Gottlob Frege et la logistique

Des extraits de l'Idéographie se trouvent en annexe E, page 501.

Dans l'algébrisation de la logique, telle que la présente notamment Boole, la mathématique est l'auxiliaire de la logique. À l'inverse, dans la logistique qui naît à la fin du XIX^e, la logique est l'auxiliaire indispensable au problème de fondement des mathématiques. Il faut pour cela une logique plus adaptée aux mathématiques que la logique des classes, aussi élaborée que soit celle de Boole. Il faut une logique des relations, qui commence à être développée dans les travaux de C. Peirce, ainsi que l'explique L. Couturat dans la conclusion de son ouvrage *L'Algèbre de la Logique* dans lequel il présente la logique booléenne :

> La Logique doit étudier bien d'autres espèces de concepts que les concepts génériques (concepts de classes) et bien d'autres relations que la relation d'inclusion (de subsomption) entre de tels concepts. Elle doit, en un mot, se développer en une logique des relations, que Leibniz a prévue, que Peirce et Schröder ont fondée, et que MM. Peano et Russell paraissent avoir établie sur des bases définitives. Or, tandis que la Logique classique et l'Algèbre de la Logique ne sont presque d'aucune utilité aux Mathématiques, celles-ci trouvent au contraire dans la logique des relations leurs concepts et leurs principes fondamentaux [...] On peut donc dire que l'Algèbre de la Logique est une Logique *mathématique*, par sa forme et par sa méthode ; mais il ne faut pas la prendre pour la Logique *des Mathématiques*. (Couturat, 1905, p. 95)

Ce commentaire est très intéressant à lire d'un point de vue didactique : les sytèmes logiques d'Aristote, des Stoïciens, de Port-Royal, de Leibniz et de Boole peuvent être étudiés dans le cours de mathématiques en tant que systèmes, pour pratiquer le raisonnement et s'astreindre à le formuler dans un certain langage (pour le système d'Aristote par exemple, on peut utiliser les formulations en langage courant « Tous les A sont B », ou le langage ensembliste, « $A \subset B$ », ou le langage des prédicats unaires, « $\forall x \quad A[x] \Rightarrow B[x]$ »), mais ils ne nous sont que de peu d'utilité pour comprendre ce qui se passe dans l'activité mathématique telle qu'elle se pratique, et notamment s'exprime, aujourd'hui.

G. Frege va proposer une nouvelle logique dans le but d'assurer une parfaite rigueur en mathématiques. Il expose ainsi ses motivations dans l'introduction de l'*Idéographie* (*Begriffsschrift*), publiée en 1879, ouvrage capital dans l'histoire de la logique :

> Ainsi, nous divisons toutes les vérités ayant besoin d'une justification en deux sortes selon que la preuve, pour les unes, peut avancer par la logique pure ou, pour les autres, doit s'appuyer sur des faits d'expérience. [. . .] Alors que je me demandais à laquelle de ces deux sortes de vérités les jugements arithmétiques appartenaient, je devais d'abord chercher jusqu'où l'on pourrait aller dans l'arithmétique grâce aux déductions seules, appuyé uniquement sur les lois de la pensée, qui sont au-dessus de toutes les particularités. À partir de là, ma démarche était de chercher d'abord à réduire le concept de succession dans une suite à la conséquence *logique*, puis à progresser vers le concept de nombre. Pour que, ce faisant, quelque chose d'intuitif ne puisse pas s'introduire de façon inaperçue, tout devait dépendre de l'absence de lacunes dans la chaîne de déductions. Tandis que je visais à satisfaire cette exigence le plus rigoureusement, je trouvais un obstacle dans l'inadéquation de la langue ; malgré toutes les lourdeurs provenant de l'expression, plus les relations devinrent complexes, moins elle laissa attendre l'exactitude que mon but exigeait. De ce besoin résultat l'idée de l'idéographie dont il est question ici. Elle doit ainsi d'abord servir à examiner de la manière la plus sûre la force concluante d'une chaîne de déductions et à dénoncer chaque hypothèse qui veut s'insinuer de façon inaperçue, afin que finalement sa provenance puisse en être recherchée. (Frege, 1999, p. 6)

Frege n'est pas cité dans le commentaire de Couturat car ses travaux n'ont pas eu, à l'époque de leur publication, l'accueil qu'il espérait. Pour J. Largeault, « à la fin du XIX[e] siècle l'indifférence des mathématiciens à l'égard de l'invention d'une idéographie s'explique donc par le fait qu'on ne ressentait pas d'urgence à remplacer partout l'intuition par le calcul », et « plus tard, lorsque la formalisation c'est-à-dire l'utilisation d'une idéographie sera reconnue comme la base de toute discussion ou comme une condition nécessaire dans tout travail sur les fondements, on disposera d'un traité plus commode et plus complet que les *Grundgesetze*, grâce à Whitehead et à Russel . » (Largeault, 1970, p. 4)

Frege est tout de même aujourd'hui reconnu comme précurseur de la logique mathématique contemporaine et nous allons voir maintenant quels ont été ses apports majeurs dans ce domaine. Il a notamment fourni les éléments de base du langage des prédicats moderne.

(a) Sur les propositions

Contenu et jugement Frege distingue entre le contenu conceptuel d'une proposition et le jugement de ce contenu (Frege, 1971, pp. 74-75) :

> Devant l'expression d'un contenu de jugement, tel $2 + 3 = 5$, je place un trait horizontal, le signe de contenu, qui se distingue du signe moins par sa plus grande longueur :
>
> $$—— 2 + 3 = 5$$
>
> Ce trait indique que je conçois le contenu qui lui fait suite comme une unité, en sorte qu'on puisse l'associer à d'autres signes. En écrivant
>
> $$—— 2 + 3 = 5$$
>
> on ne porte aucun jugement; aussi peut-on, sans atteinte à la vérité, écrire
>
> $$—— 4 + 2 = 7.$$
>
> Si je veux affirmer la justesse d'un contenu, je place à l'extrémité gauche du trait de contenu le trait de jugement :
>
> $$\vdash 2 + 3 = 5.$$

FIGURE 1.5 – Signes du contenu et du jugement dans l'Idéographie

De la même manière, il distingue entre la négation d'une proposition et le jugement de la fausseté de cette proposition, qui consiste à affirmer sa négation.

> Pour exprimer la négation d'un contenu, j'ajoute au trait de contenu le trait de négation. Par exemple :
>
> $$\neg\, 4 + 2 = 7.$$

> Ce n'est pas encore affirmer que cette équation est fausse. On a simplement représenté un nouveau contenu de jugement qui, après l'adjonction du trait de jugement
>
> $$\vdash\neg\, 4 + 2 + = 7,$$
>
> devient le jugement « 4 + 2 n'est pas égal à 7 ».

FIGURE 1.6 – Signe de la négation dans l'Idéographie

L'implication au coeur de la logique propositionnelle Frege introduit ensuite un signe de relation fondamentale entre deux propositions et définit ainsi la proposition $B \Rightarrow A$ (Frege, 1999, p. 19) :

La conditionnalité.

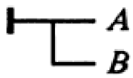
§ 5. Si *A* et *B* signifient des contenus jugeables[1], il y a alors les quatre possibilités suivantes:

1. *A* est affirmé et *B* est affirmé;

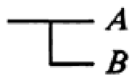
2. *A* est affirmé et *B* est nié;

3. *A* est nié et *B* est affirmé;

4. *A* est nié et *B* est nié.



signifie ainsi le jugement selon lequel *la troisième de ces possibilités n'a pas lieu, mais l'une des trois autres a lieu.* Si



est nié, cela veut dire, par conséquent, que la troisiéme possibilité a lieu, donc que *A* est nié et *B* affirmé.

FIGURE 1.7 – Signe pour l'implication dans l'Idéographie

Il justifie le choix de ce signe comme signe central : ainsi, dans le cas où A est la proposition $x^2 = 4$ et B la proposition $x + 2 = 4$:

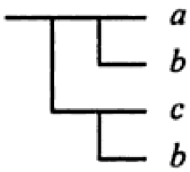
> on peut le traduire : si $x + 2 = 4$ alors $x^2 = 4$. Cette traduction fait voir l'importance de la relation contenue dans notre signe. Car le jugement hypothétique est la forme commune à toutes les lois de la nature, la forme de tous les rapports de causalité. (Frege, 1971, p. 75)

Mais il précise bien que ce signe ne correspond pas toujours à la relation traduite par l'expression « si ... alors ... » : ainsi, dans le cas où A est la proposition $2^2 = 4$ et B la proposition $2 + 2 = 4$:

> à vrai dire, la langue commune ne permet pas qu'on traduise ce signe dans tous les cas par « si ». Elle l'admet dans le seul cas où une partie du contenu, ici x, est indéterminée et donne à l'ensemble un caractère de généralité. Si on substitue 2 à x, [ce jugement] ne peut être traduit de manière satisfaisante par « si 2+2=4 alors $2^2 = 4$. » (Frege, 1971, p. 76)

Frege refuse ici d'utiliser « si ... alors ... » pour exprimer le connecteur IMPLIQUE entre deux propositions qui ne comportent pas de variables. Il distingue ainsi, sans utiliser cette terminologie, entre l'implication entre des propositions closes, qui est soit vraie, soit fausse, selon les valeurs de vérités de la prémisse et de la conclusion et l'implication entre des propositions qui contiennent des variables libres, dont on peut se demander si elle est vraie pour toutes les valeurs d'un certain domaine (c'est-à-dire qu'on peut se poser la question de la vérité d'une implication universellement quantifiée). Je reviendrai sur cette distinction dans la deuxième partie de la thèse (voir page 126).

