frac{48EI}{L^3}$$

II.
$$\omega = \sqrt{\frac{48EI k}{m(48EI + L^3 k)}}, \text{ avec } m = \frac{P}{g}.$$

Exercice 2

Refaire l'exercice précédente avec :

- I. Le système (B) (cf. Figure 2).
- II. Le système (C) (cf. Figure 2)

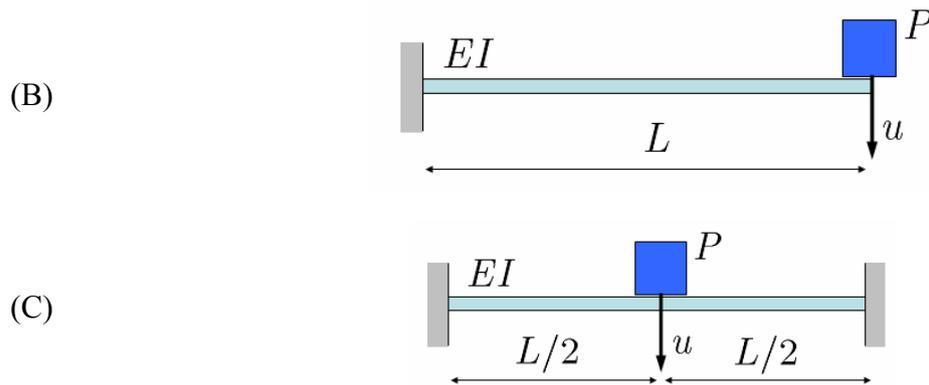


Figure 2 : Vibrations de poutres sans masse avec surcharge.

ELEMENTS DE REPONSE

- I. $k = \frac{3EI}{L^3}$
- II. $k = \frac{192EI}{L^3}$

Exercice 3

Une masse m_1 est suspendue à un ressort k et se trouve en équilibre statique. Une deuxième masse m_2 chute d'une hauteur h et s'accroche à m_1 sans rebond (Figure 3).

Déterminer le mouvement $u(t)$ autour de la position d'équilibre statique de la masse m_1 .

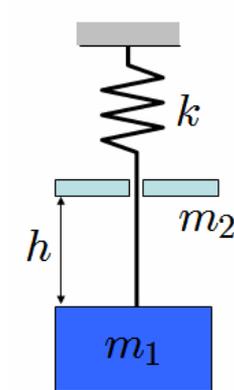


Figure 3 : Chute d'une masse sur un système masse-ressort en équilibre statique.

ELEMENTS DE REPONSE

$$u(t) = \frac{m_2 g}{k} (1 - \cos \omega t) + \frac{\sqrt{2gh}}{\omega} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sin \omega t$$

Exercice 4

Une automobile est modélisée de façon simplifiée par une masse concentrée m reposant sur un système ressort-amortisseur (Figure 4a). L'automobile se déplace à vitesse constante v sur une route dont la rugosité est connue sous la forme d'une fonction de la position sur la route.

- I. Déterminer l'équation du mouvement.

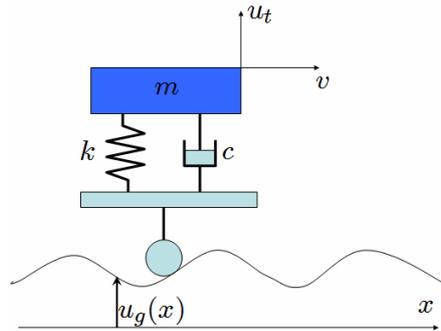


Figure 4a : Mouvement idéalisé d'une automobile sur une route.

Cette automobile se déplace maintenant sur un pont à plusieurs travées dont les piles sont distantes de 35 m (cf. Figure 4b). Le fluage à long terme du pont a provoqué une déflexion de 15 cm en milieu de chaque travée. Le profil de la chaussée peut être approché par une sinusoïde d'amplitude 15 cm et de période 35 m. La masse de l'automobile en charge est de 800 kg, la raideur de son système de suspension est de 60000 N/m et le coefficient d'amortissement visqueux est tel que le coefficient d'amortissement du système vaut 40 %.

Déterminer :

- II. L'amplitude $u_{t,0}$ du mouvement vertical $u_t(t)$ quand l'automobile se déplace à 70 km/h.
- III. La vitesse du véhicule qui conduirait à une résonance pour $u_{t,0}$.

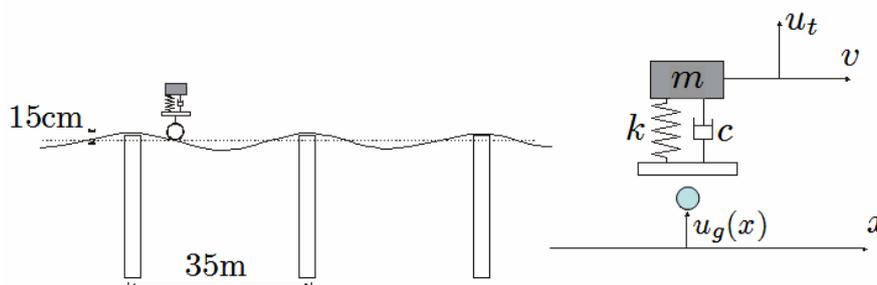


Figure 4b : Mouvement d'une automobile sur un pont à plusieurs travées.

ELEMENTS DE REPONSE

- I. Travailler avec la méthode de formulation directe de l'équation d'équilibre.
- II. $u_{t,0} = 0.175\text{m}$

III. $v = 155.1 \text{ km/h}$

Exercice 5

Modèle de frottement de Coulomb

Des systèmes utilisés pour limiter les effets des séismes sur les structures permettent de dissiper l'énergie par frottement de Coulomb. Le dispositif est réglé pour fonctionner sous un effort de précontrainte constant N et un coefficient de frottement μ . Un essai de vibration libre (ou de lâcher) est effectué pour mesurer la fréquence propre fondamentale et le coefficient de frottement (cf. Figure 5).

- I. Montrez que la décroissance de l'amplitude entre 2 cycles consécutifs ($u_i - u_{i+1}$) est constante et donnez sa valeur en fonction de $u_f = \frac{N}{K}$ où K est la raideur de la structure.
- II. Calculez la fréquence fondamentale et u_f d'après la Figure 5.

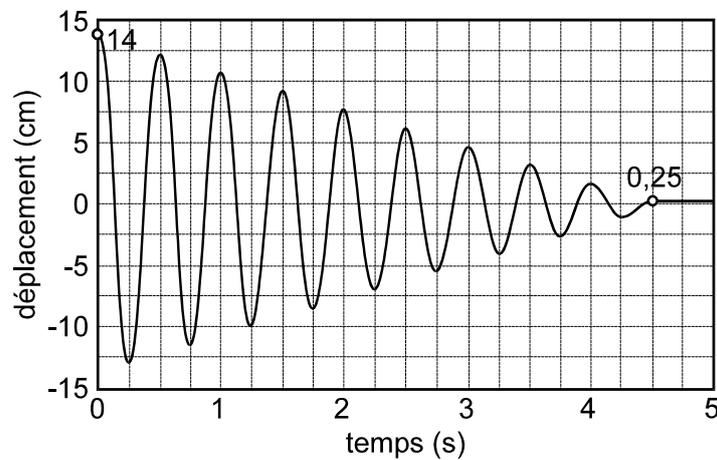


Figure 5 : Réponse en vibration libre du dispositif de dissipation d'énergie par frottement.

ELEMENTS DE REPONSE

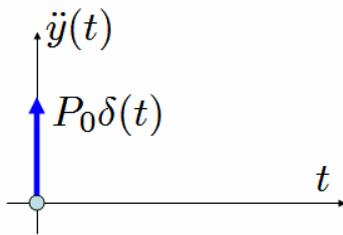
- I. Étudier la vibration forcée du système sous la force de frottement.
- II. $f = 2 \text{ Hz}$, $u_f = 0.38 \text{ cm}$

Exercice 6

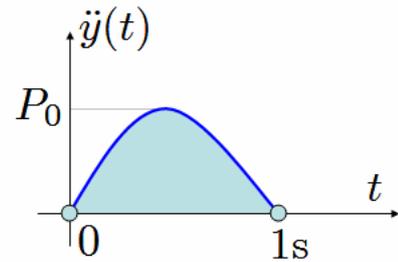
Spectres de réponse de sollicitations impulsives

Calculer les spectres de réponses des sollicitations suivantes :

- I. L'impulsion simple représentée sur la Figure 6(a).
- II. L'impulsion sinusoïdale de la Figure 6(b) en considérant $\xi = 0$ et $T < 2s$



(a)



(b)

Figure 6 : (a) Impulsion simple et (b) Impulsion sinusoïdale

ELEMENTS DE REPONSE

- I.
$$S_d(\xi, T) = \frac{P}{2\pi} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos^{-1} \xi} T$$
- II.
$$S_d(T) = \frac{P_0}{\pi^2} \left(\frac{\beta^2}{1-\beta} \right) \sin \frac{2\pi n}{1+\beta}, \quad \beta = \frac{T}{2} < 1$$

Exercice 7

Transformée de Fourier d'un accélérogramme et énergie

Montrer que la transformée de Fourier $F(\omega)$ d'un accélérogramme $\ddot{u}_g(t)$ et l'énergie totale $\mathcal{H}(t_d)$ introduite dans l'oscillateur élémentaire non-amorti sont liées par la relation :

$$|F(\omega)| = \sqrt{\frac{2\mathcal{H}(t_d)}{m}}$$

La quantité t_d représente la durée totale de l'accélérogramme.

ELEMENTS DE REPONSE

Écrire l'énergie totale comme la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle dans l'oscillateur.

