



# Grandes Déformations et Cadre Thermodynamique

————— oOo —————

**C**e chapitre a pour but, dans un premier temps, d'introduire le formalisme induit par les grandes transformations. Le cadre thermodynamique dans lequel s'inscrit notre étude est ensuite posé.

- Sont donc présentées, les différentes grandeurs nécessaires à la formulation d'un problème en grandes déformations.
- Puis nous écrivons, dans ce cadre, les deux principes fondamentaux de la thermodynamique.
- Enfin, nous introduisons la notion d'état intermédiaire, notion majeure dans le reste de ce travail. Un certain nombre de lois, dont la validité est vérifiée par des critères d'objectivité, sont alors déduites.

En résumé, ce chapitre explicite les hypothèses de travail et délimite le cadre de cette étude.

————— oOo —————

## PLAN DU CHAPITRE I

---

<b>I.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>I.2</b>	<b>Formalisme et grandes déformations</b>	<b>7</b>
I.2.1	Définitions et description du mouvement	7
I.2.2	Mesure des déformations	9
I.2.2.a	Définition directe	9
I.2.2.b	Invariant de la transformation	10
I.2.2.c	Décomposition polaire	10
I.2.3	Vitesse de déformation	11
I.2.4	Description des efforts	12
I.2.4.a	Description eulérienne	13
I.2.4.b	Description mixte	13
I.2.4.c	Description lagrangienne	14
I.2.5	Equations d'équilibre	14
<b>I.3</b>	<b>Cadre thermodynamique</b>	<b>17</b>
I.3.1	Principes fondamentaux	17
I.3.1.a	Premier principe (conservation de l'énergie)	17
I.3.1.b	Second principe (inégalité de CLAUSIUS-DUHEM)	18
I.3.2	Variables thermodynamiques et loi de comportement	19
I.3.2.a	Variables d'état	19
I.3.2.b	Potentiel thermodynamique	19
I.3.2.c	Forces et flux thermodynamiques	21
I.3.2.d	Découplage de la dissipation	22
<b>I.4</b>	<b>Lois de comportement</b>	<b>23</b>
I.4.1	Généralités	23
I.4.2	Principe d'objectivité	23
I.4.2.a	Enoncé	23
I.4.2.b	Conséquence	24
I.4.3	Isotropie du matériau	25
I.4.4	Lois d'évolution et potentiel de dissipation	25
<b>I.5</b>	<b>Notion d'état intermédiaire</b>	<b>29</b>
I.5.1	Introduction	29
I.5.2	Généralisation à un phénomène quelconque	30
I.5.3	Principe d'invariance des fonctions constitutives	31
I.5.3.a	Enoncé	31
I.5.3.b	Conséquence sur l'énergie libre	32
I.5.4	Cas des matériaux isotropes	32
I.5.5	Conséquences thermodynamiques	33
I.5.6	Etats intermédiaires et modèles rhéologiques	35
I.5.7	Milieux incompressibles	37
<b>I.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>

---

## I.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est la mise en place d'un cadre thermodynamique, qui servira de référence tout au long de ce travail. Les formulations qui en résultent, doivent être suffisamment générales pour prendre en compte divers phénomènes mécaniques tels que l'hyperélasticité, la plasticité, l'incompressibilité ou l'endommagement et ce, en grandes déformations.

Pour cela, le formalisme dû aux grandes déformations est d'abord introduit. Sont ainsi définis les tenseurs classiques de déformation, de contrainte et de vitesse de déformation.

Puis, partant des deux principes fondamentaux de la thermodynamique et sous certaines hypothèses classiques, un cadre thermodynamique général est proposé.

Par la suite, ce cadre est particularisé au cas des milieux à configurations intermédiaires. Ces milieux sont souvent ramenés à une généralisation aux grandes déformations de modèles rhéologiques dont SIDOROFF [1977] propose une forme générale. Une extension de cette forme est proposée et démontrée dans le cas isotrope. Enfin, le cas particulier de l'incompressibilité est étudié.

## I.2 Formalisme et grandes déformations

### I.2.1 Définitions et description du mouvement

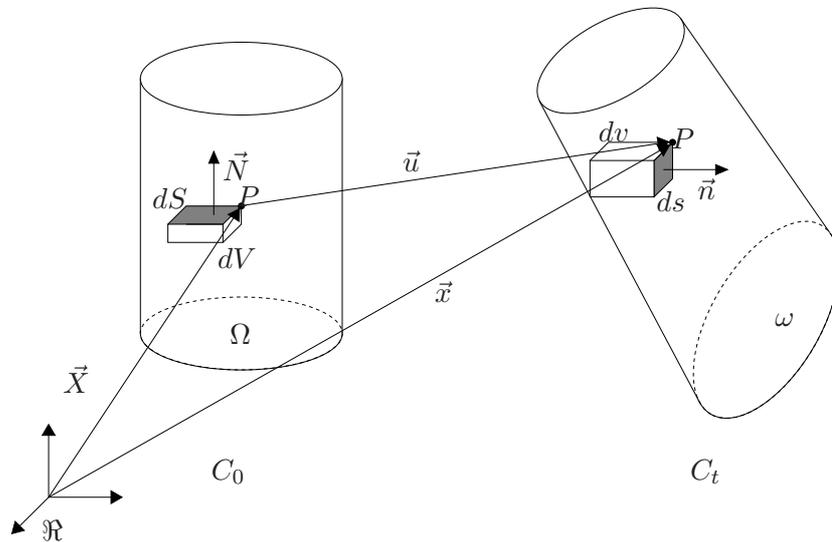


FIGURE I.1 – *Système de configurations.*

Soit un solide  $S$  évoluant dans un référentiel  $\mathfrak{R}$ . Il occupe le domaine  $\Omega$  dans la configuration  $C_0$  que nous considérons comme la configuration initiale. Il occupera à l'instant  $t$  le domaine  $\omega$  dans la configuration  $C_t$  (FIG. I.1).

On peut définir une fonction  $\phi$ , qui à la position  $\vec{X}$  d'une particule  $P$  dans  $C_0$ , associe  $\vec{x}$  sa position dans  $C_t$ :

$$\phi : \begin{cases} C_0 & \longrightarrow & C_t \\ \vec{X} & \longmapsto & \vec{x} = \phi(\vec{X}, t) \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

En introduisant  $\vec{u}$ , le vecteur déplacement, (I.1) peut se mettre sous une forme équivalente:

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t). \quad (\text{I.2})$$

En vue de définir la transformation locale au voisinage de la particule  $P$ , on introduit classiquement l'application linéaire tangente  $\bar{\bar{F}}$  associée à la fonction  $\phi$ . Considérant un vecteur  $d\vec{X}$  dans la configuration initiale, son image  $d\vec{x}$  dans la configuration actuelle s'obtient par la relation:

$$d\vec{x} = \bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X}, \quad (\text{I.3})$$

et de manière indicielle, en utilisant (I.2):

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij}. \quad (\text{I.4})$$

$\bar{\bar{F}}$  (appelé aussi gradient de la transformation) traduit le "transport" de  $C_0$  vers  $C_t$ . L'application linéaire tangente est localement inversible et conserve l'orientation, par conséquent:

$$J = \det(\bar{\bar{F}}) > 0. \quad (\text{I.5})$$

Au niveau local, les lois de transformation, liant un élément de volume  $dV$  ou de surface  $\vec{N}dS$  de  $C_0$  à leurs images respectives  $dv$  et  $\vec{n}ds$  dans  $C_t$ , se déclinent comme suit:

$$\text{pour un élément de volume:} \quad dv = JdV, \quad (\text{I.6})$$

$$\text{pour un élément de surface:} \quad \vec{n}ds = \begin{cases} (\text{cof}\bar{\bar{F}}) \cdot \vec{N}dS \\ J\bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \vec{N}dS. \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

### REMARQUE I.1

D'après (I.6), la condition d'**incompressibilité** du matériau (*i.e.* de conservation de volume) peut être traduite par:

$$\det(\bar{\bar{F}}) = 1. \quad (\text{I.8})$$

Cette condition est couramment utilisée dans la modélisation de matériaux tels que les élastomères. □

**REMARQUE I.2**

Pour un changement de référentiel d'observation, pouvant être vu comme la superposition d'un mouvement de corps rigide – c'est-à-dire la superposition au mouvement d'une rotation  $\bar{\bar{Q}}(t)$ <sup>(1)</sup> et d'une translation  $\bar{c}(t)$  – suivant que l'observateur reste ou non attaché au référentiel d'observation, le gradient de la transformation devient  $\bar{F}^* = \bar{\bar{Q}} \cdot \bar{F}$ . Nous reviendrons ultérieurement sur ce résultat en abordant des considérations d'objectivité (§ I.4.2).  $\square$

**I.2.2 Mesure des déformations**

Le mouvement local du solide peut être décrit par l'application linéaire tangente. Mais, comme nous l'avons vu en remarque I.2, ce tenseur diffère de l'identité pour des mouvements de corps rigide et ne peut donc décrire les "déformations" de ce dernier, une mesure des déformations convenable devant être indépendante des rotations. Tenant compte de cette considération, deux classes de définition peuvent être distinguées.

**I.2.2.a Définition directe**

- Description lagrangienne (configuration  $C_0$ )

On considère  $d\vec{X}$  et  $d\vec{Y}$  deux vecteurs de la configuration  $C_0$ , devenant  $d\vec{x}$  et  $d\vec{y}$  après déformation (dans  $C_t$ ). On a :

$$\begin{aligned} d\vec{x} \cdot d\vec{y} &= (\bar{F} \cdot d\vec{X}) \cdot (\bar{F} \cdot d\vec{Y}) \\ &= d\vec{X} \cdot \bar{F}^T \cdot \bar{F} \cdot d\vec{Y} \\ &= d\vec{X} \cdot \bar{C} \cdot d\vec{Y}. \end{aligned}$$

On définit ainsi le tenseur des dilatations ou tenseur de CAUCHY-GREEN droit :

$$\bar{C} = \bar{F}^T \cdot \bar{F}. \quad (\text{I.9})$$

Considérant les déformations comme une variation de produit scalaire entre deux vecteurs de la configuration actuelle et leurs antécédents dans la configuration initiale, on définit  $\bar{E}$  le tenseur des déformations de GREEN-LAGRANGE par :

$$\bar{E} = \frac{1}{2}(\bar{C} - \bar{1}) \quad \backslash \quad d\vec{x} \cdot d\vec{y} - d\vec{X} \cdot d\vec{Y} = d\vec{X} \cdot \bar{E} \cdot d\vec{Y}. \quad (\text{I.10})$$

- Description eulérienne (configuration  $C_t$ )

De la même manière on définit dans la configuration actuelle le tenseur de CAUCHY-GREEN gauche comme étant :

$$\bar{B} = \bar{F} \cdot \bar{F}^T \quad \backslash \quad d\vec{X} \cdot d\vec{Y} = d\vec{x} \cdot \bar{B}^{-1} \cdot d\vec{y}. \quad (\text{I.11})$$

---

(1).  $\bar{\bar{Q}}$  est un tenseur orthogonal,  $\bar{\bar{Q}}^T \cdot \bar{\bar{Q}} = \bar{1}$

Une mesure des déformations, dans  $C_t$ , peut être caractérisée par  $\bar{\bar{A}}$  le tenseur d'EULER-ALMANZI :

$$\bar{\bar{A}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{1}} - \bar{\bar{B}}^{-1}) \quad \backslash \quad d\vec{x} \cdot d\vec{y} - d\vec{X} \cdot d\vec{Y} = d\vec{x} \cdot \bar{\bar{A}} \cdot d\vec{y}. \quad (\text{I.12})$$