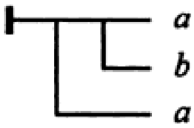
En associant le trait d'implication et le trait de négation, Frege exprime les connecteurs ET et OU. Ainsi, les contenus exprimés par Frege sont effectivement l'analogue des formules [29] du calcul propositionnel moderne, par exemple :



s'écrit dans le langage propositionnel actuel

$$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

Et les premiers jugements que liste Frege correspondent à des tautologies [30], par exemple :



signifie que la formule $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ est une tautologie.

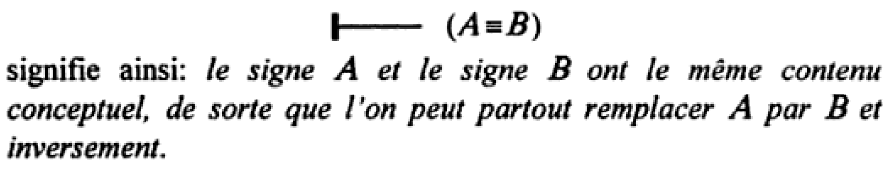
Frege lit ce graphisme de la manière suivante :

> le cas où a est nié, b est affirmé et a est affirmé est exclu.

qu'il justifie ainsi : « cela est évident, puisque a ne peut être à la fois nié et affirmé. » (Frege, 1999, p. 41)

Une nouveauté essentielle : fonction et argument Frege introduit également un signe d'identité de contenu, qu'il justifie ainsi :

> La nécessité d'un signe d'identité de contenu repose donc sur ceci : le même contenu peut être complètement déterminé de manières différentes ; mais le fait que, dans un cas particulier, la *même chose* soit effectivement donnée par *deux manières de détermination* est le contenu d'un *jugement.* [(Frege, 1999), p. 29]


$\vdash$ $(A \equiv B)$

signifie ainsi: ***le signe A et le signe B ont le même contenu conceptuel, de sorte que l'on peut partout remplacer A par B et inversement.***

FIGURE 1.8 – Marque de l'identité dans l'Idéographie

Puis Frege rentre à l'intérieur de la proposition et substitue à la décomposition classique en sujet et prédicat une nouvelle décomposition en fonction et argument. Cet élargissement de la notion de fonction est une nouveauté importante tant du point de vue de l'analyse

29. On pourra trouver une définition du terme « formule » en annexe page 446
30. Propositions toujours vraies, quelles que soient les valeurs de vérité des variables propositionnelles qui y sont présentes.

logique de la proposition que du point de vue du sens mathématique de la notion de fonction.

Les fonctions de Frege correspondent aux prédicats du langage des prédicats moderne et il les définit ainsi :

> Si, dans une expression dont le contenu n'a pas besoin d'être jugeable, un signe simple, ou composé, apparaît à une ou plusieurs places, et si nous pensons que ce signe est remplaçable à toutes ou à quelques-unes de ces places par autre chose, mais partout par la même chose, alors nous appelons la partie de l'expression se présentant invariablement, fonction et la partie remplaçable, son argument. (Frege, 1999, pp. 30-31)

Le signe de jugement marque alors l'affirmation qu'un argument possède une certaine propriété, ou que plusieurs arguments sont en relation :

On peut lire $\vdash\!\!\!- \Phi(A)$
comme: «*A* a la propriété Φ».

$\vdash\!\!\!- \Psi(A, B)$

peut être traduit par «*B* se trouve dans la relation Ψ à *A*» ou «*B* est le résultat de l'application de la procédure Ψ à l'objet *A*».

Figure 1.9 – Marques pour fonction et argument dans l'Idéographie

Le quantificateur universel Cette expression du contenu en termes de fonction et d'argument permet l'introduction d'un autre élément essentiel du langage mathématique : les quantificateurs. En fait, Frege n'en utilise qu'un, le quantificateur universel :

Figure 1.10 – Marque du quantificateur universel dans l'Idéographie

Mais à l'aide du signe de négation, il exprime le quantificateur existentiel et donne ainsi, dans son idéographie, le carré des oppositions issu de la logique d'Aristote (voir page 48)[31] :

Il en résulte le tableau des oppositions logiques suivant:

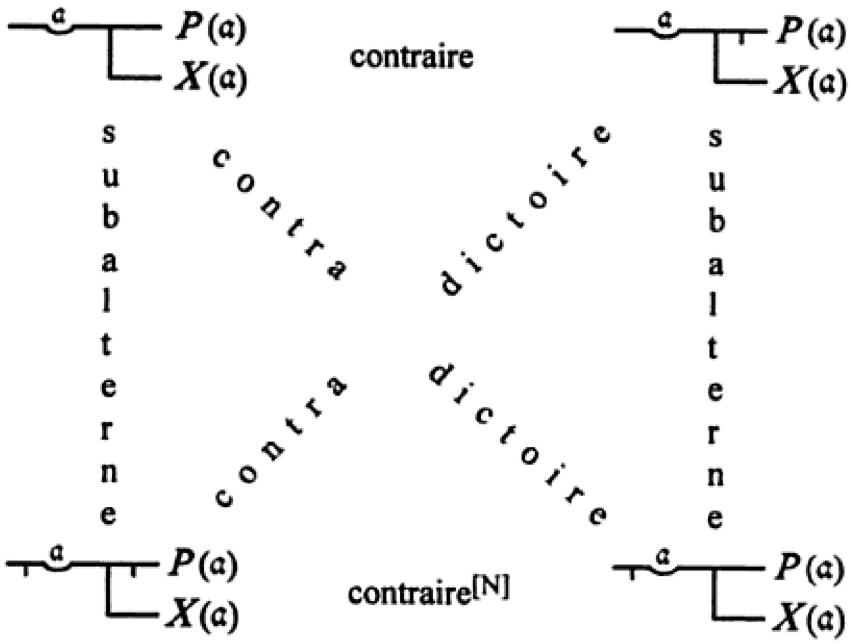


FIGURE 1.11 – Carré des oppositions dans l'Idéographie

Les variables Frege s'abstient d'employer le mot « variable », en raison de l'idée de variation qui lui est fortement associée. Aristote déjà avait bien employé des variables en logique, c'est-à-dire des lettres permettant de montrer que ce qu'on dit est vrai indépendamment des objets particuliers que l'on peut leur substituer. Frege poursuit cette utilisation, mais se refuse à en donner une définition comme tentera de le faire Russell. J. Largeault résume ainsi cette critique de Frege sur la notion de variable :

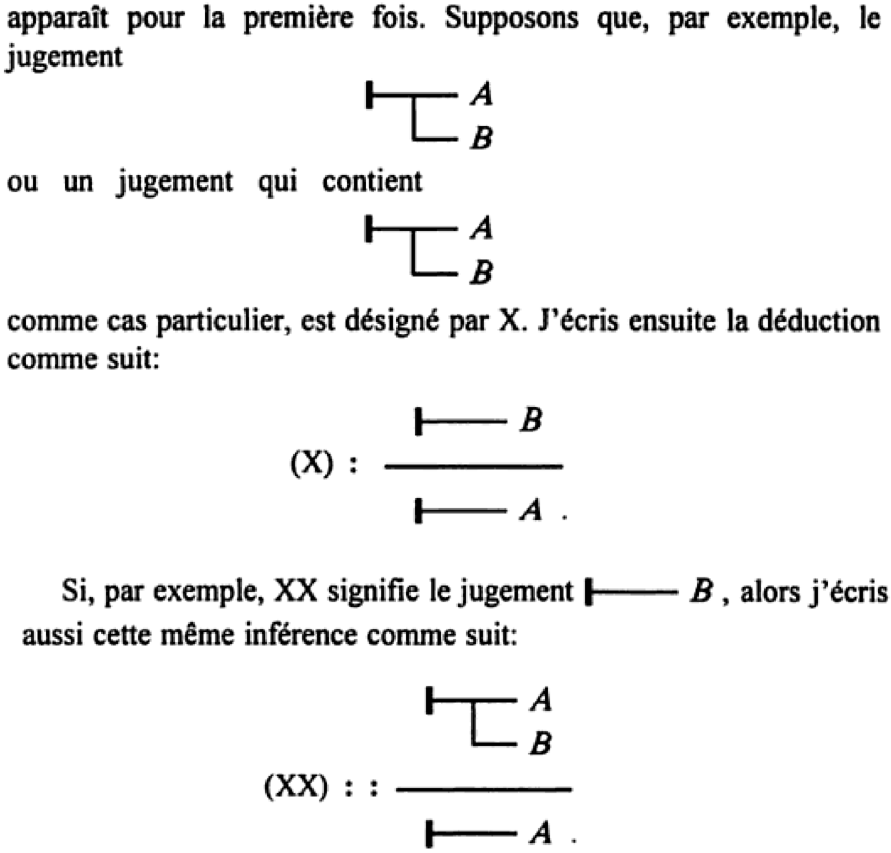
> (1°) D'abord une conclusion négative : qu'en mathématiques comme en logique une variable n'a pas pour rôle d'être ou de désigner une quantité qui varie.
>
> (2°) Du point de vue de la syntaxe les variables sont simplement des lettres à l'emploi desquelles président certaines règles.
>
> Il en résulte qu'on ne devrait pas dire « la lettre x *désigne* une variable », mais « la lettre x *est* une variable ». Une variable est une lettre et non pas une entité hors d'atteinte qui se cacherait derrière cette lettre. Le