Exercice 8

Portique soumis à un chargement sismique

On désire dimensionner un portique en béton armé situé en zone sismique. Le portique est représenté sur la . On ne considérera que la composante horizontale du mouvement sismique. Les caractéristiques du portique sont les suivantes :

- Hauteur des poteaux : $H = 10\text{m}$
- Portée de la poutre : $L = 8\text{m}$
- Largeur des poteaux : $l = 0.40\text{m}$
- Hauteur de la poutre : $b = 0.60\text{m}$
- Epaisseur des poteaux et de la poutre : $t = 0.25\text{m}$.

La masse est supposée concentrée sur la poutre supérieure et vaut $m = 50\text{t}$. On prendra un module d'Young du béton de $E = 30000\text{MPa}$.

I. En supposant que la poutre est infiniment rigide par rapport aux poteaux, calculez les 2 premières fréquences de la structure (horizontale et verticale).

II. Si on considère le spectre de réponse des règles PS92 avec $a_n = 2.5\text{m/s}^2$ (pour un sol dur S0) :

- Quel est l'effort tranchant global de dimensionnement (à la base de la structure).
- Quelle est la contrainte de cisaillement de dimensionnement dans les poteaux ?
- En pensant à la répartition de moment dans un poteau bi-encasté, donnez la valeur du moment de dimensionnement.
- Calculez le déplacement relatif (de la poutre par rapport au sol) imposé par le séisme de dimensionnement.

III. Mêmes questions pour le sol S3 (sédiments). Conclusions ?

Les valeurs numériques pour la définition du spectre de réponse pour chaque catégorie de sol sont données dans le Tableau suivant.

Type de sol	T_B (s)	T_C (s)	T_D (s)	RA	RM
S0	0.15	0.30	2.67	1.0	2.5
S1	0.20	0.40	3.20	1.0	2.5
S2	0.30	0.60	3.85	0.9	2.25
S3	0.45	0.90	4.44	0.8	2.0

La pseudo-accélération des spectres élastiques des règles PS92 vaut : $PSA = a_n Re(T)$ avec :

- Branche AB: $Re(T) = RA + (RM - RA)(T/T_B)$
- Branche BC: $Re(T) = RM$
- Branche CD: $Re(T) = RM(T_C/T)$
- Branche DE: $Re(T) = RM(T_C/T)(T_D/T)$

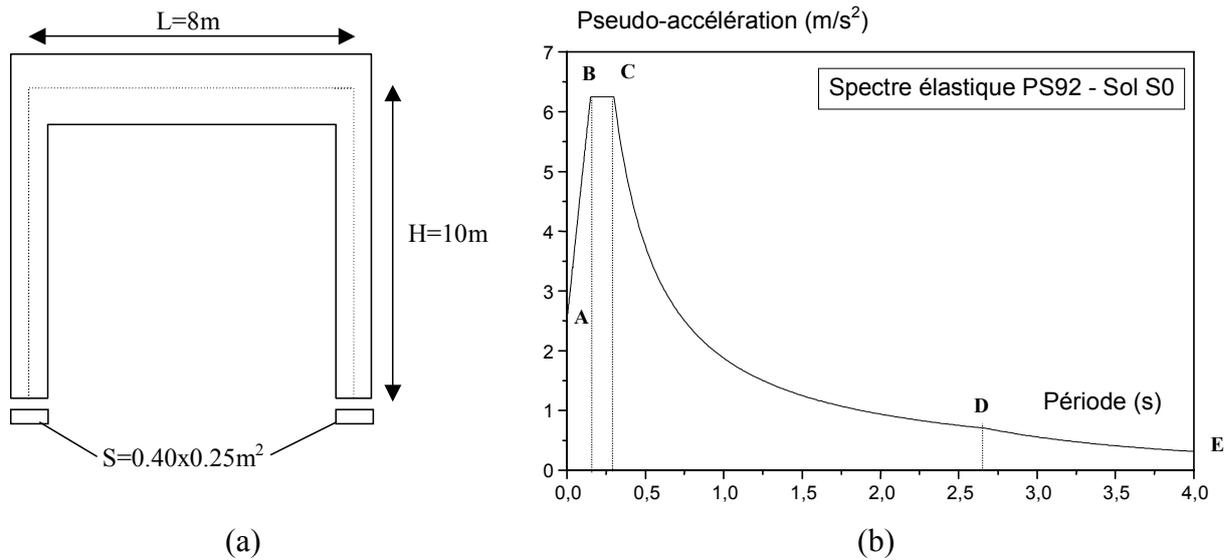


Figure 7 : (a) Portique en béton armé et (b) Spectre de réponse élastique PS92

ELEMENTS DE REPONSE

- I. $T_X = 1.434\text{sec}$, $T_Z = 0.057\text{sec}$
- II. $S_d = 0.068\text{ m}$, $V_{\max} = 32.75\text{ kN}$, $\tau_{\max} = 490.3\text{ kPa}$, $M_{\max} = 163.5\text{ kNm}$
- III. $S_d = 0.163\text{ m}$, $V_{\max} = 78.45\text{ kN}$, $\tau_{\max} = 1176.8\text{ kPa}$, $M_{\max} = 392.2\text{ kNm}$

Exercice 9

Etude d'un portique avec pont roulant

Un portique supporte un pont roulant auquel est suspendue une masse M par l'intermédiaire d'un câble souple. Le portique est soumis à une sollicitation sismique ; cette sollicitation se traduit au niveau des poutres de roulement par un mouvement caractérisé par le spectre de réponse donné sur la Figure 8(b).

- I. Donner les expressions analytiques des différentes branches du spectre de réponse.
- II. Établir l'équation du mouvement de la masse.
- III. Calculer le déplacement horizontal maximal de la masse.

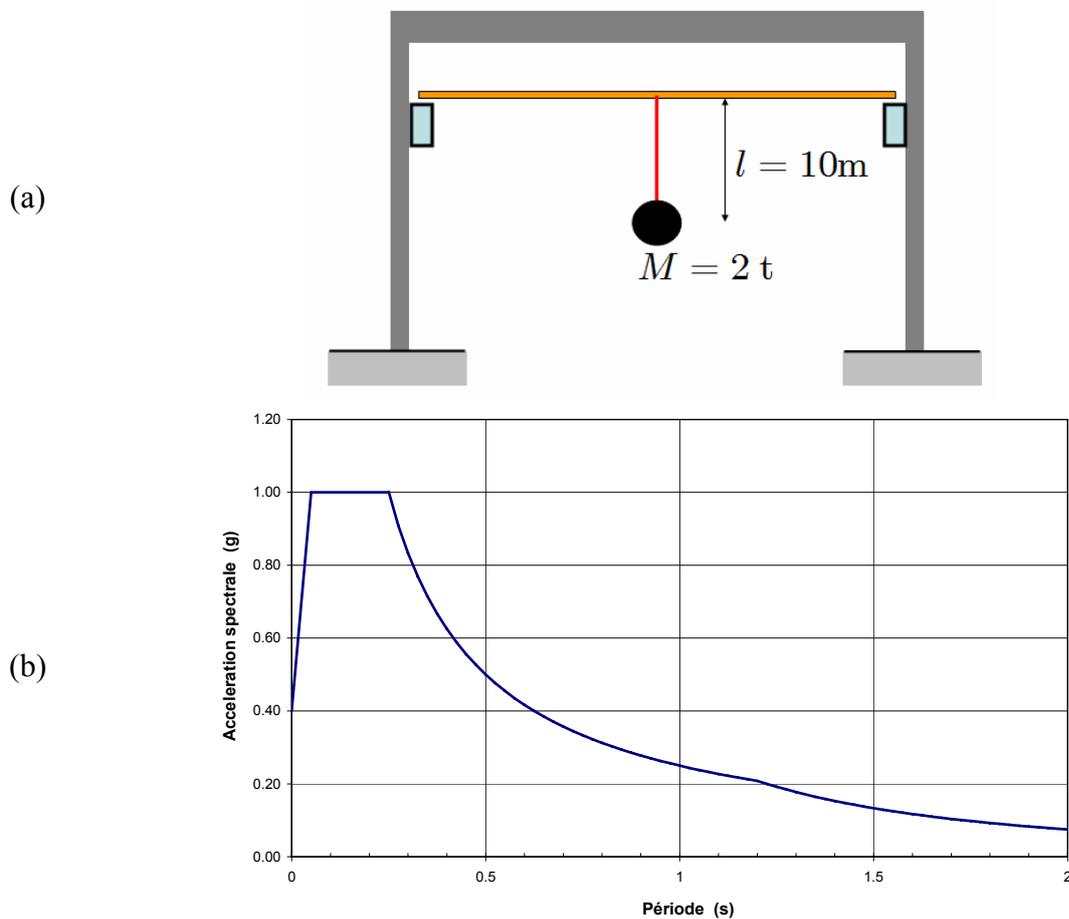


Figure 8 : (a) Portique avec masse et (b) Spectre de réponse

Exercice 10

Oscillateurs généralisés – effet de forces longitudinales

Considérons la poutre cantilever de la Figure 9 dont la masse par unité de longueur est $\bar{m}(x)$ et la rigidité en flexion $EI(x)$. La poutre est soumise à une charge dynamique $p(x, t) = f(x)g(t)$ ainsi qu'à une force longitudinale constante N à son extrémité. La déformée de la poutre est approximée par la relation :

$$u(x, t) = \psi(x)z(t)$$

où $\psi(x)$ est une fonction donnée.