### REMARQUE I.3

Si l'on se ramène dans le cadre des petites perturbations, c'est à dire dans le cas où  $\bar{\bar{F}}$  tend vers le tenseur unité d'ordre 2, la déformation est alors caractérisée, à des termes du second ordre près, par :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\varepsilon}} &= \frac{1}{2}((\nabla u)^T + \nabla u) \\ \bar{\bar{C}} \simeq \bar{\bar{B}} \simeq \bar{\bar{1}} + 2\bar{\bar{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{E}} \simeq \bar{\bar{A}} \simeq \bar{\bar{\varepsilon}} \end{aligned}$$

□

### I.2.2.b Invariant de la transformation

On rappelle ici la définition des trois invariants d'un tenseur  $\bar{\bar{X}}$  :

$$I_1 = \text{tr} \bar{\bar{X}} \quad (\text{I.13a})$$

$$I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr} \bar{\bar{X}})^2 - \text{tr} \bar{\bar{X}}^2) \quad (\text{I.13b})$$

$$I_3 = \det \bar{\bar{X}} \quad (\text{I.13c})$$

### I.2.2.c Décomposition polaire

Une autre manière d'introduire la notion de déformation est d'utiliser l'unique décomposition polaire de  $\bar{\bar{F}}$  :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{V}} \cdot \bar{\bar{R}} = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{U}}, \quad (\text{I.14})$$

avec  $\bar{\bar{V}}$ ,  $\bar{\bar{U}}$  respectivement les tenseurs des déformations pures droit et gauche – tous deux sont symétriques définis positifs – et  $\bar{\bar{R}}$  le tenseur (orthogonal) de rotation. La transformation est ainsi décomposée en deux étapes. Le passage de  $C_0$  à  $C_t$  s'effectue par une rotation puis une déformation, ou l'inverse (FIG. I.2). La symétrie des tenseurs des déformations pures nous permet d'écrire :

$$\bar{\bar{U}}^2 = \bar{\bar{C}}, \quad (\text{I.15a})$$

$$\bar{\bar{V}}^2 = \bar{\bar{B}}, \quad (\text{I.15b})$$

$\bar{\bar{C}}$  et  $\bar{\bar{B}}$  étant symétriques définis positifs, on a :

$$\bar{\bar{U}} = \bar{\bar{C}}^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{I.16a})$$

$$\bar{\bar{V}} = \bar{\bar{B}}^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{I.16b})$$

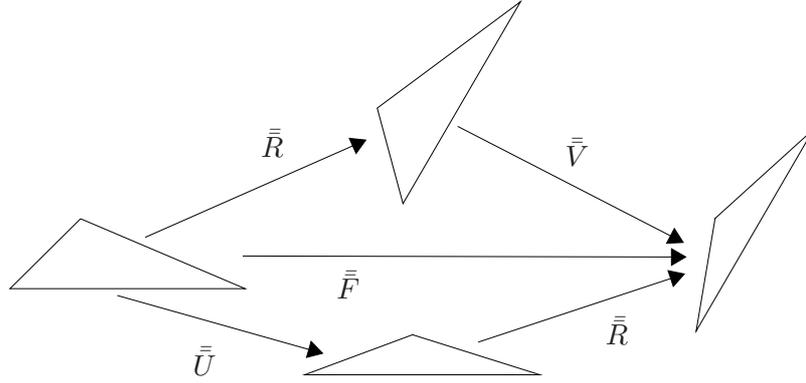


FIGURE I.2 – Décomposition polaire.

De plus étant tous deux égaux à  $\bar{\mathbb{1}}$  pour un déplacement de corps rigide, il est possible de définir les deux familles de mesures de déformation suivantes :

- dans la configuration de référence

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha}(\bar{U}^\alpha - \bar{\mathbb{1}}) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \log \bar{U} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

- dans la configuration actuelle

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha}(\bar{V}^\alpha - \bar{\mathbb{1}}) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \log \bar{V} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

On constate que pour  $\alpha = 2$ , on retrouve dans  $C_0$  le tenseur de GREEN-LAGRANGE et dans  $C_t$  celui d'EULER-ALMANSI.

### I.2.3 Vitesse de déformation

On définit le vecteur vitesse  $\vec{v}$  comme étant la dérivée par rapport au temps de  $\vec{x}(\vec{X}, t)$ . Pour  $\vec{dx}$  de  $C_t$ , il vient :

$$\begin{cases} \vec{dv} = \dot{\vec{dx}} = \dot{\bar{F}} \cdot d\vec{X} = \bar{L} \cdot \vec{dx} \\ \bar{L} = \dot{\bar{F}} \cdot \bar{F}^{-1} = \bar{D} + \bar{W}. \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

$\bar{D}$  et  $\bar{W}$  définissent respectivement les parties symétrique et antisymétrique de  $\bar{L}$ . le tenseur  $\bar{D}$  représente la vitesse de déformation et  $\bar{W}$ , le rotationnel du champ des vitesses. Ce sont respectivement les taux de déformation et de rotation de la transformation.

Si  $\vec{dx}$  et  $\vec{dy}$  sont deux vecteurs de  $C_t$ , il nous faut exprimer la dérivée par rapport au temps de leur produit scalaire.

- Configuration  $C_t$

On a, en configuration eulérienne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{dx} \cdot \vec{dy}) &= \dot{\vec{dx}} \cdot \vec{dy} - \vec{dx} \cdot \dot{\vec{dy}} \\ &= \bar{\bar{L}} \cdot \vec{dx} \cdot \vec{dy} + \vec{dx} \cdot \bar{\bar{L}} \cdot \vec{dy} \text{ d'après (I.19)} \\ &= \vec{dx} \cdot \bar{\bar{L}}^T \cdot \vec{dy} + \vec{dx} \cdot \bar{\bar{L}} \cdot \vec{dy}. \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\frac{d}{dt}(\vec{dx} \cdot \vec{dy}) = 2\vec{dx} \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \vec{dy}. \quad (\text{I.20})$$

- Configuration  $C_0$

On obtient de même en configuration lagrangienne :

$$\frac{d}{dt}(\vec{dx} \cdot \vec{dy}) = 2d\vec{X} \cdot \dot{\bar{\bar{E}}} \cdot d\vec{Y}. \quad (\text{I.21})$$

On vérifie que  $\dot{\bar{\bar{E}}} = \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \bar{\bar{F}}$ , confirmant que  $\dot{\bar{\bar{E}}}$  et  $\bar{\bar{D}}$  sont les transportés l'un de l'autre.

#### I.2.4 Description des efforts

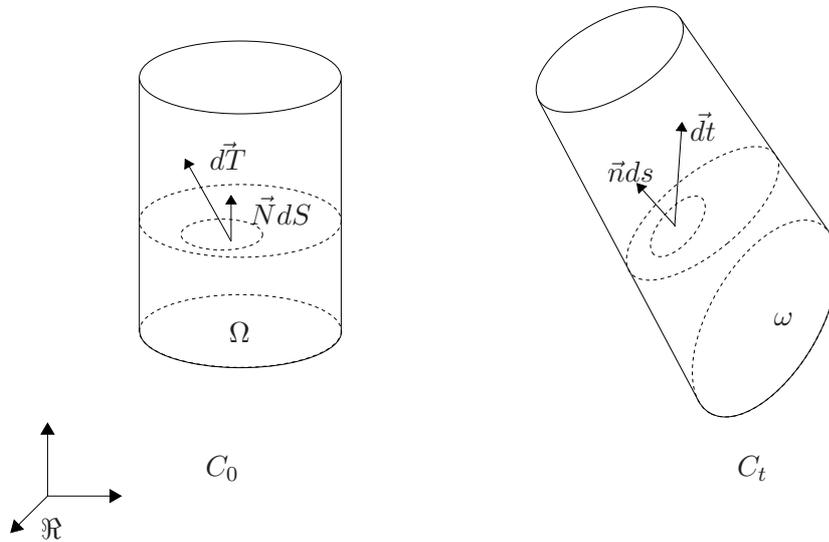


FIGURE I.3 – *Etat de contrainte dans les différentes configurations.*

Trois descriptions peuvent être utilisées pour définir l'état de contrainte dans un solide, suivant que l'on considère :

- les efforts intérieurs de cohésion dans la configuration actuelle ( $\vec{dt}$ , voir FIG. I.3) à travers un élément de surface déformé ( $\vec{n}ds$ ),
- les mêmes efforts à travers un élément de surface non déformé ( $\vec{N}dS$ ),

- ou encore le transport des effort de cohésion ( $d\vec{T}$ ) à travers un élément de surface non déformé ( $\vec{n}ds$ ).

Ces approches définissent respectivement les descriptions **eulérienne**, **mixte** et **lagrangienne**.

#### I.2.4.a Description eulérienne

Comme nous l'avons expliqué précédemment, on considère les efforts intérieurs de cohésion exercés par une partie du solide sur l'autre, à travers un élément de surface  $\vec{n}ds$ . On définit  $\bar{\sigma}$  le tenseur des contraintes de CAUCHY de façon analogue aux petites déformations comme étant :

$$\vec{dt} = \bar{\sigma} \cdot \vec{n}ds. \quad (\text{I.22})$$

$\bar{\sigma}$  représente donc les efforts de cohésion réellement exercés à travers un élément de surface déformée et par unité de surface déformée. En l'absence de densité de couple, il est symétrique.

$$\bar{\sigma} : \begin{cases} C_t & \longrightarrow C_t \\ \vec{n}ds & \longmapsto \vec{dt} = \bar{\sigma} \cdot \vec{n}ds \end{cases} \quad (\text{I.23})$$

#### I.2.4.b Description mixte

Il peut être utile de pouvoir raisonner sur la configuration de référence, par exemple pour l'application de conditions aux limites. Le transport de l'élément de surface  $\vec{n}ds$  dans cette configuration par (I.7), permet d'obtenir :

$$\vec{dt} = \bar{\sigma} \cdot J\bar{F}^{-T} \cdot \vec{N}dS,$$

soit, en définissant  $\bar{\pi}$  le premier tenseur de PIOLA-KIRCHOFF :

$$\begin{cases} \bar{\pi} = J\bar{\sigma} \cdot \bar{F}^{-T}, \\ \vec{dt} = \bar{\pi} \cdot \vec{N}dS. \end{cases} \quad (\text{I.24})$$

$\bar{\pi}$  est non symétrique. On parle de description mixte des contraintes car  $\bar{\pi}$ , tout comme  $\bar{F}$ , n'est ni lagrangien, ni eulérien, il définit une application de  $C_0$  dans  $C_t$ . Physiquement, il représente les efforts de cohésion réellement exercés à travers un élément de surface déformée par unité de surface non déformée.

$$\bar{\pi} : \begin{cases} C_0 & \longrightarrow C_t \\ \vec{N}dS & \longmapsto \vec{dt} = \bar{\pi} \cdot \vec{N}dS \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

### I.2.4.c Description lagrangienne

L'obtention d'une description complètement lagrangienne de l'état de contrainte nécessite le transport de l'effort réel de cohésion  $\vec{d}t$  dans la configuration de référence :

$$\begin{aligned} \vec{d}T &= \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \vec{d}t = J\bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \vec{N}dS \\ &= \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\pi}} \cdot \vec{N}dS. \end{aligned}$$

On introduit ainsi  $\bar{\bar{S}}$  le second tenseur de PIOLA-KIRCHOFF tel que :

$$\begin{cases} \bar{\bar{S}} = J\bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T} = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\pi}}, \\ \vec{d}T = \bar{\bar{S}} \cdot \vec{N}dS. \end{cases} \quad (\text{I.26})$$

$\bar{\bar{S}}$  n'a pas de signification physique mais présente la particularité d'être symétrique.

$$\bar{\bar{S}} : \begin{cases} C_0 & \longrightarrow C_0 \\ \vec{N}dS & \longmapsto \vec{d}T = \bar{\bar{S}} \cdot \vec{N}dS \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

### I.2.5 Equations d'équilibre

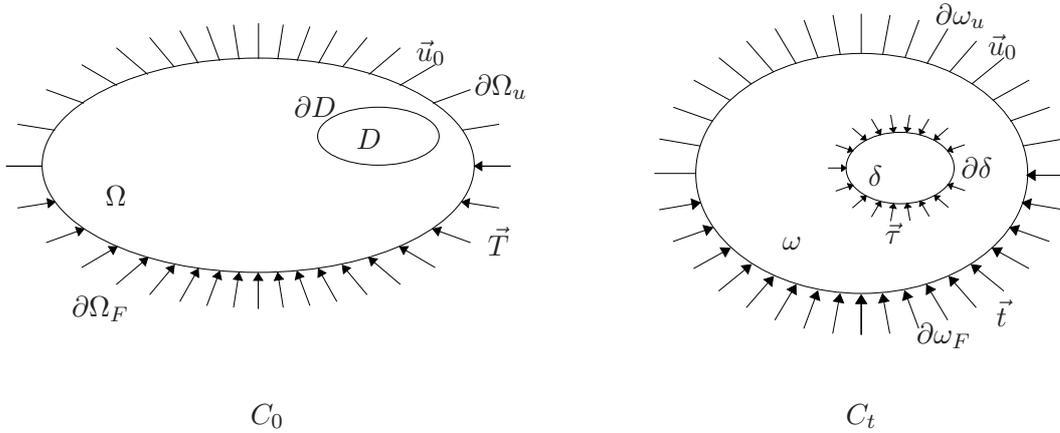


FIGURE I.4 – Conditions limites dans les configurations de référence et actuelle.