31. Je propose page 141 une version de ce carré où les formules sont exprimées dans le langage des prédicats actuel.

> fait que lorsqu'on transforme une formule en opérant selon les règles, ces transformations portent sur les signes et sur les lettres elles-mêmes, suffirait déjà à le montrer.
>
> (3°) C'est du point de vue sémantique qu'on peut dire qu'une variable « prend des valeurs ». Ces valeurs seront des entités extraites du domaine du modèle qui correspond à la catégorie de cette variable, selon qu'elle est une variable d'individu, de prédicat I-aire, de relation, etc. Alors la variable, selon qu'elle est libre ou liée, est remplacée par un nom (une constante) qui dénote une entité particulière d'un domaine, ou bien parcourt des valeurs prises dans un domaine. Il semblerait absurde de prétendre que Frege a établi le sens mathématique et logique de la notion de variable puisqu'il s'est toujours refusé à se servir de ce mot. Procédant en quelque sorte *a contrario* en montrant ce qu'une variable n'est pas, il a pourtant dégagé clairement le sens qu'il faut donner à ce terme pour que son emploi soit admissible en logique et en mathématiques. (Largeault, 1970, pp. 109-110)

Ainsi, s'il ne définit pas la notion de variable, Frege en use comme nous le faisons actuellement en logique et en mathématiques. Il utilise des lettres majuscules pour les contenus jugeables (les propositions), des lettres majuscules ou minuscules pour les arguments des fonctions, et des lettres gothiques quand les variables sont quantifiées.

(b) Sur les raisonnements Nous avons vu qu'il y avait déjà dans l'idéographie de Frege tous les éléments pour l'expression des formules du calcul des prédicats. Voyons maintenant comment il exprime les déductions. En fait, Frege présente ses démonstrations comme des successions de jugements déduits les uns des autres en appliquant la substitution et la règle du *modus ponens* (B se déduit de A et de $A \Rightarrow B$). Pour pouvoir présenter ses démonstrations comme un enchaînement vertical de propositions, il utilise deux symboles pour noter une inférence associée à cette règle, selon que l'on part de la prémisse ou de l'implication (figure ci-après).



apparaît pour la première fois. Supposons que, par exemple, le jugement

ou un jugement qui contient

comme cas particulier, est désigné par X. J'écris ensuite la déduction comme suit:

(X) :

Si, par exemple, XX signifie le jugement ⊢ B, alors j'écris aussi cette même inférence comme suit:

(XX) : :

FIGURE 1.12 – Marques pour les déductions dans l'Idéographie

Frege s'applique ensuite à présenter sous forme d'un système déductif 133 lois logiques qui entrent en jeu dans la déduction mathématique. Neuf d'entre elles forment un noyau à partir duquel toutes les autres peuvent être dérivées (elles sont données en annexe page 507). Ce travail fastidieux a pour but essentiel selon Frege d'expliciter les relations d'inférence entre ces différentes lois et de dégager un noyau de lois primitives dont toutes les autres peuvent être dérivées :

> Dans cette partie, quelques jugements de la pensée pure, ceux pour lesquels cela est possible, vont être représentés en signes. Il est aisé de dériver les plus composés de ces jugements à partir des plus simples, non pas pour les rendre plus certains, ce qui serait pour la plupart inutile, mais pour mettre en évidence les relations des jugements entre eux. Ce n'est manifestement pas la même chose que de connaître simplement les lois ou de savoir aussi comment les unes sont données par les autres. De cette manière, on parvient à un petit nombre de lois dans lesquelles, si l'on ajoute celles qui sont contenues dans les règles, le contenu de toutes, bien que latent, est inclus. Et c'est aussi un avantage du mode de représentations par dérivation qu'il enseigne à connaître ce noyau-là. (Frege, 1999, p. 40)

1.3.3 Synthèse pour la période de la naissance de la logique mathématique

Le XIXe siècle voit se renforcer les liens entre logique et mathématiques. D'abord avec le développement de l'Algèbre de la Logique de G. Boole, qui est une approche mathématique de la logique, puis avec le développement, initié par G. Frege, de la logique en vue de répondre aux problèmes de fondements des mathématiques.

Pour ce qui est de mon étude, je rappelle les éléments suivants de ces deux systèmes étudiés, qui concernent essentiellement le langage :
- Boole propose une algébrisation de la logique. Il n'introduit pas un nouveau langage, mais traduit les propositions en utilisant des symboles algébriques existant (lettres minuscules, signes d'addition et de multiplication, 0 et 1, signe d'égalité) et s'appuie sur le raisonnement usuel pour établir des lois concernant ces symboles. Il franchit un pas important en substituant à la description de la proposition en termes de sujet et prédicat une description en termes d'égalité de classes.
- Frege au contraire propose un nouveau système de signes, une *Idéographie* spécialement conçue pour exprimer les propositions et les raisonnements mathématiques. Il introduit ainsi les éléments de la logique mathématique actuelle. Sa description de la proposition en termes de fonction et argument est un pas essentiel qui permet enfin que soient formalisées des propositions faisant intervenir des prédicats à plus d'une place. La quantification est alors un procédé qui opère sur les arguments, mais qui n'est pas nécessaire à la construction d'un contenu de jugement, ce qui permet que le système modélise aussi bien la proposition $x < y$ dans laquelle les variables x et y ne sont pas quantifiées, que la proposition $\forall y \quad x < y$ et la proposition $\exists x \, \forall y \quad x < y$, et donc que soit possible la distinction fondamentale entre proposition « ouverte » (les deux premières) et proposition « close » (la troisième, dans laquelle toutes les variables sont quantifiées) sur laquelle nous reviendrons.

À la suite de Frege, Bertrand Russell (philosophe et mathématicien britannique, 1872-1970) a beaucoup contribué à accréditer cette nouvelle logique en publiant entre 1910 et 1913, avec son collègue Alfred Whitehead, les *Principia Mathematica*. De nombreuses notions de cet ouvrage sont communes avec l'œuvre de Frege, dont Russell avait eu connaissance et dans laquelle il avait découvert une contradiction, et c'est plutôt les notations de Russell, inspirées du *Formulaire de mathématiques* de G. Peano [32], qui seront ensuite utilisées.

David Hilbert (mathématicien allemand, 1862-1943) expose au congrès international des mathématiciens de 1900 une nouvelle discipline mathématique, la théorie de la démons-

32. Le *Formulaire de mathématiques* est une œuvre dirigée par G. Peano qui vise à exprimer de façon organisée les principales théories mathématiques dans la langue symbolique introduite par Peano (le premier chapitre est intitulé « Logique Mathématique »). La publication du formulaire connut cinq éditions différentes de 1895 à 1908.

tration, avec comme but de démontrer la cohérence des mathématiques. La présentation axiomatique des mathématiques se développe et les théories mathématiques deviennent elles-mêmes objet d'étude. En 1931, avec le théorème d'incomplétude, Kurt Gödel (mathématicien autrichien, naturalisé américain, 1906-1978) montre qu'un système suffisant pour exprimer l'arithmétique ne peut pas montrer sa propre consistance, c'est-à-dire qu'il n'est pas contradictoire (on trouvera une version plus rigoureuse du théorème d'incomplétude en annexe page 453). Ceci porte un coup dur à l'idée de fonder les mathématiques sur la logique, mais n'empêche pas la logique mathématique de continuer à se développer indépendamment de prétentions fondatrices.

1.4 Synthèse de l'étude épistémologique

Nous avons pu voir dans ce chapitre l'évolution qui a mené à la constitution récente de la logique mathématique. Nous y avons rencontré différentes conceptions de ce qu'est la logique, de ses buts, de ses moyens. La logique d'Aristote, et parallèlement celle des Stoïciens, est une *théorie de l'inférence valide* (Quine, cité dans Durand-Guerrier, 2005, p. 12). À partir de certains raisonnements de base considérés comme évidents, ces auteurs donnent des méthodes permettant de justifier la validité d'autres raisonnements. Du point de vue du langage, la logique d'Aristote est traditionnellement décrite comme une logique des termes : la proposition est décomposée en sujet-copule-prédicat [33] et il distingue quatre formes de propositions, selon un critère de qualité (positive ou négative) et un critère de quantité (universelle ou particulière). De leur côté, les Stoïciens développent une logique des propositions, c'est-à-dire qu'ils décrivent les mécanismes de construction de propositions *composées* à partir de propositions *simples* à l'aide de connecteurs logiques.

Ces deux systèmes logiques continuent d'être développés dans la tradition scolastique du Moyen-âge et leur exposition est l'objet de volumineux traités. Puis la Renaissance est une période de mise en sommeil pour la logique, celle-ci étant délaissée au profit de la recherche d'une méthode. Au XVII[e] siècle, Descartes critique ce traitement formel des raisonnements qui n'en assure que la cohérence et pas la vérité. C'est également dans cette période qu'est rédigée la logique de Port-Royal (1662) dans laquelle l'utilisation de nombreux exemples servant à exercer la perception est préférée à l'utilisation de schémas formels pour décrire les raisonnements. Le formalisme de la tradition scolastique est vu comme une entrave au fonctionnement de l'intuition.