I. Utiliser la méthode des puissances virtuelles afin de déterminer l'équation du mouvement du système. En particulier, montrer que le travail virtuel effectué par la force longitudinale N lors d'un déplacement virtuel $\delta u = \psi(x)\delta z$ est donnée par l'expression :

$$\delta W_N = z(t)\delta z N \int_0^l [\psi'(x)]^2 dx$$

II. Déterminer la valeur de la force N , appelée charge critique N_{cr} pour laquelle la rigidité apparente du système est nulle.

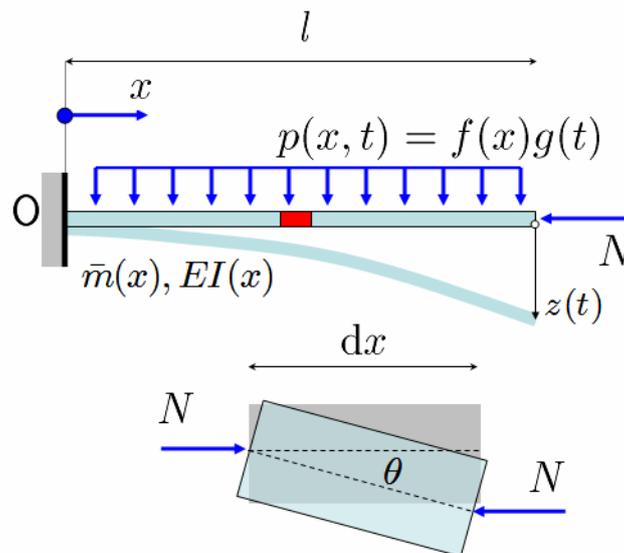


Figure 9 : Poutre et coordonnée généralisée

ELEMENTS DE REPONSE

II.
$$N_{cr} = \frac{\int_0^l EI(x)[\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^l [\psi'(x)]^2 dx}$$

Systèmes à N degrés de liberté

Exercice 11

Équation de mouvement de bâtiment rigide

On considère le bâtiment parfaitement rigide de la Figure 10. Le bâtiment est fondé sur un sol mou au moyen d'un radier de surface $a \times b$. La hauteur du bâtiment est h et sa masse volumique ρ . Le bâtiment est sollicité par un chargement dynamique dans le plan $x - z$. Le sol est considéré élastique et peut être représenté par des ressorts verticaux (k_z), horizontaux (k_x) et de rotation autour de l'axe y (k_ϕ). Déterminer l'équation du mouvement du système en considérant comme degrés de liberté :

- I. Le déplacement vertical, le déplacement horizontal et la rotation du point A .
- II. Le déplacement vertical, le déplacement horizontal et la rotation du point A' .
- III. Comment est-ce que l'équation du mouvement est modifiée dans les cas précédents si l'on considère l'effet du poids propre lors de la rotation du bâtiment ?

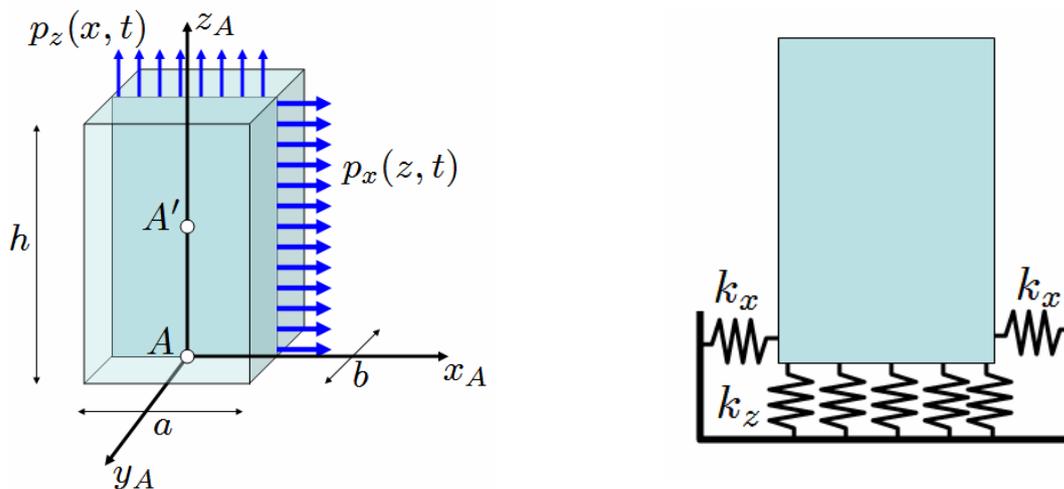


Figure 10 : Bâtiment rigide sur un sol mou

ELEMENTS DE REPONSE

- III. Utiliser l'approximation : $\cos \phi = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \dots$

Exercice 12

Etude d'une barre sur 2 ressorts

Une barre de longueur L et de masse uniformément répartie M repose sur 2 ressorts de raideur K_1 et K_2 (cf. Figure 11).

- I. Après avoir choisi 2 degrés de liberté permettant de décrire le mouvement vertical de la barre, calculer les matrices de masse et de rigidité et écrire les équations de mouvement de ce système.
- II. Que devient la matrice de masse si on fixe une masse M' au $1/3$ de la barre.
- III. Calculer la matrice d'amortissement si on fixe un amortisseur C à la barre.
- IV. Calculer les fréquences et les modes propres de ce système pour $K_1 = K_2 = K$ et $M' = 0$.

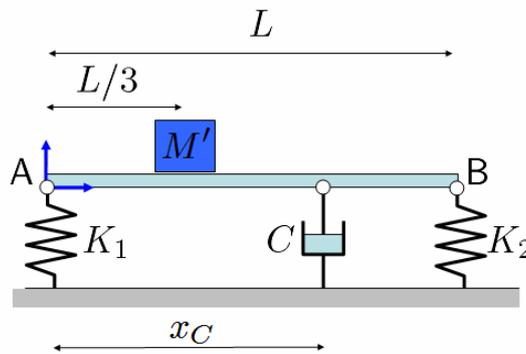


Figure 11 : Barre sur deux ressorts.

ELEMENTS DE REPONSE

- I. $[M] = \begin{bmatrix} M/3 & M/6 \\ M/6 & M/3 \end{bmatrix}$, $[K] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}$
- II. $[M_{\text{tot}}] = \begin{bmatrix} M/3 + 4M'/9 & M/6 + 2M'/9 \\ M/6 + 2M'/9 & M/3 + M'/9 \end{bmatrix}$
- III. $[C] = C \begin{bmatrix} (1 - \frac{x_C}{L})^2 & (\frac{x_C}{L})(1 - \frac{x_C}{L}) \\ (\frac{x_C}{L})(1 - \frac{x_C}{L}) & (\frac{x_C}{L})^2 \end{bmatrix}$
- IV. Pulsations propres: $\omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{M}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{6K}{M}}$. Modes : $\Phi_1^T = \{1, 1\}$, $\Phi_2^T = \{1, -1\}$

Exercice 13

Étude de la réponse dynamique d'une tuyauterie sous pression lors d'une rupture

On désire vérifier le comportement d'une tuyauterie sous pression d'un circuit primaire d'un réacteur nucléaire à la suite d'une rupture accidentelle. La rupture se produit à la sortie d'un coude à 90 degrés situé à une distance $2L$ d'un encastrement. Après la rupture, le gaz éjecté exerce sur le tuyau une force parallèle à son axe (au niveau de la rupture) passant brusquement de 0 à $F_0 = 1.26P_0S_0$ (S_0 : section de la brèche et P_0 : pression du fluide contenu dans la tuyauterie avant rupture). En première approximation, la tuyauterie est modélisée par une poutre de raideur EI et 2 masses concentrées situées en $x = L$ et $x = 2L$ de valeurs $M_1 = 0.50M_{\text{tot}}$ et $M_2 = 0.25M_{\text{tot}}$ où M_{tot} est la masse totale du tronçon de tuyauterie ($M_{\text{tot}} = 2\rho SL = 460\text{kg}$). Les applications numériques se feront avec les caractéristiques suivantes :

- $2L = 6\text{m}$
- $E = 210000\text{MPa}$
- $R = 12.5\text{cm}$
- $e = R/10 = 1.25\text{cm}$
- $I = \pi R^3 e = 7670\text{cm}^4$
- $S = 2\pi R e = 98.2\text{cm}^2$
- $S_0 = \pi R^2 = 491\text{cm}^2$
- $\rho = 7.8\text{t/m}^3$
- $P_0 = 166\text{bars} = 1628\text{kPa}$

- I.** Calculer les matrices de flexibilité et de rigidité.
- II.** Donner les équations du mouvement.
- III.** Calculer les fréquences et modes propres de ce système.
- IV.** Déterminer l'évolution dans le temps des déplacements des points A et B ($u_y^A(t)$ et $u_y^B(t)$) pour ce chargement (cf. Figure 12).

Dans la suite, on ne tiendra compte que d'un seul mode.

- V.** Préciser pour quelle valeur de déplacement la vitesse est maximale.
- VI.** Déterminer les forces statiques équivalentes qui permettent de dimensionner « statiquement » la tuyauterie.
- VII.** Déterminer les efforts tranchants et moments fléchissants dans les différentes sections en fonction du temps.