On définit dans la configuration actuelle (FIG. I.4) :

- $\omega$ , le domaine occupé par le solide dans cette configuration ;
- $\partial\omega$ , sa surface ;
- $\partial\omega_u$  et  $\partial\omega_F$  respectivement les sous domaines de  $\partial\omega$  sur lesquels on applique un déplacement imposé  $\vec{u}_0$  ou une densité surfacique de force par unité de surface déformée  $\vec{t}$  ( $\partial\omega_u \cup \partial\omega_F = \partial\omega$  et  $\partial\omega_u \cap \partial\omega_F = \emptyset$ ) ;
- $\delta$  un élément de volume dans la configuration déformée ;
- et  $\vec{\tau}$  les efforts de cohésion exercés à travers l'élément de surface  $\partial\delta$ .

Dans la configuration de référence,  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$ ,  $\partial\Omega_u$ ,  $\partial\Omega_F$ ,  $D$  et  $\partial D$  sont respectivement les transportés de  $C_t$  vers  $C_0$  par l'intermédiaire de  $\bar{F}^{-1}$  de  $\omega$ ,  $\partial\omega$ ,  $\partial\omega_u$ ,  $\partial\omega_F$ ,  $\delta$  et  $\partial\delta$ .  $\vec{T}$  est la densité surfacique de force exprimée dans  $C_0$ .

**REMARQUE I.4**

On peut remarquer que le déplacement imposé reste le même dans  $C_0$  et  $C_t$ . Quant aux densités surfaciques de force, elles doivent vérifier :

$$\vec{t}ds = \vec{T}dS. \quad (\text{I.28})$$

Il sera plus commode d'utiliser une formulation lagrangienne (resp. eulérienne) dans le cas d'une densité surfacique de force par unité de surface dans  $C_0$  (resp.  $C_t$ ).  $\square$

• Equation d'équilibre et conditions aux limites en configuration instantanée

L'écriture de la **conservation de la quantité de mouvement**, traduisant dans la configuration actuelle, l'équilibre du sous domaine  $\delta$ , donne :

$$\int_{\partial\delta} \vec{\tau}ds + \int_{\delta} \rho\vec{f}dv = \vec{0}, \quad (\text{I.29})$$

où  $\rho$  est la densité de masse par unité de volume dans la configuration actuelle et  $\vec{f}$  la densité massique de force.

On obtient dans la configuration actuelle, en utilisant le théorème de la divergence et après avoir injecté (I.22) dans (I.29) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x \vec{\sigma} + \rho\vec{f} = \vec{0} & \text{sur } \omega \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{t} & \text{sur } \partial\omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\omega_u \end{cases} \quad (\text{I.30})$$

• Equation d'équilibre et conditions limites en configuration de référence

Si on note  $\rho_0$  la densité de masse par unité de volume dans la configuration de référence, l'équation de la **conservation de la masse** et (I.6) nous donne :

$$\rho dv = \rho_0 dV \text{ soit } \rho_0 = J\rho. \quad (\text{I.31})$$

En se servant des lois de transformation (I.6) et (I.7) pour changer les domaines d'intégration de (I.29), il est alors possible d'écrire dans la configuration  $C_0$  :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_X \bar{\pi} + \rho_0\vec{f} = \vec{0} & \text{sur } \Omega \\ \bar{\pi} \cdot \vec{N} = \vec{T} & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

**REMARQUE I.5**

Dans le cas des petites perturbations,  $\bar{F}$  tendant vers l'unité, les expressions dans  $C_0$  et  $C_t$  des différents domaines (volumiques ou surfaciques) se confondent et de plus  $\bar{\sigma} \simeq \bar{\pi} \simeq S$ . Les contraintes sont alors généralement désignées par le tenseur de CAUCHY vérifiant les équations d'équilibre et les conditions aux limites (I.30). □

## I.3 Cadre thermodynamique

### I.3.1 Principes fondamentaux

De manière analogue à l'approche en petites perturbations, on traduit dans un premier temps la conservation de l'énergie par le biais du premier principe, puis nous aboutirons à partir de l'expression du second principe à l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM. Ces deux résultats seront exprimés en configurations eulérienne, lagrangienne et mixte.

#### I.3.1.a Premier principe (conservation de l'énergie)

D'après GERMAIN [1986], si l'on considère le solide  $S$  (FIG. I.1) occupant  $\Omega$  (resp.  $\omega$ ) en configuration  $C_0$  (resp.  $C_t$ ), et si l'on appelle  $\mathcal{E}$  et  $e$  son énergie interne et son énergie interne spécifique,  $\mathcal{P}_{int}$  la puissance des efforts intérieurs et  $\mathcal{Q}$  le taux de chaleur reçu, on a :

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{Q}. \quad (\text{I.33})$$

Dés lors, il est possible d'exprimer chaque terme de (I.33) en configuration initiale ou instantanée :

- $\mathcal{E}$  s'exprime à partir de sa valeur spécifique :

$$\mathcal{E} = \int_{\omega} \rho e dv = \int_{\Omega} \rho_0 e dV. \quad (\text{I.34})$$

- La puissance des efforts intérieurs est obtenue par intégration de sa valeur massique. Cette dernière est déduite de l'écriture du principe des puissances virtuelles et est égale au produit d'une grandeur cinématique avec son dual en contrainte<sup>(2)</sup>. Il vient alors :

$$-\mathcal{P}_{int} = \int_{\omega} \bar{\sigma} : \bar{D} dv = \int_{\Omega} \bar{S} : \dot{\bar{E}} dV = \int_{\Omega} \bar{\pi} : \dot{\bar{F}} dV. \quad (\text{I.35})$$

- Enfin, le taux de chaleur peut être décomposé en un apport massique  $r$  et une perte surfacique  $\vec{q}$  (resp.  $\vec{Q}$ ) au travers de la frontière  $\partial\omega$  (resp.  $\partial\Omega$ ) ;  $\vec{n}$  (resp.  $\vec{N}$ ) représente la normale sortante à  $\partial\omega$  (resp.  $\partial\Omega$ )

$$\mathcal{Q} = \int_{\omega} \rho r dv - \int_{\partial\omega} \vec{q} \cdot \vec{n} ds = \int_{\Omega} \rho_0 r dV - \int_{\partial\Omega} \vec{Q} \cdot \vec{N} dS, \quad (\text{I.36})$$

en considérant  $\vec{Q}$  l'expression lagrangienne du flux de chaleur :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} ds = \vec{Q} \cdot \vec{N} dS. \quad (\text{I.37})$$

Ceci permet d'obtenir trois expressions de la conservation de l'énergie :

- formulation eulérienne :

$$\rho \dot{e} = \bar{\sigma} : \bar{D} + \rho r - \text{div}_x \vec{q}, \quad (\text{I.38})$$

---

(2). les tenseurs duaux des grandeurs cinématiques  $\bar{D}$ ,  $\dot{\bar{E}}$  et  $\dot{\bar{F}}$  sont obtenus par écriture du théorème des puissances virtuelles.

– formulation lagrangienne :

$$\rho_0 \dot{e} = \bar{\bar{S}} : \dot{\bar{E}} + \rho_0 r - \operatorname{div}_X \bar{Q}, \quad (\text{I.39})$$

– formulation mixte :

$$\rho_0 \dot{e} = \bar{\bar{\pi}} : \dot{\bar{F}} + \rho_0 r - \operatorname{div}_X \bar{Q}. \quad (\text{I.40})$$

### I.3.1.b Second principe (inégalité de CLAUSIUS-DUHEM)

$\mathcal{S}$  définit l'entropie du système,  $\eta$  sa densité massique ;  $\mathcal{T}_{ext}$  est le taux de chaleur reçu par le système, divisé par la température  $T$ . Dès lors, l'inégalité fondamentale pour un système non adiabatique s'écrit :

$$\dot{\mathcal{S}} - \mathcal{T}_{ext} \geq 0, \quad (\text{I.41})$$

$$\text{où } \mathcal{S} = \int_{\omega} \rho \eta dv = \int_{\Omega} \rho_0 \eta dV \quad (\text{I.42})$$

$$\text{et } \mathcal{T}_{ext} = \int_{\omega} \frac{\rho r}{T} dv - \int_{\partial\omega} \frac{\bar{q} \cdot \bar{n}}{T} ds = \int_{\Omega} \frac{\rho_0 r}{T} dV - \int_{\partial\Omega} \frac{\bar{Q} \cdot \bar{N}}{T} dS. \quad (\text{I.43})$$

Il vient alors localement dans  $C_t$  et  $C_0$  :

$$\underbrace{\rho \dot{\eta} - \frac{\rho r}{T} + \bar{q} \cdot \operatorname{grad}_x \frac{1}{T}}_{\phi : \text{dissipation dans } C_t} \geq 0, \quad (\text{I.44})$$

$$\underbrace{\rho_0 \dot{\eta} - \frac{\rho_0 r}{T} + \bar{Q} \cdot \operatorname{grad}_X \frac{1}{T}}_{\phi_0 : \text{dissipation dans } C_0} \geq 0. \quad (\text{I.45})$$

En introduisant (I.38) dans (I.44) et (I.39) ou (I.40) dans (I.45), trois expressions du second principe (ou inégalité de CLAUSIUS-DUHEM) sont obtenues :

– formulation eulérienne :

$$\phi = -\rho(\dot{e} - T\dot{\eta}) - \frac{1}{T} \bar{q} \cdot \operatorname{grad}_x T + \bar{\sigma} : \bar{D} \geq 0, \quad (\text{I.46})$$

– formulation lagrangienne :

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{e} - T\dot{\eta}) - \frac{1}{T} \bar{Q} \cdot \operatorname{grad}_X T + \bar{\bar{S}} : \dot{\bar{E}} \geq 0, \quad (\text{I.47})$$

– formulation mixte :

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{e} - T\dot{\eta}) - \frac{1}{T} \bar{Q} \cdot \operatorname{grad}_X T + \bar{\bar{\pi}} : \dot{\bar{F}} \geq 0. \quad (\text{I.48})$$

## I.3.2 Variables thermodynamiques et loi de comportement

### I.3.2.a Variables d'état

De manière générale, la connaissance de l'état en un point d'un matériau dépend de l'histoire de la transformation en tout point. Cette description est bien souvent trop générale pour être appliquée. Pour cette raison, nous choisissons de limiter notre étude au cadre défini par l'hypothèse  $\mathcal{H}$ . I.1.