À la même époque, de façon isolée, Leibniz propose un système logique dans lequel plusieurs logiciens d'aujourd'hui s'accordent à retrouver les enjeux de la logique moderne. Contrairement à Descartes, Leibniz voit dans la formalisation de la logique un moyen d'atteindre des vérités de manière indiscutablement valide. Dans le sillage de Viète et de Descartes, il apporte sa contribution aux progrès en algèbre, notamment en matière de

33. Les termes sont ce qui peut être sujet ou prédicat.

symbolisation, et a l'ambition de constituer une algèbre de la pensée. Ceci signifie une mathématisation de la logique, par la constitution d'un langage universel, *Lingua characteristica universalis*, permettant un *Calculus ratiocinator*, c'est-à-dire le remplacement des raisonnements par un calcul.

Un siècle plus tard, G. Boole propose une construction formelle qui a pour but de permettre un traitement algébrique de la pensée. En cela, il peut être vu comme l'initiateur du développement de la logique comme discipline mathématique, mais ici ce sont les mathématiques, et plus particulièrement l'algèbre, qui viennent prêter leurs méthodes à la logique. Ainsi, si la logique booléenne est bien une logique mathématique, elle n'est pas adaptée à la pratique des mathématiques, ce qui n'était d'ailleurs pas son but.

C'est par contre celui de G. Frege, qui est aujourd'hui considéré comme le père de la logique mathématique contemporaine. A travers un important travail de formalisation et de symbolisation, il propose un langage pour les mathématiques, une *Idéographie*, dont le but est de garantir l'infaillibilité des raisonnements. Les éléments constitutifs de la proposition élémentaire ne sont plus sujet-copule-prédicat mais fonction et argument. La notion de fonction correspond aux prédicats dans l'expression *Logique des prédicats* : c'est une propriété des objets de l'univers du discours. Ces prédicats peuvent comporter plusieurs arguments et c'est là une différence avec la logique d'Aristote [34] et une avancée essentielle. Frege utilise ensuite deux connecteurs : la négation et l'implication. Autre grande avancée de la logique de Frege, les arguments d'une fonction peuvent être des variables et ces variables peuvent être quantifiées. La quantification se fait à l'aide d'un quantificateur (Frege n'utilise que le quantificateur universel), qui devient, au côté des connecteurs, un autre élément permettant la construction des propositions. Muni d'un tel langage dont il montre la pertinence pour faire des mathématiques, Frege envisage de fonder les mathématiques sur la logique. Il voit dans ce travail non pas une fin mais un moyen, nécessaire pour atteindre son but d'une parfaite rigueur. Ce but est également celui poursuivi par le courant logiciste dont fait partie B. Russell, mais la découverte de paradoxes rend la tâche difficile au point de provoquer ce qu'on a appelé la « crise des fondements ». Ce début du XX[e] siècle est aussi l'époque du courant axiomatique et du rêve de D. Hilbert d'un système axiomatique formel « universel » permettant pour tout énoncé de le démontrer ou de démontrer sa négation. Cet espoir est ruiné par le théorème d'incomplétude de K. Gödel, ce qui n'empêche pas la logique mathématique de continuer ses recherches, dégagée de cette question des fondements, comme une branche des mathématiques parmi d'autres.

Ce développement de la logique mathématique a grandement contribué à la réflexion sur le langage et le raisonnement mathématique et à la clarification de leurs principes. Cependant, les mathématiques aujourd'hui ne se pratiquent pas dans un langage symbolique, pas

34. En effet, modélisée dans la logique des prédicats moderne, la logique aristotélicienne ne fait intervenir que des prédicats à une place, ce qui est largement insuffisant pour décrire les propositions mathématiques.

plus celles des logiciens, qui ne confondent pas leur objet d'étude et la manière de l'étudier, que celles des autres mathématiciens d'ailleurs. Par contre, la logique développée depuis la fin du XIXe siècle se propose d'étudier la logique des mathématiques, c'est-à-dire qu'elle propose une approche mathématique, une modélisation, du métamathématique, c'est-à-dire de ce que nous faisons quand nous faisons des mathématiques. En cela, elle est une référence pour la logique dont use le mathématicien. Nous allons voir dans le chapitre suivant comment elle est également une référence pour des questions sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Chapitre 2

Étude didactique

Sommaire

Je cherche dans cette première partie de thèse à dégager des caractéristiques d'une référence pour l'enseignement de notions de logique. Dans le premier chapitre, j'ai cherché des caractéristiques épistémologiques. Mais puisque cette référence est à destination de l'enseignement, je présente dans ce deuxième chapitre une approche didactique complémentaire de l'approche épistémologique.

Les premiers travaux didactiques mentionnés défendent la thèse selon laquelle la logique de référence pour l'analyse didactique est la logique des prédicats et pas seulement la logique propositionnelle. Cette position est soutenue par l'étude épistémologique, puisque nous avons vu qu'il a fallu attendre la logique de Frege, qui est à l'origine de la logique des prédicats actuelle, pour avoir un système logique adéquat pour décrire le langage et le raisonnement mathématiques. Du côté didactique, cette position est défendue depuis longtemps, comme en témoigne le titre d'un article de J. Adda [1] publié en 1975 dans la revue Nico du Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique : *L'importance des quantifications dans la compréhension des mathématiques* (Adda, 1975). Elle est plus récemment reprise notamment par V. Durand-Guerrier depuis sa thèse *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Je présenterai la tâche du labyrinthe issue de ses travaux, qui illustre la grande importance des questions de quantification dans l'analyse des raisonnements des élèves.

J'ai ensuite choisi de sélectionner des travaux qui s'intéressent au langage dans la classe de mathématiques. L'étude épistémologique a montré que l'élaboration d'un système logique commençait par une étude du langage, voire la constitution d'un langage. Il me paraît alors important de regarder comment la logique mathématique peut contribuer à l'étude du langage dans la classe de mathématiques. C. Laborde décrit une dualité du discours mathématique dans sa thèse *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Ces deux codes interviennent à des degrés divers dans différentes formulations équivalentes d'une proposition. Le mathématicien passe ainsi beaucoup de temps à reformuler ses propos, en choisissant un degré de formalisation adapté au contexte dans lequel il parle. Pour décrire cette activité de reformulation, je me suis servie des registres de représentation sémiotique de R. Duval. Pour lui, la capacité à coordonner différents registres de représentation sémiotique est nécessaire pour une bonne pratique des mathématiques. Le parallèle entre différentes formulations et différents registres de représentation sémiotique me permet d'élargir cette idée à la capacité à reformuler une proposition. J'évoquerai enfin un article de A. Selden et J. Selden, *Unpacking the logic of mathematical statements*, qui met en lien la capacité à reformuler une proposition en mettant au jour sa structure logique et la capacité à vérifier la validité d'une preuve.

1. Josette Adda, alors maître assistante à l'Université Paris 7, est notamment l'auteure d'une thèse *Travaux sur les difficultés inhérentes aux mathématiques et sur les phénomènes d'incompréhension, causes et manifestations*, dirigée par D. Lacombe.

2.1 Pertinence de la logique des prédicats pour l'étude didactique

Dans les thèses de V. Durand-Guerrier sur l'implication, de F. Chellougui sur les quantificateurs [2] et d'I. Ben Kilani sur la négation [3], une enquête épistémologique sur la notion logique étudiée met au jour la complexité de cette notion. Ces enquêtes, centrées sur une notion, complètent l'étude épistémologique présentée dans le chapitre précédent dans laquelle j'ai choisi un point de vue plus global. Elles montrent pour chaque notion la diversité des points de vue à travers l'histoire, les difficultés auxquelles se sont heurtées les différentes approches. Les choix récents de la logique mathématique, que les auteurs exposent finalement, prennent ainsi du relief. Ils utilisent ensuite la logique des prédicats comme théorie de référence pour l'analyse de certains phénomènes didactiques.

Par exemple, I. Ben Kilani met en relation une erreur fréquente des élèves, donner comme négation d'une phrase commençant pas « tous » une phrase commençant par « aucun », avec la distinction entre *contraire* et *négation*. Il rappelle que la logique d'Aristote distinguait déjà deux types de relations d'opposition entre les propositions : la relation de contradiction (qui correspond à la notion de négation) et la relation de contrariété (qui correspond à l'idée de contraire) (voir page 34). I. Ben Kilani souligne que le langage développé par Frege « est un système ostensif qui, bien que compliqué, permet de distinguer sans équivoque, entre autres, entre la négation logique et la négation radicale (opposition par contrariété chez Aristote), en donnant littéralement *à voir* cette distinction, alors qu'elle n'est pas manifeste dans certaines langues naturelles » (Ben Kilani, 2005, p. 77). Effectivement, dans le langage des prédicats actuel, qui reprend la structure de celui proposé par Frege, on a la formalisation suivante :

1. *Tous les x sont P* correspond à la proposition $\forall x\ P[x]$;
2. *Aucun x n'est P* correspond à la proposition $\forall x$ NON $P[x]$;
3. *Quelques x ne sont pas P* correspond à la proposition $\exists x$ NON $P[x]$;

Cette formalisation donne bien à voir ce qui caractérise la relation de contrariété (entre 1 et 2) : le remplacement du prédicat $P[x]$ par sa négation, le prédicat NON $P[x]$, alors que dans la relation de contradiction (entre 1 et 3), il y a de plus le remplacement du quantificateur universel par le quantificateur existentiel.