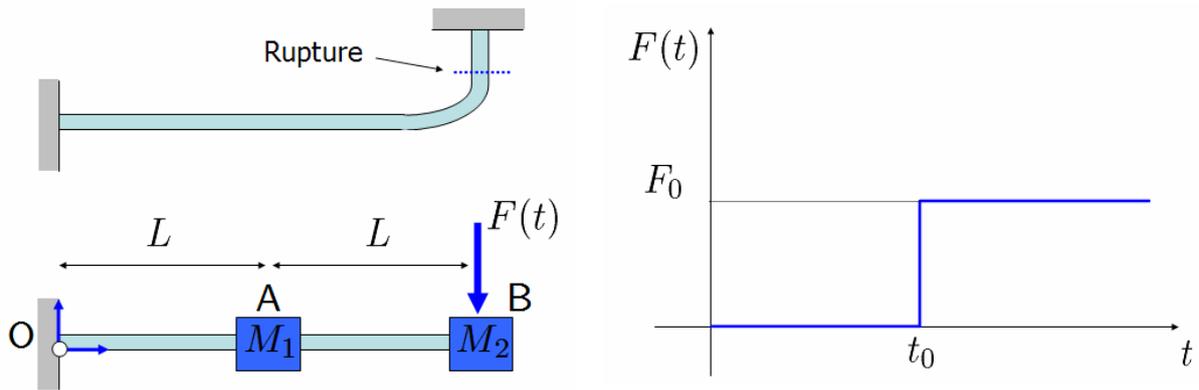


Figure 12 : Modélisation simplifiée d'une rupture de tuyauterie sous pression

ELEMENTS DE REPONSE

I. $[K] = \frac{6EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

III. Pulsations propres : $\omega_1 = 40.2 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 207 \text{ rad/s}$.

Modes propres: $\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.05 \end{pmatrix}$, $\Phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.655 \end{pmatrix}$

V. $\max \dot{u}_y^B = 17.9 \text{ m/s}$

VI. $\begin{pmatrix} F_{st}^A \\ F_{st}^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.07 \\ 0.816 \end{pmatrix} F_0$

VII. $V_{enc} = 1.886F_0$, $M_{enc} = 2.7F_0L$

Exercice 14

Etude d'une poutre cantilever supportant trois masses

Une poutre cantilever supporte trois masses égales comme il est indiqué sur la Figure 13.

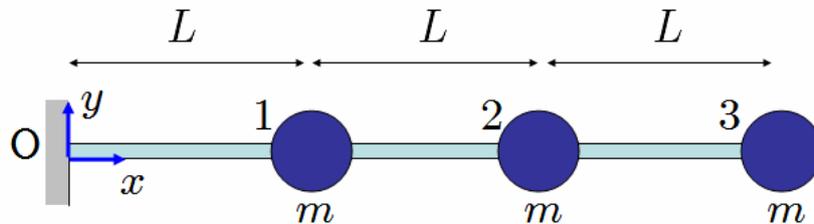


Figure 13 : Poutre cantilever

Les modes propres de vibration ainsi que les fréquences propres ont été déterminés expérimentalement et sont donnés ci-dessous :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.054 & 0.283 & 0.957 \\ 0.406 & 0.870 & -0.281 \\ 0.913 & -0.402 & 0.068 \end{bmatrix} \quad \omega = \begin{bmatrix} 3.61 \\ 24.2 \\ 77.7 \end{bmatrix} \text{ rd/s}$$

Une charge harmonique est appliquée au nœud 2 $P = 3k \sin(\bar{\omega}t)$ dans laquelle $\bar{\omega} = 3/4\omega_1$.

- I. Ecrire l'expression de la réponse stationnaire de la masse m_1 , en supposant la structure non amortie.
- II. Evaluer les déplacements de toutes les masses à l'instant de réponse maximale et tracer la déformée à cet instant.
- III. Reprendre les questions ci-dessus avec un amortissement de 10% pour tous les modes.

Exercice 15

Etude d'un portique de 2 étages soumis à un chargement sismique

On désire dimensionner un bâtiment de bureaux ou d'habitations R+1 situé en zone sismique (cf. Figure 14a). Le bâtiment est formé d'un portique en béton armé ayant les dimensions suivantes :

- Hauteur d'un étage: $H = H_1 = H_2 = 3\text{m}$
- Portée des poutres: $L = 6\text{m}$
- Section des poteaux : $25 \times 25(\text{cm} \times \text{cm})$

La masse est supposée concentrée à chaque plancher, la masse surfacique valant $1\text{t}/\text{m}^2$ soit une masse par étage valant 36t . On prendra un module d'Young du béton de 30000MPa . On rappelle que la force nécessaire pour appliquer un déplacement différentiel à une poutre biencastée de hauteur H , d'inertie I et de module E vaut :

$$F_x = \frac{12EI}{H^3}u_x$$

I. En supposant que la poutre est infiniment rigide par rapport aux poteaux, calculez les 2 premières fréquences correspondant aux modes propres horizontaux de la structure. Donnez les déformées modales correspondantes. Calculez le coefficient de participation et la masse modale de chacun des modes.

II. Si on ne considère que le premier mode et le spectre S_0 des règles PS92 (cf. Figure 14b), quel est l'effort tranchant global de dimensionnement et le déplacement correspondant (on prend $a_n = 2.5\text{m}/\text{s}^2$).

- Quelle est la contrainte de cisaillement de dimensionnement dans les poteaux ?
- Donnez une valeur approchée du moment de dimensionnement des poteaux.

III. Considérez les 2 modes. Quelles sont donc, dans ce cas, les erreurs commises sur les déplacements et l'effort tranchant à la base en négligeant le second mode ?

On précisera la méthode utilisée pour la recombinaison des modes.

Type de sol	T_B (s)	T_C (s)	T_D (s)	RA	RM
S0	0.15	0.30	2.67	1.0	2.5
S1	0.20	0.40	3.20	1.0	2.5
S2	0.30	0.60	3.85	0.9	2.25
S3	0.45	0.90	4.44	0.8	2.0

La pseudo-accélération des spectres élastiques des règles PS92 vaut : $PSA = a_n \text{Re}(T)$ avec :

- Branche AB: $\text{Re}(T) = RA + (RM - RA)(T/T_B)$
- Branche BC: $\text{Re}(T) = RM$
- Branche CD: $\text{Re}(T) = RM(T_C/T)$
- Branche DE: $\text{Re}(T) = RM(T_C/T)(T_D/T)$

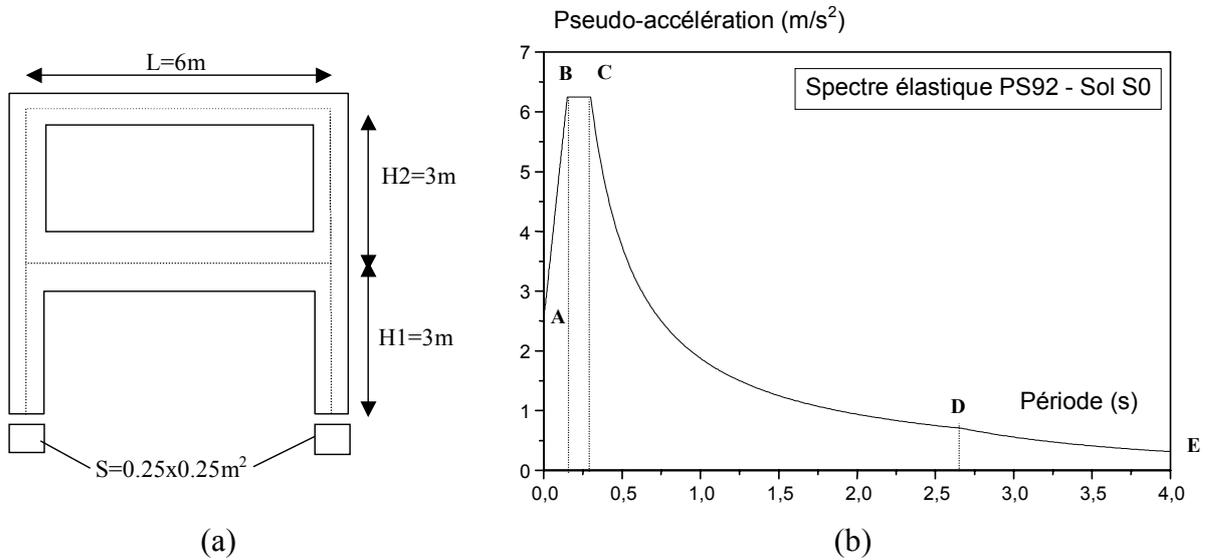


Figure 14 : (a) Portique en béton armé et (b) Spectre de réponse élastique PS92

ELEMENTS DE REPONSE

I. $\omega_1 = 9.61 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 25.1 \text{ rad/s}$.

$$\text{Modes : } \Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.62 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} -0.62 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Coefficients de participation : $a_1 = 1.17$, $a_2 = 2.75$

II. $U = \begin{pmatrix} u_2 = 3.66\text{cm} \\ u_1 = 2.25\text{cm} \end{pmatrix}$, $V_{\text{dim}} = 99\text{kN}$, $M_{\text{dim}} = 148\text{kN/m}$, $\tau_{\text{max}} = 2.38\text{MPa}$

III. $\max u_2 = 3.67\text{cm}$

Vibration des poutres

Systèmes continus

Exercice 16

Etude simplifiée des vibrations d'une masse attachée à un câble tendu

On désire étudier les vibrations longitudinales (traction-compression) d'une masse attachée à un câble (cf. Figure 15a). On note les quantités suivantes :

- Longueur du câble : $2L$
- Section du câble : S
- Caractéristiques du câble : E, ν, ρ
- Masse du télécabine : M

- I. Rappeler l'équation de la dynamique de ce système.
- II. Ecrire les conditions aux limites. Quelles seraient les conditions aux limites pour la Figure 15b ?
- III. Donner l'expression permettant de calculer la fréquence fondamentale.
- IV. Donner les fréquences et les déformées des premiers modes lorsque $M \gg \rho LS$ et $M \ll \rho LS$.
- V. Dans ce dernier cas, vérifier l'orthogonalité des 2 premiers modes propres.