#### HYPOTHÈSE I.1

Dans ce qui suit, nous adoptons la méthode de l'**état local**, telle qu'elle est exposée dans [LEMAÎTRE et CHABOCHE, 1985] : la connaissance en un point d'un certain nombre de variables permet de complètement déterminer l'état thermodynamique en ce point. Les dérivées par rapport au temps de ces variables n'interviennent pas dans la définition de l'état, l'évolution sera donc considérée comme une succession d'états d'équilibre.

Sous cette hypothèse, deux types de variables sont distinguées :

- Les **variables observables** qui sont directement accessibles par la mesure. Par la suite nous considérerons comme variable thermodynamique observable, le couple ("mesure de déformation" + température). Ce choix équivaut à considérer le couple  $(\bar{\bar{F}}, T)$ , car les mesures de déformation sont uniquement des fonctions du gradient de la transformation ;
- Les **variables internes** qui sont introduites pour décrire les phénomènes complexes tels que la plasticité, l'endommagement ou encore la viscosité. Suivant la complexité du phénomène auquel elles se rapportent, ces variables seront de différents types, scalaire ou tensoriel. On pourra montrer que l'introduction de variables internes scalaires sera quelquefois insuffisante pour la description de phénomènes complexes tels que la viscosité non linéaire [SIDOROFF, 1974], obligeant la mise en place de variables cachées de type tensoriel.

#### REMARQUE I.6

Il paraît évident que, plus le nombre de variables internes est important, plus le modèle est complexe d'un point de vue thermodynamique et plus son implantation numérique est difficile (nous reviendrons sur ce dernier point dans les chapitres suivants). Il faut donc identifier les phénomènes prépondérants dans le comportement du matériau, afin d'introduire un nombre de variables suffisant mais non excessif vis-à-vis de la précision désirée.  $\square$

### I.3.2.b Potentiel thermodynamique

On postule l'existence d'un potentiel thermodynamique énergie libre spécifique de HELMHOLTZ dépendant des variables thermodynamiques introduites § I.3.2.a. L'existence d'une telle

énergie libre est discutée par MOREAU [1979] dans le cas élastique. Pour notre part, nous supposons que les conditions mises en avant dans cette étude sont vérifiées et généralisables aux descriptions avec variables internes.

$$\psi = e - \eta T. \quad (\text{I.49})$$

Si l'on introduit (I.49) dans (I.46), (I.47) et (I.48), trois nouvelles formes de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM sont mises en exergue :

– formulation eulérienne :

$$\phi = -\rho(\dot{\psi} + \eta\dot{T}) - \frac{1}{T}\vec{q} \cdot \text{grad}_x T + \bar{\sigma} : \bar{D} \geq 0, \quad (\text{I.50})$$

– formulation lagrangienne :

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{\psi} + \eta\dot{T}) - \frac{1}{T}\vec{Q} \cdot \text{grad}_X T + \bar{S} : \dot{\bar{E}} \geq 0, \quad (\text{I.51})$$

– formulation mixte :

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{\psi} + \eta\dot{T}) - \frac{1}{T}\vec{Q} \cdot \text{grad}_X T + \bar{\pi} : \dot{\bar{F}} \geq 0. \quad (\text{I.52})$$

On note  $\mathcal{A}_i$  les variables internes dans  $C_0$  et  $\alpha_i$ , leurs homologues dans  $C_t$ . On rappelle que " $\bullet$ " désigne le produit contracté sur le nombre d'ordre suffisant pour que le résultat obtenu soit un scalaire. On montre en annexe A que (I.50), (I.51) et (I.52) prennent la forme :

– formulation eulérienne

$$\phi = (\bar{\sigma} - 2\rho\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}}) : \bar{L}^T - \rho(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \bullet \dot{\alpha}_i - \frac{1}{T}\vec{q} \cdot \text{grad}_x T \geq 0 \quad (\text{I.53})$$

– formulation lagrangienne

$$\phi_0 = (\bar{S} - \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\bar{E}}) : \dot{\bar{E}} - \rho_0(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathcal{A}_i} \bullet \dot{\mathcal{A}}_i - \frac{1}{T}\vec{Q} \cdot \text{grad}_X T \geq 0 \quad (\text{I.54})$$

– formulation mixte

$$\phi_0 = \bar{F}^{-1} \cdot (\bar{\pi} - 2\rho_0\bar{F} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{C}}) : \dot{\bar{E}} - \rho_0(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathcal{A}_i} \bullet \dot{\mathcal{A}}_i - \frac{1}{T}\vec{Q} \cdot \text{grad}_X T \geq 0 \quad (\text{I.55})$$

### REMARQUE I.7

L'introduction de  $h$ , l'enthalpie libre volumique de GIBBS, permet de substituer un tenseur des contraintes ( $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\pi}$  ou  $\bar{S}$ ) à une mesure de déformation. Le passage de  $h$  à  $\psi$  s'effectue par une transformée de LEGENDRE-FENCHEL.  $\square$

## I.3.2.c Forces et flux thermodynamiques

**HYPOTHÈSE I.2**

On suppose que la dissipation ( $\phi$  ou  $\phi_0$ ) résulte uniquement des déformations totales, des variables internes et de la conduction thermique. Ceci conduit à la relation :

$$\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial T}. \quad (\text{I.56})$$

Cette hypothèse nous conduit à réécrire (I.53), (I.54) et (I.55) sous les formes suivantes :

– formulation eulérienne

$$\phi = \bar{\sigma}_v : \bar{L}^T + w_i \bullet \dot{\alpha}_i - \frac{1}{T} \bar{q} \cdot \text{grad}_x T \geq 0 \quad (\text{I.57})$$

$$\text{avec} \begin{cases} \bar{\sigma}_v = \bar{\sigma} - 2\rho \bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial \bar{B}}, \\ w_i = -\rho \frac{\partial\psi}{\partial \alpha_i}. \end{cases} \quad (\text{I.58})$$

– formulation lagrangienne

$$\phi_0 = \bar{S}_v : \dot{\bar{E}} + \mathcal{W}_i \bullet \dot{\mathcal{A}}_i - \frac{1}{T} \bar{Q} \cdot \text{grad}_X T \geq 0 \quad (\text{I.59})$$

$$\text{avec} \begin{cases} \bar{S}_v = \bar{S} - \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial \bar{E}}, \\ \mathcal{W}_i = -\rho \frac{\partial\psi}{\partial \mathcal{A}_i}. \end{cases} \quad (\text{I.60})$$

– formulation mixte

$$\phi_0 = \bar{F}^{-1} \cdot \bar{\pi}_v : \dot{\bar{E}} + \mathcal{W}_i \bullet \dot{\mathcal{A}}_i - \frac{1}{T} \bar{Q} \cdot \text{grad}_X T \geq 0 \quad (\text{I.61})$$

$$\text{avec} \begin{cases} \bar{\pi}_v = \bar{\pi} - 2\rho_0 \bar{F} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial \bar{C}}, \\ \mathcal{W}_i = -\rho \frac{\partial\psi}{\partial \mathcal{A}_i}. \end{cases} \quad (\text{I.62})$$

Les relations (I.58), (I.60) et (I.62) constituent les **lois d'état** du matériau.

La dissipation est donc la somme des produits **forces / flux thermodynamiques** définis ci-après :

	description eulérienne			description mixte			description lagrangienne		
force	$\bar{\sigma}_v$	$w_i$	$\frac{-\text{grad}_x T}{T}$	$\bar{F}^{-1} \cdot \bar{\pi}_v$	$\mathcal{W}_i$	$\frac{-\text{grad}_X T}{T}$	$\bar{S}_v$	$\mathcal{W}_i$	$\frac{-\text{grad}_X T}{T}$
flux	$\bar{L}^T$	$\dot{\alpha}_i$	$\vec{q}$	$\dot{\bar{E}}$	$\dot{\mathcal{A}}_i$	$\vec{Q}$	$\dot{\bar{E}}$	$\dot{\mathcal{A}}_i$	$\vec{Q}$

TABLEAU I.1 – Forces et flux thermodynamiques.

### I.3.2.d Découplage de la dissipation

$\phi$  (resp.  $\phi_0$ ) la dissipation dans  $C_t$  (resp.  $C_0$ ) peut être décomposée en une contribution purement thermique  $\phi^{ther}$  (resp.  $\phi_0^{ther}$ ) et une contribution purement mécanique, notée  $\phi^{int}$  (resp.  $\phi_0^{int}$ ) et appelée **dissipation intrinsèque** :

$$\phi = \underbrace{\bar{\sigma}_v : \bar{L}^T + w_i \bullet \dot{\alpha}_i}_{\phi^{int}} - \underbrace{\frac{1}{T} \vec{q} \cdot \text{grad}_x T}_{\phi^{ther}} \geq 0, \quad (\text{I.63})$$

$$\phi_0 = \underbrace{\bar{S}_v : \dot{\bar{E}} + \mathcal{W}_i \bullet \dot{\mathcal{A}}_i}_{\phi_0^{int}} - \underbrace{\frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \text{grad}_X T}_{\phi_0^{ther}} \geq 0, \quad (\text{I.64})$$

$$\phi_0 = \underbrace{\bar{F}^{-1} \cdot \bar{\pi}_v : \dot{\bar{E}} + \mathcal{W}_i \bullet \dot{\mathcal{A}}_i}_{\phi_0^{int}} - \underbrace{\frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \text{grad}_X T}_{\phi_0^{ther}} \geq 0. \quad (\text{I.65})$$

#### HYPOTHÈSE I.3

On suppose que les dissipations intrinsèque et thermique sont séparément positives et ce, indépendamment de la configuration [GERMAIN, 1973].

$$\phi^{int} \geq 0 \text{ et } \phi^{ther} \geq 0 \quad (\text{I.66})$$

$$\phi_0^{int} \geq 0 \text{ et } \phi_0^{ther} \geq 0 \quad (\text{I.67})$$

Cette dernière hypothèse est classiquement utilisée. On pourra notamment citer les travaux fondamentaux de SIDOROFF [1975a,b, 1976] pour lesquels elle est un des postulats de base.

## I.4 Lois de comportement

### I.4.1 Généralités

Dans le cas général, une loi de comportement prend la forme [SIDOROFF, 1982] :

$$\bar{\bar{X}}(t) = \mathcal{F}(\bar{\bar{F}}(\tau)),$$

où  $\mathcal{F}$  est une fonctionnelle "histoire des déformations" traduisant que la contrainte en un point à l'instant  $t$  dépend de l'ensemble des déformations subies par le matériau en tout point jusqu'à cet instant.

Or dans un but simplificateur, l'hypothèse de l'état local (cf. § I.3.2.a,  $\mathcal{H}$ . I.1) a précédemment été postulée. Sous cette hypothèse, on a pu voir que le milieu est entièrement défini – la connaissance des contraintes en tout point et sans distinction de description – par la connaissance de l'état des déformations, de la température et des variables internes. On peut résumer ceci par :

$$\bar{\bar{X}} = \mathcal{F}(\bar{\bar{F}}, T, \mathcal{K}_i), \quad (\text{I.68})$$

$\bar{\bar{X}}$ ,  $\mathcal{K}_i$  représentant suivant la description des efforts :

Description	$\bar{\bar{X}}$	$\mathcal{K}_i$
eulérienne	$\bar{\bar{\sigma}}$	$\alpha_i$
lagrangienne	$\bar{\bar{S}}$	$\mathcal{A}_i$
mixte	$\bar{\bar{\pi}}$	$\mathcal{A}_i$

Seront distinguées dans (I.68), les  $M$  variables internes de type scalaire  $k_m$  (invariantes dans tout changement de référentiel) et les  $N$  variables tensorielles  $\bar{\bar{K}}_n$ . Ceci implique pour (I.68) :

$$\bar{\bar{X}} = \mathcal{F}(\bar{\bar{F}}, T, k_1, \dots, k_M, \bar{\bar{K}}_1, \dots, \bar{\bar{K}}_N). \quad (\text{I.68b})$$

### I.4.2 Principe d'objectivité

#### I.4.2.a Enoncé

Par respect du **principe d'objectivité** ou d'**indifférence matérielle**, une formulation de loi de comportement ne doit dépendre que du matériau et en aucun cas du référentiel d'observation (en particulier dans le cas de mouvement de corps rigide, cf. remarque I.2).