De son côté, F. Chellougui cite notamment une étude de E. Dubinsky et O. Yiparaki, *On student understanding of AE and EA quantification* (Dubinsky & Yiparaki, 2000), dans laquelle ils ont demandé à des étudiants d'université scientifique de se pro-

2. *L'utilisation des quantificateurs universels et existentiels en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite.*
3. *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique.*

noncer sur la vérité ou non de onze énoncés, en justifiant brièvement leurs réponses [4]. Ces énoncés sont catégorisés par les auteurs en énoncés EA (pour les énoncés de la forme « il existe… pour tout… ») ou AE (pour les énoncés de la forme « pour tout… il existe… »). Ils constatent qu'un nombre important d'étudiants favorisent une interprétation AE. Notons que dans l'étude d'I. Ben Kilani, la formalisation des propositions à la manière d'Aristote [5] suffisait à montrer la différence entre négation et contraire. Dans l'étude de E. Dubinsky et O. Yiparaki au contraire, seule la formalisation dans le langage des prédicats permet de montrer ce phénomène d'inversion des quantificateurs entre les deux interprétations.

L'implication est sans doute le connecteur le plus visiblement au cœur de l'activité mathématique. Il est présent dans la formulation en *si…, alors…* de nombreux théorèmes et associé à un pas très courant dans le raisonnement déductif « si A alors B, or A, donc B ». C'est de ce fait la notion de logique la plus étudiée en didactique. Je signale ici quelques études françaises : les thèses de L. Radford [6], de V. Durand-Guerrier, de V. Deloustal-Jorrand [7], un article de J. Rogalski et M. Rogalski [8]. J'exposerai ultérieurement les résultats de ces travaux, et me contente ici de signaler que pour tous ces auteurs la distinction entre l'implication $A \Rightarrow B$ entre propositions et l'implication universellement quantifiée « $\forall x\ (A[x] \Rightarrow B[x])$ » est importante. Là encore, c'est la formalisation dans le moderne langage des prédicats qui permet de faire cette distinction (nous avons vu que les Stoïciens, qui n'avaient pas les outils pour la faire, n'arrivaient pas à se mettre d'accord sur une définition des propositions conditionnelles, voir page 40). Cette distinction permet d'éclairer certains raisonnements d'élèves comme nous allons le voir maintenant avec l'analyse de la tâche du labyrinthe.

La tâche ci-dessous apparaît dans une évaluation proposée par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public à des enseignants volontaires en fin de Seconde. Elle est analysée par V. Durand-Guerrier dans sa thèse, ainsi que dans l'article *L'élève, le professeur et le labyrinthe* publié dans la revue *Petit'x* (Durand-Guerrier, 1999).

4. 9 de ces 11 énoncés sont des énoncés « de la vie courante » (par exemple (1) : everyone hates somebody, (4) : there is a mother for all children), et les deux derniers sont mathématiques ((10) : for every positive number a there exists a positive number b such that $b < a$, (11) : There exists a positive number b such that for every positive number a, $b < a$).

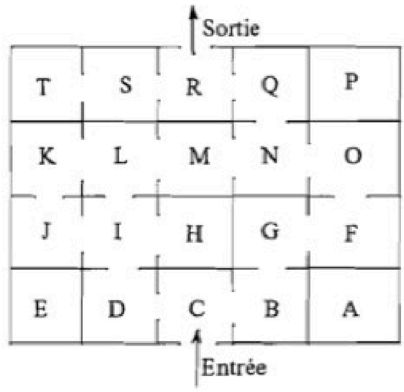
5. En quatre catégories : universelles affirmatives, universelles négatives, existentielles affirmatives, existentielles négatives,

6. *Interprétations d'énoncés implicatifs et traitements logiques, contributions à la faisabilité d'un enseignement de la logique au lycée.*

7. *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique.*

8. *Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques.*

Exercice 1
Voici un labyrinthe
Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.
Une personne que nous appellerons X, a traversé ce labyrinthe, de l'entrée la sortie, *sans jamais être passée* deux fois par la même porte.
Les pièces sont nommées A, B, C... comme il est indiqué sur la figure.



Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elles sont vraies ou fausses (ON NE PEUT PAS SAVOIR).

Par exemple, la phrase « X est passée par C » est une phrase VRAIE.
En effet, on affirme que X a traversé le labyrinthe, et C est la seule pièce d'entrée.

Pour chacune des six phrases suivantes, dire si elle est VRAIE, si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.

Phrase n°1 : « X est passé par P »
Phrase n°2 : « X est passé par N »
Phrase n°3 : « X est passé par M »
Phrase n°4 : « Si X est passé par O, alors X est passé par F »
Phrase n°5 : « Si X est passé par K, alors X est passé par L »
Phrase n°6 : « Si X est passé par L, alors X est passé par K »

FIGURE 2.1 – Activité *Le labyrinthe*

Les réponses considérées comme exactes par les auteurs sont :

Phrase n° 1 : FAUSSE, Phrase n° 2 : VRAIE, Phrase n° 3 : ON NE PEUT PAS SAVOIR, Phrase n° 4 : VRAIE, Phrase n° 5 : VRAIE, Phrase n° 6 : FAUSSE.

Ceux-ci s'étonnent que la réponse majoritaire chez les élèves pour la question n° 6 soit ON NE PEUT PAS SAVOIR. V. Durand-Guerrier propose une formalisation logique de la situation dans laquelle cette réponse est cohérente. Celle que je propose ci-dessous (de façon simplifiée) en est largement inspirée.

V. Durand-Guerrier utilise une variable de type « trajet ». Considérons les trois trajets CBGFONQR (T_1), CDILMNQR (T_2), CDIJKLMNQR (T_3) qui permettent de traverser le labyrinthe sans passer deux fois par la même pièce, une variable t qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\{T_1, T_2, T_3\}$, et vingt prédicats $A[t]$, $B[t]$,..., $T[t]$ signifiant par exemple « la pièce A est sur le trajet t » [9].

9. Dans son habilitation à diriger des recherches, V. Durand-Guerrier propose une formalisation dans laquelle elle ne se limite pas à ces seuls trois trajets, car « l'expérience montre que faire la liste des trajets possibles n'est pas le seul mode de raisonnement utilisé, de nombreuses personnes se plaçant dans un cadre plus général » (Durand-Guerrier, 2005, p. 87).

Dans l'exercice, on suppose qu'une personne X a traversé le labyrinthe en empruntant un trajet t, et l'on s'interroge sur la valeur de vérité des phrases portant sur ce trajet. Les phrases sont alors des propositions ouvertes dans lesquelles la variable t est libre [10] : ce sont des phrases qui parlent d'un trajet t sur lequel la seule chose que nous savons est que c'est un élément de l'ensemble $\{T_1, T_2, T_3\}$. Nous pouvons dire que les phrases n° 2, n° 4 et n° 5 sont vraies car elles sont de toute façon vraies pour T_1, pour T_2 et pour T_3, c'est-à-dire que les propositions closes $\forall t\ N[t]$, $\forall t\ (O[t] \Rightarrow F[t])$ et $\forall t\ (K[t] \Rightarrow L[t])$ sont vraies. De la même façon, nous pouvons dire que la phrase n° 1 est fausse puisqu'elle l'est à la fois pour T_1, pour T_2 et pour T_3. Par contre, la phrase n° 3 est fausse pour T_1 et vraie pour T_2 et pour T_3, la phrase n° 6 est vraie pour T_1 (car $L[T_1]$, qui est la prémisse de l'implication, est fausse), fausse pour T_2 (car $L[T_2]$ est vraie et $K[T_2]$ est fausse) et vraie pour T_3 (car $L[T_3]$ et $K[T_3]$ sont vraies). Sans plus d'informations sur la variable t, il n'est pas possible de conclure sur la vérité de ces deux phrases. Cette modélisation, pour laquelle nous avons eu recours au langage des prédicats, montre un raisonnement cohérent du point de vue de la logique mathématique qui amène à répondre ON NE PEUT PAS SAVOIR pour les phrases n° 3 et n° 6.

Dans les réponses attendues par les auteurs, ils basculent de cette interprétation pour la phrase n° 3 (lue comme une proposition ouverte) à une deuxième interprétation pour la phrase n° 6 qu'ils lisent – conformément à la pratique des mathématiciens pour les propositions en *si..., alors...* – comme étant universellement quantifiée. Cette expérimentation montre que cette pratique n'est pas forcément partagée par les élèves (et peut-être d'autant moins que le contexte de la situation n'est pas mathématique), ce qui peut amener de tels malentendus.

Je vais maintenant présenter d'autres travaux didactiques qui posent la question des éventuelles spécificités du langage des mathématiciens, et de son impact sur l'activité mathématique des élèves. J'oriente ainsi mon choix dans les nombreux travaux de didactiques sur le langage dans la classe de mathématiques (c'est un champ de recherche dynamique, tant au niveau national – c'était l'un des deux thèmes de la 16e école d'été de didactique des mathématiques, qui a eu lieu en 2011 – qu'international).

2.2 Le langage dans la classe de mathématiques

2.2.1 Logique et langage

Dans *Logique et linguistique*, O. Ducrot explique que la logique intervient vis-à-vis du langage là où on peut identifier des d'énoncés dont la seule forme ouvre la possibilité

10. Les notions de *proposition ouverte, proposition close, variable libre, variable liée* sont présentées dans la partie suivante, voir page 114 et page 113.

d'une inférence :

> Il existe, entre certains énoncés du langage ordinaire, des relations d'inférence telles que, si l'on admet les uns, on est forcé d'admettre les autres. Ainsi on ne peut tenir pour vrai « Quelques hommes sont méchants », sans admettre aussi « Quelques êtres méchants sont hommes », ou encore affirmer « Le baromètre a baissé », sans accepter la conclusion « Il y a de bonnes chances qu'il pleuve ». Parmi ces relations, d'autre part, il en est un bon nombre - celles qui intéressent le logicien - qui sont parfaitement indépendantes du monde extérieur. Ainsi la première que nous avons citée s'impose, que les concepts d'« homme » et de « méchanceté » correspondent ou non à des données effectives, qu'il y ait en fait des hommes méchants ou non : aucun bouleversement de la réalité empirique ne saurait donc lui retirer sa validité. Nous parlerons, dans ce cas, de relations d'inférence logique, ou, par abréviation, de relations d'inférence. (Ducrot, 1966, p. 3)

Il fait cependant remarquer qu'un grand nombre d'inférences ne sont pas en corrélation avec des phénomènes linguistiques repérables indépendamment d'elles [11]. D'où la nécessité de « restreindre » le langage dont s'occupe la logique.