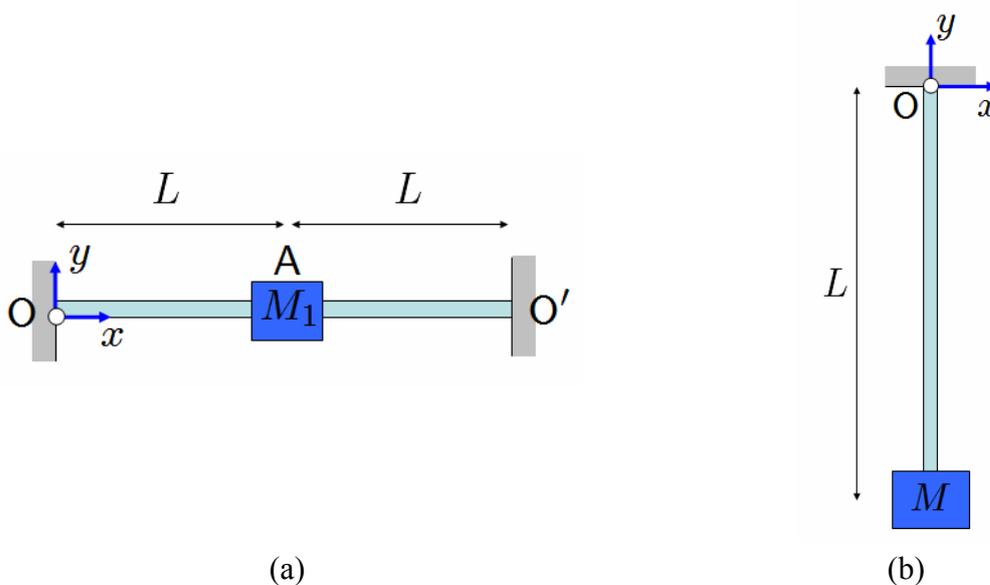


Figure 15 : Configurations de masses attachées à un câble tendu

ELEMENTS DE REPONSE

III. $\frac{\omega L}{c_p} \tan\left(\frac{\omega L}{c_p}\right) = \frac{2\rho SL}{M}$

IV. a. Si $\omega L \rightarrow 0$:
$$\begin{cases} u_x(x, t) = u_0 x, & 0 < x < L \\ u_x(x, t) = u_0(2L - x), & L < x < 2L \end{cases}$$

b. Si $\frac{\omega L}{c_p} \gg 0$:
$$\begin{cases} u_x(x, t) = u_0 \sin(n\pi x/L), & 0 < x < L \\ u_x(x, t) = u_0 \sin(n\pi(2L - x)/L), & L < x < 2L \end{cases}$$

V. $u_x(x, t) = u_0 \sin(n\pi x/2L), \quad 0 < x < 2L$

Exercice 17

Etude d'une poutre à masse répartie soumise à un chargement dynamique

On se propose de calculer l'ordre de grandeur des efforts engendrés par un impact d'avion sur une tour de grande hauteur. Les caractéristiques de la tour étudiée sont les suivantes :

- Hauteur totale : $H = 400\text{m}$
- Section de la base : $S = 60 \times 60 \text{ (m} \times \text{m)}$
- Masse totale : $M = 300000\text{t}$

La structure de la tour est tubulaire et l'épaisseur du tube vaut 10cm. On prendra un module d'Young de l'acier égal à $E = 200000\text{MPa}$. La tour sera considérée comme une poutre de section constante ayant une masse uniformément répartie sur la hauteur de la poutre.

- I. Rappeler l'équation de la dynamique pour ce système.
- II. Donner les équations permettant de calculer les fréquences propres et montrer que l'existence d'une solution non nulle conduit à une équation du type :

$$\cos k \cosh k + 1 = 0$$

où on précisera la signification du facteur k .

- III. Montrez que $\omega_1 = (1.875)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho SH^4}}$ est une pulsation propre.

- IV. À l'aide de la méthode de Rayleigh, donner une valeur approchée de la première fréquence propre.

- V. On suppose qu'un avion d'une masse de $M_{\text{avion}} = 300\text{t}$ volant à une vitesse $v_{\text{avion}} = 100\text{m/s}$ impacte la tour à mi-hauteur. L'impact est modélisé par le chargement représenté sur la Figure 16(a) avec :

$$F_{\text{impact}} \Delta T = \frac{1}{3} M_{\text{avion}} v_{\text{avion}}$$

En considérant la déformée approchée du premier mode, déterminer la masse et la raideur généralisées puis calculer les données suivantes:

- Le vecteur force généralisée
- Le déplacement en tête
- L'effort tranchant global en pied
- Le moment de flexion global en pied

Comparer la contrainte axiale maximale induite par la flexion à la contrainte sous poids propre.

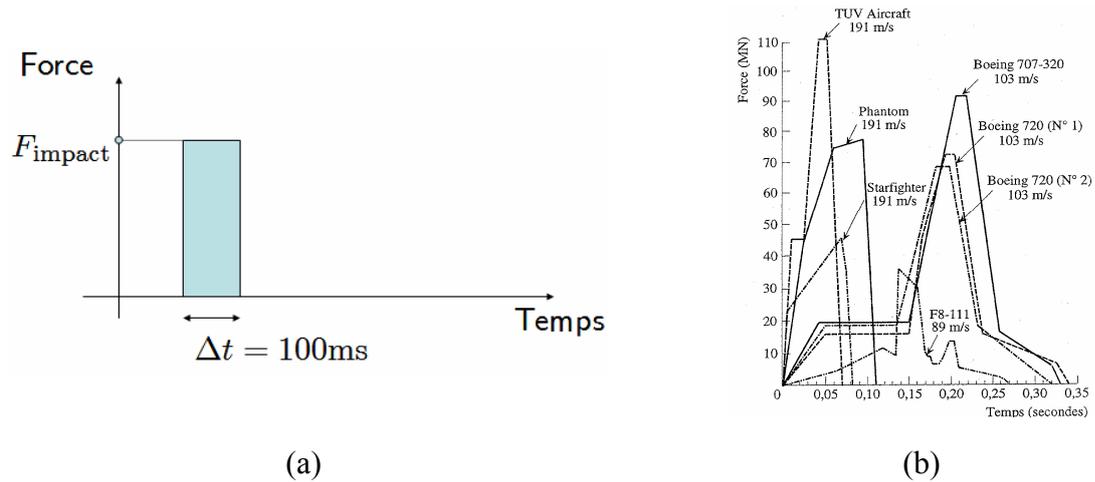


Figure 16 : Evolution temporelle de la force d'impact ; (a) chargement simplifié et (b) chargements réels pour plusieurs types d'avion.

ELEMENTS DE REPONSE

IV. Considérer la déformée de la poutre sous chargement uniforme. Il s'ensuit :

$$\omega^2 = (1.878)^4 \frac{EI}{H^4 \rho S}$$

V. Le chargement généralisé : $\tilde{f} = 0.771 F_{\text{impact}}$

- $u_{\text{max}} = 0.095 \text{ m}$
- $M_{\text{dim}} = u_{\text{max}} EI \psi''(0) \Rightarrow M_{\text{dim}} = 6.79 \text{ GNm}$
- $V_{\text{dim}} = -u_{\text{max}} EI \psi'''(0) \Rightarrow V_{\text{dim}} = 33.9 \text{ MN}$

Exercice 18

Étude d'une poutre à masse répartie avec une section variable

On considère une cheminée en béton armé de hauteur 180m, de section circulaire creuse avec le rayon extérieur de 15m à la base et de 7.5m en tête. La structure de la cheminée est tubulaire et l'épaisseur e du tube (qui est constante sur toute la hauteur) vaut 0.75m (cf. Figure 17(a)). On prendra un module d'Young du béton armé égal à 25000MPa. Le poids volumique de béton armé est égal à 24kN/m³. On suppose que l'accélération de la pesanteur vaut $g = 10\text{m/s}^2$. La cheminée est considérée encastree à la base et l'amortissement sera pris égal à 5%. Le rayon moyen et le moment d'inertie peuvent être donnés par les relations suivantes :

$$R_{\text{moy}} = 7.125 - \frac{3.75}{180}x$$

$$I(x) = \pi e R_{\text{moy}}^3(x)$$

La déformée est approchée par la fonction suivante :

$$\varphi(x) = \frac{3x^2}{2L^2} - \frac{x^3}{2L^3},$$

où L est la hauteur de la cheminée et x est mesuré à partir de la base. La cheminée sera considérée comme une poutre de section variable ayant une masse répartie sur la hauteur de la poutre en fonction de x .