Le symbole "\*" désigne une variable après changement de référentiel, la nouvelle description étant obtenue par une rotation  $\bar{\bar{Q}}$  et une translation  $\bar{\bar{c}}(t)$  si bien que :

$$\bar{\bar{F}}^* = \bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{F}} \quad (\text{I.69})$$

et que les tenseurs  $\bar{\bar{X}}$  de (I.68) sont donnés par :

Description	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}}^*$
eulérienne	$\bar{\bar{\sigma}}$	$\bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{Q}}^T$
lagrangienne	$\bar{\bar{S}}$	$\bar{\bar{S}}$
mixte	$\bar{\bar{\pi}}$	$\bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{\pi}}$

Le tableau ci-dessus montre que les grandeurs eulériennes et mixtes ne sont pas indépendantes du référentiel de description.

De manière générale, on dira :

- qu'un tenseur  $\bar{\bar{a}}$  eulérien est objectif si et seulement si il se transforme comme  $\bar{\bar{\sigma}}$  :

$$\bar{\bar{a}}^* = \bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{Q}}^T,$$

- qu'un tenseur  $\bar{\bar{a}}$  mixte est objectif si et seulement si il se transforme comme  $\bar{\bar{\pi}}$  :

$$\bar{\bar{a}}^* = \bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{a}},$$

- qu'un tenseur  $\bar{\bar{a}}$  lagrangien est objectif si et seulement si il se transforme comme  $\bar{\bar{S}}$  :

$$\bar{\bar{a}}^* = \bar{\bar{a}}.$$

La loi de comportement (I.68) sera dite objective si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{K}}_i \text{ est objectif } \forall i \in 1 \dots n \\ \mathcal{F}(\bar{\bar{F}}, T, k_1, \dots, k_M, \bar{\bar{K}}_1, \dots, \bar{\bar{K}}_N) = \mathcal{F}^*(\bar{\bar{F}}^*, T, k_1, \dots, k_M, \bar{\bar{K}}_1^*, \dots, \bar{\bar{K}}_N^*) \end{array} \right. \quad (\text{I.70})$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{F}^* = \bar{\bar{Q}}^T \cdot \mathcal{F} \cdot \bar{\bar{Q}} & \text{si } \bar{\bar{X}} \text{ est eulérien} \\ \mathcal{F}^* = \bar{\bar{Q}}^T \cdot \mathcal{F} & \text{si } \bar{\bar{X}} \text{ est mixte} \\ \mathcal{F}^* = \mathcal{F} & \text{si } \bar{\bar{X}} \text{ est lagrangien} \end{array} \right.$$

### REMARQUE I.8

Il peut arriver que  $\mathcal{F}$  soit fonction de dérivées temporelles de tenseurs objectifs. Généralement, ces dernières grandeurs ne sont pas objectives ( $\frac{d}{dt}\bar{\bar{a}}^* \neq \bar{\bar{Q}} \cdot \frac{d}{dt}\bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{Q}}^T$ ). Dans ce cas, il faudra s'efforcer de faire intervenir des dérivées objectives telles que les dérivées de TRUSDELL ou de JAUMANN.  $\square$

### I.4.2.b Conséquence

De manière générale, la fonction énergie libre spécifique est fonction du gradient de la transformation et des variables internes (lagrangiennes ou eulériennes). Une condition nécessaire à la

vérification du principe d'objectivité est l'invariance de  $\psi$  par la transformation (I.69) :

$$\psi(\bar{F}, T, \mathcal{K}_i) = \psi(\bar{Q} \cdot \bar{F}, T, \mathcal{K}_i^*). \quad (\text{I.71})$$

On considère des variables internes lagrangiennes et objectives ( $\mathcal{K}_i^* = \mathcal{K}_i$ ). La propriété (I.71) devant être vérifiée quelque soit  $\bar{Q}$ , elle l'est en particulier pour  $\bar{R}$ , le tenseur des rotations (cf. (I.14)). La grandeur  $\psi$  peut donc être considérée fonction de  $\bar{U}$  ou encore de  $\bar{C}$  d'après (I.16a) :

$$\psi = \psi(\bar{C}, T, \mathcal{K}_i). \quad (\text{I.72})$$

### I.4.3 Isotropie du matériau

L'**isotropie** matérielle se traduit par une invariance des différentes lois constitutives par toute rotation de la configuration de référence, c'est-à-dire une invariance par la transformation :

$$\begin{cases} \bar{F}^\diamond = \bar{F} \cdot \bar{P}^T \\ \text{avec } \bar{P} \text{ tenseur orthogonal indépendant du temps.} \end{cases} \quad (\text{I.73})$$

$\psi$  doit vérifier :

$$\begin{aligned} \psi(\bar{C}, T, \mathcal{K}_i) &= \psi(\bar{C}^\diamond, T, \mathcal{K}_i) \\ &= \psi(\bar{P} \cdot \bar{C} \cdot \bar{P}^T, T, \mathcal{K}_i) \quad \forall \bar{P} \text{ orthogonal.} \end{aligned} \quad (\text{I.74})$$

Cette dernière égalité entraîne la condition nécessaire suivante : si un matériau est isotrope, alors sa fonction énergie libre est une fonction scalaire isotrope de la variable  $\bar{C}$ <sup>(3)</sup>. Par conséquent, la dépendance de  $\psi$  par rapport à  $\bar{C}$  se fait par l'intermédiaire de ces invariants (cf. (I.13)).

De plus, en utilisant la décomposition polaire de  $\bar{F}$ , on remarque que :

$$\bar{R} \cdot \bar{C} \cdot \bar{R}^T = \bar{B}, \quad (\text{I.75})$$

$\bar{R}$  étant un tenseur orthogonal et  $\psi$  une fonction isotrope de  $\bar{C}$ , on a :

$$\begin{aligned} \psi(\bar{C}, T, \mathcal{K}_i) &= \psi(\bar{R} \cdot \bar{C} \cdot \bar{R}^T, T, \mathcal{K}_i) \\ &= \psi(\bar{B}, T, \mathcal{K}_i). \end{aligned} \quad (\text{I.76})$$

Dans le cas d'un matériau isotrope,  $\psi$  peut donc être considérée comme une fonction scalaire isotrope de la variable  $\bar{B}$ .

### I.4.4 Lois d'évolution et potentiel de dissipation

#### HYPOTHÈSE I.4

On considère le cas d'un matériau isotrope dont la description nécessite l'introduction de variables internes qui n'entraîne aucune contradiction d'objectivité et d'isotropie.

(3). une fonction scalaire  $f$  est isotrope de  $\bar{C} \Leftrightarrow f(\bar{Q}^T \cdot \bar{C} \cdot \bar{Q}) = f(\bar{C}) \quad \forall \bar{Q}$  orthogonal.

En vue de formuler les **lois complémentaires** des **lois d'état** (I.58), (I.60) et (I.62), l'existence d'un pseudo-potential de dissipation est postulée. L'introduction de cette fonction est en fait une généralisation non linéaire des relations d'ONSAGER<sup>(4)</sup> [SIDOROFF, 1977]. Ce pseudo-potential de dissipation est fonction des variables flux définies TAB. I.1, à valeur scalaire, continu, convexe, non-négatif et nul à l'origine. Les lois complémentaires relient les forces thermodynamiques aux variables flux. Dans le cadre des **modèles standards généralisés** [HALPHEN et NGUYEN QUOC SON, 1975], chacune des forces thermodynamiques suit un principe de normalité par rapport au potential de dissipation :

– description eulérienne<sup>(5)</sup>

$$\bar{\sigma}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{D}}, \quad (\text{I.77a})$$

$$w_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}_i} \quad (\text{I.77b})$$

$$-\frac{\text{grad}_x T}{T} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{q}} \quad (\text{I.77c})$$

– description lagrangienne

$$\bar{S}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{E}}, \quad (\text{I.78a})$$

$$\mathcal{W}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{A}_i} \quad (\text{I.78b})$$

$$-\frac{\text{grad}_X T}{T} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{Q}} \quad (\text{I.78c})$$

– description mixte

$$\bar{F}^{-1} \cdot \bar{\pi}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{E}}, \quad (\text{I.79a})$$

$$\mathcal{W}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{A}_i} \quad (\text{I.79b})$$

$$-\frac{\text{grad}_X T}{T} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{Q}} \quad (\text{I.79c})$$

L'hypothèse d'indépendance des phénomènes mécanique et thermique ( $\mathcal{H}$ . I.3), faite précédemment pour justifier le découplage de la dissipation, permet de distinguer un pseudo-potential purement thermique,  $\varphi^{ther}$ , ne dépendant que des "flux thermiques" et un autre purement méca-

(4). reliant de manière linéaire forces et flux

(5). D'après la forme de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM établit sous l'hypothèse  $\mathcal{H}$ . I.4 (voir annexe A).

nique,  $\varphi^{int}$ , ne dépendant que des "flux mécaniques". Découlent alors de (I.77), (I.78) et (I.79) :

– description eulérienne

$$\bar{\sigma}_v = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{D}} \quad (\text{I.80a})$$

$$w_i = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\alpha}_i}, \quad (\text{I.80b})$$

$$-\frac{\text{grad}_x T}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \vec{q}}, \quad (\text{I.80c})$$

$$\text{avec } \varphi(\bar{D}, \dot{\alpha}_i, \vec{q}) = \varphi^{int}(\bar{D}, \dot{\alpha}_i) + \varphi^{ther}(\vec{q}). \quad (\text{I.80d})$$

– description lagrangienne

$$\bar{S}_v = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{E}} \quad (\text{I.81a})$$

$$\mathcal{W}_i = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\mathcal{A}}_i}, \quad (\text{I.81b})$$

$$-\frac{\text{grad}_X T}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \vec{Q}}, \quad (\text{I.81c})$$

$$\text{avec } \varphi(\dot{E}, \dot{\mathcal{A}}_i, \vec{Q}) = \varphi^{int}(\dot{E}, \dot{\mathcal{A}}_i) + \varphi^{ther}(\vec{Q}). \quad (\text{I.81d})$$

– description mixte

$$\bar{F}^{-1} \cdot \bar{\pi}_v = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{E}} \quad (\text{I.82a})$$

$$\mathcal{W}_i = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\mathcal{A}}_i}, \quad (\text{I.82b})$$

$$-\frac{\text{grad}_X T}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \vec{Q}}, \quad (\text{I.82c})$$

$$\text{avec } \varphi(\dot{E}, \dot{\mathcal{A}}_i, \vec{Q}) = \varphi^{int}(\dot{E}, \dot{\mathcal{A}}_i) + \varphi^{ther}(\vec{Q}). \quad (\text{I.82d})$$

### HYPOTHÈSE I.5

Le cadre des matériaux standards généralisés sera adopté dans tous les modèles présentés par la suite.

### REMARQUE I.9

De manière analogue à la formulation en contraintes du potentiel thermodynamique (cf. remarque I.7), il est possible de définir un potentiel  $\varphi^*$ , fonction des variables forces thermodynamiques, obtenu à partir de  $\varphi$  par une transformée de LEGENDRE-FENCHEL et ayant les mêmes propriétés que  $\varphi$ , à savoir la règle de normalité et la décomposition en une somme de potentiels thermique  $\varphi^{ther*}$  et mécanique  $\varphi^{int*}$ .  $\square$



## I.5 Notion d'état intermédiaire

### I.5.1 Introduction

Comme nous avons pu le voir dans le paragraphe § I.3.2, la modélisation d'un comportement complexe nécessite la mise en place d'une ou plusieurs variables internes. Ce choix – ainsi que celui du pseudo-potentiel de dissipation qui gouverne l'évolution des différentes variables cachées – va conditionner pour une bonne part tout le reste de l'étude comportementale. C'est pourquoi il est quelquefois plus sage de se ramener à des variables ayant un sens physique. Pour ce faire, une des solutions possibles est de postuler l'existence d'un état intermédiaire ( $C_i$ ) pour passer d'un état de référence  $C_0$ , à un état actuel  $C_t$  (FIG. I.5).