Dans l'étude épistémologique, nous avons vu comment une formalisation du langage était à la base de la constitution de différents systèmes logiques. Dans la logique de Port-Royal, dans la lignée de la logique d'Aristote, les éléments de la langue naturelle sont catégorisés, puis la logique du système est décrite à partir de ces catégories (comment sont formées des propositions composées à partir de propositions simples, comment sont niées les propositions de telle catégorie, quels raisonnements formés à partir de telles catégories de propositions sont valides...). Savoir si les constructions grammaticales des langues naturelles peuvent être totalement décrites est une question débattue au sein de la linguistique, qui est hors de mon propos ici.

La position de Frege est qu'en tout cas, la langue naturelle a trop d'imperfections pour les mathématiques, celles-ci nécessitant un langage qui permet d'assurer l'infaillibilité du raisonnement (voir citation page 65). Avec ses travaux, et les développements de la logique mathématique au début du XX^e^ siècle, les mathématiciens disposent désormais d'outils qui leur donnent la possibilité de formaliser complètement l'expression des propositions et des démonstrations. Cette possibilité n'est pratiquement jamais utilisée : dire ainsi les mathématiques serait beaucoup trop long et difficilement compréhensible. Il est impossible en pratique de se passer de la langue naturelle et du langage courant [12] pour s'exprimer

11. Il donne l'exemple des énoncés « Pierre est frère de Paul », dont on peut conclure que « Paul est frère de Pierre », inférence que l'on peut également faire à partir de l'énoncé « Pierre est différent de Paul », mais pas à partir de l'énoncé « Pierre est inconnu de Paul ».

12. La langue est un système de signes, le langage est le produit d'une activité, je reviendrai sur cette distinction page 109.

en mathématiques [13], mais on y utilise également diverses formulations plus ou moins formalisées.

En effet, les mathématiciens s'expriment, selon les moments de leur activité, et selon leurs éventuels auditeurs, avec différents degrés de formalisation. Ainsi, les énoncés suivants pourront être utilisés à différents moments par une même personne :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

(présent par exemple dans l'énoncé d'un exercice)

u_n peut être aussi proche de 0 qu'on veut pourvu que l'on prenne n assez grand

(dit par exemple oralement pour reformuler ce que l'on veut montrer)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0, |u_n| < \varepsilon$$

(écrit par exemple au début de la résolution de l'exercice en rappel de définition)

Le dernier énoncé est exprimé dans un formalisme directement inspiré de la logique mathématique, tant pour sa « mise en forme » (quantifications explicites en tête d'énoncé) que par les symboles logiques utilisés. La possibilité de recourir à ce formalisme est un atout essentiel pour le mathématicien, et est souvent utilisée pour préciser, contrôler, vérifier un raisonnement.

2.2.2 Le langage des mathématiciens dans la classe de mathématiques

Dans une perspective didactique, on est amené à se demander dans quelle mesure l'usage de ces différentes expressions participe à la conceptualisation [14] des notions mathématiques. Le langage en général est essentiel dans l'activité mathématique dans la mesure où il est en relation avec la pensée dans un processus dynamique qui en fait un élément de la conceptualisation. Selon Vygotski, langage (naturel) et pensée ne peuvent être mis en concordance :

> La structure du langage n'est pas le simple reflet, comme dans un miroir, de celle de la pensée. Aussi le langage ne peut-il revêtir la pensée comme une robe de confection. Il ne sert pas d'expression à une pensée toute prête.

13. Mais la possibilité de pouvoir le faire est importante. Par exemple, la possibilité de pouvoir faire vérifier une démonstration par un ordinateur, comme cela a été récemment fait pour le théorème de Feit-Thomson, est considérée comme une grande avancée pour les mathématiques.

14. « Conceptualisation » est employé ici au sens de G. Vergnaud, comme processus d'élaboration d'un concept, celui-ci étant déterminé par un triplet : « l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence), l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes [organisations invariantes de la conduite] (le signifié), l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant) », (Vergnaud, 1990), p. 145

> En se transformant en langage, la pensée se réorganise et se modifie. Elle ne s'exprime pas mais se réalise dans le mot. (Vygotski, 1997, p. 431)

G. Vergnaud précise comment s'effectue cette réorganisation :

> Le langage a cette vertu exceptionnelle, par rapport à la perception et à l'action, de permettre de faire référence à des objets absents ou imaginaires, de faciliter l'analyse des situations et des configurations en termes de prédicats et d'objets, de permettre la distinction entre énoncés universels et énoncés particuliers. (Vergnaud, 2001, p. 12),

Ces citations me semblent appuyer l'hypothèse que fait C. Hache, dans *Langage mathématique à la transition primaire/collège*, d'une dialectique fructueuse entre formalisme mathématique et langue naturelle dans le langage des mathématiciens, qui en serait une caractéristique importante :

> On peut penser que le mathématicien parle, pense en langue naturelle. Qu'il a l'intuition qu'il saurait parfaitement formaliser tout ce qu'il dit (quitte à devoir y passer du temps, à y travailler), son langage donne d'ailleurs des gages de cette capacité : il est en partie formalisé (plus la notion exprimée est « sensible », au cœur de son propos, plus il formalise). Pour pouvoir être compris, pour pouvoir penser, il ne peut cependant formaliser tout ce qu'il dit.
>
> On aurait une dialectique entre intuition, pensées et capacité de formaliser l'intuition. La dialectique serait fructueuse, productive, féconde (l'intuition nourrissant le contenu formel, et la formalisation permettant de contrôler l'intuition et d'asseoir la réflexion à venir). (Hache, 2013, p. 459)

C. Hache souligne ici une dualité du langage des mathématiciens, entre formalisme et langue naturelle, que je vais maintenant préciser en m'appuyant sur la thèse de C. Laborde.

2.2.3 Dualité du langage des mathématiciens : deux codes en interaction

Dans sa thèse *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.*, C. Laborde s'intéresse « aux problèmes langagiers dans l'enseignement mathématique non pour eux-mêmes mais pour l'incidence qu'ils ont dans l'acquisition des connaissances mathématiques dans le cadre d'un apprentissage scolaire » (Laborde, 1982, p. 406). Elle étudie l'activité de formulation en mathématique à l'intérieur d'un cadre théorique issu du domaine de la psycho-linguistique, auquel elle « rajoute une hypothèse concernant le modèle langagier en vigueur : les énoncés produits en mathématiques ne sont pas la simple juxtaposition de formulations en langue naturelle et d'expressions symboliques mais le résultat d'une véritable interaction entre ces deux

codes[15]. » (*ibid*, p. 407) Elle distingue alors quatre catégories d'énoncés dans les textes mathématiques selon le ou les codes utilisé(s) :
– des expressions symboliques ;
– des formulations relevant de la langue courante ;
– des formulations relevant d'une langue (notée $\mathbb{LM}$ pour Langue Mathématique) distincte de la langue courante par la présence dans ses énoncés d'éléments d'écriture symbolique, de termes lexicaux ayant un sens spécifique en mathématiques ou de tournures syntaxiques privilégiées[16]. Un énoncé relève de $\mathbb{LM}$ s'il possède au moins l'une des trois propriétés citées.[...]
– des transcriptions écrites du prononcé oral des écritures symboliques isolées, c'est-à-dire non insérées dans une phrase de $\mathbb{LM}$. (Laborde, 1982, pp. 19-20)

C. Laborde cherche à préciser en quoi consiste cette interaction dans le discours mathématique. Elle met en évidence « des modifications au niveau de la syntaxe ou des systèmes de renvoi, produites par la mise en contact des deux codes » (*ibid*, p. 407). Cette grille d'analyse me semble particulièrement intéressante pour étudier les pratiques langagières qui concernent l'utilisation des variables. La proposition « n est pair », dans laquelle la variable n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, relève, ainsi formulée, de $\mathbb{LM}$. Elle mélange un élément symbolique, n, le verbe « être » pris dans son sens de la langue naturelle, et l'adjectif « pair » pris dans un sens spécifique aux mathématiques. Sa structure grammaticale est congruente à une structure du langage courant, mais la lettre n y est utilisée comme syntagme nominal (c'est le nom d'un objet dont la seule chose que nous savons est qu'il appartient à $\mathbb{N}$), ce qui n'arrive que très rarement dans le langage courant. Insérons maintenant cette proposition dans une proposition plus complexe : « quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si n est divisible par 4 alors n est pair ». Notons que « $n \in \mathbb{N}$ », qui suit la locution prépositionnelle « quel que soit », ne doit pas être lu ici comme la proposition « n appartient à $\mathbb{N}$, mais doit être lu avec le participe présent « n appartenant à $\mathbb{N}$. Il y a donc une déformation d'un élément de l'écriture symbolique due à son insertion dans un ensemble plus complexe. Par ailleurs, le renvoi à l'élément n dans la deuxième partie de la phrase (après « quel que soit $n \in \mathbb{N}$ ») se fait par la reprise de l'élément lui-même, et nous pouvons parler d'une *tournure syntaxique privilégiée* sur laquelle nous reviendrons (nous ne dirions pas « quel que soit ton choix, je respecterai ton choix »).