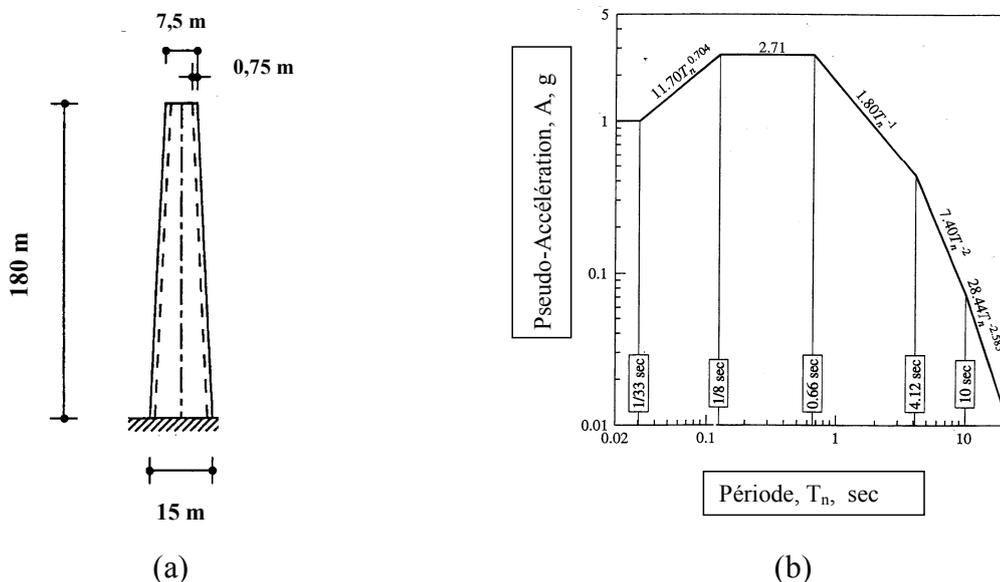


Figure 17 : (a) Schéma de la cheminée et (b) Spectre de réponse

En considérant la déformée approchée donnée ci-dessus :

I. Déterminer la masse et la raideur généralisées ainsi que la charge généralisée induite par un tremblement de terre. Écrire l'équation d'équilibre en faisant intervenir la pulsation propre du système ω et le pourcentage d'amortissement critique ξ .

II. Calculer la première fréquence propre.

Sous un chargement défini à partir du spectre de réponse donné sur la Figure 17(b) avec une accélération maximale de $0.25g$, calculer

III. Le déplacement en tête.

IV. L'effort tranchant et le moment de flexion en pied et à mi-hauteur de la cheminée.

ELEMENTS DE REPONSE

I. Masse généralisée : $\tilde{m} = 4087000 \text{ kg}$.

Raideur généralisée : $\tilde{k} = 7464600 \text{ N/m}$

Charge généralisée : $\tilde{p} = -6966100\ddot{u}_g(t)$

II. $f = 0.215 \text{ Hz}$

III. $u_{\max} = 0.799 \text{ m}$

IV. Calculés par les dérivées de la déformée :

$$M(0) = 1.58 \text{ GNm}, \quad M(90) = 0.32 \text{ GNm}$$

$$V(0) = 22.5 \text{ MN}, \quad V(90) = 7.2 \text{ MN}$$

Calculés en fonction des forces d'inertie en considérant l'équilibre dynamique en vibration libre, avec amortissement nul :

$$M(0) = 1.27 \text{ GNm}, \quad M(90) = 1.147 \text{ GNm}$$

$$V(0) = 10.1 \text{ MN}, \quad V(90) = 8.18 \text{ MN}$$

Exercice 19

Modes propres de poutres uniformes

- I.** Calculer les trois premières fréquences propres de vibration et les modes propres associés d'une poutre uniforme encastrée à ses deux extrémités. On appellera EI, \bar{m} la rigidité en flexion et la masse au mètre linéaire de la poutre de longueur L . On négligera les termes d'inertie en rotation.
- II.** Reprendre le problème précédent en libérant une des extrémités de la poutre et en y attachant une masse ponctuelle M .

ELEMENTS DE REPONSE

- I.** $\omega_i = k_i \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}}$ $k_1 = 22.37, k_2 = 61.7, k_3 = 120.6$
- II.** Pour la condition aux limites à l'extrémité libre de la poutre, considérer l'équilibre de forces en y ajoutant la force d'inertie due à la masse ajoutée.

Exercice 20

Poutre en rotation

La poutre représentée sur la Figure 18 se pivote librement autour de son support A et chute sur son support B d'une hauteur h (sans rebond). Calculer la vibration de la poutre.

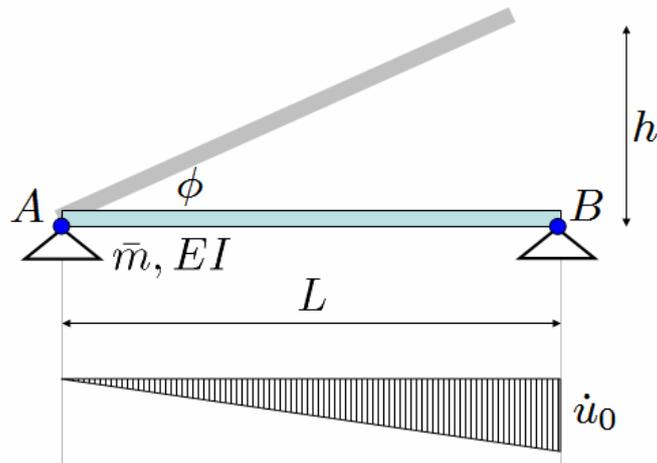


Figure 18 : Chute d'une poutre supportée à son extrémité

ELEMENTS DE REPONSE

$$u(x, t) = \frac{2\sqrt{3gh}}{\pi} \left(\frac{1}{\omega_1} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \omega_1 t - \frac{1}{2\omega_2} \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \omega_2 t + \dots \right)$$

Exercice 21

Modes propres de la Terre

L'objectif de cet exercice est de réaliser une analyse simplifiée des modes propres de la Terre. Pour ce faire, l'ensemble du globe est assimilé à une sphère élastique homogène isotrope caractérisée par :

- le rayon $R = 6400$ km
- la célérité des ondes P : $C_L = 11$ km/s
- la célérité des ondes S : $C_T = 4$ km/s

On considère de plus que les mouvements sont purement radiaux et ne dépendent que de r , soit :

$$\underline{u} = u(r)\underline{e}_r$$

On explicitera successivement :

- I. La forme générale des modes.
- II. Les conditions aux limites.
- III. L'équation caractérisant les pulsations propres (on calculera quelques solutions et on déterminera notamment la période propre du premier mode).
- IV. Quels sont les autres modes possibles dans le cas réel ?

ELEMENTS DE REPONSE

$$\text{I. } u_r(r) = \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r} \right) = \frac{B}{r^2} (kr \cos kr - \sin kr), \quad k = \frac{\omega}{C_L}$$

$$\text{II. } \sigma_{rr}(R) = 0$$

$$\text{III. } \tan kR = \frac{kR}{1 - \frac{\lambda+2\mu}{4\mu} k^2 R^2}, \quad k = \frac{\omega}{C_L}$$

Propagation d'ondes

Exercice 22

Etude de la propagation des ondes suite à l'impact de 2 barres

On laisse tomber depuis une hauteur H_{chute} une barre B1 de hauteur H_1 , module E_1 , section S_1 et masse volumique ρ_1 sur une seconde barre B2 de hauteur H_2 , module E_2 , section S_2 et masse volumique ρ_2 qui est sur un support fixe. On étudiera le cas particulier :

$$E_1 = E_2, \quad S_1 = S_2, \quad \rho_1 = \rho_2, \quad H_2 = 10H_1$$

- I. Rappeler l'équation de propagation des ondes de compression et les conditions aux limites dans chacune des 2 barres.
- II. Ecrire les conditions initiales au moment de l'impact des 2 barres.
- III. Analyser la propagation des ondes dans les 2 barres avant qu'elles n'atteignent l'extrémité de chacune des barres.
- IV. Décrire la réflexion aux extrémités des barres et caractériser le champ d'ondes qui en résulte.

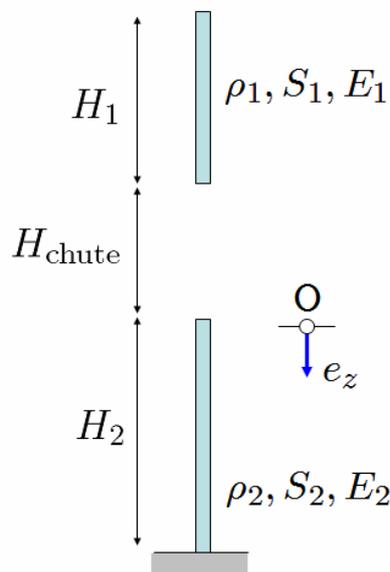


Figure 19 : Impact de 2 barres

ELEMENTS DE REPONSE

- III. Il s'agit de deux ondes de compression écrites : $N = -ES \frac{v_0^1}{2c_p}$

Exercice 23

Propagation d'ondes sphériques

Un milieu infini élastique homogène isotrope (masse volumique ρ et coefficients de Lamé λ, μ) est soumis à une sollicitation harmonique ponctuelle. On se placera donc en coordonnées sphériques.

- I. Ecrire l'équation indéfinie du mouvement.
- II. En ne conservant que les termes radiaux des tenseurs de contrainte et de déformation $\sigma_{rr}, \epsilon_{rr}$ et du champ de déplacement u_r , donner la forme simplifiée de l'équation indéfinie du mouvement et en déduire la solution du problème en déplacement.
- III. En ne conservant que le terme radial du champ de déplacement u_r mais en considérant tous les termes des tenseurs de contrainte et de déformation (sans toutefois de dépendance en θ, φ), donner la forme plus complète de l'équation indéfinie du mouvement. Montrer alors que la solution en déplacement s'écrit comme la somme d'un terme de "champ proche" et d'un terme de "champ lointain".