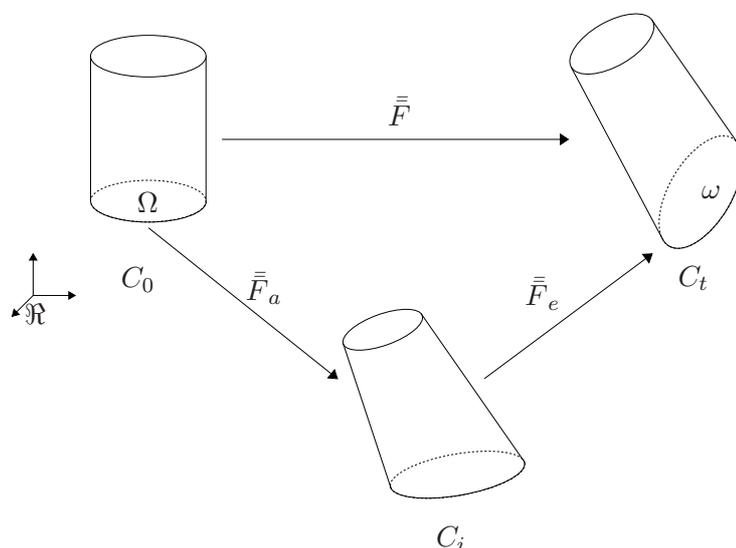


FIGURE I.5 – Milieu avec une configuration intermédiaire.

Cette démarche, couramment utilisée dans la description du comportement élastoplastique en grandes transformations, considère la transformation élastoplastique comme la composition d'une transformation purement plastique et d'une autre purement élastique. Dans le cas d'une élasticité instantanée (hypothèse classique en élastoplasticité), la configuration intermédiaire est obtenue à partir de la configuration actuelle par relâchement élastique. En notant  $\bar{\bar{F}}_p$  et  $\bar{\bar{F}}_e$  respectivement les gradients des transformations plastique et élastique,  $\bar{\bar{F}}$  se décompose multiplicativement comme suit :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_e \cdot \bar{\bar{F}}_p. \quad (\text{I.83})$$

### I.5.2 Généralisation à un phénomène quelconque

- Application à un état intermédiaire quelconque

La notion introduite précédemment peut être, dans un premier temps, généralisée à un phénomène dissipatif quelconque. Mais l'état intermédiaire introduit ne peut plus être automatiquement considéré comme une relaxation locale des contraintes. Seule la loi de comportement peut (ou non) imposer une telle propriété.

En notant  $\bar{\bar{F}}_a$  le gradient de la transformation anélastique, on décompose  $\bar{\bar{F}}$  de manière analogue à (I.83) :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_e \cdot \bar{\bar{F}}_a. \quad (\text{I.84})$$

Il est alors possible de redéfinir pour chaque transformation, des tenseurs cinématiques spécifiques. On définira, par exemple, les tenseurs de CAUCHY-GREEN droits anélastique et élastique :

$$\bar{\bar{C}}_a = \bar{\bar{F}}_a^T \cdot \bar{\bar{F}}_a, \quad (\text{I.85a})$$

$$\bar{\bar{C}}_e = \bar{\bar{F}}_e^T \cdot \bar{\bar{F}}_e = \bar{\bar{F}}_a^{-T} \cdot C \cdot \bar{\bar{F}}_a^{-1}. \quad (\text{I.85b})$$

Par définition (cf. § I.3.2.a), un matériau élastique (*i.e.* non dissipatif) ne nécessite pas l'introduction de variables internes [BOUKAMEL, 1988], si bien que les contraintes peuvent être considérées comme une fonction des uniques variables d'état  $\bar{\bar{F}}$  et  $T$ , ce qui implique pour l'énergie libre spécifique :

$$\psi = \psi(\bar{\bar{F}}, T). \quad (\text{I.86})$$

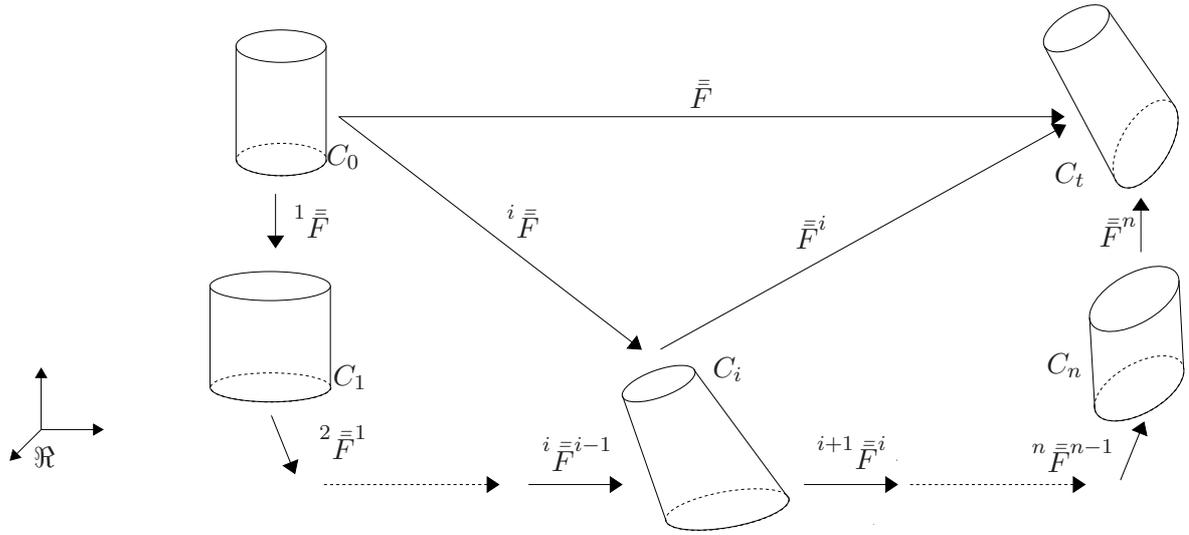
La prise en compte d'un caractère dissipatif par le biais d'un état intermédiaire, entraîne, par rapport à un modèle élastique, l'introduction d'une nouvelle variable interne, dans le cas le plus général  $\bar{\bar{F}}_a$  ou  $\bar{\bar{F}}_e$ , si bien que :

$$\psi = \psi(\bar{\bar{F}}, \bar{\bar{F}}_a, T). \quad (\text{I.87})$$

- Milieu à plusieurs configurations

Dans le cas d'un comportement couplant plusieurs phénomènes tels que l'élasto-visco-plasticité par exemple, ou simplement pour l'étude de milieux nécessitant plus d'une variable interne, il peut être utile d'introduire plusieurs états intermédiaires. SIDOROFF [1976] expose une telle description dans le cas de la viscoélasticité non linéaire. La démarche, bien que plus lourde, reste, au moins dans sa mise en place, la même que dans la précédente description.

Soient  $d\bar{X}$  un vecteur de la configuration  $C_0$ ,  $d\bar{x}_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) et  $d\bar{x}$  ses images dans les  $n$  configurations intermédiaires  $C_i$  et finale  $C_t$ . On définit ainsi les différents gradients de

FIGURE I.6 – Milieu avec  $n$  configurations intermédiaires.

transformation :

$$d\vec{x} = \bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X} = \bar{\bar{F}}^i \cdot d\vec{x}_i, \quad (\text{I.88a})$$

$$d\vec{x}_i = {}^i\bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X}, \quad (\text{I.88b})$$

$$d\vec{x}_{i+1} = {}^{i+1}\bar{\bar{F}}^i \cdot d\vec{x}_i \text{ pour } i \in 1, \dots, n-1. \quad (\text{I.88c})$$

Par un raisonnement analogue au cas à un seul état intermédiaire, le modèle sera complètement défini par la connaissance d'un des trois jeux de  $n+2$  variables suivants:  $(\bar{\bar{F}}, T, \bar{\bar{F}}^1, \dots, \bar{\bar{F}}^n)$ ,  $(\bar{\bar{F}}, T, {}^1\bar{\bar{F}}, \dots, {}^n\bar{\bar{F}})$ ,  $(\bar{\bar{F}}, T, {}^1\bar{\bar{F}}, {}^1\bar{\bar{F}}^2, \dots, {}^{n-1}\bar{\bar{F}}^n, \bar{\bar{F}}^n)$ .  $\psi$  dépendra donc d'un de ces trois choix de variables d'état. La notion de tenseur de CAUCHY-GREEN droit et gauche est introduite pour chaque état comme étant :

$${}^i\bar{\bar{C}} = {}^i\bar{\bar{F}}^T \cdot {}^i\bar{\bar{F}}, \quad \bar{\bar{C}}^i = \bar{\bar{F}}^{iT} \cdot \bar{\bar{F}}^i, \quad (\text{I.89a})$$

$${}^i\bar{\bar{B}} = {}^i\bar{\bar{F}} \cdot {}^i\bar{\bar{F}}^T, \quad \bar{\bar{B}}^i = \bar{\bar{F}}^i \cdot \bar{\bar{F}}^{iT}. \quad (\text{I.89b})$$

Il en va de même pour les taux de déformation :

$${}^i\bar{\bar{D}} = ({}^i\dot{\bar{\bar{F}}} \cdot {}^i\bar{\bar{F}}^{-1})_{sym}, \quad (\text{I.90a})$$

$$\bar{\bar{D}}^i = (\dot{\bar{\bar{F}}}^i \cdot \bar{\bar{F}}^{i-1})_{sym}. \quad (\text{I.90b})$$

### I.5.3 Principe d'invariance des fonctions constitutives

#### I.5.3.a Enoncé

D'après SIDOROFF [1973, 1974, 1976], chaque état intermédiaire n'étant défini qu'à une rotation près, nous devons vérifier la **Principe d'Invariance des Fonctions Constitutives**

(**P.I.F.C.**) qui se traduit par une invariance des lois de comportement par tout  $\Gamma$ -**changement** de référentiel :

$$\begin{cases} \bar{\bar{F}}^* = \bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{F}}, \\ {}^i \bar{\bar{F}}^* = \bar{\bar{Q}}_i \cdot {}^i \bar{\bar{F}} \text{ pour } \{i \in 1, \dots, n\}, \\ \text{avec } \{\bar{\bar{Q}}, \bar{\bar{Q}}_1, \dots, \bar{\bar{Q}}_n\} \text{ } n+1 \text{ tenseurs orthogonaux dépendant du temps.} \end{cases} \quad (\text{I.91})$$

A partir de cet énoncé, on définit deux familles de grandeurs :

- les tenseurs  $\Gamma$ -**invariants**, respectant la loi de transformation :

$$\bar{\bar{X}}^* = \bar{\bar{X}}, \quad (\text{I.92})$$

- les tenseurs  $\Gamma$ -**objectifs**, respectant la loi de transformation :

$$\bar{\bar{X}}^* = \bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{X}} \cdot \bar{\bar{Q}}^T. \quad (\text{I.93})$$

Une loi (de comportement ou complémentaire) vérifie le P.I.F.C. si et seulement si elle peut être réduite à une forme ne faisant intervenir que des grandeurs qui appartiennent à l'une de ces deux familles [SIDOROFF, 1973].