15. « Code » est entendu en tant que « système structuré de signes permettant à un émetteur de transmettre un message à un récepteur. Un code est caractérisé par un répertoire de signes et par des règles d'agencement entre signes ».

16. Elle donne comme exemple de *tournures syntaxiques privilégiées* la construction *une et une seule*, utilisée dans « La relation est telle que de chaque point représentant un élément de E part une flèche et une seule [...] », qui est « non utilisée couramment [et] qui peut être considéré d'un point de vue transformationnel comme le résultat de transformation de coordination et d'effacement à partir des deux phrases "une flèche part" et "une seule flèche part" » (*ibid*, p. 20). L'appellation *tournure syntaxique privilégiée*, renvoie ainsi à un critère de fréquence d'utilisation dans le langage courant, et non à un critère de correction grammaticale (la phrase « à l'issue des élections il y aura une et une seule présidente » est tout à fait correcte).

C. Laborde conduit une étude de manuels qui montre que « la possibilité de jouer sur les deux codes est utilisée de fait à des fins d'enseignement pour introduire de nouveaux termes mathématiques (en langue naturelle). L'écriture symbolique sert de relais, comme le dessin le fait dans des procédés de monstration. » (*ibid*, p. 407). Et en proposant une activité de formulation à des élèves au début du collège, elle montre que ceux-ci n'utilisent pas spontanément le code symbolique, et qu'il est nécessaire de réfléchir à des situations permettant l'évolution des formulations des élèves et l'usage de l'écriture symbolique. Elle insiste sur deux critères que doivent respecter de telles situations : s'inscrire dans la durée, et contenir des interactions entre élèves, pour éviter le biais de l'enseignant qui comprend au delà de ce qui est effectivement dit par l'élève.

Les résultats de la thèse de C. Laborde illustrent la nécessité d'un travail sur l'expression dans l'enseignement des mathématiques. Formulé ainsi, cela pourrait passer pour une lapalissade : bien sûr les enseignants de mathématiques sont attentifs à la façon dont s'expriment leurs élèves, et passent un temps non négligeable à reprendre certaines de leurs formulations ! Mais C. Laborde montre très bien qu'il y a un usage particulier de la langue en mathématiques, dû à l'interaction des deux codes de l'écriture symbolique et de la langue naturelle, et je fais l'hypothèse que les enseignants n'ont pas forcément conscience de cette particularité (le fait que les concepteurs de la tâche du labyrinthe ne sachent pas expliquer les réponses « je ne sais pas » pour la phrase n° 6 – voir page 82 – montre par exemple qu'ils n'ont pas conscience de la pratique de quantification universelle implicite des implications).

Nous nous sommes pour l'instant intéressés à l'interaction de deux codes à l'intérieur d'un seul énoncé mathématique. L'utilisation conjointe de ces deux codes est une dimension importante des pratiques langagières des mathématiciens. Une autre dimension importante est l'interaction entre plusieurs formulations dans la compréhension des concepts mathématiques. Le mathématicien passe facilement de l'une à l'autre des trois propositions suivantes déjà données en exemple page 85 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

u_n peut être aussi proche de 0 qu'on veut pourvu que l'on prenne n assez grand

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_0,\ |u_n| < \varepsilon$$

Il sait, en présence de l'une d'entre elles, la reformuler si une autre est plus adaptée. On peut considérer que pour passer de la première proposition à la troisième il suffit de connaître la définition donnée dans le cours. Mais pour comprendre le lien entre ces deux propositions, pour rendre opératoire la définition, n'y a t-il pas besoin aussi de savoir les reformuler dans les termes de la deuxième proposition ? Reformuler en mathématiques ne consiste pas seulement à donner une définition, et je vais maintenant préciser cette notion de reformulation en m'appuyant sur les registres de représentations sémiotiques de R. Duval.

2.2.4 Coordination de registres de représentation sémiotique et reformulation

Les registres de représentation sémiotique de R. Duval

« Des représentations sémiotiques sont des productions constituées de signes appartenant à un système de représentation qui a ses propres contraintes de signifiance et de fonctionnement » (Duval, 1993, p. 39). Un même objet mathématique peut avoir plusieurs représentations sémiotiques, par exemple l'objet « droite » peut être représenté graphiquement par un trait, ou algébriquement par une équation. Certains de ces systèmes de signes sont appelés par R. Duval des *registres de représentation sémiotique*. Pour qu'un système sémiotique puisse être un registre de représentation sémiotique, il doit permettre trois activités cognitives liées à la production des représentations sémiotiques (voir Duval, 1993, pp. 41-42) :

- la formation d'une représentation identifiable comme appartenant au registre,
- le traitement d'une représentation, c'est-à-dire la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée,
- la conversion d'une représentation, c'est-à-dire la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre, en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale.

Duval plaide pour une plus importante prise en compte de la coordination de différents registres sémiotiques dans l'apprentissage des mathématiques :

> Si la conceptualisation implique une coordination de registres de représentation, le principal enjeu des apprentissages de base en mathématique ne peut pas seulement être l'automatisation de certains traitements ou la compréhension de notions mais il doit être la coordination des différents registres de représentation nécessairement mobilisés pour ces traitements ou pour cette compréhension. [...]
>
> En fait, l'enseignement des mathématiques est généralement organisé comme si la coordination des différents registres de représentation introduits ou utilisés s'effectuait rapidement et spontanément, comme si les problèmes et les coûts liés à la non-congruence n'existaient pas. Car ce qui, en définitive, semble important ce n'est pas le changement de registre à effectuer, mais les traitements qui pourront être effectués sur la représentation obtenue après changement de registre ! La coordination des registres de représentation ne semble donc pas devoir s'imposer comme l'un des objectifs principaux de l'enseignement, de 6^e^ jusqu'en Seconde. Il suffit de regarder comment sont introduits de nouveaux registres : représentations graphiques, figures géométriques, écriture symbolique du calcul des prédicats (quantificateurs) pour constater l'absence d'un tel objectif. On s'en tient à quelques correspondances locales, le plus souvent

> pour des cas de congruence, et à des règles d'emploi ou de conformité. (Duval, 1993, p. 54)

Ainsi, la capacité à représenter un objet dans divers registres, et à convertir une représentation d'un registre en la représentation correspondante dans un autre registre sont pour R. Duval des conditions nécessaires à la compréhension.

Registres de représentation sémiotique pour les propositions

Peut-on distinguer différents registres de représentation sémiotique pour les propositions mathématiques ? Dans l'article déjà cité, Duval évoque à plusieurs reprises le *registre de la langue naturelle*, et une fois le *registre de l'écriture symbolique du calcul des prédicats.* Duval fait ici la même distinction que C. Laborde entre langue naturelle et écriture symbolique.

Ce point de vue tend à assimiler formalisation et symbolisation. La formalisation est simplement une mise en forme codifiée. La symbolisation oblige bien sûr à la formalisation, puisqu'il faut respecter les règles d'utilisation des signes, mais on peut formaliser sans symboliser. Par exemple, on peut s'astreindre à expliciter les quantificateurs et à les placer en tête de la proposition, comme dans la proposition « quel que soit l'entier naturel n, si n est divisible par 4 alors n est pair », qui est déjà une formalisation de la proposition « tout entier naturel divisible par 4 est pair ». Une distinction fondamentale entre ces deux propositions est l'utilisation d'une variable dans la première, qui est une symbolisation, mais pour ne pas avoir à discuter du niveau de symbolisation nécessaire pour qu'une proposition appartienne au *registre de l'écriture symbolique du calcul des prédicats*, je préfère introduire le *registre de l'écriture formalisée du langage des prédicats*, caractérisé surtout par des règles régissant l'utilisation d'éléments spécifiques (connecteurs logiques du calcul propositionnel et quantificateurs « pour tout », « il existe »), et non par le fait que ces éléments soient notés sous forme symbolique ou non. Deux contraintes de mise en forme permettent de dire si une proposition appartient ou non à ce registre :
– l'expression des quantifications à l'aide des quantificateurs « pour tout », « il existe » (ou une autre expression équivalente, voir les précisions sur le terme « quantificateur » page 140), c'est-à-dire qu'elles ne sont pas présentes de manière implicite, ou exprimées par d'autres termes que ces quantificateurs ;
– l'expression explicite des connecteurs.