On se donne la divergence d'un tenseur de deuxième ordre en coordonnées sphériques :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) \cdot \underline{e}_r = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cot \theta)$$

$$\underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) \cdot \underline{e}_\theta = \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot \theta + 3\sigma_{r\theta}]$$

$$\underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) \cdot \underline{e}_\varphi = \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{\varphi r} + 2\sigma_{\varphi\theta} \cot \theta)$$

ELEMENTS DE REPONSE

$$\text{II. } u(r, t) = \frac{u_0}{r} \exp[i(kr - \omega t)] \text{ avec } k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}$$

$$\text{III. } u(r, \omega) = \frac{u_0}{r} \left(ki - \frac{1}{r} \right) \exp[i(kr - \omega t)]$$

Exercice 24

Propagation d'ondes dans un milieu stratifié (ondes SH)

Un milieu infini élastique homogène isotrope (masse volumique ρ , module de cisaillement μ) contient une couche rectiligne élastique infinie plus rigide (masse volumique ρ' , module de cisaillement μ'). A l'aide de cette couche plus rigide, on cherche à limiter la propagation d'une onde plane harmonique (SH) écrite :

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3 = u_0 e^{i(kx_1 - \omega t)} \end{cases}$$

Les coefficients R_i et T_i représentent les rapports d'amplitude en déplacement en réflexion et en transmission. Dans les questions qui suivent, on adoptera les notations suivantes :

$$\alpha = \frac{\mu' k'}{\mu k}$$

$$e^+ = \exp(ik'h)$$

$$e^- = \exp(-ik'h)$$

$$T' = T_2 \exp(ike)$$

- I. Déterminer le coefficient de transmission T' de l'onde à travers la couche rigide en fonction des grandeurs α , e^+ , e^- .
- II. Déterminer l'épaisseur de la couche conduisant au coefficient de transmission T_2 minimal et donner l'expression analytique de ce dernier.
- III. Quel est le résultat lorsque la couche rectiligne est moins rigide que le milieu infini et que le facteur α vaut $\alpha_1 = 1/\alpha$?

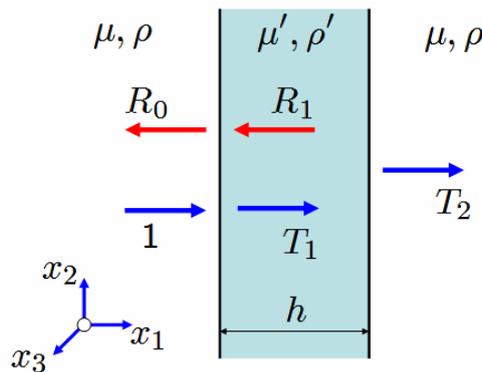


Figure 20 : Propagation d'ondes SH dans un milieu stratifié

ELEMENTS DE REPONSE

$$\text{I. } T' = \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2 e^- - (1 - \alpha)^2 e^+}$$

$$\text{II. } T' = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}$$

Exercice 25

Propagation d'ondes dans un milieu stratifié (ondes P/SV)

Un milieu infini élastique homogène isotrope (masse volumique ρ , coefficients de Lamé λ et μ) contient une couche rectiligne élastique infinie plus rigide (masse volumique ρ' , coefficients de Lamé λ' et μ'). À l'aide de cette couche plus rigide, on cherche à limiter la propagation d'une onde plane harmonique de compression P. Les coefficients R_i , T_i , R'_i et T'_i représentent les rapports d'amplitude en déplacement en réflexion et en transmission en onde P et en onde SV (respectivement).

- I. Déterminer le vecteur contrainte normale aux interfaces.
- II. Écrire les équations de continuité en déplacement et en contrainte normale. Quelles autres relations faut-il écrire pour résoudre le problème ?
- III. Que deviennent ces équations lorsque l'onde P a une incidence normale ?

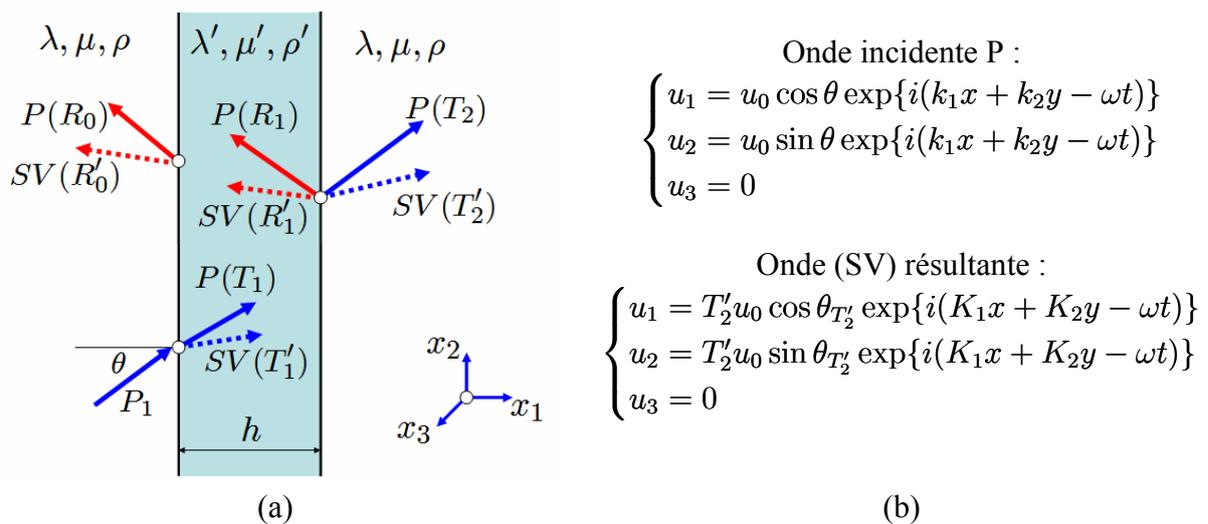


Figure 21 : Propagation d'ondes P – SV dans un milieu stratifié

Exercice 26

Propagation d'ondes à travers d'une interface solide - fluide

Un milieu élastique assimilable à un semi espace de caractéristiques ρ, C_S, C_P (masse volumique, célérités des ondes de cisaillement et de compression) est surmonté par un fluide parfait de caractéristiques ρ_w, C_F . Ce semi espace est le siège d'une onde de compression harmonique se propageant avec un angle θ_0 par rapport à la verticale.

Déterminer dans chaque milieu les différents types d'ondes, directions de propagations et amplitudes lorsque l'onde incidente heurte l'interface entre les deux milieux.

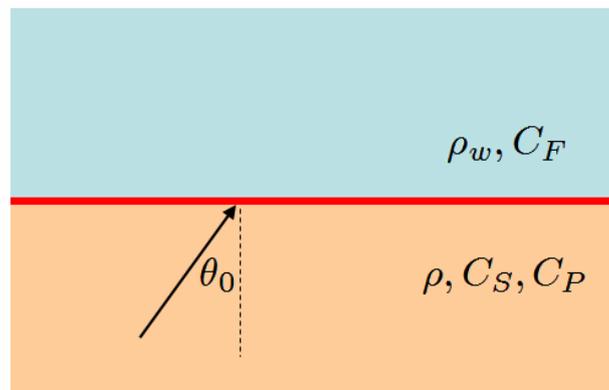


Figure 22 : Propagation d'ondes à travers d'une interface solide - fluide

Exercice 27

Ondes réfractées dans une membrane

Un semi espace élastique est recouvert d'une membrane tendue comme indiqué sur la figure ci-dessous. L'équation de vibration de la membrane soumise à une charge $q(x_1, x_3, t)$ par unité de surface est :

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{q}{T} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

Une onde longitudinale harmonique plane, d'amplitude A et de pulsation ω , heurte la surface du semi espace ; en admettant un contact parfait entre la membrane et le milieu et en supposant la membrane infiniment rigide dans son plan, déterminer les amplitudes des ondes réfractées.

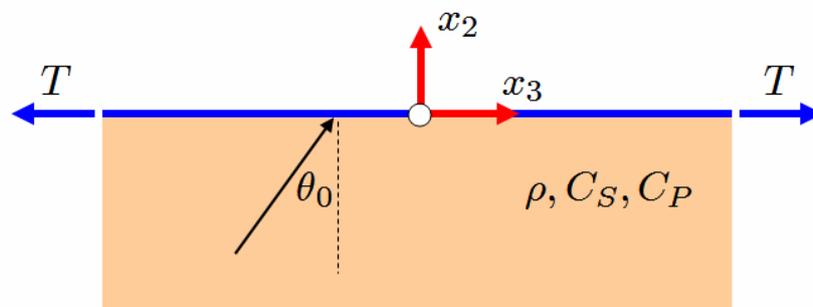


Figure 23 : Onde longitudinale heurtant à une membrane élastique

Interaction sol - structure

Exercice 28

Fondation de machines tournantes

On désire estimer le mouvement vibratoire d'un radier supportant une machine tournante comportant un léger balourd (turboalternateur). La machine étant fixée directement à un radier rigide, ceci nécessite de déterminer l'impédance du sol situé sous le radier. Pour cela, un modèle simplifié dit de cône est adopté : le sol est représenté par un cône d'angle α et de caractéristiques mécaniques homogènes E, ν, ρ . De plus, on suppose que le sol possède un amortissement de type hystérétique, *i.e.* que les contraintes peuvent s'écrire dans le domaine fréquentiel :

$$\tau = G(1 + 2i\zeta)\gamma$$

Le radier est de géométrie circulaire de rayon R . On suppose que le cône se déforme en traction-compression lorsque le mouvement du radier est vertical et en cisaillement pur lorsque le mouvement est horizontal. La machine tournante applique au radier une force tournante s'exprimant sous la forme :

$$\begin{cases} f_x = md\Omega^2 \cos \Omega t \\ f_z = md\Omega^2 \sin \Omega t \end{cases}$$

La machine tourne à une vitesse nominale de 50tour/s. Les grandeurs m et d représentent respectivement la masse et l'excentrement du balourd. On étudiera les phases de montée et de descente en négligeant les phases transitoires et en ne regardant que le régime forcé :

$$0 < \Omega < 50 \times 2\pi = 100\pi.$$

Les masses de la machine et du radier valent respectivement $M_1 = 100t$ et $M_2 = 1000t$. L'amortissement matériel du sol sera négligé dans les questions **I** et **II**.