### I.5.3.b Conséquence sur l'énergie libre

En portant le choix des variables internes sur  $(\bar{\bar{F}}, {}^1 \bar{\bar{F}}, \dots, {}^n \bar{\bar{F}}, T)$ , puis par un raisonnement similaire à celui mené § I.4, l'énergie libre spécifique se doit d'être invariante pour tout  $\Gamma$ -changement de référentiel. Par conséquent, le P.I.F.C entraîne pour  $\psi$  :

$$\begin{aligned} \psi(\bar{\bar{F}}, {}^1 \bar{\bar{F}}, \dots, {}^n \bar{\bar{F}}, T) &= \psi(\bar{\bar{F}}^*, {}^1 \bar{\bar{F}}^*, \dots, {}^n \bar{\bar{F}}^*, T) \\ &= \psi(\bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{F}}, \bar{\bar{Q}}_1 \cdot {}^1 \bar{\bar{F}}, \dots, \bar{\bar{Q}}_n \cdot {}^n \bar{\bar{F}}, T). \end{aligned}$$

Les tenseurs  $\bar{\bar{Q}}_i$  étant orthogonaux, une démarche analogue à celle menée § I.4.2.b nous conduit à :

$$\psi = \psi(\bar{\bar{C}}, {}^1 \bar{\bar{C}}, \dots, {}^n \bar{\bar{C}}, T). \quad (\text{I.94})$$

#### REMARQUE I.10

On remarque que vérifier le principe d'objectivité revient à vérifier le P.I.F.C. dans le cas particulier  $\bar{\bar{Q}} = \bar{\bar{Q}}_1 = \dots = \bar{\bar{Q}}_n$ . □

### I.5.4 Cas des matériaux isotropes

Dans le cas de variables internes entièrement déterminées par le biais d'états intermédiaires, l'isotropie du matériau doit se traduire par l'invariance des lois constitutives pour toute rotation

de la configuration de référence :

$$\begin{cases} \bar{\bar{F}}^\diamond = \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{P}}^T, \\ {}^i \bar{\bar{F}}^\diamond = {}^i \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{P}}^T \text{ pour } \{i \in 1, \dots, n\}, \\ \text{avec } \bar{\bar{P}} \text{ un tenseur orthogonal indépendant du temps.} \end{cases} \quad (\text{I.95})$$

On doit en particulier vérifier l'invariance de l'énergie libre par une telle transformation :

$$\begin{aligned} \psi(\bar{\bar{C}}, {}^1 \bar{\bar{C}}, \dots, {}^n \bar{\bar{C}}, T) &= \psi(\bar{\bar{C}}^\diamond, {}^1 \bar{\bar{C}}^\diamond, \dots, {}^n \bar{\bar{C}}^\diamond, T) \\ &= \psi(\bar{\bar{P}} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{P}}^T, \bar{\bar{P}} \cdot {}^1 \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{P}}^T, \dots, \bar{\bar{P}} \cdot {}^n \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{P}}^T, T) \quad \forall \bar{\bar{P}} \text{ orthogonal.} \end{aligned}$$

Par conséquent, si un matériau est isotrope, alors sa fonction énergie libre spécifique est une **fonction scalaire isotrope** des variables  $(\bar{\bar{C}}, {}^1 \bar{\bar{C}}, \dots, {}^n \bar{\bar{C}})$  et peut donc être entièrement définie par ses invariants.

Dans le cas élastique, on a :

$$\psi(\bar{\bar{C}}) = \tilde{\psi}(I_1, I_2, I_3), \quad (\text{I.96})$$

où  $(I_1, I_2, I_3)$  sont les trois invariants de  $\bar{\bar{C}}$ .

Dans un cas à un état intermédiaire (et par conséquent à une seule variable interne) ; on a :

$$\psi(\bar{\bar{C}}, \bar{\bar{C}}_a) = \tilde{\psi}(I_1, I_2, I_3, I_1^a, I_2^a, I_3^a, K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}), \quad (\text{I.97})$$

$I_1^a, I_2^a, I_3^a$  désignant les trois premiers invariants de  $\bar{\bar{C}}_a$ ,  $K_{11} = \text{tr}(\bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_a)$ ,  $K_{12} = \text{tr}(\bar{\bar{C}}_a^2 \cdot \bar{\bar{C}})$ ,  $K_{21} = \text{tr}(\bar{\bar{C}}^2 \cdot \bar{\bar{C}}_a)$  et  $K_{22} = \text{tr}(\bar{\bar{C}}^2 \cdot \bar{\bar{C}}_a^2)$  les quatre invariants mixtes.

Par ailleurs, en utilisant la décomposition polaire de  $\bar{\bar{F}}$  (I.14), on remarque que

$$\bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{R}}^T = \bar{\bar{B}}, \quad (\text{I.98a})$$

$$\bar{\bar{R}} \cdot {}^i \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{R}}^T = \bar{\bar{B}}^{\frac{1}{2}} \cdot \bar{\bar{B}}^{i-1} \cdot \bar{\bar{B}}^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{I.98b})$$

$\bar{\bar{R}}$  étant une matrice de rotation et  $\psi$  une fonction isotrope de  $(\bar{\bar{C}}, {}^i \bar{\bar{C}}, T)$ , on a :

$$\begin{aligned} \psi(\bar{\bar{C}}, {}^1 \bar{\bar{C}}, \dots, {}^n \bar{\bar{C}}, T) &= \psi(\bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{R}}^T, \bar{\bar{R}} \cdot {}^1 \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{R}}^T, \dots, \bar{\bar{R}} \cdot {}^n \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{R}}^T, T) \\ &= \psi(\bar{\bar{B}}, \bar{\bar{B}}^{\frac{1}{2}} \cdot \bar{\bar{B}}^{1-1} \cdot \bar{\bar{B}}^{\frac{1}{2}}, \dots, \bar{\bar{B}}^{\frac{1}{2}} \cdot \bar{\bar{B}}^{n-1} \cdot \bar{\bar{B}}^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à avoir  $\psi$  fonction isotrope de  $(\bar{\bar{B}}, \bar{\bar{B}}^i, T)$ .

### I.5.5 Conséquences thermodynamiques

Ayant introduit un certain nombre de variables internes, il est maintenant possible d'écrire l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM de manière plus concrète.

Dans ce paragraphe, seuls les matériaux isotropes et qui vérifient le P.I.F.C. sont étudiés.

- formulations lagrangienne et mixte

On entend ici traiter le cas où  $\psi$  est fonction scalaire isotrope des tenseurs  $(\bar{\bar{C}}, {}^i\bar{\bar{C}})$  et de la température  $T$ . On a dans ce cas :

$$\phi_0 = (\bar{\bar{S}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{E}}}) : \dot{\bar{\bar{E}}} - \rho_0 (\eta + \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial {}^i\bar{\bar{C}}} : {}^i\dot{\bar{\bar{C}}} - \frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \text{grad}_X T \geq 0 \quad (\text{I.99})$$

ou

$$\phi_0 = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot (\bar{\bar{\pi}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{F}}}) : \dot{\bar{\bar{E}}} - \rho_0 (\eta + \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial {}^i\bar{\bar{C}}} : {}^i\dot{\bar{\bar{C}}} - \frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \text{grad}_X T \geq 0. \quad (\text{I.100})$$

Le principe de normalité ( $\mathcal{H}$ . I.5), nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{S}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{E}}} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\bar{E}}}} \text{ ou } \bar{\bar{\pi}} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{C}}} + \bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\bar{E}}}} \\ \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \\ -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial {}^i\bar{\bar{C}}} = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial {}^i\dot{\bar{\bar{C}}}} \\ -\frac{\text{grad}_X T}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \vec{Q}} \end{array} \right. \quad (\text{I.101})$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi(\bar{\bar{C}}, {}^k\bar{\bar{C}}) \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\bar{\bar{C}}, {}^k\dot{\bar{\bar{C}}}) \\ \varphi^{ther} = \varphi^{ther}(\vec{Q}) \end{array} \right. \quad (\text{I.102})$$

D'après § I.5.3, les deux formulations de la loi de comportement (I.101a,b) vérifient le P.I.F.C. Il en est de même pour la loi complémentaire (I.101d) qui ne fait intervenir que des grandeurs  $\Gamma$ -invariantes.

- formulation eulérienne

Dans le cas isotrope, l'énergie libre spécifique est fonction isotrope des variables  $(\bar{\bar{B}}, \bar{\bar{B}}^i)$  et de  $T$ . D'après (A.7) on a :

$$\phi = (\bar{\bar{\sigma}} - 2\rho \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}}) : \bar{\bar{D}} - \rho (\eta + \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}^i} : \dot{\bar{\bar{B}}^i} - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \text{grad}_x T \geq 0. \quad (\text{I.103})$$

Une démarche analogue à celle menée précédemment nous conduirait à l'expression d'une loi de comportement vérifiant le P.I.F.C. ( $\bar{\bar{\sigma}} = 2\rho \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{\bar{D}}}$ ), mais à une expression erronée des lois complémentaires. En effet, ces dernières feraient intervenir  $\dot{\bar{\bar{B}}^i}$  qui n'est ni  $\Gamma$ -invariant, ni  $\Gamma$ -objectif. Une solution est de décomposer  $\bar{\bar{B}}^i$  comme suit :

$$\dot{\bar{\bar{B}}^i} = \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{B}}^i + \bar{\bar{B}}^i \cdot \bar{\bar{L}}^T - 2\bar{\bar{F}}^i \cdot {}^i\dot{\bar{\bar{D}}} \cdot \bar{\bar{F}}^{iT}, \quad (\text{I.104})$$

ce qui entraîne une nouvelle expression de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM ( cf Annexe B) :

$$\phi = (\bar{\sigma} - 2\rho\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} - 2\rho\bar{B}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i}) : \bar{D} - \rho(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} + 2\rho\bar{V}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} \cdot \bar{V}^i : {}^i\bar{D}^o, \quad (\text{I.105})$$

où

$${}^i\bar{D}^o = \bar{R}^i \cdot {}^i\bar{D} \cdot \bar{R}^{iT}.$$

(I.105) ne fait apparaître que des variables  $\Gamma$ -objectives et l'ensemble des lois qui en découlent, vérifie le P.I.F.C.

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = 2\rho\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} + 2\rho\bar{B}^i \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} + \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\bar{D}} \\ \eta = -\frac{\partial\psi}{\partial T} \\ 2\rho\bar{V}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} \cdot \bar{V}^i = \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial {}^i\bar{D}^o} \\ -\frac{\text{grad}_x T}{T} = \frac{\partial\varphi^{ther}}{\partial\vec{q}} \end{cases} \quad (\text{I.106})$$

$$\text{avec} \begin{cases} \psi = \psi(\bar{B}, {}^k\bar{B}) \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\bar{D}, {}^k\bar{D}^o) \\ \varphi^{ther} = \varphi^{ther}(\vec{q}) \end{cases} \quad (\text{I.107})$$

### I.5.6 Etats intermédiaires et modèles rhéologiques

Pour un modèle à une seule configuration intermédiaire, la décomposition du gradient de transformation (I.84) ramenée au cadre des petites déformations, entraîne une décomposition additive du tenseur des déformations  $\bar{\varepsilon}$  (introduit en remarque I.3) :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_e + \bar{\varepsilon}_a \quad (\text{I.108})$$

$\varepsilon_a$  pouvant être une déformation plastique ou visqueuse.