Nous allons voir à travers quelques exemples que les mathématiciens ne s'expriment pas soit dans le registre de la langue naturelle, soit dans le registre de l'écriture formalisée du langage des prédicats, que je nommerai dans la suite plus simplement *registre formalisé*, soit dans celui de l'écriture symbolique du calcul des prédicats, que je nommerai dans la suite plus simplement *registre symbolique*, mais se trouvent souvent dans un registre que je me contenterai d'appeler *registre intermédiaire*. Par exemple :

- Les entiers divisibles par 4 sont pairs : *registre de la langue naturelle*
- Tout entier multiple de 4 est pair : *registre de la langue naturelle*
- Si 4 divise n, alors n est pair : *registre intermédiaire, la quantification universelle sur n est implicite*
- Quel que soit l'entier naturel n, si 4 divise n, alors n est pair : *registre formalisé*[17]
- Quel que soit l'entier naturel n, si n est un multiple de 4, alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$: *registre intermédiaire, la quantification existentielle sur k est exprimée par « avec »*
- Quel que soit l'entier naturel n, si n est un multiple de 4, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$: *registre formalisé*
- $\forall n \in \mathbb{N}\ \big((\exists k \in \mathbb{N}\ n = 4k) \Rightarrow (\exists k' \in \mathbb{N}\ n = 2k')\big)$: *registre symbolique*

Envisager ainsi en termes de conversion entre des registres cette pratique de reformulation dont les mathématiciens usent largement permet de s'appuyer sur les résultats de R. Duval pour défendre les deux idées suivantes :

- l'utilisation de différentes formulations est nécessaire à la compréhension des propositions mathématiques,
- ces reformulations peuvent créer des difficultés pour les élèves, dues notamment à des problèmes de non-congruence. Par exemple, la proposition « la suite u est croissante à partir d'un certain rang » peut se reformuler « il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geqslant N$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. La quantification « il existe un entier naturel N » qui correspond à « à partir d'un certain rang » est à placer en tête de proposition, et non à la fin.

2.2.5 Formalisation des propositions et démonstrations

Nous retrouvons cette nécessité de disposer de différentes formulations dans l'article *Unpacking the logic of mathematical statements* de A. Selden et J. Selden, où les auteurs suggèrent que les différentes formulations d'un théorème participent de la compréhension que peut en avoir un étudiant et définissent la notion de *statement image* :

> Most mathematics, whatever its origins, is eventually recorded and communicated using statements, including definitions, theorems, and conjectures.[...] Theorems, in particular, are often remembered because they state how mathematical concepts are related. To statements of lasting significance, a person may attach rich mental structures, which we call *statement images*. These are meant to include all of the alternative statements, examples, nonexamples, visualizations, properties, concepts, consequences, etc., that are associated with a statement. Such associations can arise from noticing relationships, such as seeing an example which illustrate a theorem ; from repetition, such as using

17. Les propositions « n est pair » et « il existe un entier k tel que $n = 2k$ » relèvent toutes deux du registre formalisé. Ce qui les distingue est juste un choix différent dans les mots et signes utilisés.

> a theorem many times on one type of problem ; or from affect, such as discovering a proof technique after many attempts. [18] (Selden & Selden, 1995, p. 133)

Parmi les différentes formulations d'une proposition, ils distinguent les énoncés formels et les énoncés informels, les énoncés formels étant ceux construits à partir d'une utilisation, en mots ou en symboles, des connecteurs et des quantificateurs du langage des prédicats. Par exemple, une proposition telle que « une fonction dérivable est continue » est un énoncé informel équivalent à la proposition « pour toute fonction f, si f est dérivable, alors f est continue ». L'utilisation des registres de représentation sémiotique est un moyen plus précis pour distinguer différentes formulations plutôt que la seule opposition informel/formel que A. Selden et J. Selden ne définissent pas vraiment. Ils apportent cependant un élément supplémentaire pour l'analyse des propositions avec ce qu'ils appellent *unpacking (the logical structure of) an informal statement*, que l'on pourrait traduire par *mettre au jour la structure logique d'un énoncé informel*. Par exemple, les propositions « n est pair » et « il existe un entier k tel que $n = 2k$ » sont toutes les deux exprimées dans le registre formalisé, mais la structure logique n'est mise au jour que dans la deuxième. Cette structure logique est importante pour l'insertion d'une proposition dans une démonstration, qu'il s'agisse de l'utiliser ou de la démontrer.

A. Selden et J. Selden suggèrent que les énoncés informels sont plus opératoires pour la compréhension intuitive des relations entre les concepts, alors que les énoncés formels contiennent la précision nécessaire pour la validation des démonstrations. L'hypothèse qui est au centre de l'article est que les étudiants qui ont des difficultés à mettre au jour la structure logique d'un énoncé ont également des difficultés à valider une démonstration de cet énoncé. Nous retrouvons là ce qui motive le travail de formalisation du langage dans les différents systèmes logiques que j'ai évoqués : assurer la validité des raisonnements de par leur forme, et produire des schémas de raisonnements valides dans lesquels seule la forme logique des propositions intervient. Pour A. Selden et J. Selden, les étudiants avancés dans leurs études de mathématiques doivent être capables d'associer à un théorème la structure de sa démonstration ou sa structure logique :

> Since proof validation includes the production or recognition of proof frameworks, it is reasonable to expect statement images of theorems for more

18. Une grande partie des mathématiques, d'où qu'elles viennent, est finalement mémorisée transmise sous forme d'énoncés qui peuvent être des définitions, des théorèmes, des conjectures. [. . .] En particulier, on se souvient souvent des théorèmes parce qu'ils indiquent comment des concepts mathématiques sont reliés. À des énoncés qui ont une signification prégnante, une personne va associer des structures mentales riches, que nous appelons *statement images*. Elles incluent toutes les variantes de formulation, les exemples, les contre-exemples, les représentations mentales, les propriétés, les concepts, les conséquences, etc., qui sont associés à un énoncé. De telles associations peuvent provenir du constat de certaines relations, comme quand nous voyons un exemple qui illustre un théorème ; de la répétition, comme quand nous utilisons plusieurs fois un théorème dans un type de problème ; ou de l'affect, comme quand nous découvrons une technique de démonstration après de nombreuses tentatives.

> advanced students to contain proof frameworks or the associated formal statements.[19] (Selden & Selden, 1995, p. 134)

Les auteurs notent également que la « réciproque » de leur hypothèse n'est généralement pas vraie, c'est-à-dire que les étudiants qui arrivent à mettre au jour la structure logique d'un énoncé ne sont pas toujours capables de valider sa démonstration.

2.3 Synthèse de l'étude didactique

V. Durand-Guerrier conclut son cours à la XVIe école d'été de didactique des mathématiques, intitulé *Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques* en ces termes :

> L'analyse logique du langage, parce qu'elle permet de débusquer des ambiguïtés et des implicites, contribue à questionner l'illusion de transparence du langage mathématique, et met en valeur l'importance des catégories logiques dans le processus de conceptualisation.
>
> Un autre versant des apports de l'analyse logique du langage est celui du recours aux modélisations logiques disponibles pour analyser les preuves et étudier les situations de validation qui sont au cœur de l'activité et des apprentissages mathématiques. (Durand-Guerrier, 2013, p. 262)

L'analyse de la tâche du labyrinthe (issue de Durand-Guerrier, 1996) illustre ces deux utilisations : d'une part elle montre comment la pratique de quantification universelle implicite des implications, transparente pour les enseignants, amène un malentendu avec certains élèves, d'autre part elle propose une modélisation logique du raisonnement de ces élèves qui en montre la cohérence, même s'il les amène à une réponse qui n'est pas celle attendue par les auteurs de la tâche. Pour une telle analyse, la logique des prédicats est une référence qui permet notamment de prendre en compte les phénomènes de quantification. Elle est ainsi la logique pertinente pour l'étude didactique.

Le langage des prédicats dont nous nous sommes servi est un langage formel. Le langage utilisé par les mathématiciens s'en rapproche plus ou moins. C. Laborde montre que l'on a recours en mathématiques à deux codes, celui de l'écriture symbolique et celui de la langue naturelle, qui sont en interaction. L'utilisation conjointe de ces deux codes nécessite des adaptations de l'un ou de l'autre, spécifiques de cette interaction. Ainsi, l'apprentissage par les élèves de l'utilisation du code de l'écriture symbolique ne peut pas se réduire à la connaissance de la signification et de la manipulation des symboles. Il faut aussi apprendre à utiliser ces écritures symboliques à l'intérieur de formulations où elles sont en interaction avec la langue naturelle. Les adaptations nécessaires à cette insertion font

19. Puisque la validation d'une démonstration inclut la production ou la reconnaissance de sa structure, il est raisonnable d'attendre que les *statement images* des théorèmes contiennent, pour des étudiants avancés, les schémas de preuve ou les énoncés formels qui leur sont associés.

partie des pratiques familières au mathématicien et au professeur de mathématiques, mais peuvent poser des problèmes aux élèves.

Une autre pratique familière aux mathématiciens est la reformulation d'une proposition dans une expression adaptée à ses besoins mathématiques. J'ai proposé de faire un parallèle entre cette notion de reformulation et la coordination de différents registres de représentation sémiotique, au sens de R. Duval : le registre de la langue naturelle, le registre intermédiaire, le registre de l'écriture formalisée du langage des prédicats, le registre de l'écriture symbolique du langage des prédicats. Ce parallèle permet d'insister sur la nécessité de ces différentes formulations pour la compréhension des propositions (au sens où différentes représentations sémiotiques participent à la compréhension), et sur les possibles difficultés pour passer de l'une à l'autre liées notamment à des phénomènes de non-congruence (difficulté bien identifiée de la coordination de différents registres, puisqu'il n'y a généralement pas de procédure « automatique » pour convertir une proposition d'un registre à un autre).

Certaines reformulations se font à l'intérieur d'un même registre, elles consistent à mettre plus ou moins au jour la structure logique d'une proposition. La reformulation est ainsi une sorte d'écriture à contraintes : il s'agit de ré-écrire une proposition dans un langage donné. Selon A. Selden et J. Selden, des formulations mettant au jour la structure logique d'une proposition sont importantes dans l'élaboration et la validation des preuves, puisqu'elles permettent un lien entre structure de la proposition et structure de la preuve.