I. Donnez les équations différentielles régissant le mouvement horizontal et le mouvement vertical d'une tranche de sol situé à la profondeur z . Comparez les.

Par la suite, seul le mouvement horizontal sera étudié.

II. Donnez les conditions aux limites. Déduisez-en l'impédance du sol (raideur et amortissement) si l'amortissement hystérétique du sol ζ est négligé. Les résultats seront adimensionnés par rapport à la raideur statique horizontale d'une fondation circulaire de rayon R ($K_{\text{statique}} = \frac{8GR}{2-\nu}$). Donnez la valeur de l'angle α qui vous semble la plus cohérente.

III. Donnez l'impédance du sol lorsque l'amortissement hystérétique du sol n'est plus négligé.

IV. Comparez le modèle de cône ($\alpha > 0$) et le modèle 1D ($\alpha = 0$).

V. Donnez l'équation du mouvement du radier supportant la machine tournant fonctionnant à la vitesse Ω . Discutez l'amplitude et la phase du mouvement selon les valeurs de la vitesse de rotation de la machine. On négligera l'amortissement hystérétique du sol.

VI. On isole maintenant la machine du radier à l'aide d'un support élastique de raideur K' et d'amortissement C' . Donnez l'équation régissant les mouvements du radier et de la machine.

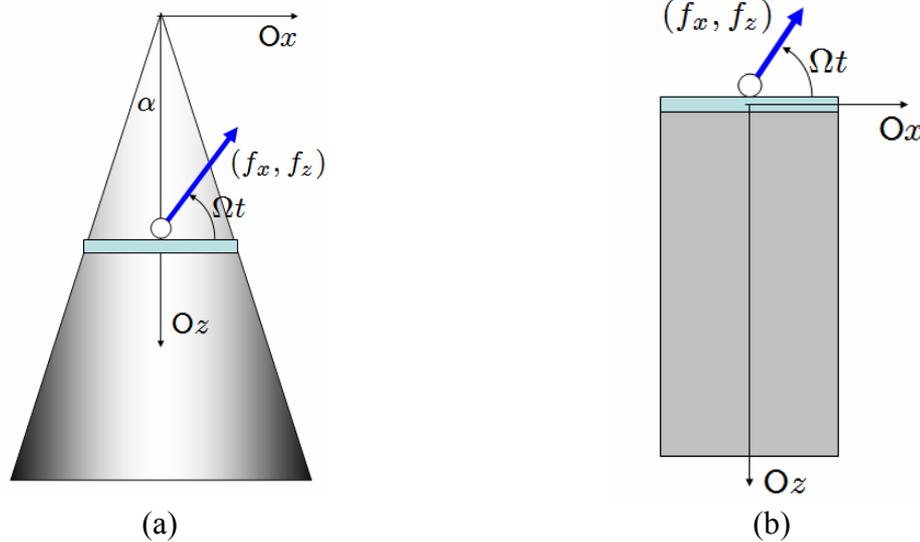


Figure 24 : Modélisation simplifiée du sol (a) Modèle du cône et (b) Modèle 1D

ELEMENTS DE REPONSE

II. $K(\varpi) = K_{\text{statique}} \left(1 + i \frac{(2-\nu)\pi}{8} \varpi \right), \varpi = \omega R/c$

III. $K(\varpi) = K_{\text{statique}} \left(1 - \frac{(2-\nu)\pi\zeta\varpi}{8A} \right) + i\varpi K_{\text{statique}} \left(\frac{A(2-\nu)\pi}{8} + \frac{2\zeta}{\varpi} \right)$

avec $A = \sqrt{0.5\sqrt{1+4\zeta^2}}$

IV. Modèle 1D : $K(\varpi) = GR\pi\varpi i\sqrt{1+2\zeta i}$

V. $u_x(t) = f_x \frac{1}{A}, \quad A = K_{\text{statique}} \left(1 + i \frac{(2-\nu)\pi\Omega R}{8c} - \Omega^2 \frac{M_2}{K_{\text{statique}}} \right)$

VI. Travailler avec un système à deux degrés de liberté.

Exercice 29

Interaction cinématique d'un radier rectangulaire rigide

On considère un radier rectangulaire parfaitement rigide de dimensions $L \times D$. Le radier est sollicité par une onde incidente uniforme dans la direction x , qui se propage dans la direction y avec une vitesse V_a et induit un déplacement dans la direction x . Alors le mouvement du sol peut s'écrire comme intégrale de Fourier:

$$\ddot{u}_{gx}(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(i\bar{\omega}) \exp[i\bar{\omega}(t - \frac{y}{V_a})] d\bar{\omega}$$

Ce mouvement est transmise sur le radier et le met en vibration. Alors il peut s'écrire aussi comme :

$$\ddot{u}_{gx}(y, t) = \sum_1^{\infty} a_{ix}(t) \gamma_i(y)$$

où les fonctions γ_i sont les modes propres du radier qui satisfont la condition d'orthogonalité :

$$\int_0^D \gamma_i(y) \gamma_k(y) dy = 0, \quad i \neq k$$

I. Écrire la fonction $\gamma_1(y)$ qui correspond au premier mode rigide (translation) du radier et la fonction γ_2 qui correspond au deuxième mode rigide du radier (rotation rigide autour de l'axe z).

II. En utilisant la condition d'orthogonalité calculer les coefficients $a_{1x}(t)$ et $a_{2x}(t)$.

III. En ne retenant que le premier mode rigide du radier et en considérant une onde incidente monochromatique, calculer le rapport entre l'amplitude du mouvement libre du sol par rapport à l'amplitude du mouvement transmise au radier.

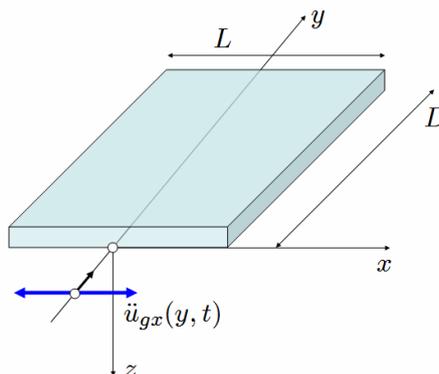


Figure 25 : Radier rectangulaire de grandes dimensions

ELEMENTS DE REPONSE

III.
$$\frac{A_{\text{radier}}}{A_{\text{sol}}} = \frac{1}{k} \sqrt{2(1 - \cos k)}, \quad k = \frac{\bar{\omega} D}{V_a}$$

Interaction fluide - structure

Exercice 30

Calcul de la masse ajoutée de 2 cylindres concentriques séparés par un fluide

On désire calculer la matrice de masse ajoutée du système formé de 2 cylindres rigides de rayons respectifs R_1 et R_2 initialement concentriques. L'espace entre les 2 cylindres est rempli d'un fluide de masse volumique ρ .

Partie 1

I. Rappeler les équations que doivent vérifier les champs de pression et de vitesse du fluide.

II. Rappeler les conditions aux interfaces entre le fluide et chacun des cylindres.

III. Montrer que le champ de pression peut s'écrire sous la forme :

$$p(r, \theta) = ar \cos \theta + br \sin \theta + \frac{c}{r} \cos \theta + \frac{d}{r} \sin \theta$$

IV. Déterminer les constantes a, b, c, d à partir des accélérations de chacun des cylindres.

V. En déduire les forces exercées par le fluide sur chacun des cylindres et la matrice de masse ajoutée.

Partie 2

Donner la matrice de masse ajoutée pour les cas particuliers suivants :

I. Réservoir cylindrique rempli de fluide

II. Pile de pont de rayon R plongé dans un fluide

III. Palier d'une machine tournante (épaisseur du film d'huile mince devant le rayon du cylindre central et le rayon du cylindre extérieur).

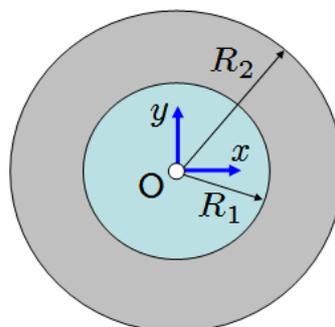


Figure 26 : Système de deux cylindres rempli de liquide

ELEMENTS DE REPONSE**Partie 1 - IV.**

$$a = \frac{\rho R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \ddot{U}_{x,2} - \frac{\rho R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} \ddot{U}_{x,1}$$

$$b = \frac{\rho R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \ddot{U}_{y,2} - \frac{\rho R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} \ddot{U}_{y,1}$$

$$c = \frac{\rho R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} (\ddot{U}_{x,2} - \ddot{U}_{x,1})$$

$$d = \frac{\rho R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} (\ddot{U}_{x,2} - \ddot{U}_{x,1})$$

Exercice 31

Calcul d'une barre partiellement immergée

Utiliser les résultats précédents pour calculer les fréquences et modes propres d'une barre de hauteur $H = 1\text{m}$, de masse $M = 1\text{kg}$ et de section $S = 5\text{cm}^2$ fixée à ces 2 extrémités à 2 ressorts horizontaux de raideur $K = 10\text{kN/m}$ et immergée sur une hauteur de 50cm.

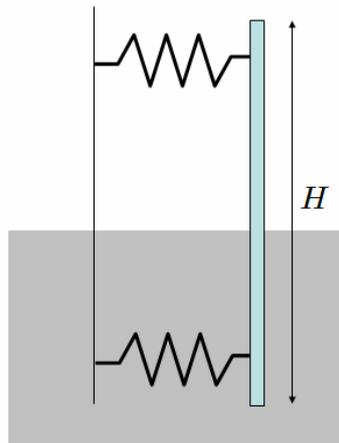


Figure 27 : Barre partiellement immergée