A titre d'exemple, les modèles de MAXWELL, de POYNTING-THOMSON et de ZENER suivent une telle décomposition. Une description complète de ces derniers est donnée par LE TALLEC [1990]

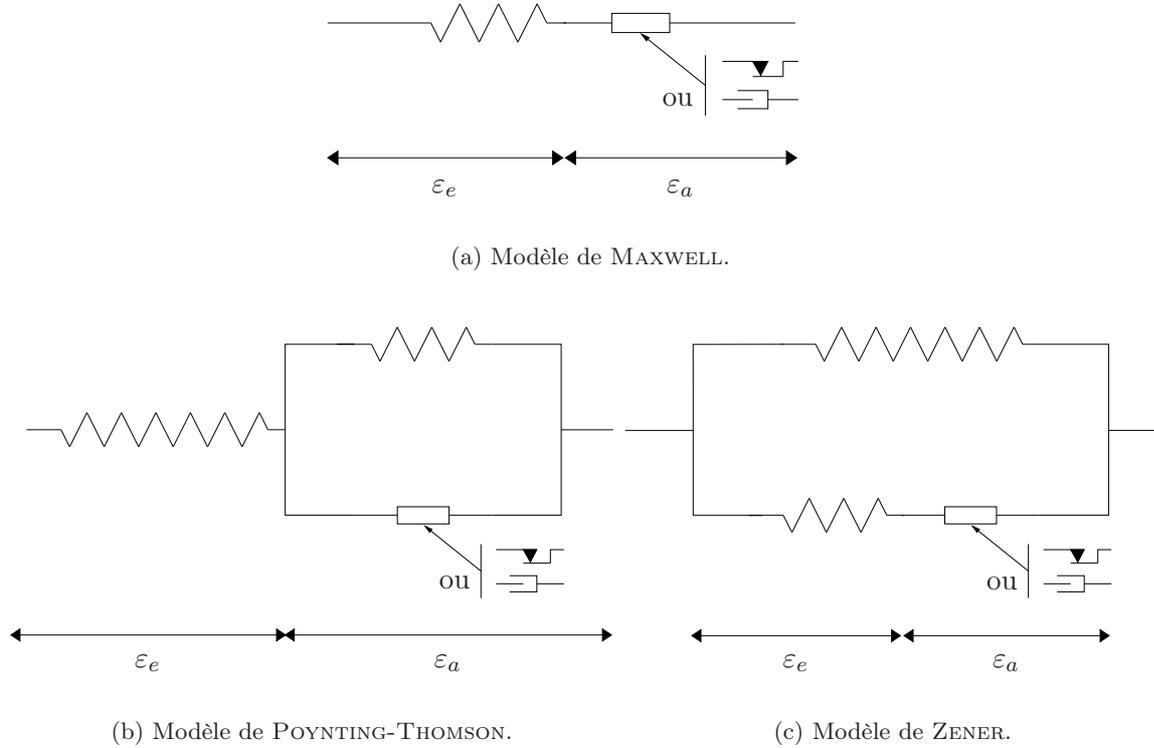


FIGURE I.7 – Modèles à un seul état intermédiaire.

SIDOROFF [1977] montre que dans le cas isotrope et d'une décomposition de l'énergie libre analogue à celle adoptée dans le cas des petites déformations, *i.e.*

$$\begin{cases} \psi = \psi_0(\bar{\bar{C}}) + \psi_1^i({}^i\bar{\bar{C}}) \\ \psi_0, \psi_1^i \text{ étant } n+1 \text{ fonctions scalaires isotropes} \end{cases} \quad (\text{I.109})$$

le système (I.106) peut être vu comme la généralisation aux grandes déformations du modèle rhéologique présenté FIG. I.8(a).

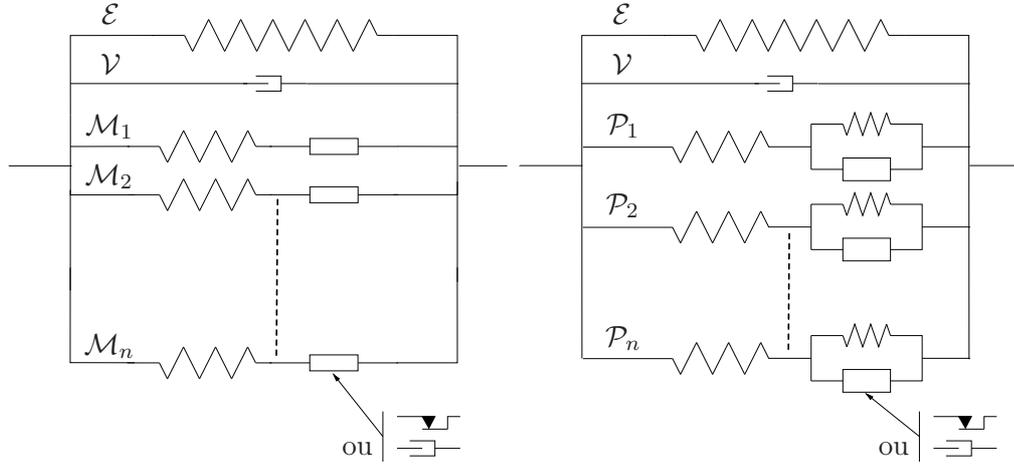
En poussant plus loin l'analogie, on suppose l'énergie libre de la forme :

$$\begin{cases} \psi = \psi_0(\bar{\bar{C}}) + \psi_1^i({}^i\bar{\bar{C}}) + \psi_2^i(\bar{\bar{C}}^i) \\ \psi_0, \psi_1^i, \psi_2^i \text{ étant } 2n+1 \text{ fonctions scalaires isotropes} \end{cases} \quad (\text{I.110})$$

Ce choix n'est possible que si aucune contradiction n'est introduite dans les considérations d'isotropies mises en avant § I.5.4 et celles résultant du P.I.F.C (§ I.5.3), c'est-à-dire si la fonction  $\psi$  reste une fonction isotrope des tenseurs  $\bar{\bar{C}}$  et  ${}^i\bar{\bar{C}}$  ou encore que les fonctions  $\psi_2^i$  sont isotropes de  $\bar{\bar{C}}$  et  ${}^i\bar{\bar{C}}$ . Ceci est démontré en annexe D par le biais de la démonstration de la propriété :

$$\boxed{\text{Si } \psi_2^i(\bar{\bar{C}}^i) = \tilde{\psi}_2^i(I_1^i, I_2^i, I_3^i) \text{ alors } \psi_2^i(\bar{\bar{C}}^i) = \tilde{\psi}_2^i(I_1, I_2, I_2, {}^iI_1, {}^iI_2, {}^iI_3, K_{11}, K_{12}, K_{21})} \quad (\text{I.111})$$

La forme (I.110) permet alors l'extension du modèle rhéologique proposé par SIDOROFF [1977] au modèle présenté FIG. I.8(b).



(a) Modèle rhéologique généralisé de SIDOROFF [1977].

(b) Modèle rhéologique généralisé étendu.

FIGURE I.8 – Généralisations à un modèle rhéologique.

### I.5.7 Milieux incompressibles

La transformation totale étant décomposée en une succession d'états, il est possible de distinguer l'**incompressibilité** globale du matériau qui d'après (I.8), se traduit par :

$$\det \bar{\bar{F}} = 1, \quad (\text{I.112})$$

et l'incompressibilité d'une des transformations intermédiaires :

$$\det {}^i \bar{\bar{F}} = 1 \quad \text{pour } i \in \{1 \dots n\}. \quad (\text{I.113})$$

L'annexe C conduit à l'équivalence des équations (I.112) et (I.113) avec respectivement :

$$\text{tr} \bar{\bar{D}} = 0 \quad \text{tr} {}^i \bar{\bar{D}} = \text{tr} {}^i \bar{\bar{D}}^0 = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \quad (\text{I.114a})$$

$$\Leftrightarrow \dot{\bar{\bar{C}}} : \bar{\bar{C}}^{-1} = 0 \quad {}^i \dot{\bar{\bar{C}}} : {}^i \bar{\bar{C}}^{-1} = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots n\}. \quad (\text{I.114b})$$

Si l'on se place dans le cadre de l'égalité (I.105), la particularisation de  $\bar{\bar{D}}$ , par (I.114a), autorise l'application du principe de normalité sur la seule partie déviatorique de  $\bar{\bar{\sigma}}_v$  :

$$\bar{\bar{\sigma}}_v^D = (\bar{\bar{\sigma}} - 2\rho \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}} - 2\rho \bar{\bar{B}}^i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}^i})^D = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{\bar{D}}}. \quad (\text{I.115})$$

On est alors amené à introduire  $p$  une fonction scalaire homogène à une pression hydrostatique telle que :

$$\bar{\sigma} = 2\rho\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} + 2\rho\bar{B}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} + p\bar{1}. \quad (\text{I.116})$$

Il en va de même pour les termes  $2\rho\bar{V}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} \cdot \bar{V}^i$  de (I.105). C'est donc sur les parties déviatoriques de ces dernières que le principe de normalité est appliqué, ce qui conduit à la prise en compte de  $n$  scalaires  $q_i$  tels que :

$$2\rho\bar{V}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} \cdot \bar{V}^i = \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial^i\bar{D}^o} + q_i\bar{1}. \quad (\text{I.117})$$

Dans le cas des descriptions mixte et lagrangienne, les conditions d'incompressibilité (I.114b) ne permettent l'écriture de  $\bar{S}_v$  et  $\bar{F} \cdot \bar{\pi}_v$  qu'à un multiple de  $\bar{C}^{-1}$  près :

$$\bar{F}^{-1} \cdot \bar{\pi}_v = \bar{S}_v = \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\dot{\bar{E}}} + p\bar{C}^{-1}, \quad (\text{I.118})$$

si bien que :

$$\bar{S} = \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\bar{E}} + \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\dot{\bar{E}}} + p\bar{C}^{-1}, \quad (\text{I.119})$$

et

$$\bar{\pi} = 2\rho_0\bar{F} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{C}} + \bar{F} \cdot \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\dot{\bar{E}}} + p\bar{F}^{-T}. \quad (\text{I.120})$$

Dans le cas où la  $i$ -ème transformation intermédiaire est incompressible, la détermination complète du terme  $\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial^i\bar{C}}$  passe par l'introduction d'un réel  $q_i$  tel que :

$$-\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial^i\bar{C}} = \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial^i\dot{\bar{C}}} + q_i \bar{C}^{-1}. \quad (\text{I.121})$$

## I.6 Conclusion

Ce chapitre présente les outils nécessaires à une formulation en grandes déformations d'un problème. C'est ainsi que sont définis les différentes mesures de déformation et les trois différentes descriptions de l'état de contrainte (eulérienne, lagrangienne et mixte).

Par la suite, l'écriture des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, nous conduit aux équations d'équilibre dans chacune des trois descriptions.

D'un point vue thermodynamique, la combinaison de l'équation de conservation de l'énergie et du second principe permet d'aboutir à l'expression de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM. Afin de rendre cette dernière exploitable, le cadre de l'état local est adopté ( $\mathcal{H}$ . I.1). Il repose sur la définition de variables d'état, observables ou cachées, qui par leur connaissance en un point, à un instant donné, définit complètement le matériau en ce point à cet instant.

Admettant, de manière classique, l'existence d'un potentiel thermodynamique énergie libre de HELMOLTZ qui dépend des variables précédemment définies, nous aboutissons à une expression de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM propre à chacune des descriptions sthéniques. Il est alors possible de factoriser ces dernières sous une forme de produit flux\forces thermodynamiques, ces grandeurs étant elles même reliées entre elles par le biais des différentes lois d'état.

L'hypothèse d'une dépendance unique de la dissipation vis à vis des phénomènes thermique et mécanique ( $\mathcal{H}$ . I.2) puis celle d'un découplage des effets de ces derniers ( $\mathcal{H}$ . I.3) sont postulées. Par la suite, une description des matériaux standards généralisés ( $\mathcal{H}$ . I.5) permet de d'écrire que les forces thermodynamiques mécaniques et thermiques suivent une règle de normalité par rapport à un potentiel de dissipation respectivement mécanique ou thermique. Les lois complémentaires ainsi obtenues expriment l'évolution des différentes variables internes.

Enfin, on introduit la notion d'état intermédiaire. Cette dernière constitue pour une bonne partie, les bases du modèle mécanique utilisé par la suite. Le cas particulier des matériaux isotropes et incompressibles est exhibé puisque représentatif du comportement des élastomères étudiés dans le chapitre suivant. Un découplage de l'énergie libre permet de rapprocher un modèle s'appuyant sur la notion d'état intermédiaire à une généralisation non linéaire de modèles rhéologiques.